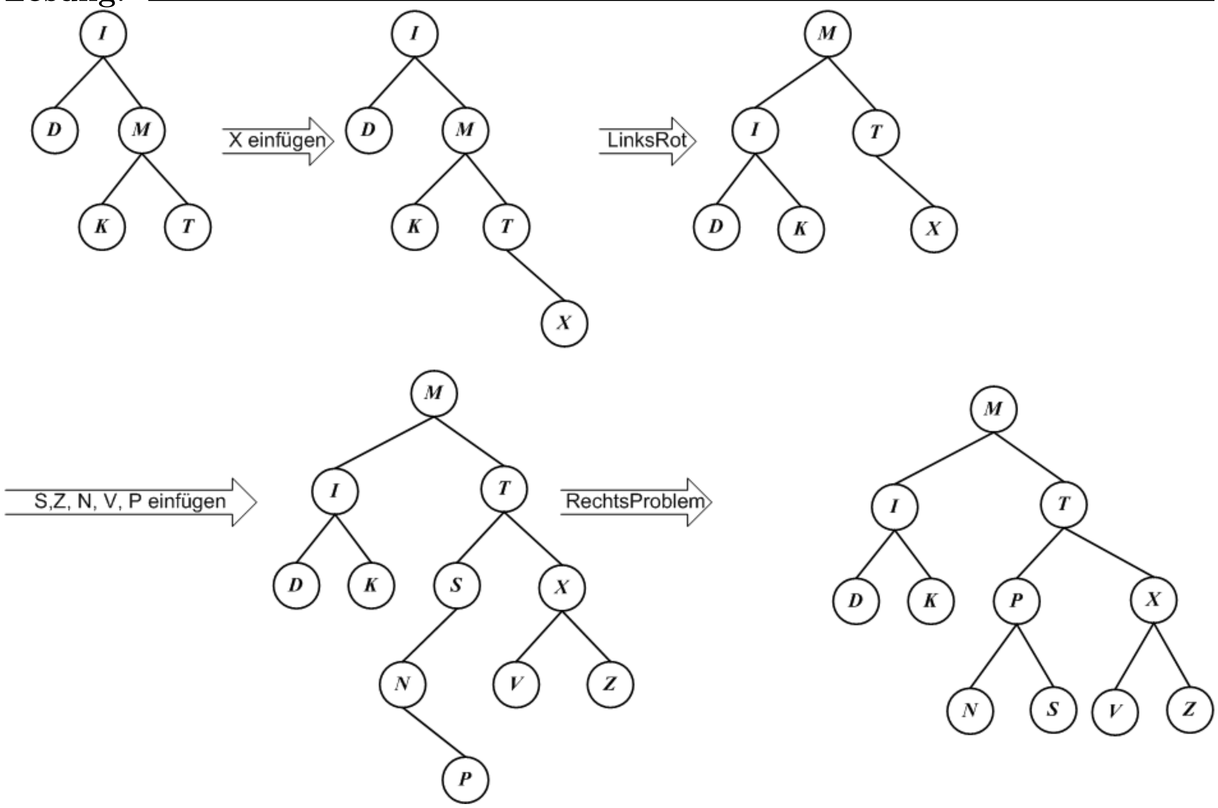
LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 12. Januar 2015

Aufgabe I: .... **15 Punkte**

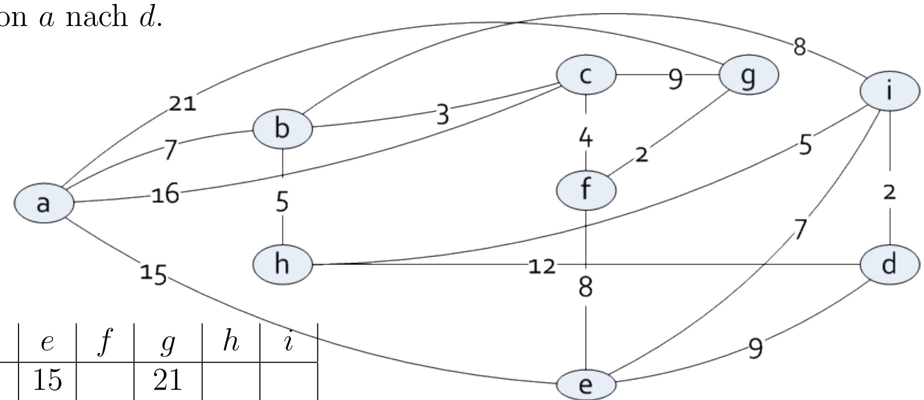
Gegeben dieser AVL-Baum geordnet durch Reihenfolge des Alphabets. Fügen Sie bitte diese Knoten in dieser Reihenfolge X, S, Z, N, V, P ein und geben Sie an, welche Operationen Sie benötigen um eine AVL-Baum zu erhalten.

Lösung:



Aufgabe II: . . . . **15 Punkte**

Gegeben sei dieser gewichtete Graph: Bitte berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von a nach d.



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$Entf$	0	7	~~16~~		15		21		
$Vorg$	a	a	~~a~~		a		a		
OK	t	t							
$Entf$	0	7	10		15		~~21~~	12	15
$Vorg$	a	a	b		a		~~a~~	b	b
OK	t	t	t						
$Entf$	0	7	10		15	14	19	12	15
$Vorg$	a	a	b		a	c	c	b	b
OK	t	t	t					t	
$Entf$	0	7	10	24	15	14	~~19~~	12	15
$Vorg$	a	a	b	h	a	c	~~c~~	b	b
OK	t	t	t			t		t	
$Entf$	0	7	10	~~24~~	15	14	16	12	15
$Vorg$	a	a	b	~~h~~	a	c	f	b	b
OK	t	t	t			t		t	t
$Entf$	0	7	10	17	15	14	16	12	15
$Vorg$	a	a	b	i	a	c	f	b	b
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t

Der kürzeste Weg von a nach d hat die Länge 17: $a - b - i - d$

Aufgabe III: . . . . **15 Punkte**

Gegeben seien diese Teilmengen der schlichten, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen:

- $\mathbf{G} = \{G \mid$ ist Graph mit $n > 0$ Knoten $\}$
- $\mathbf{T} = \{T \mid$ ist Baum mit $n > 1$ Knoten $\}$

- $\mathbf{B} = \{B \mid$ ist ein bipartiter Graph mit $n > 1$ Knoten $\}$
- $\mathbf{C} = \{C_n \mid$ ist Kreis mit $n > 3$ Knoten $\}$
- $\mathbf{W} = \{W_n \mid$ ist Rad mit $n > 4$ Knoten $\}$
- $\mathbf{S} = \{S_n \mid$ ist Stern mit $n > 4$ Knoten $\}$

1. Bitte füllen Sie die folgende Tabelle aus, indem Sie den Wert oder obere und/oder untere Schranken angeben. .... **10 Punkte**
   Die erste Spalte ist als Beispiel angegeben.

   Lösung:
   Sei G ein Graphen mit n Knoten und Element der jeweiligen Menge von Graphen:

	$G \in \mathbf{G}$	$G \in \mathbf{T}$	$G \in \mathbf{B}$	$G \in \mathbf{C}$	$G \in \mathbf{W}$	$G \in \mathbf{S}$
$\delta(G)$	≥ 0	$= 1$	≥ 1	$= 2$	$= 3$	$= 1$
$\Delta(G)$	$\leq n-1$	$\leq n-1$	$\leq n-1$	$= 2$	$= n-1$	$= n-1$
$\chi(G)$	$\geq 1; \leq n$	$= 2$	$= 2$	$\geq 2; \leq 3$	$\geq 3; \leq 4$	$= 2$

2. Welche Mengen sind Teilmengen von einander? .... **5 Punkte**

   Lösung:
   $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{G}$ und $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{G}$ und $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{G}$

Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?
Bitte begründen Sie, jeweils .... **5 Punkte**

1. Es gibt einen Graphen, in dem die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad ungerade ist. .... ☐ wahr oder ☒ falsch

   Begründung:
   Wenn wir aus einem Graphen eine Kante löschen, bleibt die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad gleich, wird 2 mehr oder 2 weniger, aber sie bleibt immer gerade oder immer ungerade.
   Wäre diese Anzahl ungerade, so könnte man solange Kanten löschen bis nur noch ein Knoten mit ungeradem Knotengrad übrig bleibt. Das geht aber nicht, da dann diese Kante nur einen inzidenten Konten hat.

   Also muss diese Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad gerade sein.

2. Gegeben sei ein Graphmorphismmus $f : G \to H$.
   Dann gilt: $\chi(G) \le \chi(H)$ .... [X] wahr oder [ ] falsch
   Begründung:
   Knoten, die in G adjazent sind, sind auch in H adjazent. Also werden Farben, die in G benötigt werden, auch in H benötigt. Ggf sind es für H mehr Farben, die durch zusätzliche Kanten in H nötig werden.

3. Das Prüfer-Tupel $(3, 3, 4, 4)$ beschreibt einen Baum
   mit 6 Knoten. .... [X] wahr oder [ ] falsch
   Begründung:
   Prüfer-Tupel beschreiben mit $n-2$-Tupeln Spannbäume von vollständigen Graphen mit n Knoten, also beschreibt ein 4-Tupel einen Spannbaum vom K_6, also einen Baum mit 6 Knoten.

Aufgabe V: .... **15 Punkte**

Erläutern Sie bitte den Floyd-Warshall-Algorithmus zur Berechnung der kürzesten Wege.

Lösung:

Für gerichtete Graphen mit beliebigen Kantenbewertungen liefert der Algorithmus von Floyd und Warshall kürzeste Wege zwischen allen Knotennpaaren, falls der Graph keine Kreise mit negativer Kantenbewertungssumme besitzt. Andernfalls findet er einen solchen Kreis. Die Komplexität dieses Algorithmus ist $O(|V|^3)$.
Der Algorithmus arbeitet mit zwei $|V| \times |V|$-Matrizen, der Distanzmatrix $D = (d_{ij})$ und der Transitmatrix $T = (t_{ij})$. Am Ende des Algorithmus gibt d_{ij} die Länge des kürzesten Weges von v_i nach v_j an, und t_{ij} benennt die Knoten mit der höchsten Nummer auf diesem Weg (hierdurch läßt sich der Weg rekonstruieren).
Die Distanzmatrix wird aus einer Matrix entwickelt, die das Gewicht d_{ij} der Kante (i, j) zwischen zwei Knoten i und j den enthält oder unendlich ist (Initialisierung). In jedem Schritt bekommt eine Kante (i, j) ein neues Gewicht, wenn sich aus zwei Kanten ein Weg von i nach j bilden lässt, der über den jeweiligen Knoten führt und ein kleineres Gewicht hat; hierbei werden zuvor gefundenen Kanten mit berücksichtigt. In jedem Schritt entsprechen die bis dahin gefundenen Kanten den Wegen, deren innere Knoten alle kleiner sind.
Die Transitmatrix wird parallel dazu geführt und hat als Eintrag t_{ij} jeweils den höchsten Nummer auf dem Weg von i nach j steht. Jedes Mal, wenn der Algorithmus einen kürzeren Weg von i nach j als den bisher bekannten findet, wird t_{ij} aktualisiert.

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

Stimmt's? Jeweils .... **5 Punkte**.
Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

1. Bei der Anwendung des Dijkstra-Algorithmus auf einen ungerichteten zusammenhängenden Graphen mit nichtnegativen Kantenlängen ist das entstehende System kürzester Wege ein Baum.
   Lösung: ______
   Ja, wenn ein Knoten durch einen kürzesten Weg erreicht wurde, wird er nie wieder von einem anderen Knoten aus angelaufen, und jede Kante, die von ihr ausgeht, führt zu einem bis dahin isolierten Knoten. In dem System kürzester Wege kann es demnach zwischen zwei Knoten keine zwei Wege geben. Da andererseits dieses Wegesystem zusammenhängend ist, handelt es sich also dabei um einen Baum.

2. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. G ist genau dann ein Baum, wenn gilt $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |V| - 2$.
   Lösung: ______
   Ja, denn es gilt $|E| = |V| - 1$ für alle Bäume und $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$ für alle Graphen:
   Wenn also $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |V| - 2$ gilt, dann ist $2 \cdot |E| = 2 \cdot |V| - 2$ also $|E| = |V| - 1$ also ist G ein Baum.
   Und wenn G ein Baum ist, dann gilt $\sum_{v \in V} d(v) = 2|e| = 2 \cdot (|V| - 1) = 2 \cdot |V| - 2$.

3. Es sei ein ungerichteter Graph G und ein Untergraph $H \sqsubseteq G$ gegeben. Wenn für alle Knoten in H der Knotengrad gleich dem Knotengrad des jeweiligen Knotens im Graph G ist, dann ist G nicht zusammenhängend oder $G = H$.

   Lösung: ______
   Ja, wenn es eine Kante e in G aber nicht in H gibt (also $e \in E \setminus F$), dann darf die mit keinem Knoten in $v \in W \subseteq V$ verbunden sein, sonst wäre ja der Knotengrad $d_G(v) \neq d_H(v)$:

   - Also gibt es entweder mindestens eine weitere Komponente in G, die e enthält und mit keinem Knoten in W verbunden ist. Dann ist G nicht zusammenhängend.
   - Oder es gibt diese Kante nicht, dann ist aber jede Kante aus H auch in G und damit ist $G = H$
     oder ist gibt noch einzelne Knoten, dann ist G aber nicht zusammenhängend.

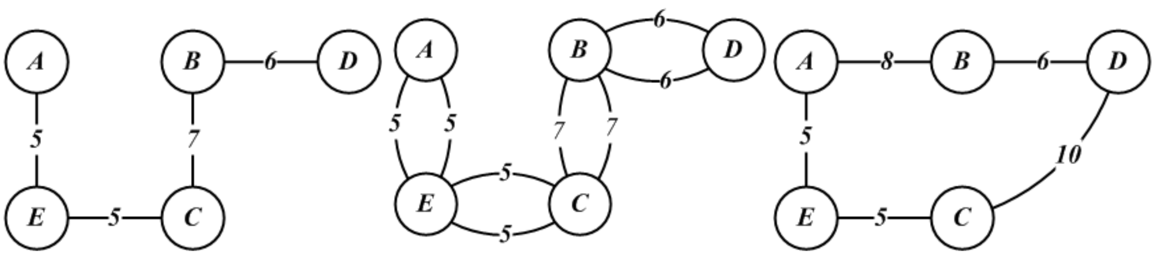
Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Gegeben die folgende Entfernungstabelle.

	A	B	C	D
E	5 $\boxed{1}$	8	5 $\boxed{2}$	9
D	8	6 $\boxed{3}$	10	
C	8	7 $\boxed{4}$		
B	9			

Lösung:

1. Lösen Sie bitte das dazugehörige TSP mit der Minimum-Spanning-Tree-Heuristik.
   Zunächst Kruskal, anhand der Ordnung, die in der Tabelle mit Kästchennummern dargestellt ist. Dann Eulertour auf den verdoppelten Kanten, danach solange, wie geht „Dreiecke abkürzen“:

   ergibt eine Rundreise mit der Länge: 34

2. Wie lang ist die optimale Tour mindestens?
   Mindestens halb solang wie Eulertour nach Kruskal, also ist die optimale Tour länger als 23

Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**

Bitte beweisen Sie diesen Satz:
Ein vollständiger, bipartiter Graph K_{nm} ist hamiltonsch, genau dann wenn $n = m$.

Lösung:

K_{nm} sei durch die Mengen $X = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $Y = \{y_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ aufgeteilt, so dass für alle Kanten e gilt $s(e) \in X \iff t(e) \in Y$ und $s(e) \in Y \iff t(e) \in X$.

$\Longleftarrow$ K_{nn} ist hamiltonsch.

Dann gibt es den folgenden Hamiltonkreis $x_1 y_1 ... x_i y_i x_{i+1} .... x_n y_n x_1$, denn es gibt alle benötigten Kanten, da K_{nn} vollständiger, bipartiter Graph ist und abwechselnd Knoten aus X und Y vorkommen. Ausserdem sind alle Knoten vorhanden und nur x_1 kommt zweimal vor.

$\Longrightarrow$ Sei der vollständige, bipartite Graph K_{nm} hamiltonsch, dann ist $n = m$.

Sei $v_1 v_2 ... v_{n+m} v_1$ ein Hamiltonkreis in K_{nm}.

Sei $v_1 \in X$, dann gilt $v_{n+m} \in Y$ und $v_{2j} \in Y$ für $1 \leq j \leq \frac{n+m}{2}$. Also ist $n + m$ gerade. Außerdem ist $v_{2j-1} \in X$ für $1 \leq j \leq \frac{n+m}{2}$.
(Entsprechend für $v_1 \in Y$.)

Da jeder Knoten genau einmal vorkommt, ist also $X = \{v_{2j-1} \mid 1 \leq j \leq \frac{n+m}{2}\}$ und $Y = \{v_{2j} \in\mid 1 \leq j \leq \frac{n+m}{2}\}$ und damit $|X| = |Y|$, also $n = m$.