Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen

Thema 08

Petrinetze

Julia Padberg

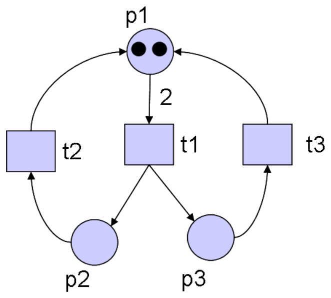
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Informelle Einführung von Stellen/Transitions-Netzen

- Was sind Petrinetze?
- Beispiel Verkehrsampel
- Grundbegriffe anhand eines Beispiels

Was sind Petrinetze ?

- Formalismus zur Modellierung von
  - Nebenläufigen Prozessen
  - Verteilten Systemen
- Graphische Beschreibungsmittel
  - Stellen
  - Transitionen
  - Kanten
  - Token
- Low- und High-Level Petrinetz-Formalismen
- Modellierung & Simulation
- Analyse & Verifikation



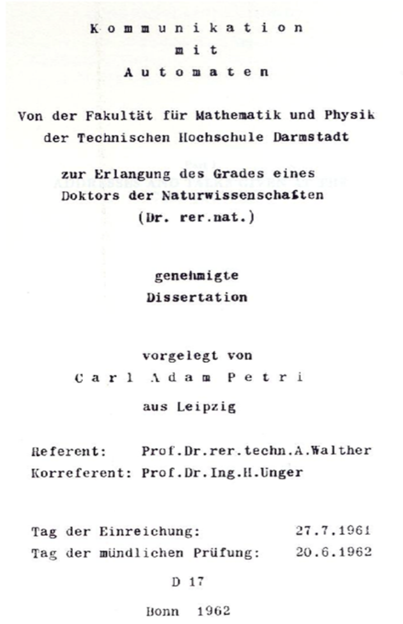
Wieso PetriNetze ???

Carl Adam Petri

(* 12. Juli 1926;†2. Juli 2010)

hat sie erfunden !!

1962 in seiner Dissertation



Kommunikation
mit
Automaten

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Technischen Hochschule Darmstadt

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer.nat.)

genehmigte
Dissertation

vorgelegt von
Carl Adam Petri
aus Leipzig

Referent: Prof.Dr.rer.techn.A.Walther
Korreferent: Prof.Dr.Ing.H.Unger

Tag der Einreichung: 27.7.1961
Tag der mündlichen Prüfung: 20.6.1962

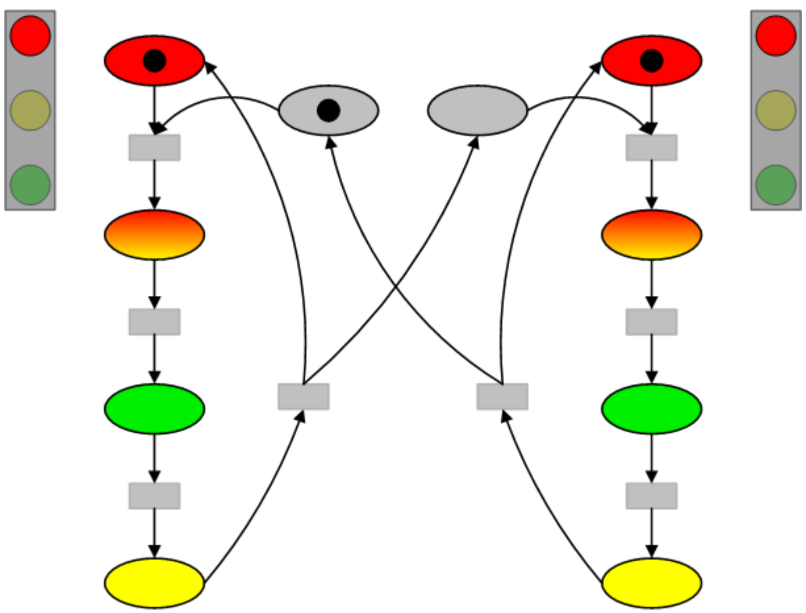
D 17

Bonn 1962

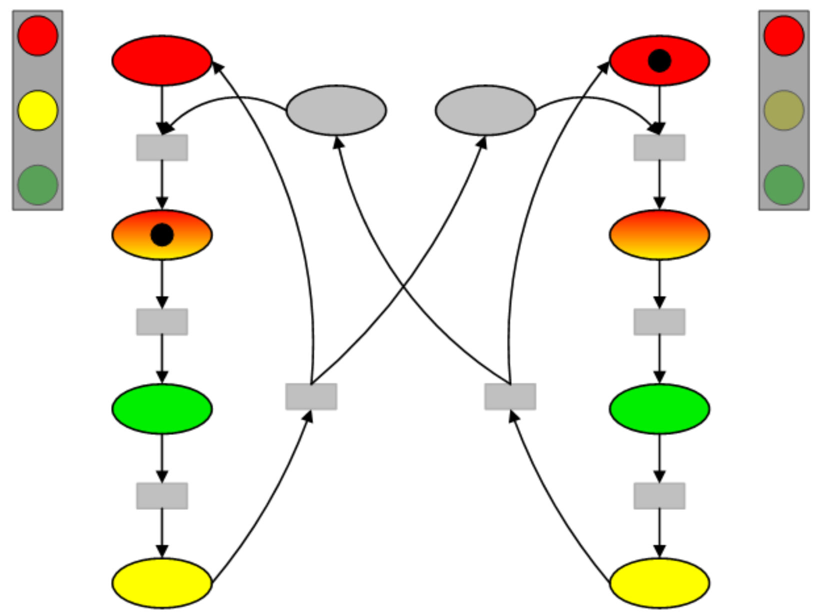
Übersicht über Netz-Formalismen

- (Low-Level) Petri-Netze
  - Token sind ununterscheidbar
  - z.B. elementare Netze, S/T-Netze
- High-Level Netze
  - Token sind Daten & verschiedene Schaltmodi
  - Coloured Netze, Algebraische High-Level Netze
- Netze mit Zeitmodellierung
  - Erweiterung um explizite / stochastische Zeit
  - Timed Netze, Stochastische Netze
- URL: http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/

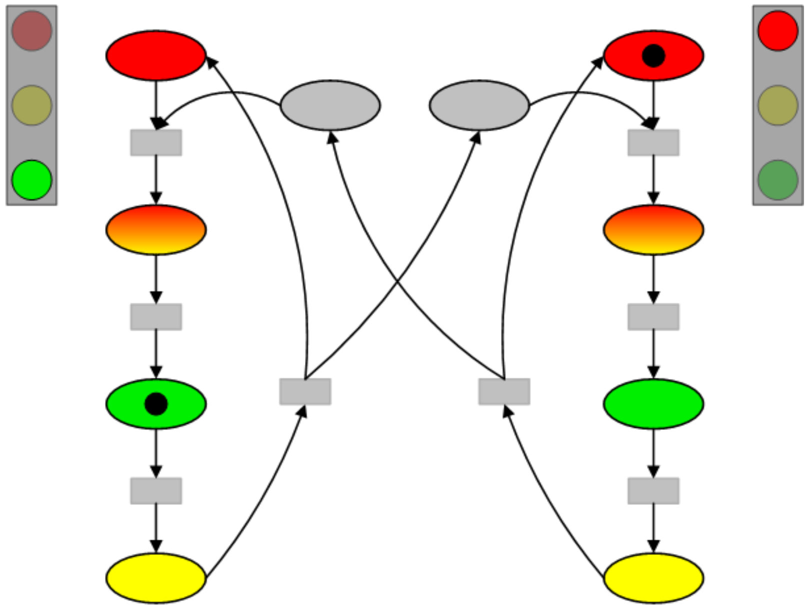
Petrinetz-Modell einer Verkehrsampel



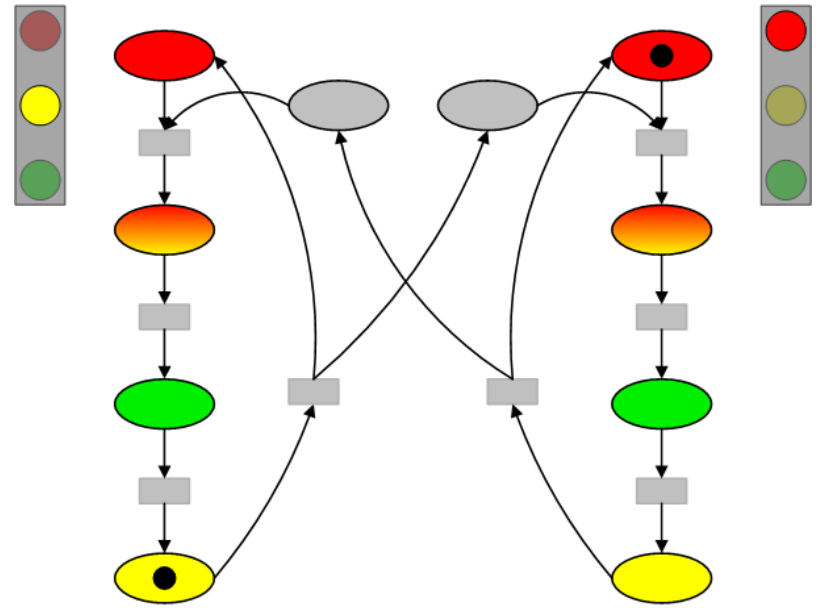
Petrinetz-Modell einer Verkehrsampel



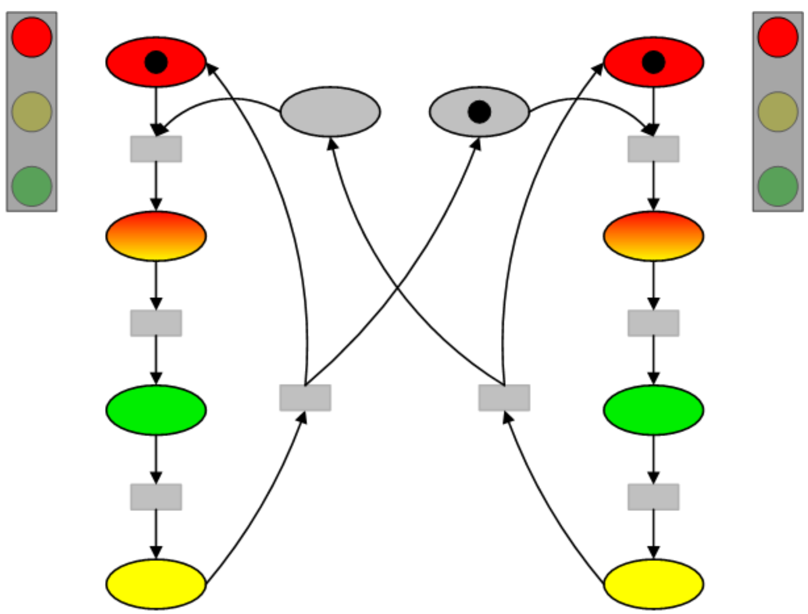
Petrinetz-Modell einer Verkehrsampel



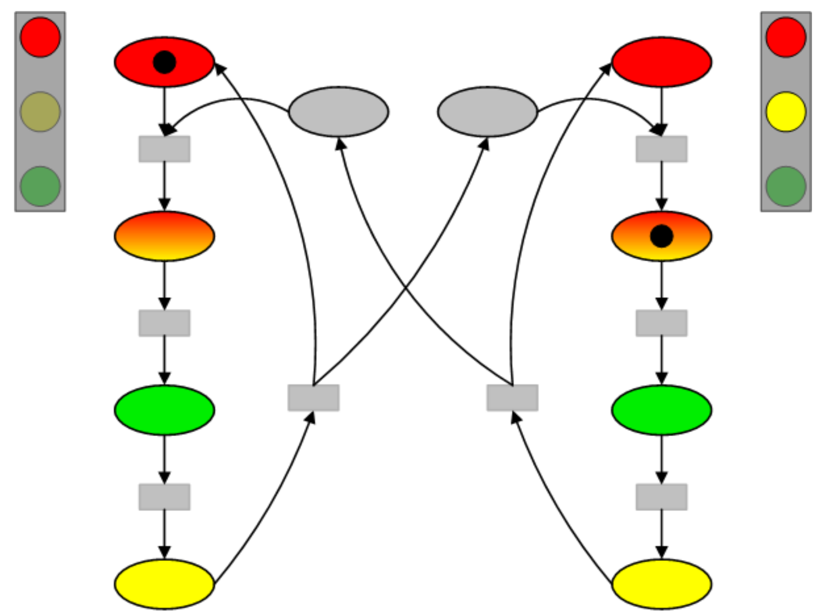
Petrinetz-Modell einer Verkehrsampel



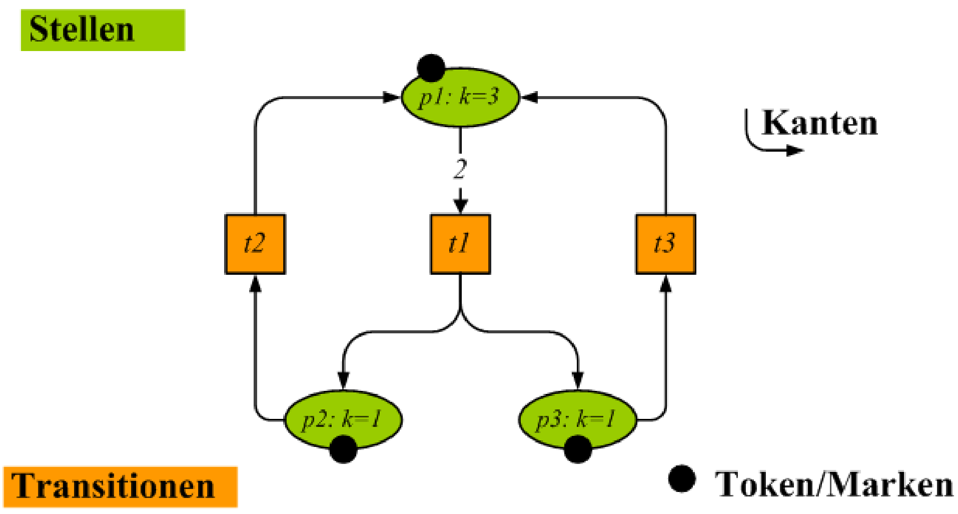
Petrinetz-Modell einer Verkehrsampel



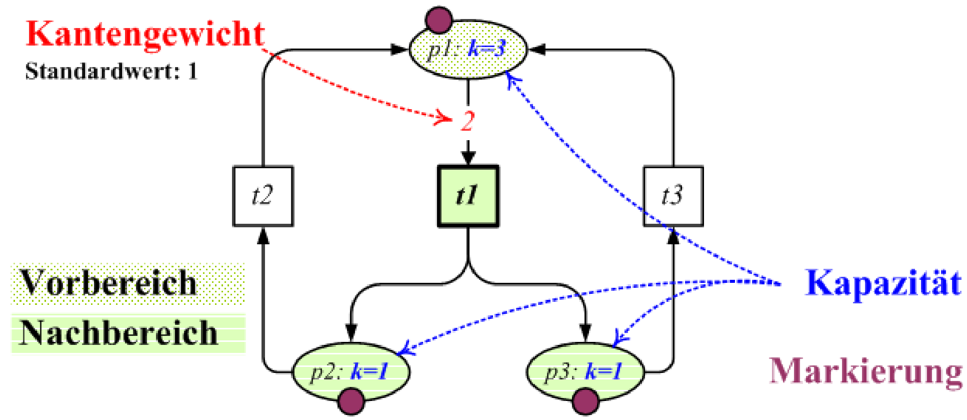
Petrinetz-Modell einer Verkehrsampel



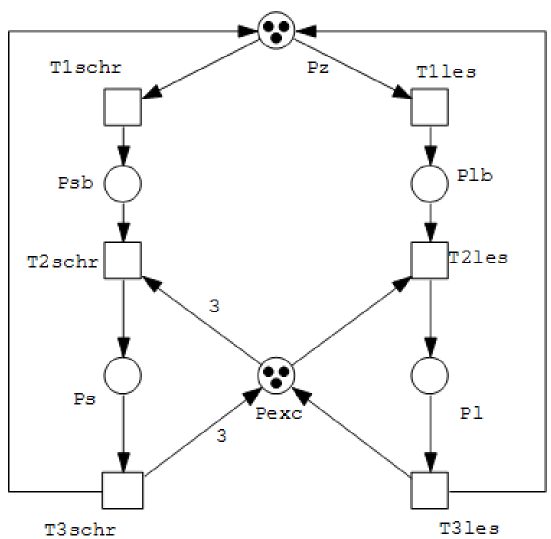
Begriffe am Beispiel



Begriffe am Beispiel

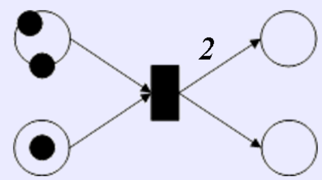


Leser-Schreiber-System

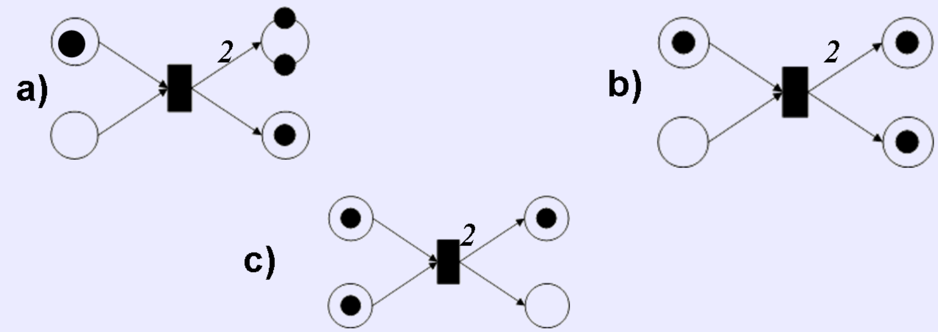


Aufgabe 1:

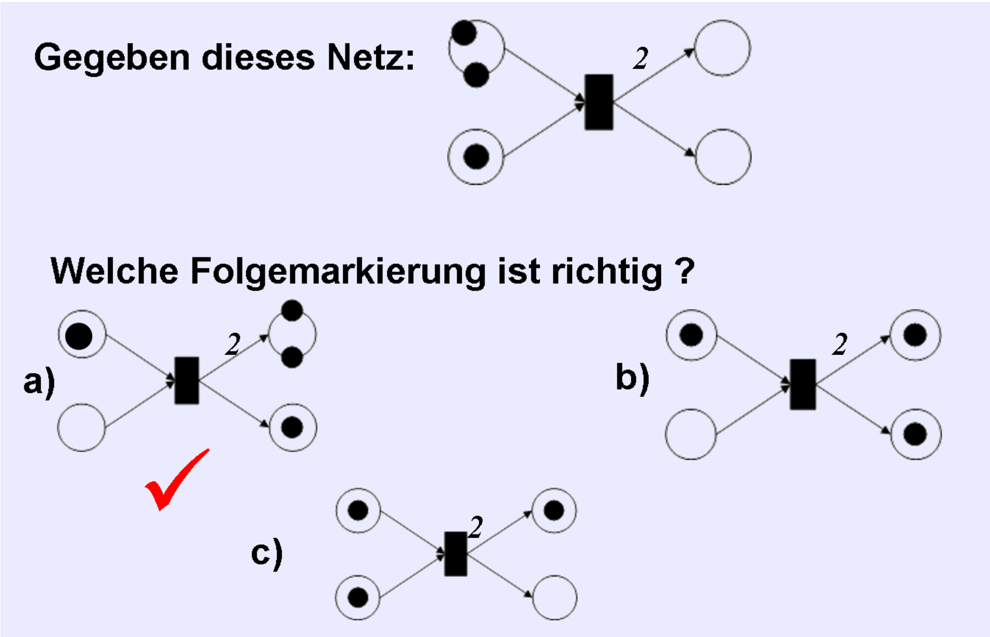
Gegeben dieses Netz:



Welche Folgemarkierung ist richtig ?

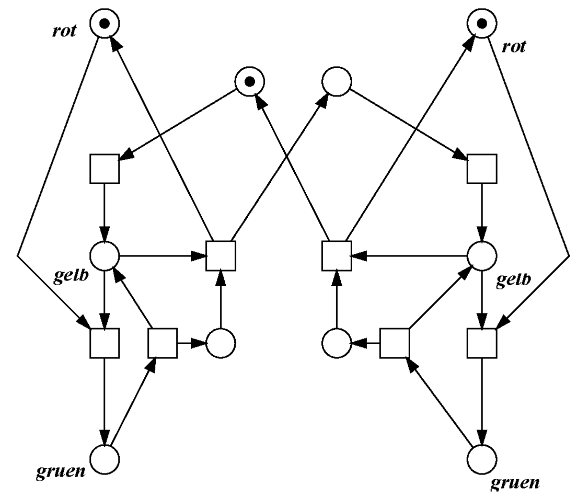


Lösung von Aufgabe 1



Aufgabe 2: Modellierung einer Ampel

Modellieren Sie jetzt bitte eine zweiseitige Baustellenampel, so dass es für die Lampen (rot – gelb – grün) der jeweiligen Ampel jeweils explizite Stellen gibt.



Grundlagen von Stellen/Transitions-Netzen

- Definition ohne und mit Kapazitäten
- Schaltverhalten

Klassische Definition

Definition (Markiertes S/T-Netz)

Ein (markiertes) *S/T-Netz* ist ein 4-Tupel $N = (P, T, W, M_0)$, für das gilt:

1. P und T sind Mengen, deren Elemente *Stellen (places)* bzw. *Transitionen* genannt werden mit $P \cap T = \emptyset$.
2. $W : (P \times T) \cup (T \times P) \to \mathbb{N}^+$ ordnet jeder Kante ihr *Kantengewicht* zu.
3. Und die Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbb{N}^+$ beschreibt die Verteilung der Token.

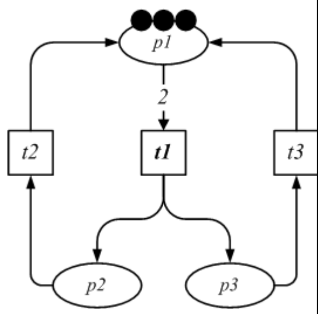
Aufgabe 3:

Beschreiben Sie das folgende S/T-Netz formal:

$N = (P, T, W, M_0)$ mit:
$P = \{p1, p2, p3\}$
$T = \{t1, t2, t3\}$

$$W(x,y) = \begin{cases} 2 & ; \text{falls } (x,y) = (p1,t1) \\ 1 & ; \text{falls } (x,y) \in \{(p2,t2),(p3,t3), \\ & (t1,p2),(t1,p3),(t2,p1),(t3,p1)\} \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$M_0(x) = \begin{cases} 3 & ; \text{falls } x = p1 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$



Verhalten von S/T-Netzen

Aktivierung & Schalten

Aktivierung

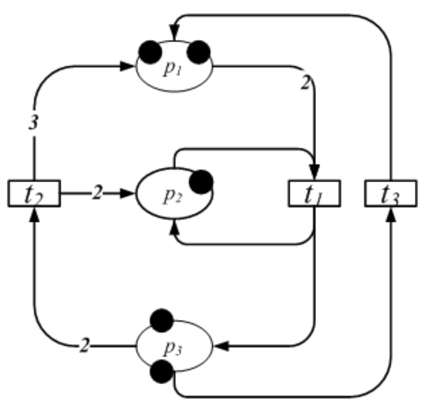
Eine Transition t ist unter einer Markierung M **aktiviert** $M[t\rangle$, wenn jede Stelle im Vorbereich der Transition mindestens soviele Token enthält, wie das Gewicht der entsprechenden eingehenden Kante vorschreibt.

Schalten

Eine Transition t **schaltet** $M[t\rangle M'$, wenn Token aus dem Vorbereich entfernt werden und Token im Nachbereich hinzugefügt werden. Die Anzahl der entfernten bzw. hinzugefügten Token wird NUR von den entsprechenden Kantengewichten bestimmt. M' ist die **Folgemarkierung**.

Aufgabe 4:

Welche Transitionen sind aktiviert und wie ist die jeweilige Folgemarkierung von m aus?



Lösung

- t_1 ist m-aktiviert und die Folgemarkierung sieht man nicht
- t_2 ist m-aktiviert und die Folgemarkierung sieht man nicht
- t_3 ist m-aktiviert und die Folgemarkierung sieht man nicht

Schalten

Definition (Vorbereich, Nachbereich)

Für einen Knoten $x \in P \cup T$ eines S/T-Netzes $N = (P, T, W)$
bezeichnet $\bullet x = \{y \mid W(y,x) > 0\}$ den *Vorbereich* und
$x\bullet = \{y \mid W(x,y) > 0\}$ den *Nachbereich* von x.

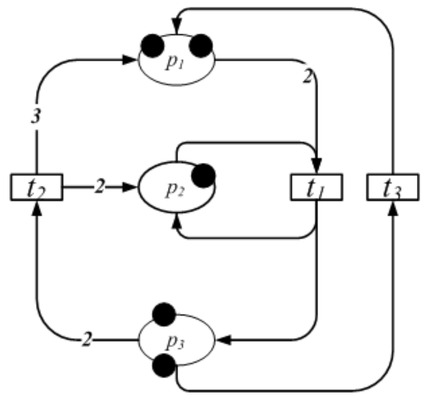
Definition (Schaltverhalten)

Sei $N = (P, T, W)$ ein S/T-Netz.

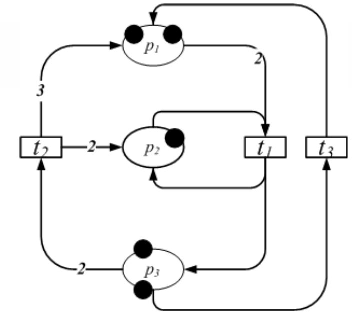
1. Eine Transition $t \in T$ heißt M-*aktiviert*, falls für alle $p \in \bullet t : M(p) \geq W(p,t)$ ... wird durch $M[t\rangle$ notiert.
2. Eine M-aktivierte Transition $t \in T$ bestimmt eine *Folgemarkierung* M' von M durch $M'(p) = M(p) - W(p,t) + W(t,p)$ für alle $p \in P$.
t schaltet von M nach M'
.... wird durch $M[t\rangle M'$ oder $M \xrightarrow{t} M'$ notiert.

Aufgabe 5:

Weisen Sie nach, dass die Transitionen t_1, t_2 und t_3 M-aktiviert sind und berechnen Sie bitte jeweilige Folgemarkierung von M?

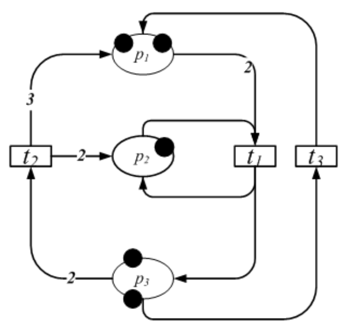


Lösung von Aufgabe 5



- $M[t_1\rangle$, denn $\bullet t_1 = \{p_1, p2\}$
  $M(p_1) = 2 \geq 2 = W(p_1, t_1)$ und
  $M(p_2) = 1 \geq 1 = W(p_2, t_1)$
  und $M[t_1\rangle M'$ mit
  $$M' : \begin{array}{l} p1 \mapsto M(p_1) - W(p_1, t_1) + W(t_1, p_1) = 2 - 2 + 0 = 0 \\ p2 \mapsto M(p_2) - W(p_2, t_1) + W(t_1, p_2) = 1 - 1 + 1 = 1 \\ p3 \mapsto M(p_3) - W(p_3, t_1) + W(t_1, p_3) = 2 - 0 + 1 = 3 \end{array}$$
- $M[t_2\rangle$, denn $\bullet t_2 = \{p_3\}$
  $M(p_3) = 2 \geq 2 = W(p_3, t_2)$
  und $M[t_2\rangle M''$ mit
  $$M'' : \begin{array}{l} p1 \mapsto M(p_1) - W(p_1, t_2) + W(t_2, p_1) = 2 - 0 + 3 = 5 \\ p2 \mapsto M(p_2) - W(p_2, t_2) + W(t_2, p_2) = 1 - 0 + 2 = 3 \\ p3 \mapsto M(p_3) - W(p_3, t_2) + W(t_2, p_3) = 2 - 2 + 0 = 0 \end{array}$$

Lösung von Aufgabe 5



- $M[t_3\rangle$, denn $\bullet t_3 = \{p_3\}$
  $M(p_3) = 2 \geq 1 = W(p_3, t_3)$
  und $M[t_3\rangle M'''$ mit
  $$M''' : \begin{array}{l} p1 \mapsto M(p_1) - W(p_1, t_3) + W(t_3, p_1) = 2 - 0 + 1 = 3 \\ p2 \mapsto M(p_2) - W(p_2, t_3) + W(t_3, p_2) = 1 - 0 + 0 = 1 \\ p3 \mapsto M(p_3) - W(p_3, t_3) + W(t_3, p_3) = 2 - 1 + 0 = 1 \end{array}$$

Markierungsgraph

- Markierungen bilden die Zustände eines Netzes
- Markierungsgraphen repräsentiert alle erlaubten Zustände
- zusammen mit den zwischen ihnen möglichen Schaltschritten

Definition (Markierungsgraph)

Der *Markierungsgraph* $MG = (MV, ME)$ eines S/T-Netzes $N = (P, T, W)$ ist gegeben durch

- die Knoten *(engl. vertices)* $MV = \{M \mid M : P \to \mathbb{N}^+ \text{ ist Markierung für } N\}$ und
- die Kanten *(eng. edges)* $ME = \{M \xrightarrow{t} M' \mid t \in T \wedge M[t\rangle M'\}$, wobei die Kanten als 3-stellige Relation $ME \subseteq MV \times T \times MV$ aufgefasst werden.

Erreichbarkeitsgraph

- Erreichbarkeitsmenge ist die Menge aller von M aus erreichbaren Markierungen gegeben durch:

$$[M\rangle := \{M' \mid M \xrightarrow{*} M' \in MG\}$$

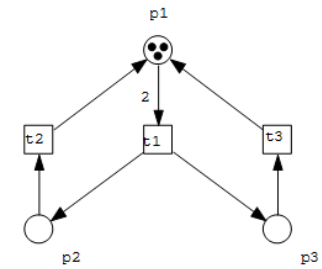
Definition (Erreichbarkeitsgraph)

Der *Erreichbarkeitsgraph* $EG = (EG_V, EG_E)$ eines markierten Netzes N mit M_0 ist der kleinste Teilgraph des Markierungsgraphen $MG = (MG_V, MG_E)$ für das unmarkierte Netz N, so dass gilt:

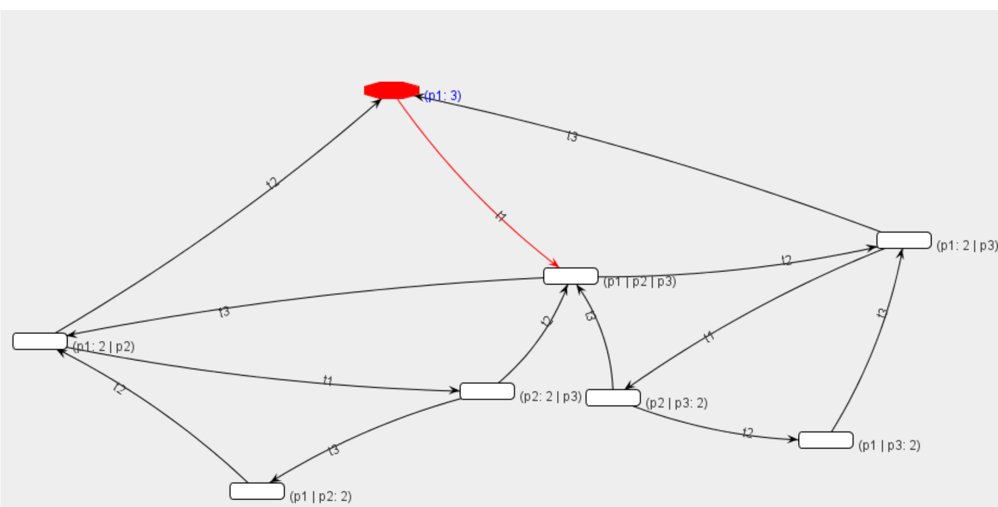
- Die Knoten $EG_V = [M_0\rangle$ sind alle von der Anfangsmarkierung aus zu erreichenden Markierungen.
- Für alle $M \in EG_V$ und $M \xrightarrow{t} M' \in MG_E$ ist auch $M \xrightarrow{t} M' \in EG_E$.

Aufgabe 6:

Geben Sie bitte den Erreichbarkeitsgraphen von diesem Netz an.

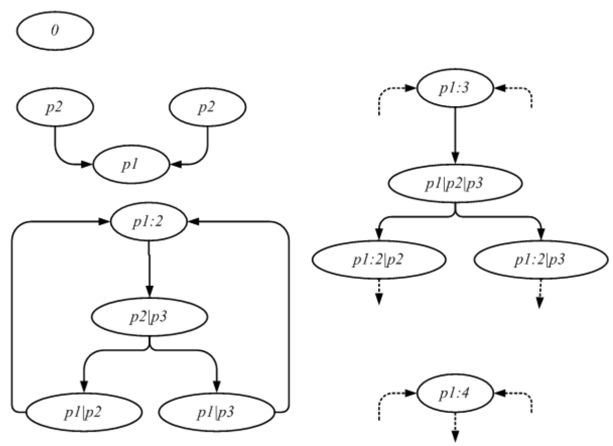


Lösung von Aufgabe 6



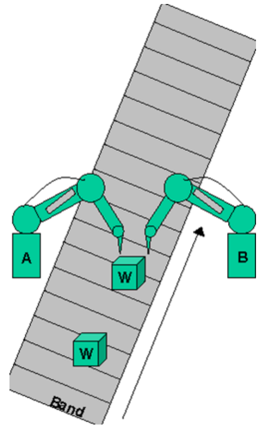
Aufgabe 7:

Welche Unterschiede gibt es zwischen Markierungs- und Erreichbarkeitsgraph?

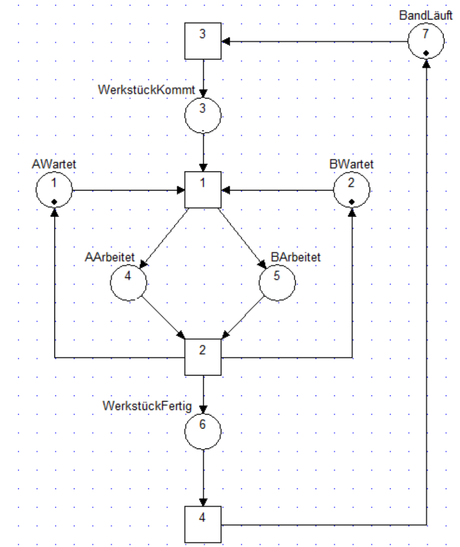


Aufgabe 8:

Ein Werkstück W muss gleichzeitig von Maschine A und von Maschine B bearbeitet werden.
Entwickeln Sie ein geeignetes Petrinetz für diesen Bearbeitungsprozess!
Welche Anfangsmarkierung gibt es in Ihrem Modell?



Lösung von Aufgabe 8



S/T-Netz mit Kapazitäten

Für die Modellierung ist es wesentlich komfortabler, lassen sich obere Grenzen für die Anzahl der Token auf einer Stelle angeben. Diese obere Grenze nennt man Kapazitäten.

Definition

Ein *S/T-Netz* mit Kapazitäten ist ein 4-Tupel $N = (P, T, W, K)$ für das gilt:

1. (P, T, W) ist S/T-Netz.
2. $K : P \to \mathbb{N}^{+\omega}$ erklärt eine (möglicherweise unbeschränkte) *Kapazität* für jede Stelle.

$\mathbb{N}^{+\omega}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen inklusive ω, das für unendlich steht. Dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$ das folgende:

$$n < \omega \text{ und } \omega = \omega + n = \omega - n = n \cdot \omega$$

Markierungen und Schaltverhalten mit Kapazitäten

Definition (Markierungen und Schaltverhalten mit Kapazitäten)

Sei N ein S/T-Netz mit Kapazitäten.

1. Für eine Markierung $M : P \to \mathbb{N}^+$ muss für alle Stellen $p \in P$ gelten: $M(p) \leq K(p)$.
2. Eine Transition $t \in T$ ist M-*aktiviert*, falls für alle $p \in \bullet t : M(p) \geq W(p, t)$ und **zusätzlich** für alle $p \in t\bullet : M(p) + W(t, p) \leq K(p)$ gilt.

Eigenschaften von S/T-Netzen

- Beschränktheit
- Erreichbarkeit
- Lebendigkeit
- Verklemmung
- Verklemmungsfreiheit
- Reversibilität

Beschränktheit

Definition (Beschränktheit)

Sei N_{M_0} ein markiertes Netz und EG sein Erreichbarkeitsgraph. Eine Stelle $p \in P$ heißt *beschränkt*, falls es eine Zahl $n \in \mathbb{N}^+$ gibt, so dass für alle Markierungen $M \in EG$ gilt: $M(p) \leq n$. Das Netz N_{M_0} heißt beschränkt, falls alle Stellen $p \in P$ beschränkt sind.

Beschränktheit von Stellen und markierten Netzen ist entscheidbar.

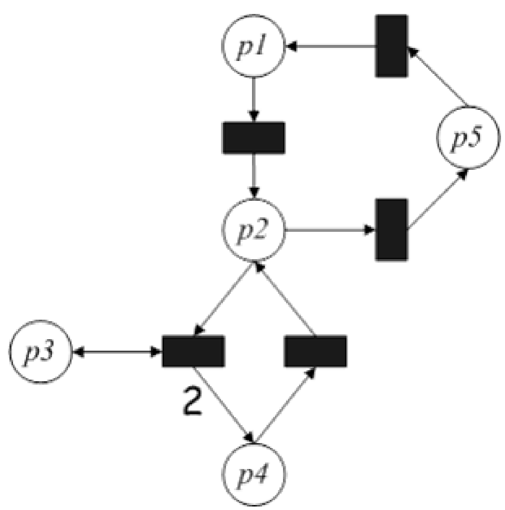
Satz (Beschränktheit)

Für endliche markierte Netze N_{M_0} gilt: N_{M_0} ist beschränkt gdw. der Erreichbarkeitsgraph EG von N_{M_0} endlich ist.

Aufgabe 9:

Ist das Netz beschränkt für

- $M_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$? JA
- $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$? NEIN



Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Sei N ein S/T-Netz und MG sein Markierungsgraph. Eine Transition $t \in T$ heißt von $M \in MG$ aus erreichbar, kurz M-erreichbar, falls in MG ein Pfad $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M''$ existiert.
Eine Markierung M eines markierten Netzes N_{M_0} heißt **erreichbar**, falls $M \in EG$, oder anders ausgedrückt, falls $M \in [M_0\rangle$, d. h. es gibt einen Pfad $M_0 \xrightarrow{*} M \in MG$.

Lebendigkeit

Lebendigkeit

Sei N ein S/T-Netz und MG sein Markierungsgraph, M_0 eine Anfangsmarkierung für N und EG der entsprechende Erreichbarkeitsgraph für N_{M_0}. Dann heißt

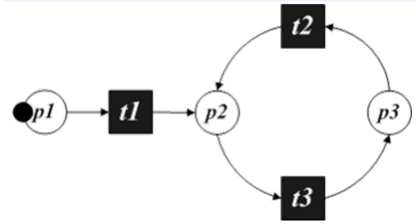
- eine *Markierung* $M \in MG$ **lebendig** in N bzw. N_{M_0}, falls jede Transition $t \in T$ M-erreichbar ist.
- eine *Transition* $t \in T$ **lebendig** in N_{M_0}, wenn sie für alle Markierungen $M \in EG$ M-erreichbar ist.
- das *markierte Netz* N_{M_0} *lebendig*, wenn alle Transitionen $t \in T$ lebendig sind.

- Eine Transition $t \in T$ heißt **tot** in einer Markierung M, wenn es kein $M' \in [M\rangle$ gibt, so dass t in Markierung M' aktiviert ist.

Aufgabe 10:

Geben Sie bitte ein Netz an, so dass wenigstens eine Transition weder lebendig noch tot ist.

Lösung



Merke

t tot $\Longrightarrow$ t nicht lebendig, aber nicht umgekehrt.

Verklemmung

oder auch Deadlock

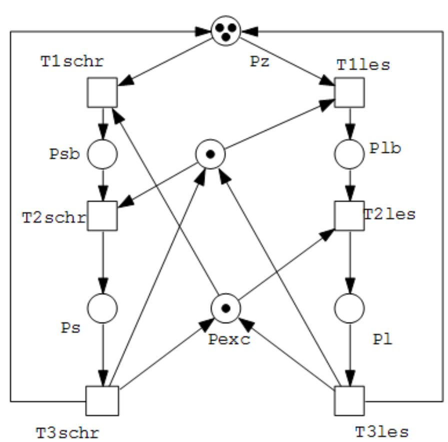
Verklemmung/Verklemmungfreiheit

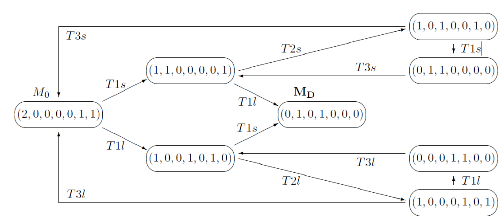
Sei N ein markiertes S/T-Netz,
dann heißt eine Markierung $M \in MG$ **Verklemmung**,

wenn kein $t \in T$ M-aktiviert ist.

N heißt **verklemmungsfrei** (auch: schwach lebendig), falls N keine Verklemmung $M \in EG$ besitzt.

Beispiel





Zusammenhang Lebendigkeit & Verklemmungsfreiheit

Sei (N, M_0) markiertes S/T-Netz mit $T \neq \emptyset$, dann gilt

Wenn (N, M_0) lebendig ist, dann ist (N, M_0) auch verklemmungsfrei.

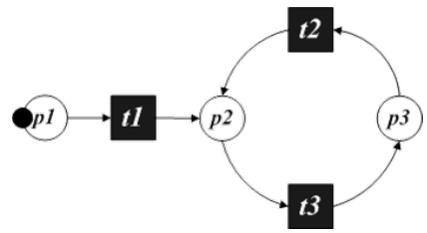
Bemerkung

Die Umkehrung gilt **nicht**.

Aufgabe 11:

Geben Sie bitte ein S/T-Netz an, dass verklemmungsfrei ist, aber nicht lebendig. Versuchen Sie bitte es nachzuweisen.

N verklemmungsfrei, wenn kein $M \in EG$, so dass kein $t \in T$ M-aktiviert ist.
N lebendig, wenn alle Transitionen M-erreichbar ist.



Für M_1 mit $M_0[t_1 > M_1 = (0, 1, 0)$ ist t_1 nicht mehr erreichbar, also (N, M_0) nicht lebendig.
(N, M_0) verklemmungsfrei, denn:
$(100)[t_1 > (010)[t_3 > (001)[t_2 > (010)$
und mehr Markierungen gibt es nicht

EG & Lebendigkeit

Ist der EG eines Netzes N stark zusammenhängend und es gibt eine M_0-erreichbare Transition $t \in T$, dann ist N verklemmungsfrei.

Ist der EG eines Netzes N stark zusammenhängend und gibt es für jede Transition $t \in T$ eine mit t beschriftete Kante im EG, dann ist N lebendig.

Hat der EG eines Netzes N eine Senke, dann ist N nicht verklemmungsfrei.

und weiteres ...

... für einige weitere Semester

- andere Netztypen
- weitere Eigenschaften
  Invarianten
  Fallen, Siphons
- Anwendungen
- Hierarchiekonzepte
- Transformation von Netzen

Zusammenfassung Petrinetze

- Defintion, Schaltverhalten
- Schaltsemantik
- Kapazitäten
- Eigenschaften