Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen

SoSe 2010

Probeklausur vom 6. Januar 2011
Deckblatt

J. Padberg

Bitte prüfen Sie zuerst, dass Ihr Klausurexemplar **9 Seiten** hat.

Bitte heften Sie die Lösungen an das ausgefüllte Deckblatt.

Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt, dass Sie abgeben, Ihren Namen und Matrikelnummer und vermerken Sie bitte an der Aufgabe, falls Sie zusätzliche Blätter zur Lösung benutzt haben.

Name	
Matrikelnummer	

DAUER: Für die Bearbeitung sind 90 Minuten vorgesehen.

Bewertung:

Klausurpunkte	Leistungspunkte
> 100	15
≥ 96	14
≥ 91	13
≥ 86	12
≥ 81	11
≥ 76	10
≥ 71	9
≥ 66	8
≥ 61	7
≥ 56	6
≥ 50	5
< 50	0-4

Erlaubte Hilfsmittel:

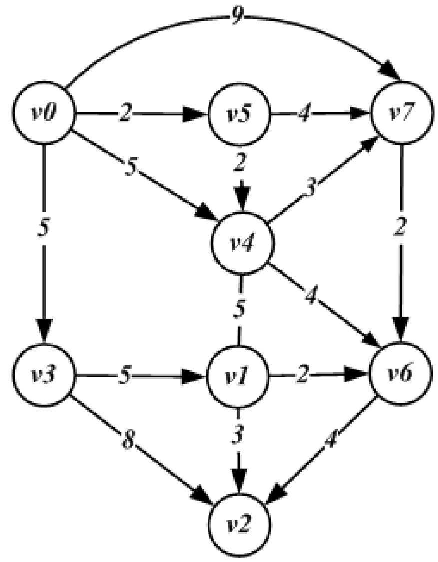
- 3 doppelseitig beschriftete Seiten mit Notizen
- Papier und Schreibgerät
- und sonst nichts:
  - keine Folienkopien
  - kein Skript
  - **keine elektronischen Geräte** (kein Taschenrechner, kein Laptop, kein PDA, kein Handy, etc.)

Erreichte Leistungspunkte:

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe I: .... **15 Punkte**

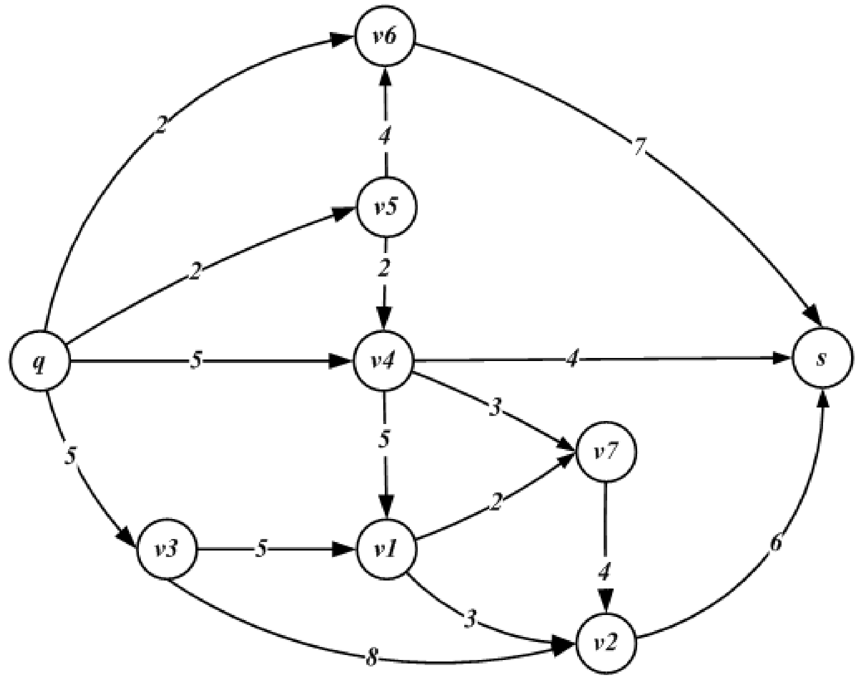
Berechnen Sie bitte die kürzesten Wege von $v0$ ausgehend mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus.



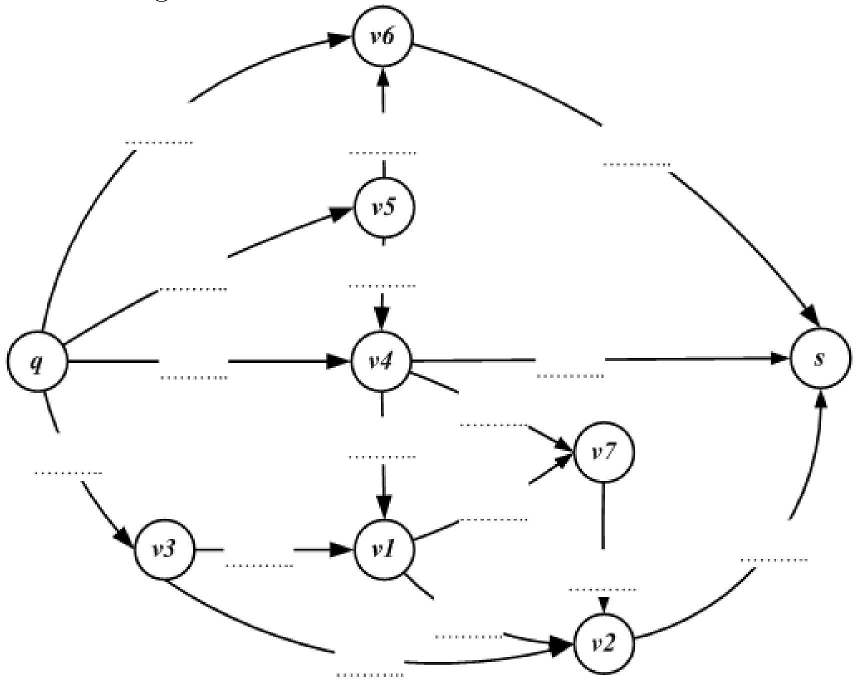
Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe II: .... **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte den optimalen Fluss in diesem Netzwerk mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson:



Sie dürfen gerne dies Netzwerk dafür nutzen.

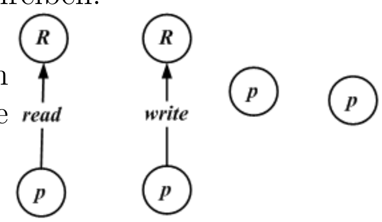


Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe III: .... **15 Punkte**

Modellieren Sie bitte mit Hilfe eines Graphersetzungssystem ein Synchronisationsprotokoll für zwei Ressourcen, bei dem beliebig viele Prozesse erzeugt und gelöscht werden. Diese Prozesse können auf die zwei unterschiedliche Ressourcen mit jeweils zwei Modi, lesend oder schreibend zugreifen. Lesender Zugriff ist für beliebig viele lesende Prozesse gleichzeitig erlaubt, aber schreibender nur, wenn die Ressource frei ist. Wenn ein Prozess schreibt, dann kann auch keiner andere Prozess lesen oder schreiben.

Tip: Ein Zustand mit zwei Ressourcen R und vier Prozessen p, von denen einer die eine Ressource liest und der andere die andere Ressource beschreibt, könnte so modelliert sein:



Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

1. Angenommen, das Department Informatik hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen.
   Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat?
   Die Gremien sind:
   G1 : Buth, Klauck, Esser, Wendholt ;
   G2 : Buth, Zukunft, Sarstedt, Neitzke;
   G3 : Padberg, Luck, Klauck;
   G4 : Luck, Padberg, Zukunft, Meisel, Fähnders;
   G5 : Neitzke, Sarstedt, Fähnders;
   G6 : Sarstedt, Esser, Hübner;

   Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Knotenfärbung zur Lösung. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. .... **10 Punkte**

Name	
Matrikelnummer	

Fortsetzung der Aufgabe IV:

2. Wahr oder Falsch?
   Jeweils .... **1 Punkt**

   (a) Es gibt Graphen mit $\chi(G) = 5$, die planar sind. ☐ wahr oder ☐ falsch

   (b) 3-färbbare Graphen sind immer planar. ☐ wahr oder ☐ falsch

   (c) Färbealgorithmen liefern immer die kleinste mögliche Färbung. ☐ wahr oder ☐ falsch

   (d) Alle planaren Graphen sind 4-färbbar. ☐ wahr oder ☐ falsch

   (e) Alle schlichten Graphen sind 5-färbbar. ☐ wahr oder ☐ falsch

Aufgabe V: .... **15 Punkte**

Eine Kante e eines Graphen G heißt Brücke, wenn sich die Zahl der Zusammenhangskomponenten von G durch Entfernen von e um eins erhöht. Es gilt folgender Satz:
Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

1. Geben Sie bitte ein Beispiel und begründen den Sie daran den Satz.

2. Beweisen Sie bitte den Satz.

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

Bitte begründen Sie Ihre Antwort, jeweils .... **5 Punkte**

1. Wie viele nicht-isomorphe Bäume mit fünf Blättern und keinen Knoten vom Grad zwei gibt es?
   Begründung:

2. Wenn ein Graph mit mindestens 6 Knoten planar ist, dann ist sein Komplement nicht planar. Wahr oder Falsch?
   Begründung:

3. Gegeben zwei Graphen $G_i = (V, E_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ über der gleichen Knotenmenge, dann hat der Graph $G = (V, E_1 \cup E_2)$ die chromatische Zahl $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Wahr oder Falsch?
   Begründung:

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Finden Sie bitte jeweils einen schlichten zusammenhängenden Graphen G mit 8 Knoten, der weder isomorph zu C_8 noch zu K_8 ist und der folgende Eigenschaften hat:

- G ist ein Hamilton-Graph aber kein Euler-Graph

- G ist ein Euler-Graph aber kein Hamilton-Graph

- G ist ein Euler-Graph und ein Hamilton-Graph

- G ist weder ein Euler-Graph noch ein Hamilton-Graph

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**

Beweisen Sie bitte, dass für einen ungerichteten, schlichten Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G)$ die chromatische Zahl $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ ist.
Tip: Induktion!