

Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen

WiSe 2012

Probeklausur vom 7. Januar 2013

Deckblatt

J. Padberg

Bitte prüfen Sie zuerst, dass Ihr Klausurexemplar **10 Seiten** hat.

Bitte heften Sie die Lösungen an das ausgefüllte Deckblatt.

Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt, dass Sie abgeben, Ihren Namen und Matrikelnummer und vermerken Sie bitte an der Aufgabe, falls Sie zusätzliche Blätter zur Lösung benutzt haben.

Name	
Matrikelnummer	

DAUER: Für die Bearbeitung sind 90 Minuten vorgesehen.

Bewertung:

Klausurpunkte	Leistungspunkte
> 100	15
≥ 96	14
≥ 91	13
≥ 86	12
≥ 81	11
≥ 76	10
≥ 71	9
≥ 66	8
≥ 61	7
≥ 56	6
≥ 50	5
< 50	0-4

Erlaubte Hilfsmittel:

- 3 doppelseitig beschriftete Seiten mit Notizen
- Papier und Schreibgerät
- und sonst nichts:
 - keine Folienkopien
 - kein Skript
 - **keine elektronischen Geräte** (kein Taschenrechner, kein Laptop, kein PDA, kein Handy, etc.)

Erreichte Leistungspunkte:



	Name	
	Matrikelnummer	

Aufgabe I: **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?

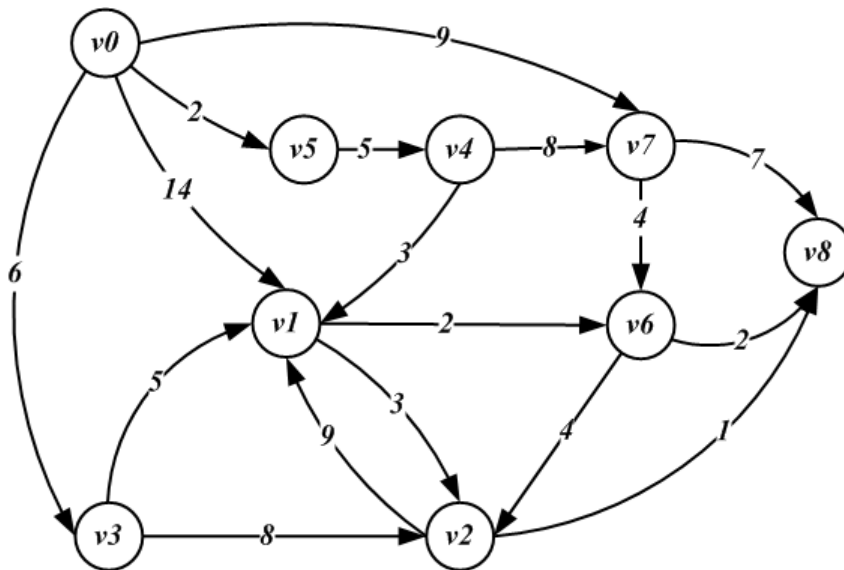
Jeweils **1 Punkte**

1. Es gibt schlichte Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| - 1 = |E|$,
die keine Bäume sind. ☐ wahr oder ☐ falsch
2. Ein bipartiter Graph hat keine Zyklen ungerade Länge. ☐ wahr oder ☐ falsch
3. Ein Baum T mit Maximalgrad $\Delta(T)$
hat mindestens $\Delta(T)$ Blätter. ☐ wahr oder ☐ falsch
4. Wenn ein Graph G zusammenhängend ist, dann ist
sein Komplementgraph \overline{G} nicht zusammenhängend. ☐ wahr oder ☐ falsch
5. Ein schlichter, ungerichteter Graph mit n Komponenten hat
mindestens $|V| - n$ Kanten. ☐ wahr oder ☐ falsch
6. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt $|E| \geq \Delta(G)$. ☐ wahr oder ☐ falsch
7. Bäume mit mindestens zwei Knoten sind
weder hamiltonsch noch eulersch. ☐ wahr oder ☐ falsch
8. Es gibt einen Graphen mit zwei Knoten vom Grad 1, einem Knoten
vom Grad 2 und zwei Knoten vom Grad 3. ☐ wahr oder ☐ falsch
9. Ein gerichteter Graph hat immer mindestens so viel
starke wie schwache Komponenten. ☐ wahr oder ☐ falsch
10. Es gibt Graphen, deren Adjazenz- und
deren Inzidenzmatrix gleich sind. ☐ wahr oder ☐ falsch
11. In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten
mit ungeradem Knotengrad gerade. ☐ wahr oder ☐ falsch
12. Isomorphe Graphen haben die gleiche Inzidenzmatrix. ☐ wahr oder ☐ falsch
13. Jeder hamiltonsche Graph ist auch eulersch. ☐ wahr oder ☐ falsch
14. K_{2n+1} ist für beliebige $n \in \mathbb{N}$
sowohl ein Euler- als auch ein Hamiltonkreis. ☐ wahr oder ☐ falsch
15. Die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen ist
nicht symmetrisch. ☐ wahr oder ☐ falsch

	Name	
	Matrikelnummer	

Aufgabe II: **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte den kürzesten Weg von v_0 nach v_8 mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus.



Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe III: **15 Punkte**

Geben Sie bitte ein Beispiel dafür an, dass der Dijkstra-Algorithmus nicht mit negativen
Kantengewichten funktioniert **8 Punkte**
und erläutern Sie Ihr Beispiel. **7 Punkte**

	Name
	Matrikelnummer

Aufgabe IV: **15 Punkte**

Sie übernehmen die Festivalplanung für das nächste HAW-Campusfestival. Es spielen 8 Bands, dabei sollen folgende Randbedingungen berücksichtigt werden:

- Die Bands *Krach* und *Noise* haben den gleichen Gitarristen.
- Die Bands *Pink Lips* und *Link Pips* nutzen zum Teil die gleiche Ausrüstung.
- Die Leadsängerin der *Pink Lips* ist Bassistin bei dem Jazz-Trio *JamJazz*.
- Die drei Punkbands *Pink Lips*, *Noise* und *Folle Vindel* sollen nicht gleichzeitig spielen, um die Fans nicht zu überfordern.
- Der Gitarrist von *Krach* möchte unbedingt die Band *Folle Vindel* erleben.
- Die Schlagersängerin *Annabell* ist Tänzerin für's *Schlagerduo*.
- Das *Schlagerduo* will nicht zeitgleich mit einer der drei Punkbands spielen.
- Das Jazz-Trio *JamJazz* fürchtet die Konkurrenz des *Schlagerduos* und will deswegen nicht gleichzeitig mit ihm spielen.
- Der Hauptsponsor möchte auf jden Fall *Noise*, *Link Pips* und *Annabell* sehen.

Zeigen und erläutern Sie bitte, wie Sie mit Hilfe der Graphentheorie den Bands verschiedene Spielzeiten zu ordnen.

Lösung: _____

	Name	
	Matrikelnummer	

Aufgabe V: **15 Punkte**

Bitte begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, jeweils . . **5 Punkte**

- Ein zusammenhängender und vollständiger Graph G
hat keinen Weg der Länge $\delta(G) + 1$.
☐ wahr oder ☐ falsch

Begründung:

- Wenn ein Graph mit mindestens 6 Knoten planar ist,
dann ist sein Komplement nicht planar. ☐ wahr oder ☐ falsch

Begründung:

- Ein ungerichteter, zusammenhängender, schlichter und gewichteter Graph, dessen
Kanten nach Gewicht sortiert sind $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_n)$ für $n \geq 2$ hat einen
minimalen Spannbaum, der e_2 enthält.
☐ wahr oder ☐ falsch

Begründung:

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VI: **15 Punkte**

1. Geben Sie bitte ein Graphersetzungs-system mit dem Startgraph \bullet an, dass die schlichten, kreisförmigen Graphen C_n erzeugt. **7 Punkte**
2. Geben Sie bitte ein Beispiel mit Regeln des obigen Ersetzungssystems für eine direkten Ableitung an. **4 Punkte**
3. Geben Sie bitte ein Beispiel mit Regeln des obigen Ersetzungssystems dafür an, dass die Regelanwendung an der Klebebedingung scheitert. **4 Punkte**

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VII: **15 Punkte**

Beweisen Sie bitte folgende Behauptungen:

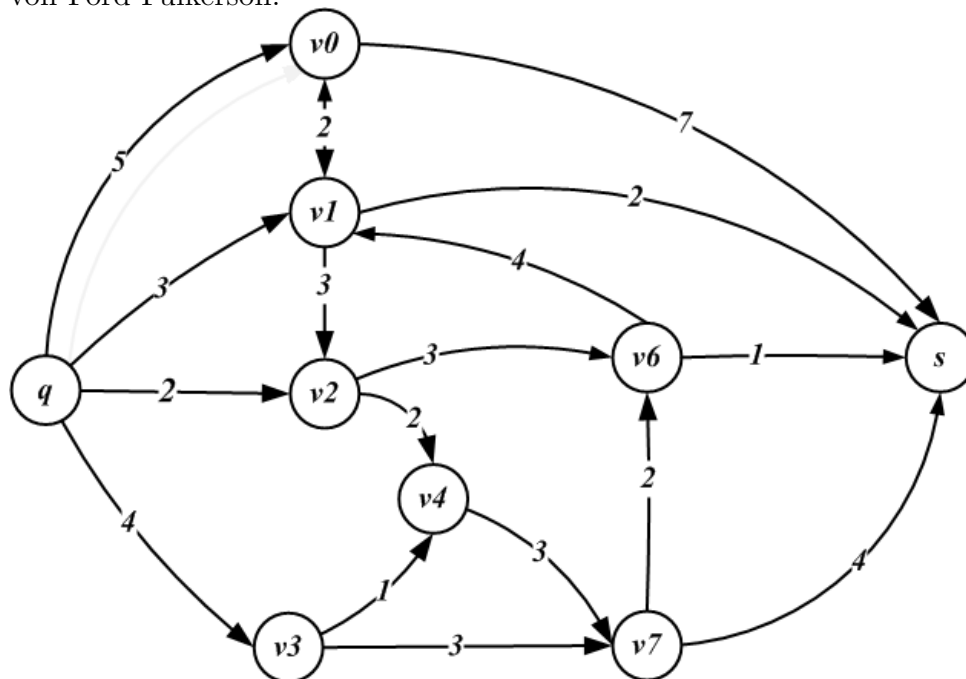
1. $G = (V, E)$ ist vollständig gdw $\chi(G) = |V|$ **8 Punkte**

2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, in dem für jedes Paar Knoten $\{x, y \in V | x \neq y\}$ gilt, dass $\chi(G[V \setminus x, y]) = \chi(G) - 2$, dann ist G vollständig. **7 Punkte**

	Name	
	Matrikelnummer	

Aufgabe VIII: **15 Punkte**

Berechnen Sie bitte den optimalen Fluss in diesem Netzwerk mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson:



bitte wenden

	Name	
	Matrikelnummer	

Sie dürfen gerne dies Netzwerk dafür nutzen.

