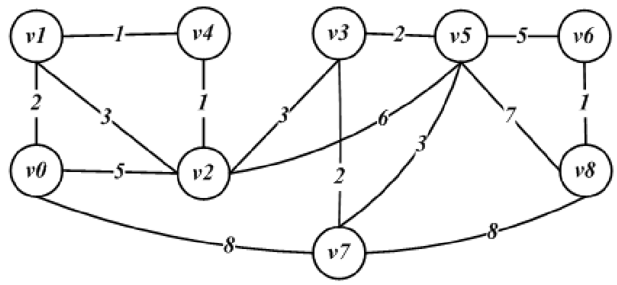
LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 17. Juni 2013

Aufgabe I: .... **15 Punkte**

Gegeben sei dieser gewichtete Graph: Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v8$.



Lösung:

	$v0$	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$	$v7$	$v8$
$Entf$	0								
$Vorg$	$v0$								
OK									
$Entf$	0	2	5		3			8	
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v0$		$v1$			$v0$	
OK	t	t			t				
$Entf$	0	2	4	7	3	10		8	
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v4$	$v2$	$v1$	$v2$		$v0$	
OK	t	t	t	t	t				
$Entf$	0	2	4	7	3	9	14	8	16
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v4$	$v2$	$v1$	$v3$	$v5$	$v0$	$v7$
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	
$Entf$	0	2	4	7	3	9	14	8	15
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v4$	$v2$	$v1$	$v3$	$v5$	$v0$	$v6$
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t

Der kürzeste Weg hat die Länge 15 mit $v0 - v1 - v2 - v3 - v5 - v6 - v8$.

Aufgabe II: .... **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?? **Jeweils** .... **1 Punkt**
Bitte begründen Sie Ihre Aussage. **Jeweils** .... **2 Punkte**

1. Es gibt bipartite 5-reguläre Graphen. .... [X] wahr oder [ ] falsch
   Begründung:
   Z.B. mit $G = (V, E)$ und $V = \{v_i, w_i | 1 \leq i \leq 5\}$ und $E = \{(v_i, w_j) | 1 \leq i, j \leq 5\}$
   bipartit mit $\{v_i | 1 \leq i \leq 5\} \cap \{w_i | 1 \leq i \leq 5\} = \emptyset$ und
   5-regulär, da jeder Knoten v_i 5 adjazente Kanten hat, nämlich $(v_i, w_1), ..., (v_i, w_5)$
   und da jeder Knoten w_j 5 adjazente Kanten hat, nämlich $(v_1, w_j), ..., (v_5, w_j)$.

2. In einem vollständigen Graphen gibt es
   mindestens so viele Eulerkreise wie Knoten. .... [ ] wahr oder [X] falsch
   Begründung:
   Für ein K_n mit geradem $n > 0$ ist für alle $v \in V$ der Knotengrad $d(v) = n - 1$, also ungerade, also gibt es gar keinen Eulerkreis.

3. Es gibt Bäume mit genau einem Blatt. .. [X] wahr oder [ ] falsch **Begründung:**
   Nämlich der Baum, der aus einem Knoten besteht.

4. In jedem Netzwerk ist der Fluss,
   der jeder Kante den Wert 1 zuordnet, zulässig. .... [ ] wahr oder [X] falsch
   Begründung:
   Denn, wenn ein innerer Knoten den Knotengrad 3 hat, ist Flusserhaltung für diesen Knoten verletzt.

5. Es gibt k-reguläre Graphen mit $k > 1$, die Bäume sind. .. [ ] wahr oder [X] falsch
   Begründung:
   Die Blätter eines Baumes haben immer den Knotengrad 1, also kann kein Baum k-regulär sein mit $k > 1$.

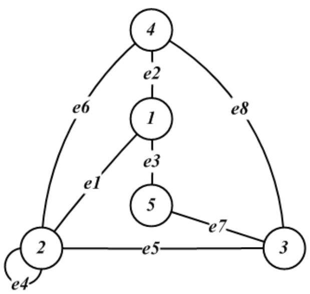
Aufgabe III: .... **15 Punkte**

Gegeben die folgende Adjazenzmatrix:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Geben Sie bitte den dazugehörigen Graphen G an:

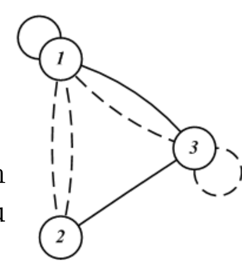


2. Geben Sie bitte die dazugehörige Inzidenzmatrix $M(G)$ an:

$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Was bedeutet die Addition zweier Adjazenzmatrizen, also $A(G_1) + A(G_2)$?
Graph hat ebensoviele Knoten, aber die Kanten werden aufaddiert.

BSP $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



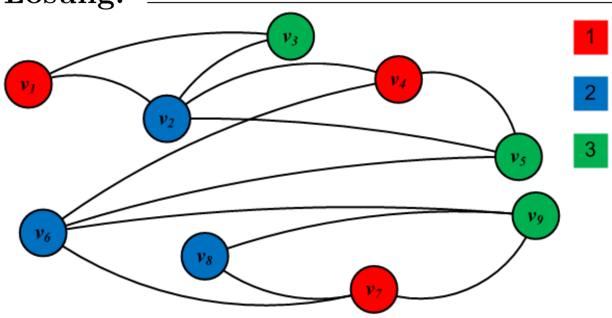
In dem Graph hier gehöre die durchgezogenen Kanten zum ersten und die gestrichelten zum zweiten Graph und beide zu Ergebnisgraph.

Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

Gegeben sei der folgende Graph G.

1. Färben Sie Ihn bitte mit dem einfachen Greedy-Algorithmus, wobei sich die Ordnung aus der Indizierung der Knoten ergibt, also $v_1, v_2, ..., v_9$. .... **6 Punkte**

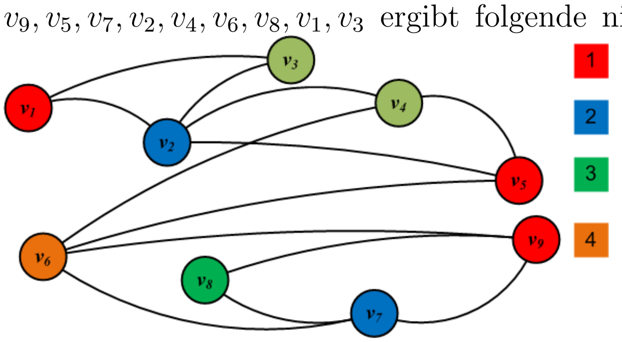
   Lösung:



2. Geben Sie eine Reihefolge der Knoten und den gefärbten graphen an, so dass der einfachen Greedy-Algorithmus eine nicht optimale Färbung erreicht. .. **9 Punkte**

   Lösung:

   $v_9, v_5, v_7, v_2, v_4, v_6, v_8, v_1, v_3$ ergibt folgende nicht optimale Färbung mit 4 Farben



Aufgabe V: .... **15 Punkte**

Beweisen Sie bitte, dass für einen ungerichteten, schlichten Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G)$ die chromatische Zahl $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ ist.
Tip: Induktion!
Lösung:
Vollständige Induktion über die Knotenzahl n und für alle Graphen mit Maximalgrad $\Delta(G)$.

IA $n = 1$. Maximalgrad ist 0 und wir färben mit einer Farbe, also $\chi(G) = 1 = 0 + 1 = \Delta(G) + 1$

IB Für alle Graphen mit n Knoten gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

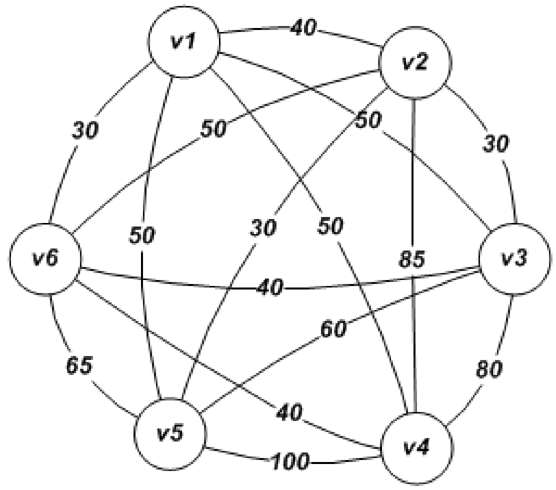
IS Sei G ein Graph mit $n + 1$ Knoten und Maximalgrad $\Delta(G)$.

Wir entfernen aus G einen beliebigen Knoten v zusammen mit den höchstens $\Delta(G)$ inzidenten Kanten. Der Restgraph sei $G' = G \setminus v$:

Der Maximalgrad von G' ist höchstens so groß wie der von G, also $\Delta(G') \leq \Delta(G)$, und kann nach Induktionsvoraussetzung mit $\Delta(G')+1$ Farben gefärbt werden. Dabei benutzen die ursprünglichen Nachbarn von v höchstens $\Delta(G')$ Farben.
Jetzt können wir v mit einer der verbliebenen Farben färben und zusammen mit den entfernten Kanten wieder in den Graphen G' einfügen.
Das ist dann eine korrekte Färbung von G mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben, dann muss die kleinste Färbung auch kleiner sein, also $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

Gegeben dieser vollständige und gewichtete Graph K_6. Finden Sie mit dem „Nächstgelegener Knoten“-algorithmus einen möglichst kurze Rundreise, die bei $v1$ beginnt.



Lösung:

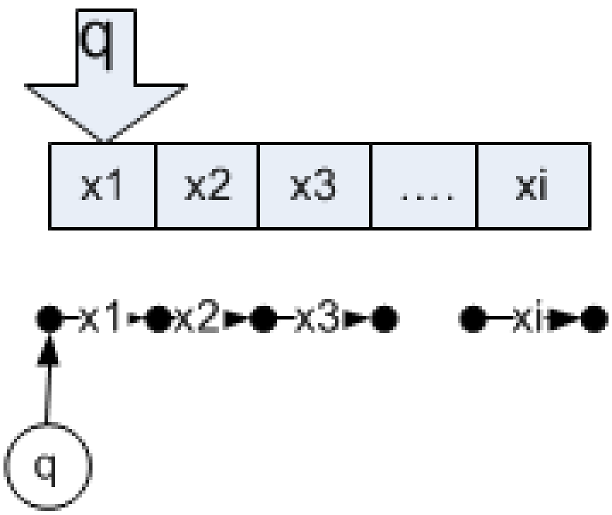
Tour	Kosten	kürzeste Tour; nächster Knoten
$v1 - v1$	0	$v6$
$v1 - v6 - v1$	60	$v2$
$v1 - v2 - v6 - v1$	120	$v3$
$v1 - v3 - v2 - v6 - v1$	160	
$v1 - v2 - v3 - v6 - v1$	140	$v5$
$v1 - v2 - v6 - v3 - v1$	180	
$v1 - v5 - v2 - v3 - v6 - v1$	180	$v4$
$v1 - v2 - v5 - v3 - v6 - v1$	200	
$v1 - v2 - v3 - v5 - v6 - v1$	215	
$v1 - v2 - v3 - v6 - v5 - v1$	225	
$v1 - v4 - v5 - v2 - v3 - v6 - v1$	280	
$v1 - v5 - v4 - v2 - v3 - v6 - v1$	335	
$v1 - v5 - v2 - v4 - v3 - v6 - v1$	315	
$v1 - v5 - v2 - v3 - v4 - v6 - v1$	280	
$v1 - v5 - v2 - v3 - v6 - v4 - v1$	260	$gefundeneTour$

Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

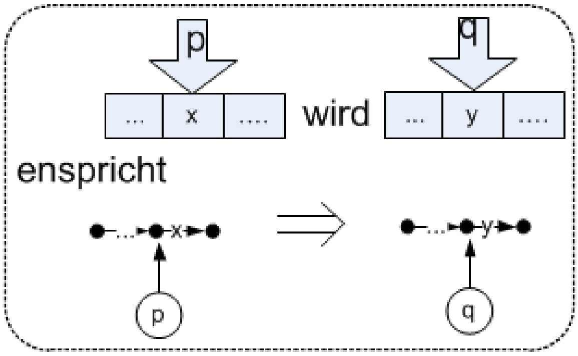
Erläutern Sie, die Mächtigkeit von Graphgrammatiken. Nehmen Sie Bezug auf die Turingmaschinen und erläutern Sie die zugrunde liegenden Konstruktionen. . **15 Punkte**

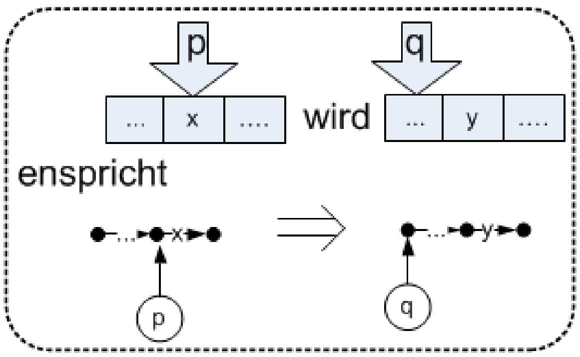
Lösung:

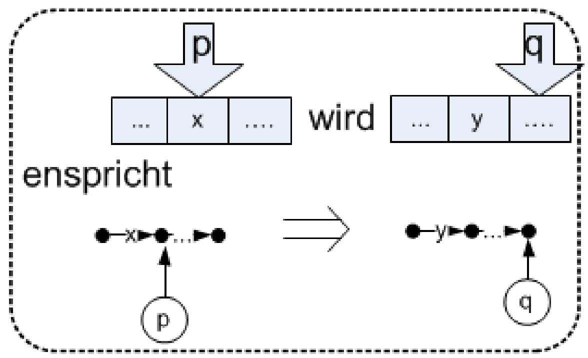
Die Graphgrammatiken sind Turing-mächtig. Es kann gezeigt werden, dass es für jede Turing-Maschine eine Graphgrammatik gibt, die dieselben Schritte durchführt.
Dafür wird zu einer beliebigen, deterministischen Turing-Maschine (TM) mit verlängerbarem Band eine Graphgrammatik GG konstruiert. Für die Anfangskonfiguration des Bandes wird ein Startgraph S gewählt, der aus einem Pfad, besteht, dessen Kanten den Feldern der TM entsprechen und mit den gleichen Zeichen markiert sind wie die Zellen des Bandes.

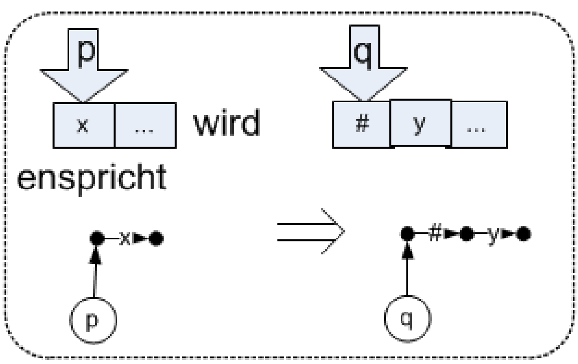


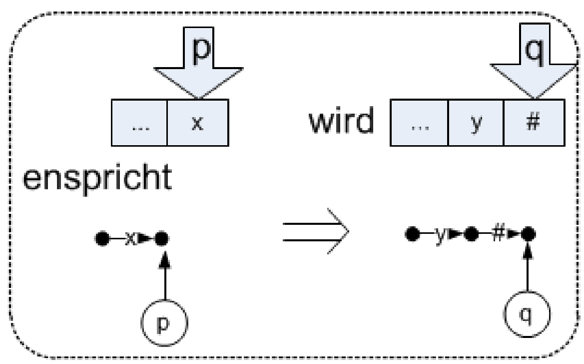
Für jeden der fünf möglichen Übergänge der TM, gibt es genau eine Regel, die das Verhalten auf dem Band wiederspiegelt:


p
q
... x ....
wird
... y ....
enspricht
p
q


p
q
... x ....
wird
... y ....
enspricht
p
q


p
q
... x ....
wird
... y ....
enspricht
p
q

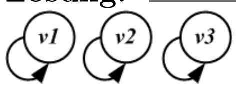

p
q
x ...
wird
y ...
enspricht
p
q


p
q
... x
wird
... y #
enspricht
p
q

Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**

1. Geben Sie bitte einen möglichst kleinen Graphen mit 3 schwachen und 3 starken Komponenten an. .... **5 Punkte**

   Lösung:

2. Gibt es

   - mindestens so viele schwache wie starke Komponenten oder
   - mindestens so viele starke wie schwache Komponenten ?

   Bitte begründen Sie Ihre Antwort. .... **10 Punkte**

   Lösung:

   Es gibt mindestens so viele starke wie schwache Komponenten, denn a) jede schwache Komponente kann mehrere starke enthalten, aber b) nicht umgekehrt.
   a), weil es Konten u, v geben kann, so dass es einen Pfad von u nach v gibt, also diese beiden Konten schwach zusammenhängend sind, aber keinen Pfad von v nach u, also diese beiden Konten nicht stark zusammenhängend sind.
   b) wenn zwei Knoten nicht schwach zusammenhängend sind, dann gibt es keinen Pfad, also können sie auch nicht stark zusammenhängend sein.