Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen

Thema 03
Planare Graphen und Färbungen

Julia Padberg

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

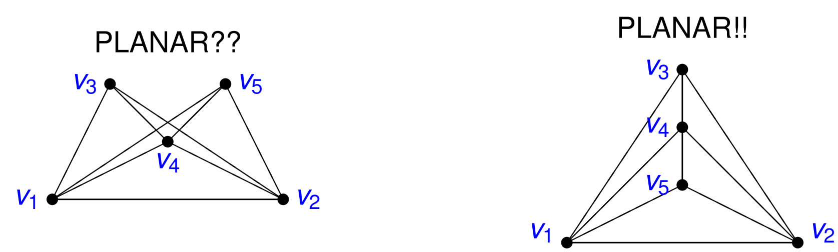
Planare Graphen

Definition

Ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt **planar**, wenn er in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass jeder Punkt, den zwei Kanten gemeinsam haben, ein Knoten ist.

... also wenn er kreuzungsfrei ist.

BSP: Graph G



Informelle Charakterisierung planarer Graphen

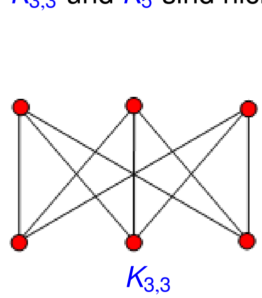
- Es ist klar, dass ein Graph nicht planar sein kann, wenn er einen nichtplanaren Teilgraphen enthält.
- Weiterhin hat es keinen Einfluss auf die Planarität eines Graphen, wenn eine Kante eines Graphen durch Einfügen eines neuen Knoten mit Grad 2 in zwei Kanten zerlegt wird (der so entstehende Graph heißt eine Unterteilung des ursprünglich vorgelegten Graphen):

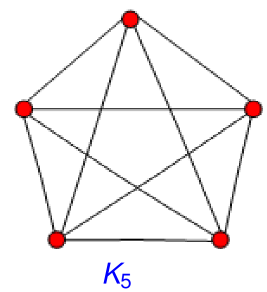
Eine Unterteilung des Graphen K_2

Nicht-Planare Graphen

Satz

$K_{3,3}$ und K_5 sind nicht planar.





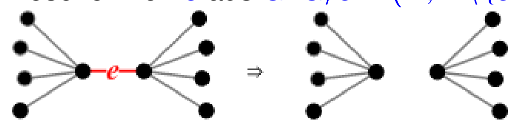
Beweisidee

- C ein aufspannender Kreis (Kreis durch alle Knoten)
- C ist eine geschlossene Kurve
- alle Kanten $e \in E \setminus C$ (außerhalb von C, auch Sehnen genannt) werden entweder innen oder außen gezeichnet
- 2 Sehnen im Konflikt, wenn ihre Endknoten auf C alternieren
- Wenn zwei Sehnen im Konflikt sind, dann kann eine innen und die andere außen gezeichnet werden.
- Gibt es 3 paarweise im Konflikt stehende Sehnen, dann ist der Graph nicht planar.
- $K_{3,3}$ und K_5 haben 3 paarweise im Konflikt stehende Sehnen, also nicht planar.

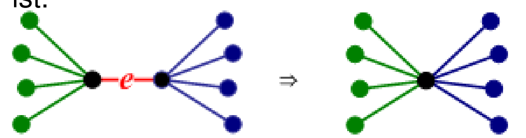
Minoren von Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (nicht notwendig planar) und $e \in E$ eine Kante. Die beiden folgenden Operationen seien wie folgt definiert:

1. Löschen von e aus G: $G/e = (V, E \setminus \{e\})$



2. Kontrahieren von $e = \{s, t\}$ in G: $G/e = ([V], E \setminus \{e\})$ wobei $C(s, t)$ durch den Äquivalenzabschluss von $\{(s, t)\}$ und $[V] = \{[v]_{C(s,t)} | v \in V\}$ durch die Menge der Äquivalenzklassen gegeben ist.



Dabei entfallen die entstehenden Mehrfachkanten.

Graph-Minor

Definition

Ein Minor von G ist ein Graph, der durch eine Folge von Löschungen und Kontraktionen aus G entsteht.

Satz

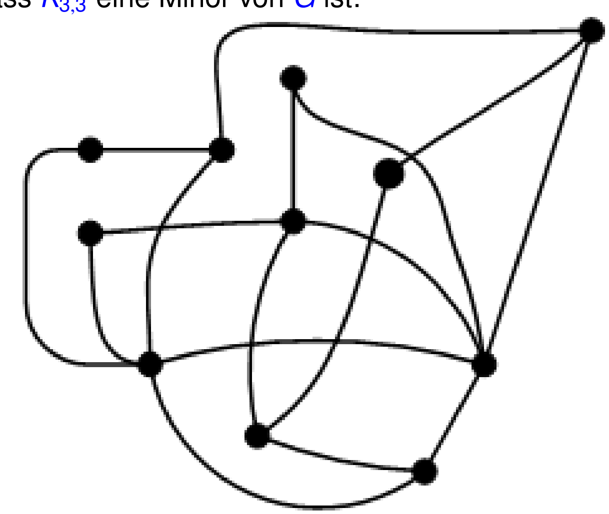
Jeder Minor eines planaren Graphen ist planar.

Satz

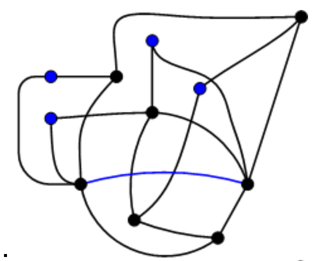
Ist G planar, dann enthält G keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Aufgabe 1:

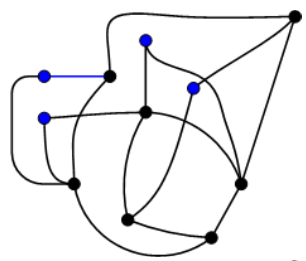
Zeigen Sie, dass $K_{3,3}$ eine Minor von G ist:



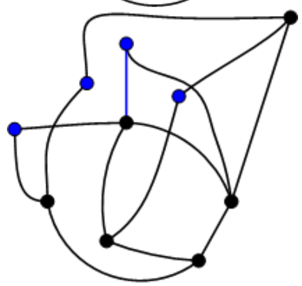
Lösung von Aufgabe 1



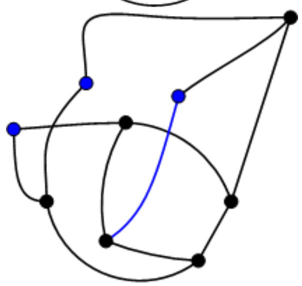
1.



2.

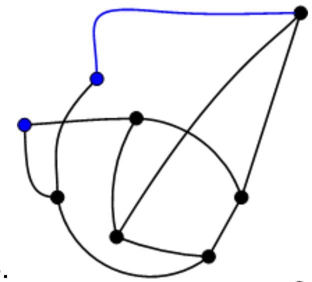


3.

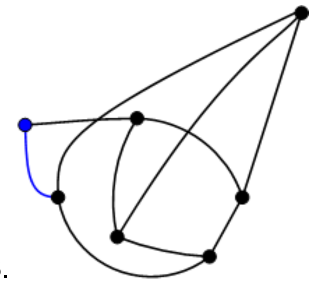


4.

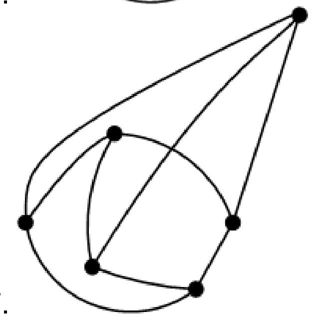
Lösung von Aufgabe 1



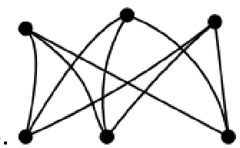
5.



6.



7.



8.

Aufgabe 2:

Behauptung

Es gibt ‘im wesentlichen“ nur zwei nichtplanare Graphen, nämlich solche mit den Teilgraphen K_5 oder den Teilgraphen $K_{3,3}$.

Versuchen Sie diese Behauptung zu widerlegen.

Charakterisierung planarer Graphen

Satz von Kuratowski

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann nichtplanar, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph einen Teilgraphen besitzt, der isomorph ist zu

1. dem Graphen K_5 oder
2. dem Graphen $K_{3,3}$ oder
3. einer Unterteilung der beiden.

Satz von Wagner

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn weder K_5 noch $K_{3,3}$ ein Minor von G ist

Eulersche Polyederformel für die Ebene

Satz

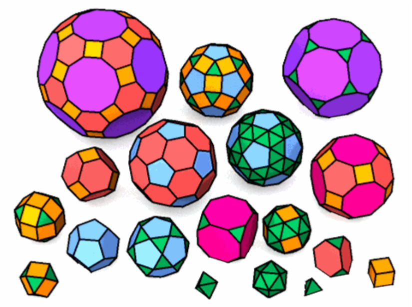
Ist $G = (V, E)$ ein planarer Graph,

1. der zusammenhängt, dann gilt: $|V| - |E| + |F| = 2$
2. mit K Komponenten, dann gilt: $|V| - |E| + |F| = 1 + K$

Für diesen Satz gibt es eine Vielzahl von Beweisen.

Unter http://www.ics.uci.edu/ eppstein/junkyard/euler/ finden sich schon mal 19 Stück

... und nur zwei davon machen wir!



http://www.3d-meier.de/Videos/Polyeder/Seite0.html

Beweis des Eulersche Polyedersatzes

Beweisidee Noahs Arche (für 2):
Nach der großen Flut haben wir zunächst n Knoten (Inseln), $m = 0$ Kanten und $f = 1$ Fläche (das Meer) sowie $k = n$ Komponenten. Es gilt also $n - 0 + 1 = 1 + n$.

Die zu zeigende Formel lautet also $n - m + f = 1 + k$

Wenn das Wasser nun wieder langsam sinkt, entstehen immer wieder Landbrücken zwischen zwei Inseln, also eine Kante kommt hinzu:

- **Fall 1:** Sie verbindet Komponenten: $m \to m + 1$ und $k \to k - 1$. Die Gleichung bleibt erhalten.
- **Fall 2:** Sie verbindet innerhalb einer Komponente $m \to m + 1$ und $f \to f + 1$. Auch dies ändert nichts an der Gleichung.

Vierfarbenproblem

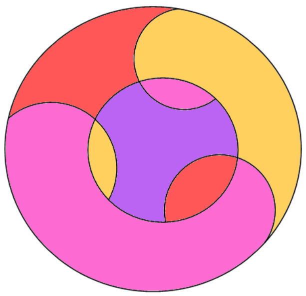
Es ist eine Erfahrungstatsache, dass auf jeder Landkarte, die nur zusammenhängende Gebiete enthält (bei der also keine Exklaven zu berücksichtigen sind), die Gebiete so mit vier Farben gefärbt werden können, dass niemals zwei Gebiete, die eine gemeinsame Grenze (die nicht nur aus einem Punkt besteht) besitzen, dieselbe Farbe tragen.

Stellt man jedes Gebiet durch eine Knoten dar und verbindet man Gebiete mit gemeinsamer Grenze durch eine Kante, so entsteht ein planarer Graph.

Läßt sich nun die genannte Erfahrungstatsache auch allgemein für planare Graphen beweisen oder beruht sie nur darauf, dass beim Färben bisheriger Landkarten glückliche Umstände mit im Spiel waren?

Beispiel

BSP:



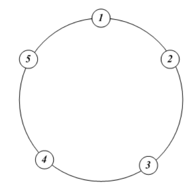
Knotenfärbung

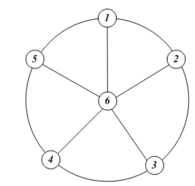
Definition

- Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten und $c : V \rightarrow S$ eine Abbildung von V in die Menge S mit $c(v) \neq c(w)$ für zwei benachbarte Knoten v und w, so nennt man c eine Knotenfärbung von G.
- Man sagt G ist k-färbbar, falls es eine Knotenfärbung $c : V \rightarrow \{1, ..., k\}$ von G gibt.
- Für jeden Graphen gibt es eine kleinste Zahl k, sodass der Graph k-färbbar ist. Diese Zahl wird die chromatische Zahl des Graphen genannt und meist mit $\chi(G)$ bezeichnet. Der Graph heisst dann k-chromatisch.

Aufgabe 3:

K_n ist der vollständige Graph mit n Knoten.
Analog ist C_n der Kreis mit n Knoten und W_n das Rad mit $n + 1$ Knoten.
BSP: C_5 und W_5





Bestimmen Sie bitte die chromatische Zahl

1. für $C_3, C_4, C_5, K_4, W_3, W_4$ und W_5.
2. für C_n, K_n und W_n mit $n \geq 3$.

Lösung von Aufgabe 3

Lösung

1. $\chi(C_3) = 3, \chi(C_4) = 2\ \chi(C_5) = 3$
   $\chi(K_4) = 4$ und
   $\chi(W_3) = 4, \chi(W_4) = 3\ \chi(W_5) = 4.$
2. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & ;\ \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$
   $\chi(K_n) = n$
   $\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & ;\ \text{falls } n \text{ gerade} \\ 4 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$

Folgerungen

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten und $\chi(G)$ seine chromatische Zahl, dann ergeben sich folgende Aussagen:

- G ist 2-färbbar gdw. G ist bipartit
  gdw. G hat keine Kreise ungerader Länge.
- $\chi(K_n) = n$
- Ist H ein Untergraph von G, dann gilt: $\chi(H) \leq \chi(G)$.
- Für leere Graphen $G_\emptyset$ gilt $\chi(G_\emptyset) = 1$.

Vierfarbensatz

In jedem planaren Graphen $G = (V, E)$ lassen sich die Knoten durch je eine von vier Farben so färben, dass keine zwei gleichfarbigen Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind.

Satz

Ist Graph $G = (V, E)$ planar, dann ist $\chi(G) \leq 4$.

Fünffarbensatz

Theorem(Heawood)

Für jeden planaren Graphen G gilt : $\chi(G) \leq 5$

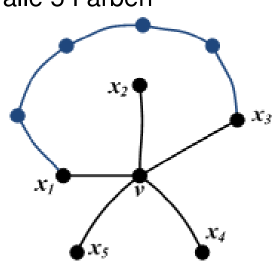
Beweisidee

IA: Für $G = (V, E)$ mit $|V| = n \leq 5$ gilt $\chi(G) \leq |V| \leq 5$.

IB: Für einen Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ Knoten gilt: $\chi(G) \leq 5$.

IS: Sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n + 1$ Knoten gegeben.
G besitzt Knoten v mit $d(v) \leq 5$ und G/v besitzt eine 5-Färbung.

1. Falls in der Menge der zu v adjazenten Knoten nicht alle 5 Farben vorkommen, sind wir fertig.
2. Falls doch, dann seien x_i die Nachbarn von v.
   Betrachte nun $H(i, j)$, den von Knoten der Farben i und j induzierten Untergraphen von G/v. Wenn x_i und x_j in verschiedenen Komponenten von $H(i, j)$ liegen, können die Farben i und j in der Komponente, die x_i enthält getauscht werden. Damit wird Farbe i frei für v.



Wenn $H(1, 3)$ keinen Tausch erlaubt, existiert ein $1, 3$-gefärbter Pfad von x_1 nach x_3. Zusammen mit v ist das ein Kreis C. Der Kreis C hat innen und außen. Also sind x_2 und x_4 durch C getrennt. Daraus folgt x_2 und x_4 sind in verschiedenen Komponenten von $H(2, 4)$. Also können die Farben 2 und 4 getauscht und eine Farbe wird frei für v.

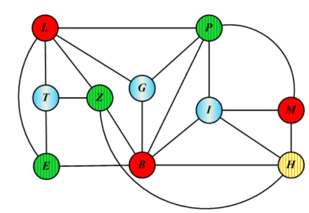
Konfliktgraph

Konzept

Ein Graph, dessen Knoten eine beliebige Entität repräsentieren (z.B. Gremien, Räume, Tiere, etc), und dessen Kanten, einen Konflikt zwischen den beiden inzidenten Knoten repräsentieren, nennt sich ein **Konfliktgraph**.
Die chromatische Zahl benennt die minimale Anzahl von Gruppierungen, so dass es in keiner Gruppe Konflikte gibt.

BSP: Mehrfach belegte Gehege im Zoo

- **L**öwe
- **E**sel
- **T**iger
- **M**aus
- **P**hyton
- **B**är
- **G**orilla
- **Z**ebra
- **H**yäne
- **I**gel



Aufgabe 4: Konfliktgraph

Nach der Bundestagswahl müssen sich Ausschüsse immer montags um 12.00 Uhr konstituieren. Alle Mitglieder müssen anwesend sein, damit ein Ausschuss gebildet werden kann. Allerdings sind einige Mitglieder in mehreren Ausschüssen. Wieviele Wochen braucht man, damit sich auch der letzte Ausschuss konstituiert hat?

Lösung

Modelliert wird dieses Problem durch eine Konfliktgraph K: Jeder Ausschuss wird durch einen Knoten dargestellt und es gibt eine Kante zwischen zwei Ausschüssen, wenn sie ein gemeinsames Mitglied haben.
Gesucht ist dann eine Zerlegung von K , so dass alle Mengen unabhängig sind. Dabei soll die Anzahl der Mengen minimal sein. Das ist aber die chromatische Zahl von $\chi(K)$.

Aufgabe 5:

Existenz eines Algorithmus zur minimalen Färbung

Lässt sich für beliebigen, endlichen, ungerichteten und schlichten Graphen G eine minimale Färbung finden?

Lösung

Ja, aber der Aufwand!!
Alle Färbungen ausrechnen und dann die kleinste!!! Das ist ein (mindestens) exponentieller Algorithmus, da er bei Eingabe von Graphen mit n Knoten n^n und $\chi(G) \geq 2$ für mindestens $k = 2$ Farben die 2^n Abbildungen von der Knotenmenge die Farbenmenge überprüft.

Graphfärbung ist NP vollständig

Es ist nicht bekannt, ob es einen polynomiellen Algorithmus gibt, der das Färbungsproblem löst.

Greedy-Färbungen

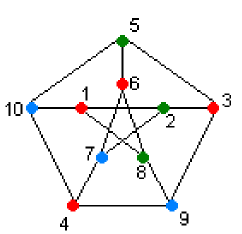
- Eine obere Schranke erhalten wir durch die Greedy-Färbung:

Algorithmus

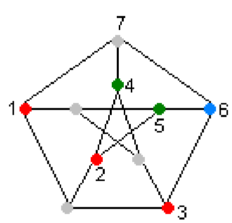
Sei $v_1, ..., v_n$ eine Ordnung der Knoten von G.
Definiere $c(v)$ von links nach rechts mit $c(v_j) =$ $min(\mathbb{N}^+ \setminus \{$ Farben, die schon bei Nachbarn von v_i verwendet wurden $\})$

BSP:

Die Greedy-Färbung hängt von der Nummerierung der Knoten ab:



$c:$		
	$1 \mapsto 1$	rot
	$2 \mapsto 2$	grün
	$3 \mapsto 1$	rot
	$4 \mapsto 1$	rot
	$5 \mapsto 2$	grün
	$6 \mapsto 1$	rot
	$7 \mapsto 3$	blau
	$8 \mapsto 2$	grün
	$9 \mapsto 3$	blau
	$10 \mapsto 3$	blau



$c:$		
	$1 \mapsto 1$	rot
	$2 \mapsto 1$	rot
	$3 \mapsto 1$	rot
	$4 \mapsto 2$	grün
	$5 \mapsto 2$	grün
	$6 \mapsto 3$	blau
	$7 \mapsto 4$	grau
	$8 \mapsto 4$	grau
	$9 \mapsto 4$	grau
	$10 \mapsto 4$	grau

Folgerung

Definition

Den Maximalgrad bezeichnen wir mit $\Delta(G) = max_{v \in V} d(v)$ und den Minimalgrad mit $\delta(G) = min_{v \in V} d(v)$. Der Graph G heißt k-regulär, wenn $d(v) = k$ für alle $v \in V$.

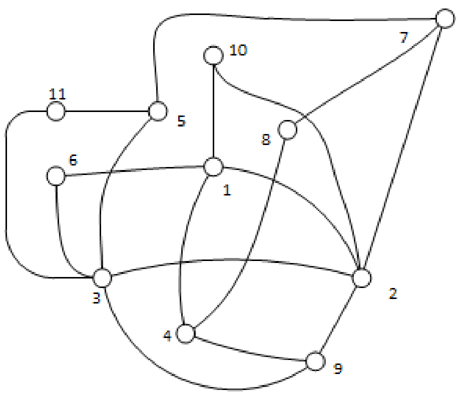
Satz

Es gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Beweis.
Die Greedy-Färbung benutzt für jeden Knoten die kleinste Farbe, die nicht schon ein Nachbar hat.
Jeder hat aber höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn.
$c(v) \leq d(v) + 1$ also $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

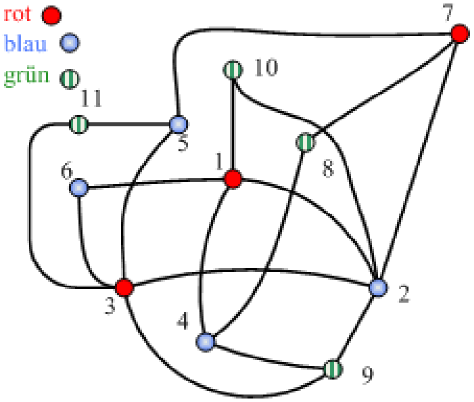
Aufgabe 6:

Färben Sie den Graphen mit Hilfe der Greedy-Färbung, wobei die Ordnung der Knoten von G durch die Nummerierung festgelegt ist :



Lösung

1: rot
2: blau
3: grün



Verbesserter Greedy

Algorithmus

Sei $v_1, ..., v_n$ eine Ordnung der Knoten von G, so dass gilt $i \leq j \Longrightarrow d(v_i) \geq d(v_j)$.
Definiere $c(v)$ von links nach rechts mit $c(v_j) = min(\mathbb{N}^+ \setminus \{$ Farben, die schon bei Nachbarn von v_i verwendet wurden $\})$

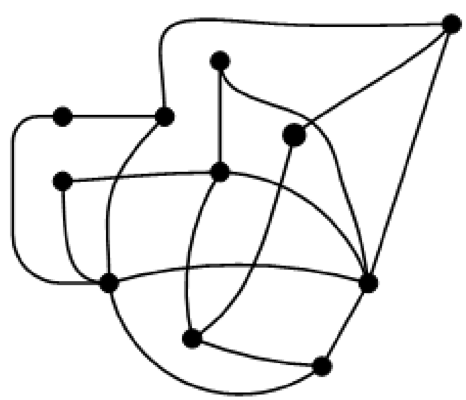
Färbungsalgorithmus ColorFirst

Algorithmus

Wiederhole, bis alle Knoten gefärbt sind:
Wähle eine bisher nicht verwendete Farbe, und färbe damit jeden noch ungefärbten Knoten, falls er nicht mit einem Knoten dieser Farbe verbunden ist.

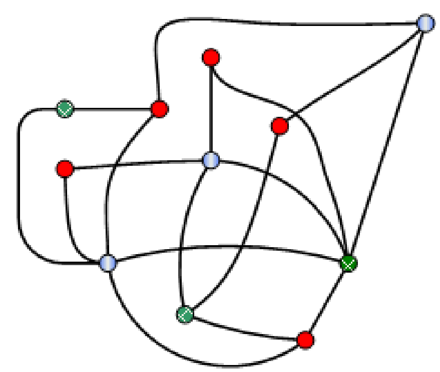
Aufgabe 7:

Färben Sie den Graphen mit Hilfe des Färbungsalgorithmus ColorFirst:



Lösung

Erst rot Dann blau Dann grün



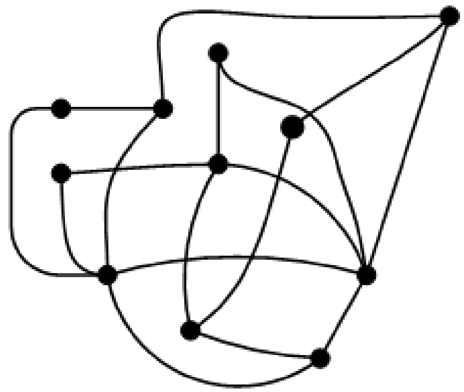
BFS-Färbung

Färbungsalgorithmus BFS

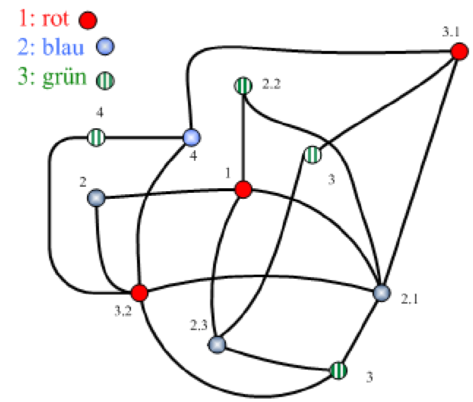
- Färbe ersten Knoten mit ”1”.
- Wiederhole, bis alle Knoten gefärbt sind:
  Markiere aktuellen Knoten.
  Färbe alle noch ungefärbten Nachbarn mit kleinster Farbe, die deren Nachbarn nicht haben.
  Wähle einen der unmarkierten Nachbarknoten.

Aufgabe 8:

Färben Sie den Graphen mit Hilfe des Färbungsalgorithmus BFS:



Lösung

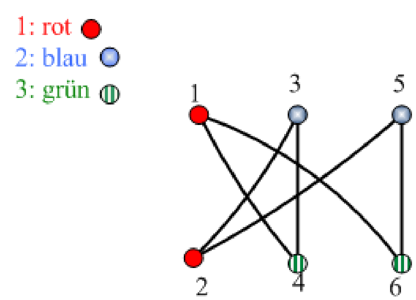


Aufgabe 9:

1. Zeigen Sie, dass die drei Färbealgorithmen nicht optimal sind.
   Siehe Def Greedy
2. Gibt es Graphen für die die Algorithmen optimal sind?

Lösung von Aufgabe 9

(Verbesserter) Greedy

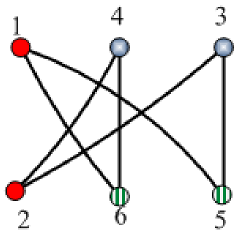
1. 

   ABER: für jeden Graphen gibt es eine Knotenordnung, so dass Greedy optimal ist.
2. Optimal für leere & vollständige Graphen,
   aber nicht für C_n, W_n, für Bäume ....

Lösung von Aufgabe 9

Color First

1. 1: rot
   2: blau
   3: grün

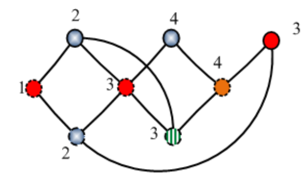


Optimal für leere & vollständige Graphen,
aber nicht für C_n, W_n, für Bäume ....

Lösung von Aufgabe 9

BFS

1. 1: rot
   2: blau
   3: grün
   4: orange



2. Optimal für leere& vollständige, Graphen, für C_n, W_n, für Bäume ....
3. und für bipartite Graphen, wieso??