

Proyecto Introductorio

German Monge-Cerdas, Devon Mora-Gal, Jorge Rodríguez-Esquivel, Adriana Rojas-Mesén
 germanmonge96@gmail.com moradevon@hotmail.com jo.roes18@gmail.com adrianarm31@gmail.com

EL-5408 Control Automático
 Escuela de Ingeniería Electrónica
 Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen—El presente informe expone los procedimientos y resultados obtenidos del primer proyecto del curso de Control Automático, en dicho proyecto se usó la herramientas de software especializado, llamado Maxima; dicho proyecto se basa en la solución de distintos requerimientos para un sistema de control de un torno paralelo convencional. Se estudió el comportamiento del sistema en lazo cerrado y lazo abierto, además de diseñar un compensador de atraso y adelanto para analizar su comportamiento de este en su estado estable. Al final se destacó que el mejor regulador fue el de atraso, además de adquirir un conocimiento básico en uso de herramientas de software especializado como lo es el programa Maxima.

Palabras clave—Compensador de Adelanto, Compensador de Atraso, Error en Estado Estable, Lazo Abierto, Lazo Cerrado, Maxima

I. INTRODUCCIÓN

La función de transferencia se utiliza para caracterizar la relación Entrada-Salida de sistemas lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales.

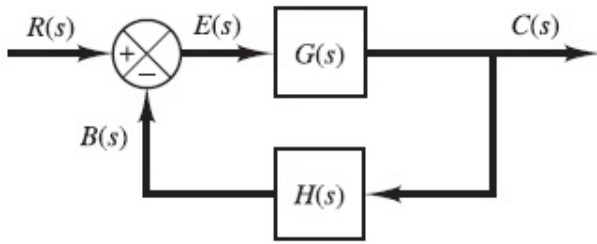


Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. [4]

Según (Ogata, 2010), refiriéndose a la figura 1, el cociente de la señal de realimentación $B(s)$ entre la señal de error $E(s)$ se denomina función de transferencia en lazo abierto. Es decir:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad (1)$$

La salida $C(s)$ y la entrada $R(s)$ se relacionan de la siguiente forma:

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (2)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (3)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (4)$$

Si se sustituye $E(s)$ con la ecuación (4) en la ecuación (2), se obtiene:

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)] \quad (5)$$

o bien:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6)$$

La ecuación 6 es la función de transferencia que relaciona $C(s)$ con $R(s)$, esta se denomina función de transferencia en lazo cerrado.

Al diseñar un sistema de control, se debe ser capaz de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. Las características más importantes del comportamiento dinámico de un sistema de control son la estabilidad absoluta y el error en estado estacionario. Los errores en un sistema de control se pueden atribuir a muchos factores. Los cambios en la entrada de referencia provocan errores inevitables durante los periodos transitorios y también pueden producir errores en estado estacionario.

Se utilizará dos compensadores, cumplen con la función de mejorar la estabilidad del sistema, dichos compensadores son:

- Regulador de atraso: el efecto principal es aumentar la atenuación de la señal, mientras aumenta el atraso de fase. Asimismo, un compensador de atraso puede hacer que disminuya el ancho de banda del sistema y/o los márgenes de ganancia, y en general puede ocasionar que un sistema sea más lento.
- Regulador de adelanto: Este compensador desciende la ganancia de baja frecuencia y eleva el ángulo de fase de la frecuencia media total. Normalmente se utiliza para mejorar el margen de fase. Es decir, puede mejorar la estabilidad relativa del sistema.

II. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Se trabajó con un sistema de control de un torno paralelo convencional, al cual se le debe encontrar la función de transferencia tanto en lazo cerrado como abierto y su error de estado estacionario respectivo. Se puede apreciar a mayor detalle su funcionamiento en el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3.

Donde:

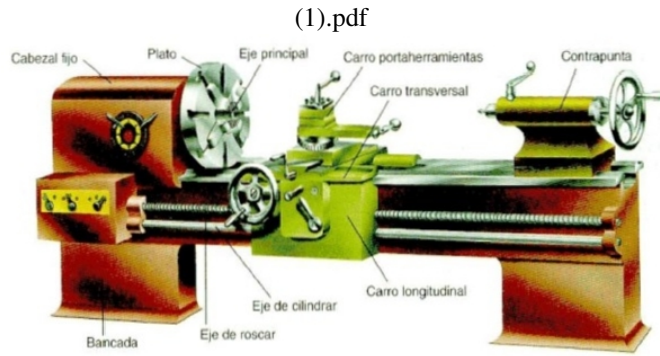


Figura 2. Torno paralelo y sus partes mecánicas móviles. [2]

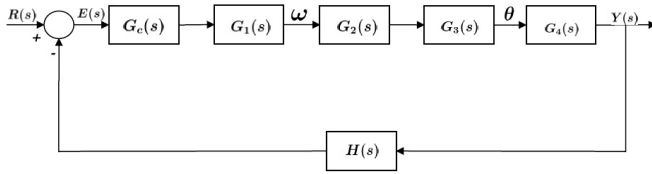


Figura 3. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado. [Fuente: enunciado del proyecto]

- $G_c(s)$ es la función del regulador.

$$G_c = K_c \quad (7)$$

- $G_1(s)$ corresponde a la función de transferencia del motor DC.

$$G_1 = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \quad (8)$$

- $G_2(s)$ es la función de transferencia del juego de engranajes que interconectan el actuador con el husillo (eje roscar). La rueda conductora acoplada al eje del motor tiene 20 dientes y la conducida 40, ésta última engranada con la cremallera del torno permite el movimiento longitudinal, pudiéndose asemejar al sistema al mostrado en la figura 4:

$$G_2 = \frac{N_1}{N_2} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad (9)$$

- $G_3(s)$ será un bloque integrador.

$$G_3 = \frac{1}{s} \quad (10)$$

- $G_4(s)$ es el modelo del carro longitudinal que se mueve sobre el husillo.

$$G_4 = \frac{1}{s^2 + 8s + 25} \quad (11)$$

- $H(s)$ es la función de realimentación del sensor de posición del carro.

$$H = \frac{1}{s + 3} \quad (12)$$

Asimismo, mediante la técnica del lugar de las raíces, se requiere diseñar el regulador $G_c(s)$ de forma adecuada para que el sistema de lazo cerrado tenga un comportamiento

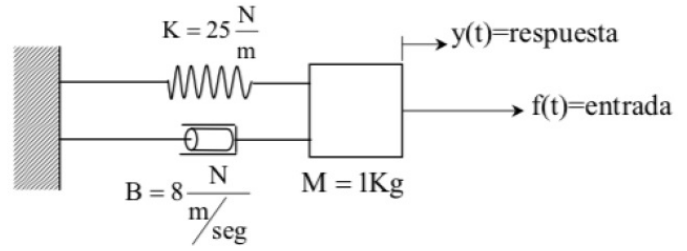


Figura 4. Diagrama de cuerpo libre de los engranajes. [Fuente: enunciado del proyecto]

similar a un sistema de segundo orden subamortiguado con un sobreimpulso menor al 5% ante una entrada escalón unitario en $R(s)$.

Además, se solicita adicionar al regulador $G_c(s)$ un compensador de atraso y luego un compensador de adelanto para que el tiempo de estabilización $t_s < 0,1s$. Para así hacer un análisis comparativo de cuál regulador es más factible utilizar.

III. SOLUCIÓN Y ANÁLISIS

Se procede a utilizar el software de ingeniería: Maxima (versión 19.05.7), el cual ofrece diversas funciones que permiten construir un programa capaz de ejecutar un análisis complejo de sistemas de control.

Primeramente, se cargan los paquetes de instrucciones y luego las funciones que conocemos para llamarlas cuando las necesitemos. Para declarar un variable en Maxima, basta con escribir el nombre de la variable, seguido de dos puntos y finalmente el valor.

```
→ block(
  load(coma),
  load(solve_rat_ineq),
  load(draw)
```

Figura 5. Paquetes de instrucciones usados en el proyecto

```
block(
  Gc: Kc,
  G: 1/(s^2+5*s+6) * 1/2 * 1/s * 1/(s^2+8*s+25),
  H: 1/(s+3),
  R: 1/s
);
```

Figura 6. Datos iniciales

III-A. Punto 1

Se comprueba que la función de transferencia sea estable con la función `stablep()` de la biblioteca "COMA".

La función de transferencia del sistema en lazo abierto de la ecuación (13), donde G_c corresponde a la ganancia, $G(s)$ el producto de las funciones de transferencia de cada componente y $H(s)$ corresponde a la retroalimentación. En Maxima este tipo de ecuaciones pueden ser fácilmente calculadas con la función `ratsimp()`, la cual además permite simplificar una expresión matemática.

$$FT_{OL} = G_c \cdot G(s) \cdot H(s) \quad (13)$$

Una vez aplicado esta función en Maxima se pudo obtener la función de transferencia en lazo abierto (Respuesta 1), tal y como se muestra a continuación.

Respuesta_1: `ratsimp(Gc · G · H);`

$$\frac{Kc}{2s^6 + 32s^5 + 220s^4 + 772s^3 + 1338s^2 + 900s}$$

Figura 7. Solución del punto 1 en máxima

III-B. Punto 2 y 3

El error de estado estacionario de lazo abierto se calcula con ayuda de la siguiente ecuación:

$$e_{ss} = \lim_{n \rightarrow 0} s * E(s) \quad (14)$$

Donde $E(s)$ se sustituye con ayuda de la ecuación (4) y sustituyendo la relación de esta ecuación con las funciones resultantes de la figura 6 y considerando a la entrada $R(s)$ como un escalón se realiza este cálculo del error el cual se aprecia a continuación.

Respuesta_2: `limit(s · R / (1 + (G / (1 + G · H))), s, 0);`

$$-2$$

Figura 8. Error de estado estacionario en lazo abierto del sistema

En lazo cerrado, tomando en consideración que se sigue utilizando la ecuación (14) a la cual se sustituyen las relaciones de funciones como la de $E(s)$ con la ecuación (4) y la de $C(s)$ con la ecuación (5), para luego sustituir con las funciones de la figura 6; considerando a la entrada $R(s)$ como un escalón se realiza este cálculo del error el cual se aprecia a continuación:

Respuesta_3: `1 / (1 + limit(G / (1 + G · H), s, 0));`

$$\frac{1}{4}$$

Figura 9. Error de estado estacionario en lazo cerrado del sistema.

III-C. Punto 4

En este punto se solicitaba dibujar el lugar de las raíces para el sistema en lazo cerrado. Con ayuda de Maxima, el cual dispone de un paquete de instrucciones llamado `COMA.mac`, dicho paquete está diseñado para asistir en el diseño de sistemas de control y tiene una función en especial para dibujar el lugar de las raíces. En la primera gráfica resultante nos dio como resultado una gráfica que no coincide con la esperada, ya que mostraba polos y ceros de más. Por tal motivo se optó por hacer el lugar de las raíces desde cero con la ayuda de la biblioteca `'qdraw'`, esta facilita el dibujo de líneas y puntos, con opción de cambiar forma, tamaño y colores.

La creación del lugar de las raíces empieza desde la declaración de una función llamada `LUGAR_DE_LAS_RAICES` (G_c, G, H, R), es un bloque que contiene todos los procedimientos necesarios para dibujar el RL (Root Locus), se hace de esta manera por si se deben dibujar varias gráficas a lo largo del proyecto.

Con el fin de mostrar un procedimiento simplificado, en la figura 10 se observa un resumen de lo que hace la función que genera el lugar de las raíces.

```
LUGAR_DE_LAS_RAICES (Gc,G,H,R):=
block(
  /- Elimina listas para evitar trabajar sobre una variable ya usada -/
  /- Calculamos la función de transferencia CL -/
  /- Obtenemos polos y ceros de la función de transferencia CL -/
  /- Obtenemos la suma de polos y ceros -/
  /- Número de ramas, Simetría, Asíntotas y Centroide -/
  /- Cálculo de dk/ds para obtener intersección de RL en eje real -/
  /- Cuenta total de los polos y ceros para dibujar el RL en eje real -/
  /- Generamos matriz del método Routh-Herwitz para
    obtener la intersección con el eje imaginario -/
  /- Obtenemos el rango de Kc donde hay estabilidad -/
  /- Se genera el lugar de las raíces con biblioteca qdraw -/
  /- Las curvas del lugar de las raíces que no están en el eje
    real fueron escritas manualmente, para simplicidad -/
);
```

Figura 10. Resumen de función generadora de lugar de las raíces.

Por lo tanto, se puede llamar dicha función y obtener el lugar de las raíces de una función de transferencia específica. La solución del punto 4 está relacionado a esta función, en la figura 11 se muestra el llamado a la función con los parámetros necesarios y en la figura 12 se observa el lugar de las raíces desplegado.

Respuesta_4: `LUGAR_DE_LAS_RAICES (Gc,G,H,R);`

$$K_{menor} = (Kc \geq 0.0)$$

$$K_{mayor} = (Kc \leq 1315.3)$$

$$Centroide = -\frac{13}{5}$$

Figura 11. Llamada de la función `LUGAR_DE_LAS_RAICES(Gc,G,H,R)` para obtener Respuesta 4.

En la figura 11 se observa el rango de K_c donde la función de transferencia es estable, dicho rango va de $0 \leq K_c \leq 1315,3$, dichos valores se verificaron mediante el criterio de estabilidad de Routh-Herwitz.

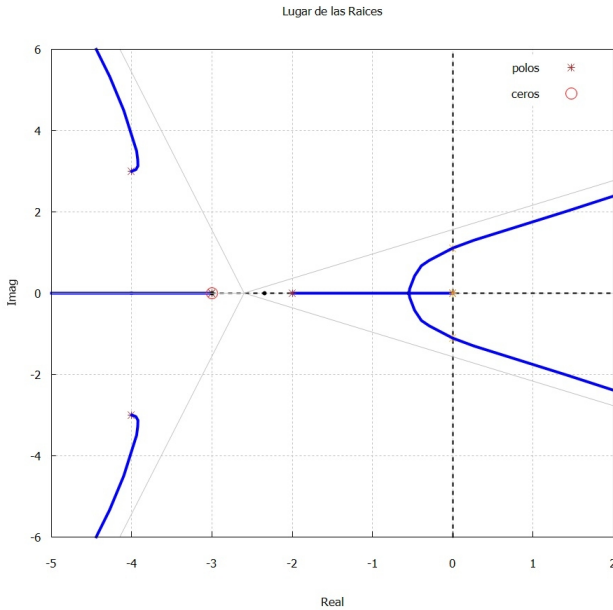


Figura 12. Lugar de las raíces del sistema. Respuesta 4.

III-D. Punto 5

Para el diseño de un regulador $G(s)$ para un comportamiento similar a un sistema de segundo orden subamortiguado, el sistema será de lazo cerrado tendrá un sobreimpulso de $M_p\%$. La obtención de δ se hace con la siguiente ecuación $M_p = e^{\frac{-\delta \cdot \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$, la cual no puede ser resuelta por Maxima con la función 'solve()', por lo que se optó por generar un ciclo for donde un número tome el campo de δ , luego se buscaría en número que cumpliera la siguiente condición: $\frac{-\delta \cdot \pi}{\sqrt{1-\delta^2}} - \ln(M_p) \leq 0,0005$, de esta manera se logró obtener el δ .

```
Regulador_Sobreimpulso (Mp) :=
block(
  /- Obtención de delta y la coordenada resultante -/
  for e:1 while e < 10000 do(
    r : float(abs(abs(-e/ 10000 %pi / ((1-(e/ 10000)^2)^(1/2))) - abs(log(Mp)) ),
    if r < 0.0005 then
      delta : float(e/ 10000)
  ),
  s_ : -delta + delta tan(acos(delta)) %i,

  /- Obtención de producto de las sumas y obtención de K -/
  productos_polos_s : 1,
  productos_ceros_s : 1,
  for e in polos_CL do
    productos_polos_s : productos_polos_s - abs(s_ + last(e)),
  for e in polos_CL do
    productos_ceros_s : productos_ceros_s - abs(s_ + last(e)),

  K_punto_5 : float(productos_polos_s / productos_ceros_s),
  display(delta,angulo:float(acos(delta)%pi*180),K_V : K_punto_5),
  return(K_punto_5)
);
```

Figura 13. Bloque usado para obtener valor de K_c para un sobreimpulso de 5 %.

En la figura 13 se puede observar el código implementado para el cálculo del K_c , para este calculo se usa lo siguiente:

$$K = \frac{\prod_{j=1}^n \|s + p_j\|}{\prod_{i=1}^m \|s + z_i\|} \quad (15)$$

Dado que se tiene como condición que el sobreimpulso sea de 5 % , para eso en Maxima se escribe las siguientes líneas de la figura 14, se observa que muestra un valor de δ , el cual cumple con la condición para un sistema subamortiguado, donde $0,4 < \delta < 0,8$.

```
Respuesta_5: Regulador_Sobreimpulso(0.05);
δ=0.6901
angulo=46.362
K_V=327.05
327.05
```

Figura 14. Obtención de un regulador $G(s)$ que genere un sobreimpulso de 5 %.

III-E. Punto 6

El punto 6 se solicita mostrar la respuesta al escalón obtenida con el valor de K_c , la figura 15 muestra las instrucciones utilizadas y la figura 16 muestra la respuesta al escalón. Se utiliza la biblioteca "COMA" para generar la gráfica.

```
Respuesta_6 :
block(
  Kc:0.4,
  f1:ratsimp(FT_CL),
  [frpi]:[kr*(1+1/(s-Tn))],
  g2:gain_optimum(f1,frpi),
  reli:float(ev([frpi],[g2])),
  step_response(float(ev(closed_loop(reli-f1),res)),yrange=[0.5,1.2],xrange=[0,20]),
  kill(Kc)
);
```

Figura 15. Bloque usado para obtener respuesta al escalón.

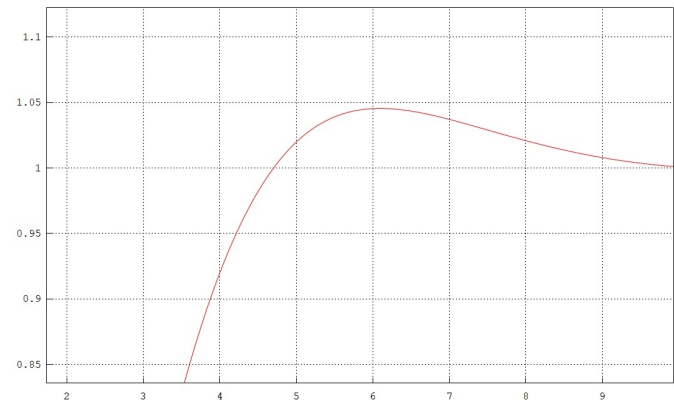


Figura 16. Respuesta al escalón para un valor de $K_c = 327.05$.

III-F. Punto 7

El diseño de un compensador de atraso se puede observar en las siguientes ecuaciones:

$$F(s) = \frac{s + z_a}{s + p_a} \cdot K_c \cdot G1(s) \cdot G2(s) \cdot G3(s) \cdot G4(s) \quad (16)$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)}{1 + H(s) \cdot F(s)} \quad (17)$$

El bloque escrito en Maxima que se muestra a continuación (figura 17), tiene dos parámetros de entrada, dichos parámetros son las posiciones de los polos y ceros que vamos a agregar.

```
Compensador_atraso(z_a,p_a,K):=
block(
  F : ZA/PA·K·G_num/G_den,
  /-tomamos z_a muy cercano a cero
  para eliminar un s en el denominador: -/
  M : factor(F/(1+H·F·s)) · s/ZA,
  M : subst((p_a+s),PA,M),
  M : subst((z_a+s),ZA,M),
  M : subst(K,Kc,M),
  Kg: limit(M,s,0),
  e_oo : float(ratsimp(1/(1+Kg))),
  display(e_oo),
  return((z_a+s)/(p_a+s))
);
```

Figura 17. Diseño de compensador de atraso.

Si se ingresa en la función un valor para z_a de $z_a = 0,00015$ y para p_a de $p_a = 0,00001$, se obtendrá como respuesta lo siguiente:

```
Respuesta_7: Compensador_atraso(0.00015,0.00001,Respuesta_5);
e_oo=5.9169 10-5

$$\frac{s+1.5 \cdot 10^{-4}}{s+1.0 \cdot 10^{-5}}$$

```

Figura 18. Diseño de compensador de atraso. Respuesta 7.

III-G. Punto 8

Similar al punto 4, ingresamos el compensador de atraso en la función: LUGAR_DE_LAS_RAICES(Gc,G,H,R) como se muestra en la figura 19.

El resultado del lugar de las raíces del sistema con compensador de atraso se muestra a continuación:

Al comparar los lugares de la raíz se aprecia un pequeño cambio en el centroide y en el rango de K_c . El centroide pasó de estar ubicado en $-2,6$ a -2 y el rango mayor de K_c pasó de estar en $1315,3$ a $1315,4$.

```
Respuesta_8 : LUGAR_DE_LAS_RAICES(Gc,G-Respuesta_7,H,R);
K_menor=(Kc ≥ 0.0)
K_mayor=(Kc ≤ 1315.4)
Centroide=- 1000001
500000
```

Figura 19. Ingreso de datos en función LUGAR_DE_LAS_RAICES(Gc,G,H,R) para obtener respuesta 8.

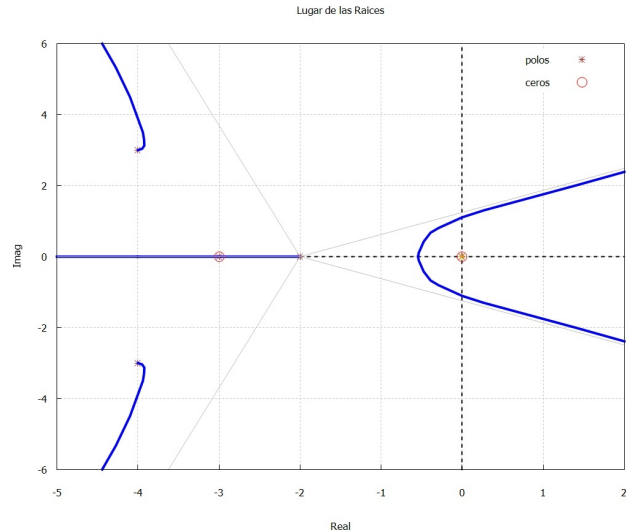


Figura 20. Lugar de las raíces para sistema con compensador de atraso

IV. CONCLUSIONES

1. Se puede destacar que la mejor opción para este sistema es usar un regulador de atraso dado a su error, ya que el error sistema en lazo abierto es de -2 , mientras que en lazo cerrado es de 0.25 y el compensador de atraso de $\frac{s+1.5 \cdot 10^{-4}}{s+1.0 \cdot 10^{-5}}$, generó un error de estado estacionario aproximadamente de $5,9 \cdot 10^{-5}$.
2. Se puede resaltar a través de la ganancia que el regulador de atraso presentó una ganancia menor a comparación al resto en el análisis por el método de las raíces, donde el rango de ganancia del K_v inicialmente iba desde 0 hasta $1315,3$. Mientras que al diseñar el regulador en atraso para un sobreimpulso de 5% , fue de $327,05$.
3. El cálculo del regulador en adelante aunque no se pudo sacar exitosamente, se puede predecir que su error va ser aún menor que el de atraso o muy cercano a este lo que provocaría que su ganancia vaya a descender de igual manera.

V. RECOMENDACIONES

- Al concluir el proyecto se recomienda el uso de otro software más especializado y con más recursos; aunque que el programa Maxima es gratuito y de fácil acceso y descarga, su interfaz no es la más amigable con el usuario, además de presentar errores en el programa, como por ejemplo en la función del lugar de las raíces en el paquete de instrucciones "COMA".

- El cálculo de los reguladores pudo haber sido resuelto por diagramas de Bode, ya que por lugar de raíces fue algo impreciso su cálculo.

REFERENCIAS

- [1] Dorf, R and Bishop, R. *Sistemas de Control Modernos*. Madrid: Pearson Educación. S.A., 10th ed., 2005.
- [2] Extraído. (2019). *Torno Universal*. <https://ingjjnina.jimdo.com/app/download/5874170018/TORNO-UNIVERSAL.pdf>. online
- [3] Kuo, B. *Sistemas de Control Automático*. México: Prentice Hall, 7th ed., 1996.
- [4] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid: Pearson Educación. S.A., 5th ed., 2010.