LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 7. Januar 2013

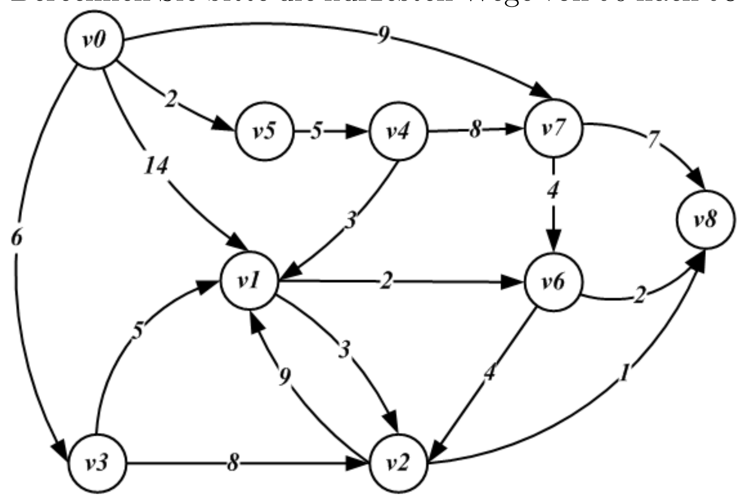
Aufgabe I: .... **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?
Jeweils .... **1 Punkte**

1. Es gibt schlichte Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| - 1 = |E|$, die keine Bäume sind. .... [X] wahr oder [ ] falsch
2. Ein bipartiter Graph hat keine Zyklen ungerade Länge. .. [X] wahr oder [ ] falsch
3. Ein Baum T mit Maximalgrad $\Delta(T)$ hat mindestens $\Delta(T)$ Blätter. .... [X] wahr oder [ ] falsch
4. Wenn ein Graph G zusammenhängend ist, dann ist sein Komplementgraph $\overline{G}$ nicht zusammenhängend. .. [ ] wahr oder [X] falsch
5. Ein schlichter, ungerichteter Graph mit n Komponenten hat mindestens $|V| - n$ Kanten. .... [X] wahr oder [ ] falsch
6. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt $|E| \geq \Delta(G)$. ..... [X] wahr oder [ ] falsch
7. Bäume mit mindestens zwei Knoten sind weder hamiltonsch noch eulersch. .... [X] wahr oder [ ] falsch
8. Es gibt einen Graphen mit zwei Knoten vom Grad 1, einem Knoten vom Grad 2 und zwei Knoten vom Grad 3. .... [X] wahr oder [ ] falsch
9. Ein gerichteter Graph hat immer mindestens so viel starke wie schwache Komponenten. .... [X] wahr oder [ ] falsch
10. Es gibt Graphen, deren Adjazenz- und deren Inzidenzmatrix gleich sind. .... [X] wahr oder [ ] falsch
11. In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad gerade. .... [X] wahr oder [ ] falsch
12. Isomorphe Graphen habe die gleiche Inzidenzmatrix. ..... [ ] wahr oder [X] falsch
13. Jeder hamiltonsche Graph ist auch eulersch. .... [ ] wahr oder [X] falsch
14. K_{2n+1} ist für beliebige $n \in \mathbb{N}$ sowohl ein Euler- als auch ein Hamiltonkreis. ...... [X] wahr oder [ ] falsch
15. Die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen ist nicht symmetrisch. .... [ ] wahr oder [X] falsch

Aufgabe II: .... **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte die kürzesten Wege von $v0$ nach $v8$ mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus.



Lösung:

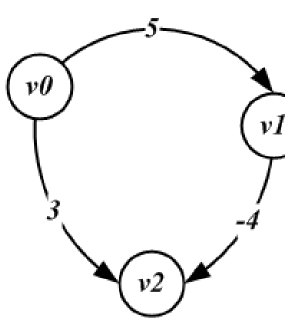
	$v0$	$v1$	$v3$	$v5$	$v7$	$v4$	$v2$	$v6$	$v8$
$Entf$	0	$\cancel{14}\,\cancel{11}\,10$	6	2	9	7	$\cancel{14}\,13$	$\cancel{13}\,12$	$\cancel{16}\,14$
$Vorg$	0	$\cancel{v0}\,\cancel{v3}\,v4$	$v0$	$v0$	$v0$	$v5$	$\cancel{v3}\,v1$	$\cancel{v7}\,v1$	$\cancel{v7}\,v6$
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t

Der kürzeste Weg ist $v0 - v5 - v4 - v1 - v6 - v8$ mit der Länge 14.

Aufgabe III: .... **15 Punkte**

Geben Sie bitte ein Beispiel dafür an, dass der Dijkstra-Algorithmus nicht mit negativen Kantengewichten funktioniert .... **8 Punkte**
und erläutern Sie Ihr Beispiel. .... **7 Punkte**

Lösung:



	$v0$	$v1$	$v2$
$Entf$	0	5	3
$Vorg$	0	$v0$	$v0$
	t		t

Im ersten Schritt werden die Kosten von $v0$ nach $v2$ in de r Höhe von 3 festgestellt. Diese sind im nächsten Schritt die niedrigsten, deswegen kommt $v2$ in die OK Liste und wird nicht mehr untersucht. Das führt zu einem falschen Ergebnis, da durch das negative Kantengewicht, die zunächst höheren Kosten des Weges $v0 - v1 - v2$ auf 1 verringert.

Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

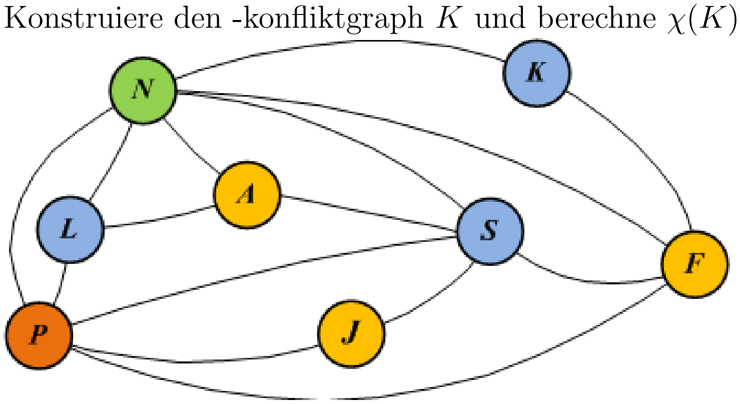
Sie übernehmen die Festivalplanung für das nächste HAW-Campusfestival. Es spielen 8 Bands, dabei sollen folgende Randbedingungen berücksichtigt werden:

- Die Bands *Krach* und *Noise* haben den gleichen Gitarristen.
- Die Bands *Pink Lips* und *Link Pips* nutzen zum Teil die gleiche Ausrüstung.
- Die Leadsängerin der *Pink Lips* ist Bassistin bei dem Jazz-Trio *JamJazz*.
- Die drei Punkbands *Pink Lips*, *Noise* und *Folle Vindel* sollen nicht gleichzeitig spielen, um die Fans nicht zu überfordern.
- Der Gitarrist von *Krach* möchte unbedingt die Band *Folle Vindel* erleben.
- Die Schlagersängerin *Annabell* ist Tänzerin für's *Schlagerduo*.
- Das *Schlagerduo* will nicht zeitgleich mit einer der drei Punkbands spielen.
- Das Jazz-Trio *JamJazz* fürchtet die Konkurrenz des *Schlagerduo*s und will deswegen nicht gleichzeitig mit ihm spielen.
- Der Hauptsponsor möchte auf jden Fall *Noise*, *Link Pips* und *Annabell* sehen.

Zeigen und erläutern Sie bitte, wie Sie mit Hilfe der Graphentheorie den Bands verschiedene Spielzeiten zu ordnen.

Lösung:

Konstruiere den -konfliktgraph K und berechne $\chi(K)$, in diesem Fall:



mit der minimalen Färbung mit 4 Farben, als werden 3 Spielzeiten benötigt.

Aufgabe V: .... **15 Punkte**

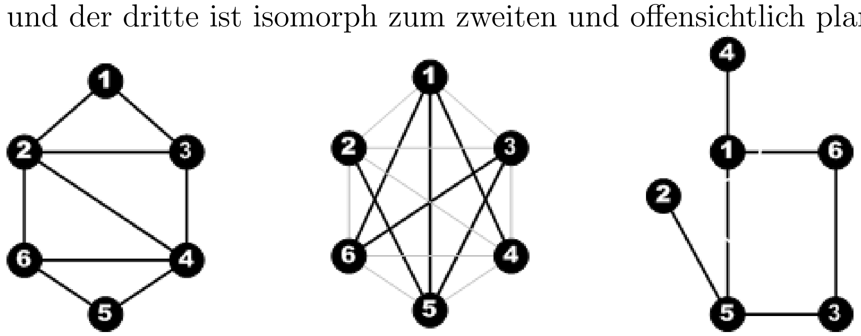
Bitte begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, jeweils . . **5 Punkte**

1. Ein zusammenhängender und vollständiger Graph G hat keinen Weg der Länge $\delta(G)+1$.
   .... [X] wahr oder [ ] falsch

   Begründung:
   Sei G zusammenhängend und vollständig mit n Knoten, dann ist $\delta(G) = n-1$. Sei nun $v_0 e_1 v_2 ... e_n v_n$ ein Weg der Länge n mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, dann gibt es aber $n+1$ Knoten. WIDERSPRUCH!!

2. Wenn ein Graph mit mindestens 6 Knoten planar ist, dann ist sein Komplement nicht planar. .... [ ] wahr oder [X] falsch

   Begründung:
   Falsch, den der erste Graph ist planar, der zweite ist das Komplement des ersten und der dritte ist isomorph zum zweiten und offensichtlich planar.

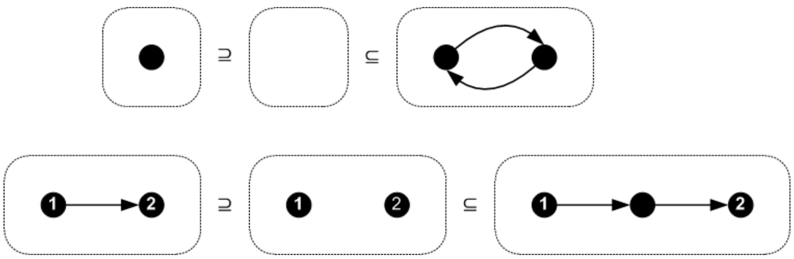


3. Ein ungerichteter, zusammenhängender, schlichter und gewichteter Graph, dessen Kanten nach Gewicht sortiert sind $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_n)$ für $n \geq 2$ hat einen minimalen Spannbaum, der e_2 enthält.
   .... [X] wahr oder [ ] falsch

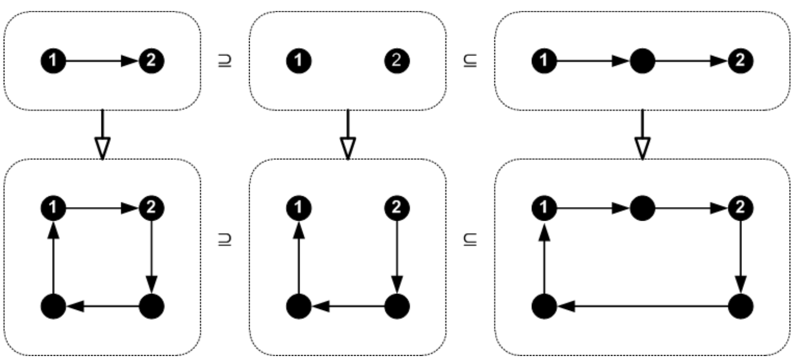
   Begründung:
   Da der Graph eine zweitleichteste Kante besitzt, hat er auch mindestens zwei Kanten. Also gibt es auch mindestens drei Knoten im Graphen, sonst gäbe mindestens eine Mehrfachkante, die in schlichten Graphen verboten sind. Ein minimaler Spannbaum enthält damit auch mindestens zwei Kanten. Führt man den Algorithmus von Kruskal aus, so kann e_2 als zweite gewählt werden. Die ersten beiden Kanten werden auf jeden Fall zum minimalen Spannbaum hinzugenommen, da man mit einer bzw. zwei Kanten noch keinen Zyklus bilden kann, denn Mehrfachkanten sind nicht erlaubt. Außerdem arbeitet Kruskals Algorithmus gierig, nimmt also niemals eine Kante wieder aus dem Spannbaum heraus.

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

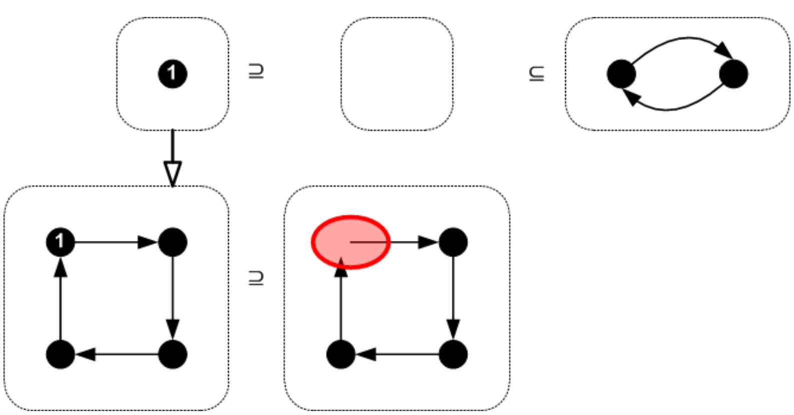
1. Geben Sie bitte ein Graphersetzungssystem mit dem Startgraph ● an, dass die schlichten, kreisförmigen Graphen C_n erzeugt. .... **7 Punkte**
   Lösung:



2. Geben Sie bitte ein Beispiel mit Regeln des obigen Ersetzungssystems für eine direkten Ableitung an. .... **4 Punkte**
   Lösung:



3. Geben Sie bitte ein Beispiel mit Regeln des obigen Ersetzungssystems dafür an, dass die Regelanwendung an der Klebebedingung scheitert. .... **4 Punkte**
   Lösung:



Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Beweisen Sie bitte folgende Behauptungen:

1. $G = (V, E)$ ist vollständig gdw $\chi(G) = |V|$ .... **8 Punkte**
   Lösung:

   (a) Wenn G vollständig, dann ist $\chi(G) = |V|$.
   Indirekter Beweis:
   Sei $\chi(G) < |V|$ mit einer kleinsten Färbung $f : V \to \{1, ..., \chi(G)\}$, dann gibt es mindestens zwei Knoten x und y mit mit $fx) = f(y)$. Also gibt es keine Kante von x nach y, also sit G nicht vollständig.

   (b) $\chi(G) = |V|$, dann ist G vollständig. Direkter Beweis:
   Sei G nicht vollständig, dann existieren mindestens zwei Knoten x und y, so dass keine Kante die Knoten verbindet, also können die zunächst gleich eingefärbt werden, dann werden alle anderen Knoten eingefärbt, also gibt es eine Färbung mit $f : V \to \{1, ..., |V| - 1\}$, also ist $\chi(G) \leq |V| - 1 < |V|$, also $\chi(G) \neq |V|$.

2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, in dem für jedes Paar Knoten $\{x, y \in V | x \neq y\}$ gilt, dass $\chi(G[V \setminus x, y) = \chi(G) - 2$, dann ist G ist vollständig. .... **7 Punkte**

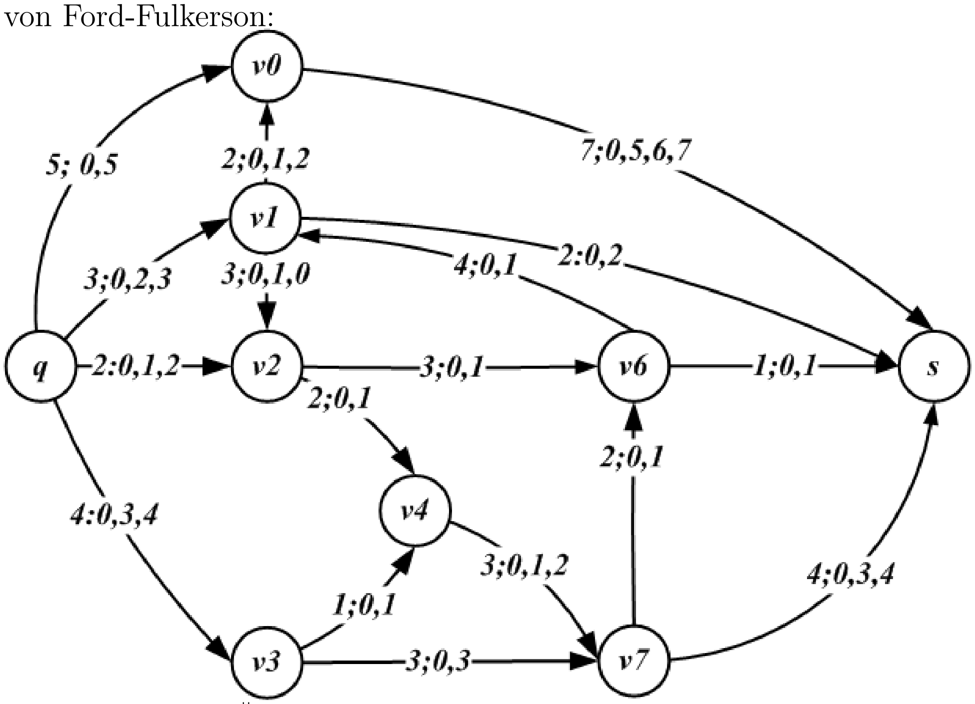
   Lösung:
   Indirekter Beweis:
   Sei G nicht vollständig, dann gibt es nicht inzidente Knoten x und y und eine kleinste Färbung $f : V \to \{1, ..., \chi(G)\}$

   (a) $f(x) = f(y)$, dann fällt höchstens eine Farbe für $G[V \setminus \{x, y\}]$ weg. Also benötigt $G[V \setminus \{x, y\}]$ mindestens $\chi(G) - 1$ Farben, also $\chi(G[V \setminus \{x, y\}]) \geq \chi(G) - 1 > \chi(G) - 2$.

   (b) $f(x) \neq f(y)$, dann gibt es wenigstens einen anderen Knoten v mit $f(v) = f(x)$ (oder $f(v) = f(y)$), da G nicht vollständig ist. Also fällt auch höchstens eine Farbe für $G[V \setminus \{x, y\}]$ weg. Also benötigt $G[V \setminus \{x, y\}]$ mindestens $\chi(G) - 1$ Farben, also $\chi(G[V \setminus x, y) \geq \chi(G) - 1 > \chi(G) - 2$.

Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte den optimalen Fluss in diesem Netzwerk mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson:



gekenn. Knoten	q	$v0$	s					
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,5)$	$(+v0,5)$					
gekenn. Knoten	q	$v3$	$v7$	s				
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,4)$	$(+v3,3)$	$(+v7,3)$				
gekenn. Knoten	q	$v1$	s					
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,3)$	$(+v1,2)$					
gekenn. Knoten	q	$v1$	$v2$	$v6$	s			
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,1)$	$(+v1,1)$	$(+v2,1)$	$(+v6,1)$			
gekenn. Knoten	q	$v2$	$v4$	$v7$	s			
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,1)$	$(+v2,1)$	$(+v4,1)$	$(+v7,1)$			
gekenn. Knoten	q	$v2$	$v1$	$v0$	s			
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,1)$	$(-v2,1)$	$(+v1,1)$	$(+v0,1)$			
gekenn. Knoten	q	$v3$	$v4$	$v7$	$v6$	$v1$	$v0$	s
Kennzeichnung	$(\perp,\infty)$	$(+q,1)$	$(+v3,1)$	$(+v4,1)$	$(+v7,1)$	$(+v6,1)$	$(+v1,1)$	$(+v0,1)$

Dann gibt es keine vergrößernde Wege meh,alo ist der maximale Fluss $d = 14$.