LÖSUNGSSKIZZE zur Klausur vom 6. Juli 2010

Aufgabe I: .... **15 Punkte**
Bitte kreuzen Sie die richtige Antwort an, jeweils .... **3 Punkt**

1. Die chromatische Zahl von C_{15} ist

3	X		2			0			15	

2. Die Anzahl der Gerüste für K_5 sind

3	X		12			50			125	

3. Für einen schlichten, planaren Graphen mit den Knoten V, den Kanten E und den Flächen F gilt:

$\|E\| + \|V\| - \|F\| = 2$			$\|V\| - \|E\| + \|F\| = 2$	X
$\|V\| - \|E\| + \|F\| = 0$			$\|E\| - \|V\| + \|F\| = 0$	

4. Ein ungerichteter, schlichter, zusammenhängender Graph mit 8 Knoten, die folgende Knotengrade haben $(4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$

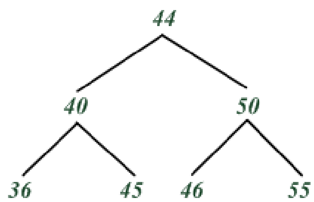
ist ein Baum.			hat genau einen Kreis.	
hat mindestens zwei Kreise.	X		existiert nicht.	

5. Ein planarer Graph hat immer als Minor den Graphen

K_3			$K_{2,2}$			K_1	X		$K_{3,3}$	

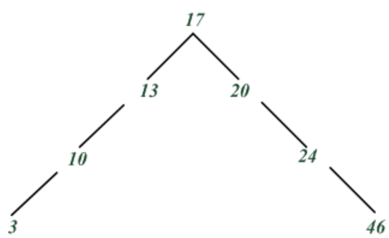
Aufgabe II: .... **15 Punkte**

1. Welcher der folgenden drei Bäume ist ein AVL-Baum?
   Bitte begründen Sie für jeden der drei Bäume Ihre Antwort.
   Lösung:

- 

ist ein AVL-Baum? .... ☐ JA oder ☒ NEIN

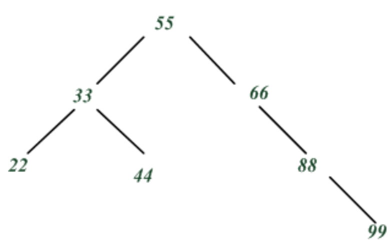
  denn es ist garkein balancierter Binärbaum, denn der Knoten „45“ muss rechts vom Knoten „44“ liegen. Begründung:

- 

ist ein AVL-Baum? ... ☐ JA oder ☒ NEIN

  denn es ist kein balancierter Binärbaum, denn der linke Teilbaum unter dem Konten „13“ hat die Höhe 2 und der rechte nur die Höhe 0.

  Begründung:

- 

ist ein AVL-Baum? ... ☐ JA oder ☒ NEIN

  denn es ist kein balancierter Binärbaum, denn der rechte Teilbaum unter dem Konten „66“ hat die Höhe 2 und der linke nur die Höhe 0.

  Begründung:

2. Zeigen Sie bitte:
   Wenn $G = (V, E)$ ein Baum ist, dann existiert für alle $u, v \in V$ ein eindeutiger Weg von u nach v.

   Lösung:
   Kontraposition: wenn kein eindeutiger Weg, dann kein Baum.
   Dann gibt es die Fallunterscheidung für „kein eindeutiger Weg", nämlich kein Weg oder mindestens zwei unterschiedliche Wege:

   (a) Gegeben $u, v \in V$ und es existiert kein Weg von u nach v, dann ist G nicht zusammenhängend und damit kein Baum

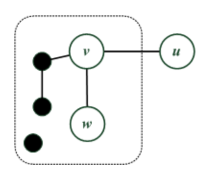
   (b) Gegeben $u, v \in V$ und es existieren zwei unterschiedliche Wege von u nach v, dann gibt es aber einen Kreis, nämlich von dem Knoten aus, an dem sich die Wege unterscheiden. Dann ist G nicht kreisfrei, also kein Baum.

Aufgabe III: .... **15 Punkte**
Begründen oder widerlegen Sie bitte die folgenden Aussagen.
Lösung:

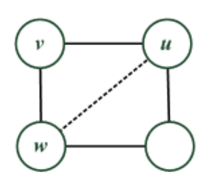
1. Ist G ein schlichter, zusammenhängender ungerichteter Graph mit mindestens drei Knoten und $G \neq K_n$, dann gibt es 3 Knoten u, v, w mit $(u, v) \in E$ und $(v, w) \in E$, aber $(u, w) \notin E$.

   Für G mit drei Knoten und zwei Kanten stimmt das.
   Wenn man nun weiter Kanten hinzufügt, gibt es 2 Fälle:

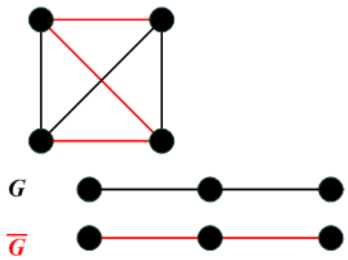
   (a) neue Kante mit neuem Knoten: dann ist aber diese Kante und eine inzidente schon der besagte Fall, da an dem neuen Knoten noch nix sonst hängt.



   (b) neue Kante, aber ohne neue Knoten, dann haben fehlen dem vollständigen Graphen mindestens zwei Kanten. Eine nach Voraussetzung, dass der Graph auch mit der neuen Kante nicht vollständig sein darf und eine wegen der Induktionsbehauptung.
   Dann kann die neue Kanten entweder die Knoten u und w verbinden oder nicht. In letzterem Fall bleiben $(u, v) \in E$ und $(v, w) \in E$, aber $(u, w) \notin E$.
   Ist die neue Kante u und w, dann gibt es wenigstens eine fehlende Kante, so dass dort der besagte Fall auftritt.



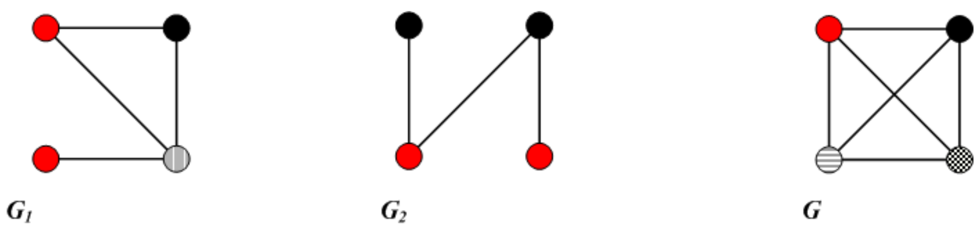
2. Es gibt einen Graph $G = (V, E)$ mit vier Knoten, so dass der Graph G und sein Komplement $\overline{G} = (V, (V \times V) \setminus E)$ isomorph sind.



G und $\overline{G}$ sind Komplemente und $G \cong \overline{G}$.

3. Gegeben zwei Graphen $G_i = (V, E_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ über der gleichen Knotenmenge, dann hat der Graph $G = (V, E_1 \cup E_2)$ die chromatische Zahl $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$.

GegenBSP:



denn $\chi(G_1) + \chi(G_2) = 3 + 2 = 5 \neq 4\chi(G)$

Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

Gegeben sei das folgende Spielbrett, bestehend aus 12 Kästchen, die Zahlen enthalten. Ein Spielzug besteht darin, eine Spielfigur senkrecht oder waagerecht um ein Kästchen zu verschieben. Dabei fallen Kosten von $|x - y|$ an, wenn das Ausgangskästchen x und das Zielkästchen y enthält. Die Kosten mehrerer Spielzüge werden aufaddiert.

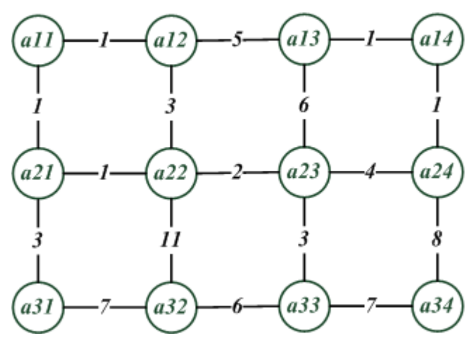
6	7	12	11
5	4	6	10
8	15	9	2

Ziel des Spieles ist mit möglich wenig Gesamtkosten von der linken, oberen Ecke in die rechte, untere Ecke des Spielfelds zu gelangen.

Lösung:

- Erläutern Sie bitte, wie Sie mit Hilfe der Graphentheorie dieses Problem lösen können:
  Die Kästchen werden durch die Knoten eines Graphen und die erlaubten Spielzüge durch Kanten dargestellt, wobei die Kosten der Spielzüge durch die Länge der Kanten wiedergegeben wird. Dann kann mit Dijkstra (oder einem anderen Algorithmus) der kürzeste Weg berechnet werden.

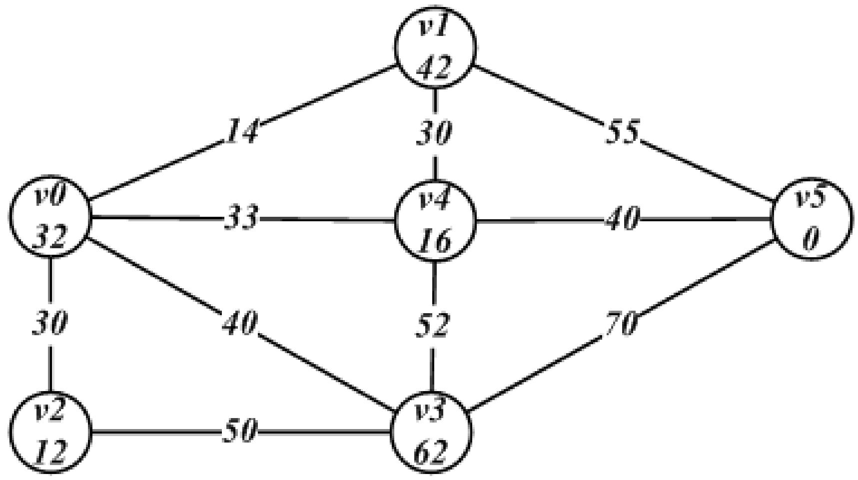
- und berechnen Sie dann bitte die Lösung:
  Der Graph ist links gegeben und mit Dijkstra ergibt sich der kürzeste Weg
  $a11 - a21 - a22 - a23 - a33 - a34$
  mit der Länge 14.



	$a11$	$a12$	$a13$	$a14$	$a21$	$a22$	$a23$	$a24$	$a31$	$a32$	$a33$	$a34$
$Entf$	0	1	6		1	4						
$Vorg$	$a11$	$a11$	$a12$		$a11$	$a12$						
OK	t	t			t							
$Entf$	0	1	6		1	2	4	8	4	13	7	
$Vorg$	$a11$	$a11$	$a12$		$a11$	$a21$	$a22$	$a23$	$a21$	$a22$	$a23$	
OK	t	t			t	t	t					
$Entf$	0	1	6	7	1	2	4	8	4	11	7	14
$Vorg$	$a11$	$a11$	$a12$	$a13$	$a11$	$a21$	$a22$	$a23$	$a21$	$a31$	$a23$	$a33$
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t

Aufgabe V: .... 15 Punkte

Berechnen Sie bitte mit Hilfe des A*-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. die Heuristik ist fest und im Knoten angegeben.



Lösung:

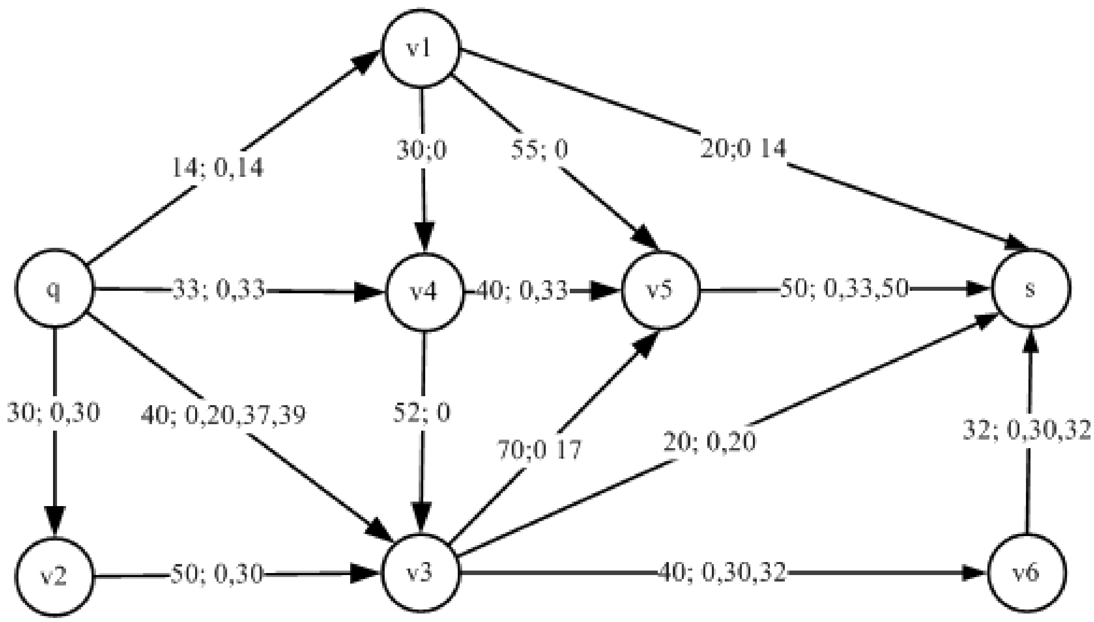
	v0	v1	v2	v3	v4	v5
Vorg	v0	v0	v0	v0	v0	~~v4~~ v1
h	32	42	12	62	16	0
g	0	14	40	40	33	~~73~~ 69
f	32	66	42	102	49	~~73~~ 69
CL	t	t	t		t	t

Der kürzeste Weg ist v0 - v1 -v5 mit der Länge 69.

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

Bitte bestimmen Sie in diesem Netzwerk den maximalen Fluss:

Lösung:



Knoten	q	$v2$	$v3$	$v6$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 30)$	$(+v2, 30)$	$(+v3, 30)$	$(+v6, 30)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v4$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 33)$	$(+v4, 33)$	$(+v5, 33)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v3$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 40)$	$(+v3, 20)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v1$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 14)$	$(+v1, 14)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v3$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 20)$	$(+v3, 20)$	$(+v5, 17)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v3$	$v6$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v3, 3)$	$(+v6, 2)$

Es gibt keine vergrößernde Wege mehr: $d = 116$

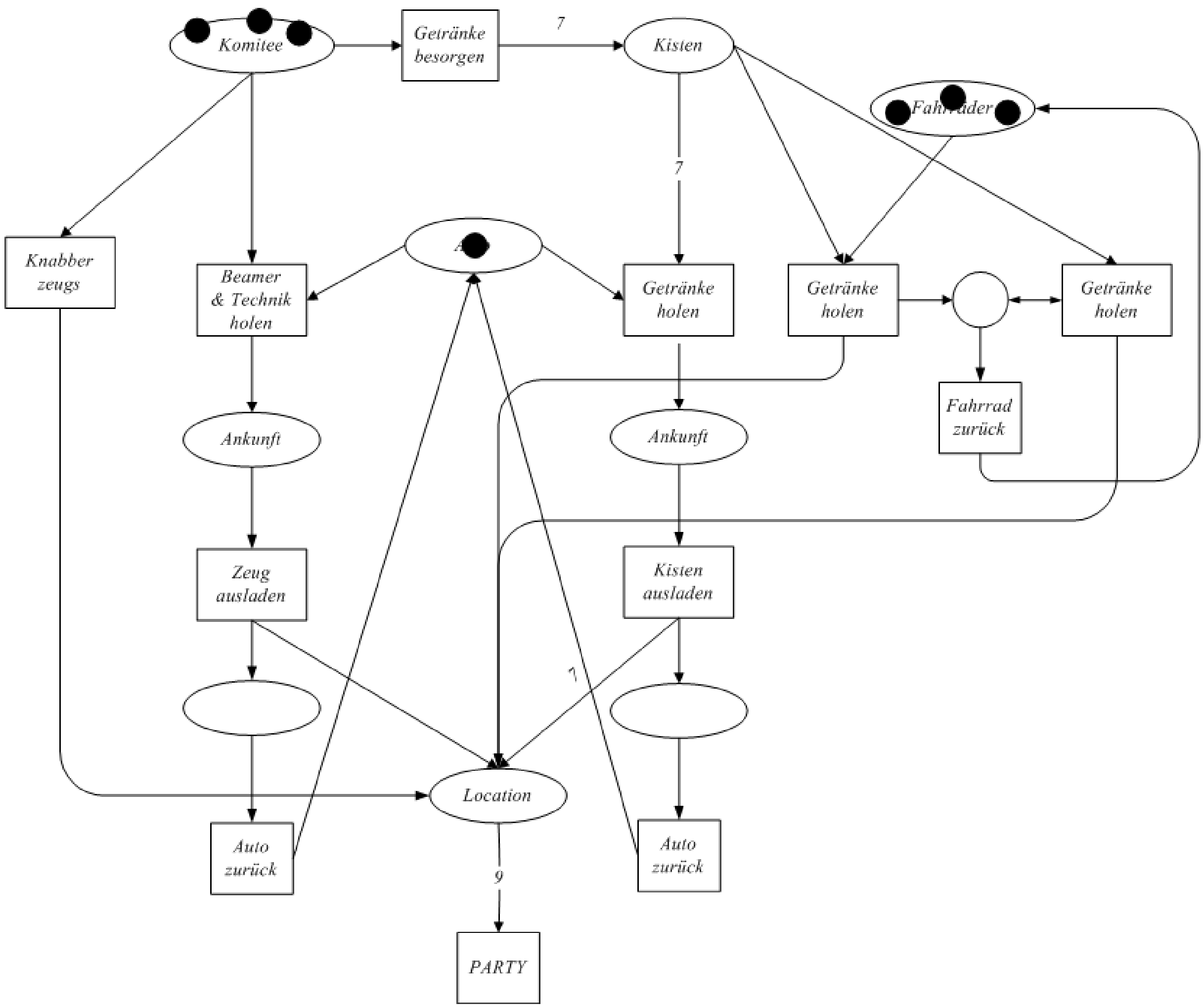
Aufgabe VII: .... 15 Punkte

Modellieren Sie bitte die folgende Situation mit eine ST-Netz.
Eine Party wird geplant. Dafür wird ein dreiköpfiges Komitee gebildet, einer kümmert sich um die Beamer & Technik, einer um Getränke und einer um Knabberzeug. Es steht jedoch nur ein Fahrzeug zur Verfügung, aber es können Sachen mit dem Fahrrad, von denen jeder eins hat, transportiert werden.

- Beamer & Technik zu beschaffen erfordert unter allen Umständen ein Fahrzeug, um das Zeug zur Location zu bringen. Dort muss dann das Zeug ausgeladen und das Auto zurück gegeben werden.
- Die 3 Kisten Bier und 4 Kisten Wasser können
  - entweder alle zusammen mit dem Auto
  - oder einzeln auf dem Fahrrad zur Location gebracht werden.
- Knabberzeug lässt sich zu Fuß mitbringen.

Schlussendlich müssen Auto und Fahrräder zurück sein und alles für die Party da sein, dann fängt die Party an!

Lösung:

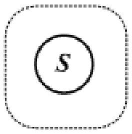


Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**
Geben Sie bitte ein Graphgrammatik an, die Kreise erzeugt, die minimal gefärbt sind.

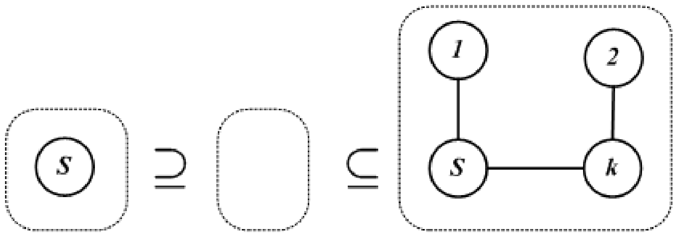
Lösung:

$KG = (C, G, R)$mit diesen Markierungen $C_V = \{S, k, 1, 2, 3\}$ und $N_V = \{S\}$ und $C_E = \{*\}$ und folgender Startgraph G und die Regeln $R = \{r_1, ...r_4\}$:

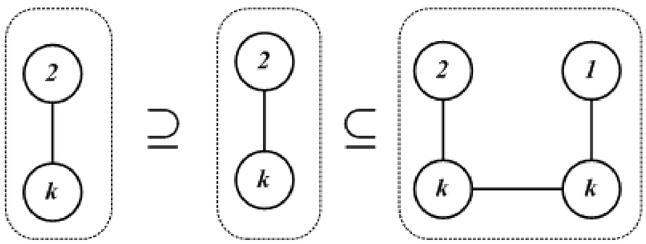
G:



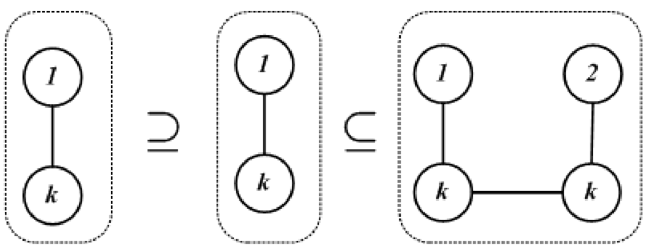
r_1 :



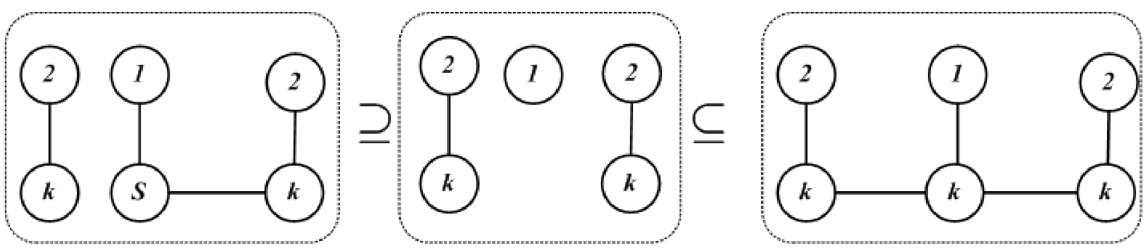
r_2 :



r_3 :



r_4 :



r_5 :