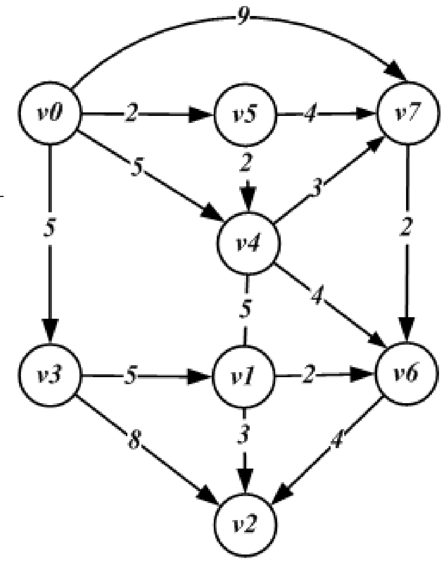
LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 6. Januar 2011

Aufgabe I: .... **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte die kürzesten Wege von $v0$ ausgehend mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus.

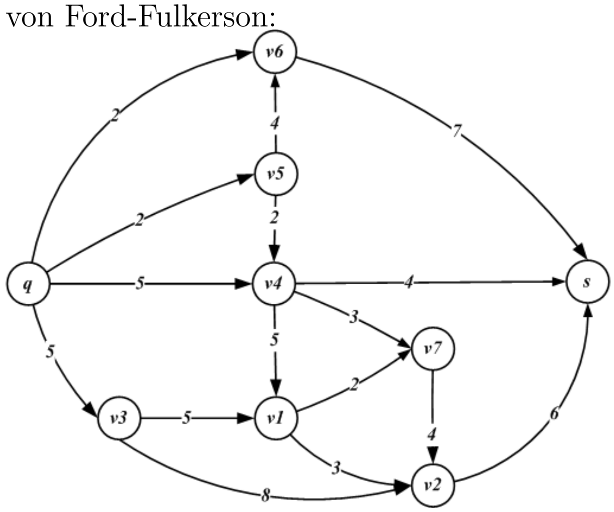


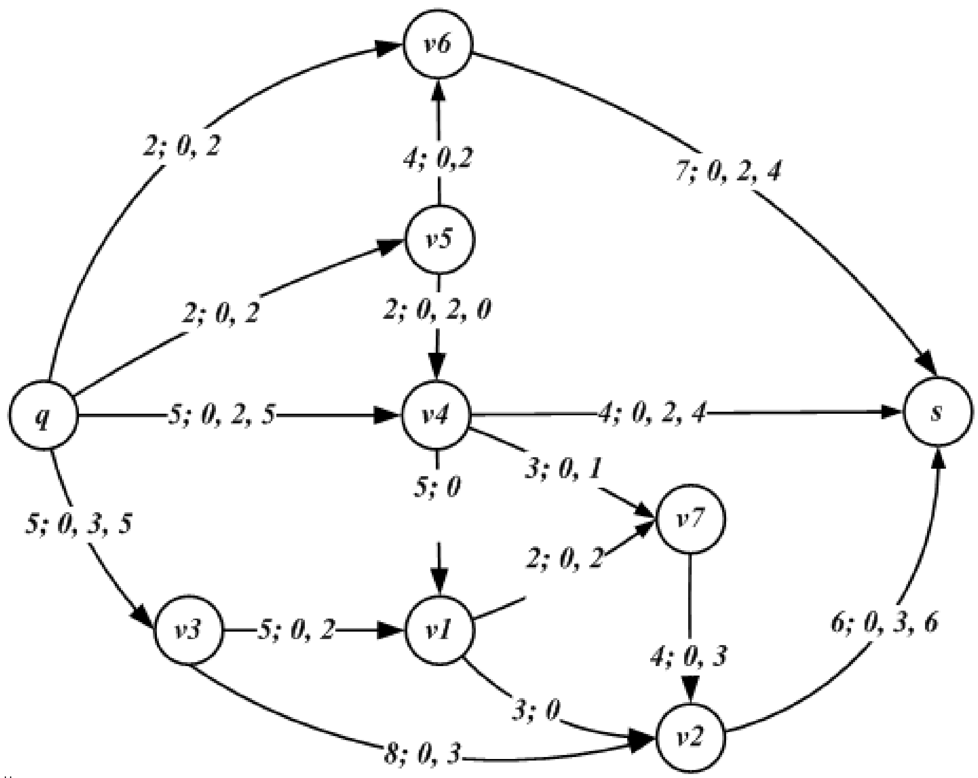
Lösung:

	$v0$	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$	$v7$
$Entf$	0	9	$\cancel{13}\,12$	5	$\cancel{5}\,4$	2	$\cancel{\emptyset}\,8$	$\cancel{\emptyset}\,6$
$Vorg$	0	$v4$	$\cancel{v3}\,v6$	$v0$	$\cancel{v0}\,v5$	$v0$	$\cancel{v4}\,v7$	$\cancel{v0}\,v5$
OK	t	t	t	t	t	t	t	t

Aufgabe II: .... **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte den optimalen Fluss in diesem Netzwerk mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson:





gekenn. Knoten	q	$v6$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 2)$	$(+v6, 2)$

gekenn. Knoten	q	$v5$	$v4$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 2)$	$(+v5, 2)$	$(+v4, 2)$

gekenn. Knoten	q	$v4$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 5)$	$(+v4, 2)$

gekenn. Knoten	q	$v4$	$v7$	$v2$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v4, 3)$	$(+v7, 3)$	$(+v2, 3)$

gekenn. Knoten	q	$v3$	$v2$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 5)$	$(+v3, 5)$	$(+v2, 3)$

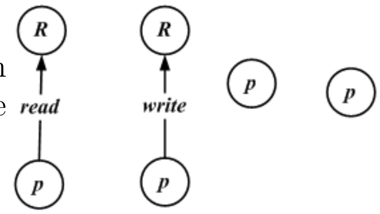
gekenn. Knoten	q	$v3$	$v1$	$v7$	$v4$	$v5$	$v6$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 2)$	$(+v3, 2)$	$(+v1, 2)$	$(-v7, 2)$	$(-v4, 2)$	$(+v5, 2)$	$(+v6, 2)$

Es gibt keine vergrößernden Wege, also ist das ein optimaler Fluss mit Flusswert $d = 14$.

Aufgabe III: .... **15 Punkte**

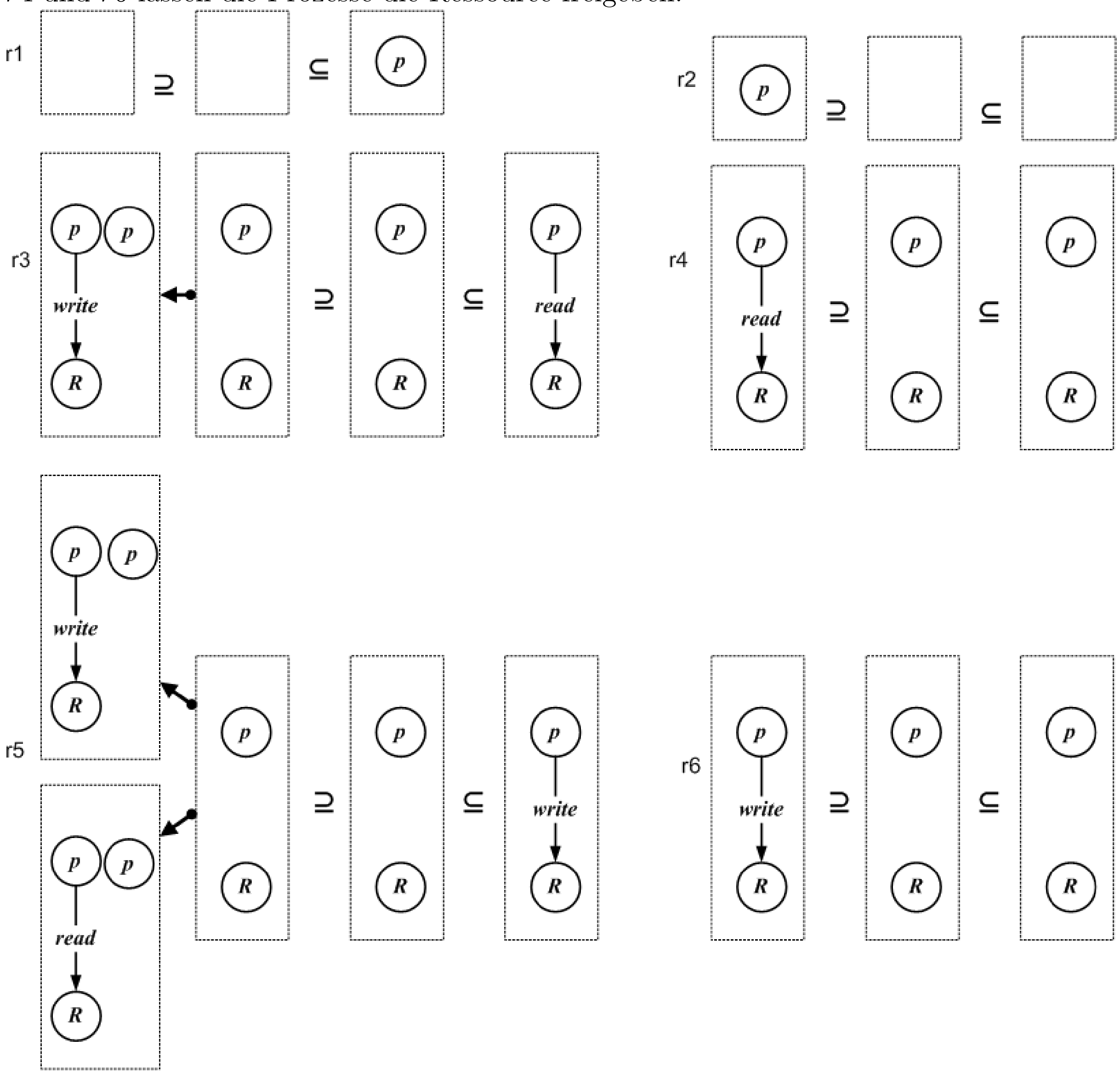
Modellieren Sie bitte mit Hilfe eines Graphersetzungssystem ein Synchronisationsprotokoll für zwei Ressourcen, bei dem beliebig viele Prozesse erzeugt und gelöscht werden. Diese Prozesse können auf die zwei unterschiedliche Ressourcen mit jeweils zwei Modi, lesend oder schreibend zugreifen. Lesender Zugriff ist für beliebig viele lesende Prozesse gleichzeitig erlaubt, aber schreibender nur, wenn die Ressource frei ist. Wenn ein Prozess schreibt, dann kann auch keiner andere Prozess lesen oder schreiben.

Tip: Ein Zustand mit zwei Ressourcen R und vier Prozessen p, von denen einer die eine Ressource liest und der andere die andere Ressource beschreibt, könnte so modelliert sein:



Lösung:

Der Startgraph enthält zwei Knoten mit dem Label R für die zwei Ressourcen. Sechs Regeln synchronisieren die Prozesse, die durch Knoten mit dem Label p modelliert werden.
$r1$ und $r2$ erzeugen bzw. löschen Prozesse.
$r3$ und $r5$ lassen Prozesse auf einer Ressource lesen bzw. schreiben, wobei die NACs die Randbedingungen sicherstellen.
$r4$ und $r6$ lassen die Prozesse die Ressource freigeben.



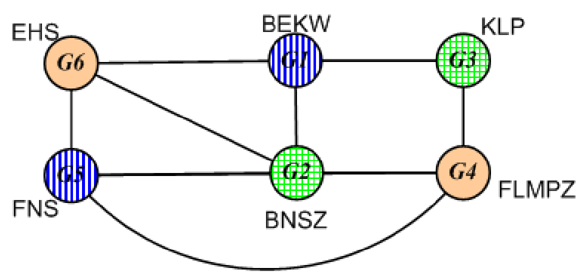
Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

1. Angenommen, das Department Informatik hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen.
   Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat?
   Die Gremien sind:
   G1 : Buth, Klauck, Esser, Wendholt ;
   G2 : Buth, Zukunft, Sarstedt, Neitzke;
   G3 : Padberg, Luck, Klauck;
   G4 : Luck, Padberg, Zukunft, Meisel, Fähnders;
   G5 : Neitzke, Sarstedt, Fähnders;
   G6 : Sarstedt, Esser, Hübner;

   Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Knotenfärbung zur Lösung. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. .... **10 Punkte**

   Lösung:

   Zur Modellierung der Problemstellung wird ein Konfliktgraph G mit 6 Knoten verwendet, so dass jeder Knoten einem Gremium entspricht. Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Gremien mindestens ein gemeinsames Mitglied haben, das auf der Kante eingetragen wird.

   Gremien, die benachbarten Ecken entsprechen, dürfen also nicht zur gleichen Zeit tagen. Die verschiedenen Sitzungstermine werden durch unterschiedliche Farben dargestellt, dann ist die chromatische Zahl $\chi(G)$ des Graphen gleich der kleinstmöglichen Anzahl an Terminen.

   In diesem Fall ist $\chi(G) = 3$. Es werden also 3 Sitzungstermine notwendig.

2. Wahr oder Falsch? Jeweils .... **1 Punkt**

   (a) Es gibt Graphen mit $\chi(G) = 5$, die planar sind. ..... ☐ wahr oder ☒ falsch

   (b) 3-färbbare Graphen sind immer planar. .... ☐ wahr oder ☒ falsch

   (c) Färbealgorithmen liefern immer die kleinste mögliche Färbung. .... ☐ wahr oder ☒ falsch

   (d) Alle planaren Graphen sind 4-färbbar. .... ☒ wahr oder ☐ falsch

   (e) Alle schlichten Graphen sind 5-färbbar. .... ☐ wahr oder ☒ falsch

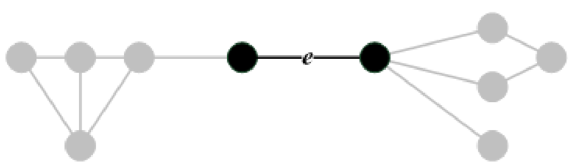
Aufgabe V: .... **15 Punkte**

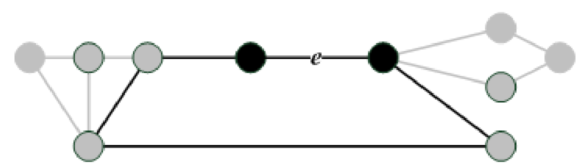
Eine Kante e eines Graphen G heißt Brücke, wenn sich die Zahl der Zusammenhangskomponenten von G durch Entfernen von e um eins erhöht. Es gilt folgender Satz:
Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

1. Geben Sie bitte ein Beispiel und begründen den Sie daran den Satz.
2. Beweisen Sie bitte den Satz.

Lösung:

1. In dem ersten Beispiel ist e eine Brücke, und es gibt keine zweite Verbindung zwischen den grauen Komponenten. Deswegen kann e auch nicht auf einem Kreis liegen. Im zweiten Beispiel gibt eine zweite Verbindung zwischen den grauen Komponenten und damit auch eine Kreis auf dem e liegt.





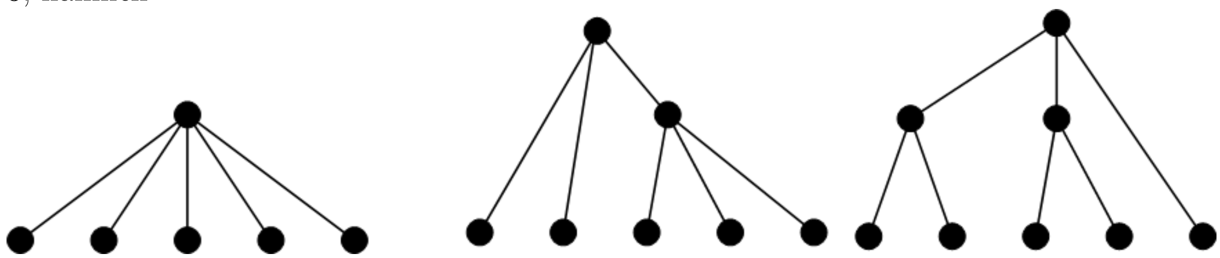
2. Zu zeigen ist:
   - Wenn eine Kante e eine Brücke ist, dann ist sie in keinem Kreis enthalten.
     Indirekter Beweis: Sei e in einem Kreis, dann gibt es von $s(e)$ nach $t(e)$ zwei Wege, nämlich e und den Rest des Kreises. Dann hat aber $G \setminus e$ genauso viele Komponenten wie G, also ist e keine Brücke.
   - Wenn eine Kante e in keinem Kreis enthalten ist, dann ist sie eine Brücke.
     Indirekter Beweis: Sei e keine Brücke, dann gibt es von $s(e)$ nach $t(e)$ in $G \setminus e$ einen Weg, in G gibt es auch diesen Weg und zusätzlich e, also eine Kreis.

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

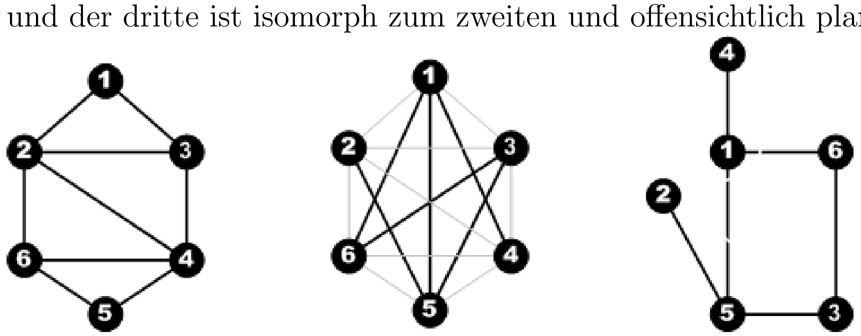
Bitte begründen Sie Ihre Antwort, jeweils .... **5 Punkte**

1. Wie viele nicht-isomorphe Bäume mit fünf Blättern und keinen Knoten vom Grad zwei gibt es?

   Begründung:
   3, nämlich

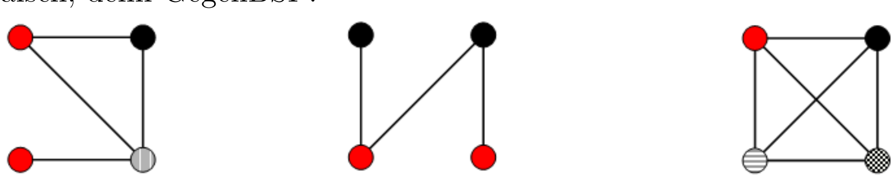


2. Wenn ein Graph mit mindestens 6 Knoten planar ist, dann ist sein Komplement nicht planar. Wahr oder Falsch?
   Begründung:
   Falsch, den der erste Graph ist planar, der zweite ist das Komplement des ersten und der dritte ist isomorph zum zweiten und offensichtlich planar.



3. Gegeben zwei Graphen $G_i = (V, E_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ über der gleichen Knotenmenge, dann hat der Graph $G = (V, E_1 \cup E_2)$ die chromatische Zahl $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Wahr oder Falsch?

   Begründung:
   Falsch, denn GegenBSP:



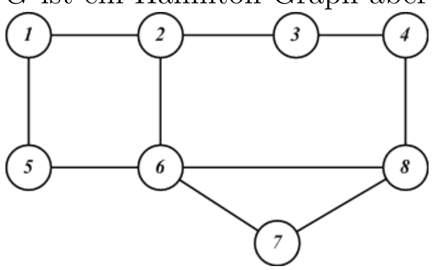
G_1 G_2 G

denn $\chi(G_1) + \chi(G_2) = 3 + 2 = 5 \neq 4\chi(G)$

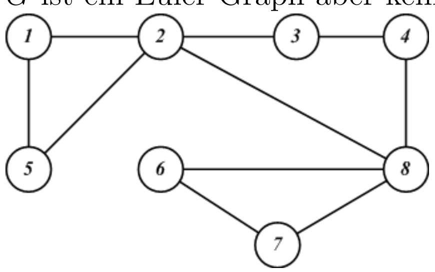
Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Finden Sie bitte jeweils einen schlichten zusammenhängenden Graphen G mit 8 Knoten, der weder isomorph zu C_8 noch zu K_8 ist und der folgende Eigenschaften hat:
Lösung:

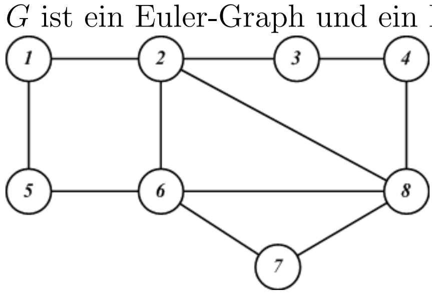
- G ist ein Hamilton-Graph aber kein Euler-Graph



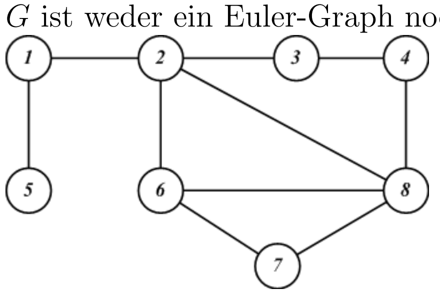
- G ist ein Euler-Graph aber kein Hamilton-Graph



- G ist ein Euler-Graph und ein Hamilton-Graph



- G ist weder ein Euler-Graph noch ein Hamilton-Graph



Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**

Beweisen Sie bitte, dass für einen ungerichteten, schlichten Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G)$ die chromatische Zahl $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ ist.
Tip: Induktion!
Lösung:
Vollständige Induktion über die Knotenzahl n und für alle Graphen mit Maximalgrad $\Delta(G)$.

IA $n = 1$. Maximalgrad ist 0 und wir färben mit einer Farbe, also $\chi(G) = 1 = 0 + 1 = \Delta(G) + 1$

IB Für alle Graphen mit n Knoten gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

IS Sei G ein Graph mit $n + 1$ Knoten und Maximalgrad $\Delta(G)$.

Wir entfernen aus G einen beliebigen Knoten v zusammen mit den höchstens $\Delta(G)$ inzidenten Kanten. Der Restgraph sei $G' = G \setminus v$:

Der Maximalgrad von G' ist höchstens so groß wie der von G, also $\Delta(G') \leq \Delta(G)$, und kann nach Induktionsvoraussetzung mit $\Delta(G')+1$ Farben gefärbt werden. Dabei benutzen die ursprünglichen Nachbarn von v höchstens $\Delta(G')$ Farben.
Jetzt können wir v mit einer der verbliebenen Farben färben und zusammen mit den entfernten Kanten wieder in den Graphen G' einfügen.
Das ist dann eine korrekte Färbung von G mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben, dann muss die kleinste Färbung auch kleiner sein, also $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.