Kurven und Flächen

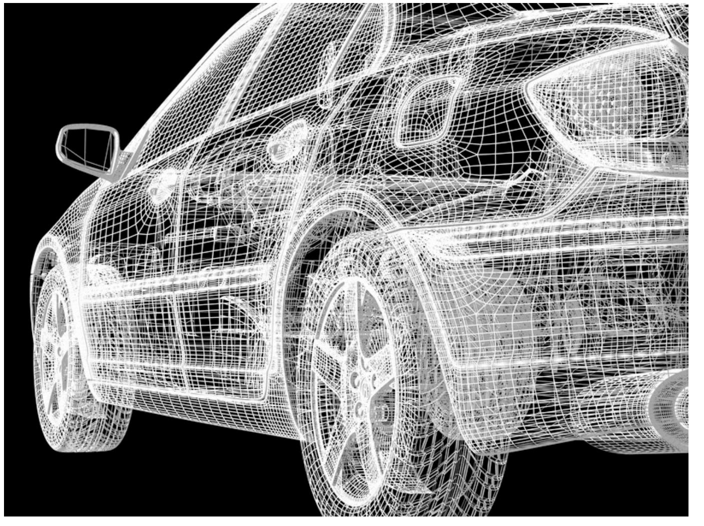
Einführung in die Computergrafik
(für Augmented Reality)

Wiederholung

- Transformationen
- Kamera Transformationen
- Tracking

Motivation

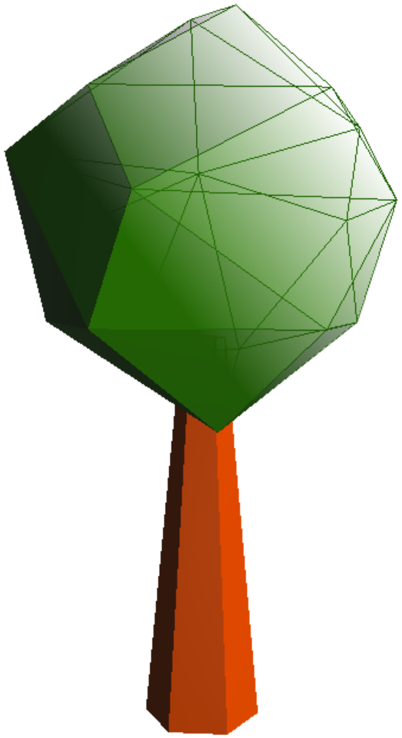
- Anwendungsfelder
    - CAD im Maschinenbau
    - Industriedesign
    - Hollywood
    - Kamerapfade
    - animation



Bildquelle: Automotive Engineering HQ: http://www.automotiveengineeringhq.com/automotive-design-engineer-qualities-pt1/, 07.01.2017

Agenda

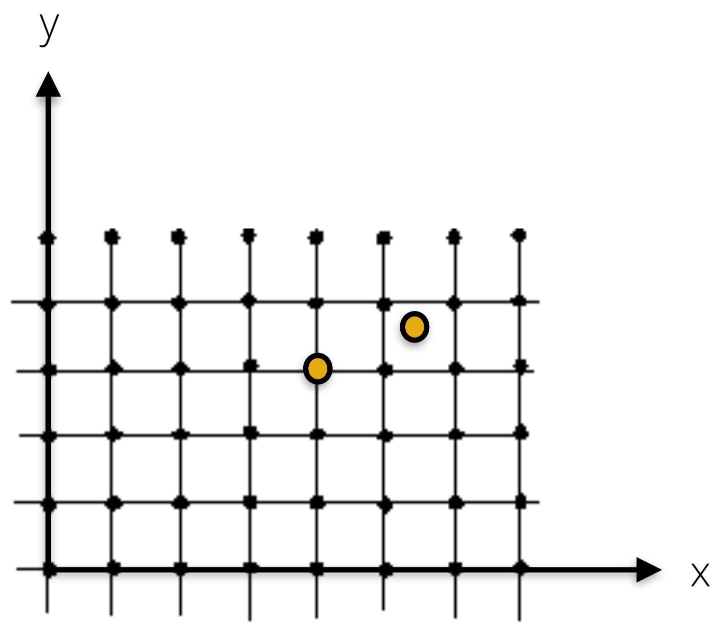
- Interpolation
- Parametrisierung & Basisfunktionen
- Kurventypen
    - Bezier
    - Hermite
- Splines
- Parametrisierte Flächen



Interpolation

Diskrete Werte

- Funktionswerte an diskreten Positionen im Raum
- unbekannte Werte dazwischen
    - Lösung: Interpolation

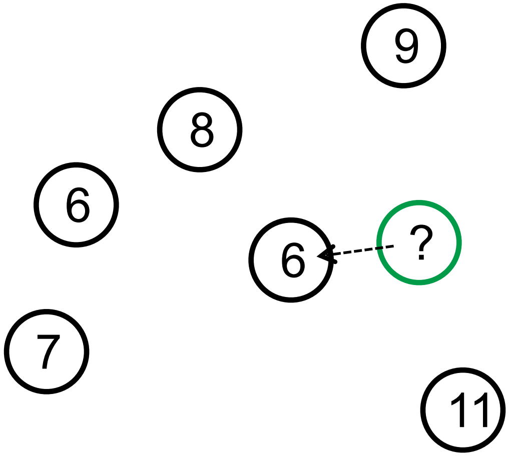


Interpolation

- Problem
  - gegeben: Datenpunkte a_i mit
    - Wert: $v(a_i)$
    - Position: $p(a_i)$
  - gesucht:
    - entweder: Wert $v(x)$ an Position (x)
    - oder: Position $p(x)$ für Wert $v(x)$

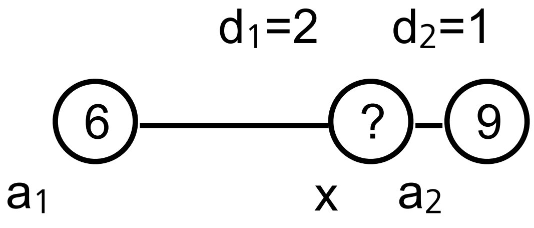
Nächste-Nachbarn-Interpolation

- nächster Datenpunkt
  - hier: Datenpunkte = schwarze Kreise
  - gesucht: Datenpunkt-Wert ? für Position im grünen Kreis



Lineare Interpolation

- Interpolation auf Segmenten zwischen 2 Datenpunkten
    - hier: Datenpunkte a_1 und a_2
    - gesucht: Wert v(x) an Position p(x)
    - Entfernung zwischen a_1 und x: d_1
    - Entfernung zwischen a_2 und x: d_2



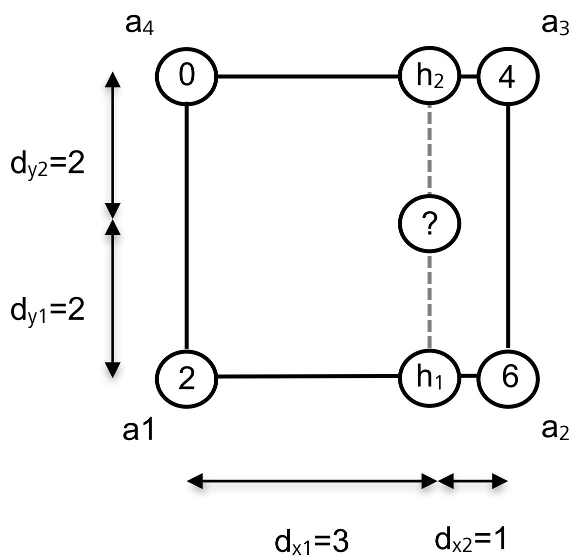
Hinweis: identischer Ansatz bei gegebenen Werten und unbekannten Positionen

- Interpolation
    - $v(x) = (1-\alpha)v(a_1) + \alpha v(a_2)$
    - $\alpha = d_1 / (d_1+d_2)$

hier:
$\alpha = 2 / (2+1) = 2/3$
$v(x) = (1-2/3)*6 + (2/3)*9 = 2+6 = 8$

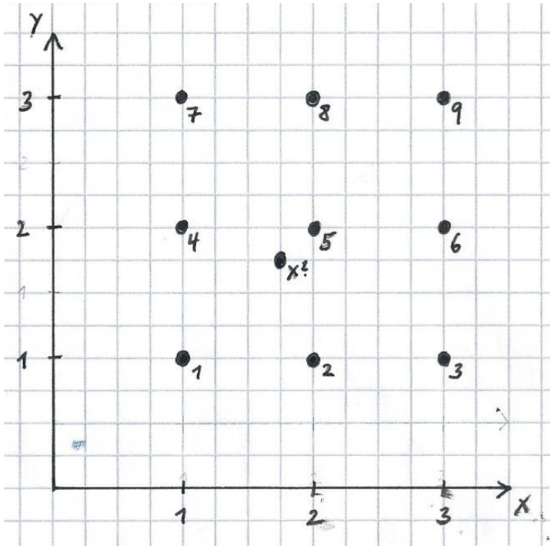
Bilineare Interpolation

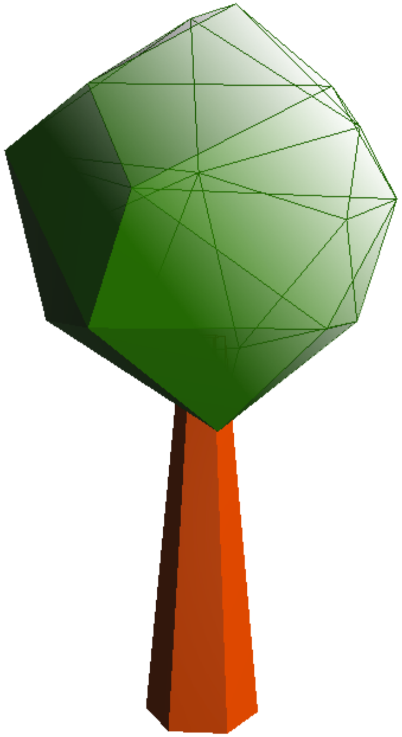
- Interpolation in Gitterzelle (umrandet von 4 Datenpunkten)
  - hier: Datenpunkte a_1, a_2, a_3, a_4
  - gesucht: Wert v(x) an Position p(x)
- Idee:
  - 2 Hilfsinterpolationen: x-Achse
  - dann: lineare Interpolation dazwischen
- hier
  - $\alpha = 3 / (3+1) = 0.75$ (lin. interp. x-Achse)
  - $h_1 = 0.75*6+0.25*2 = 5$
  - $h_2 = 0.75*4+0.25*0 = 3$
  - $\beta = 2 / (2+2) = 0.5$ (lin. interp. y-Achse)
  - $v(y) = 0.5*5+0.5*3 = 4$



Übung: Interpolation

- Gegeben ist eine Funktion in Form eines diskreten Gitters
  - Beispiel: Funktionswert 8 an Position (2; 3).
- Berechne den interpolierten Funktionswert an der Stelle x = (1.75; 1.75)
  - mit nächster-Nachbar-Interpolation
  - mit bilinearer Interpolation





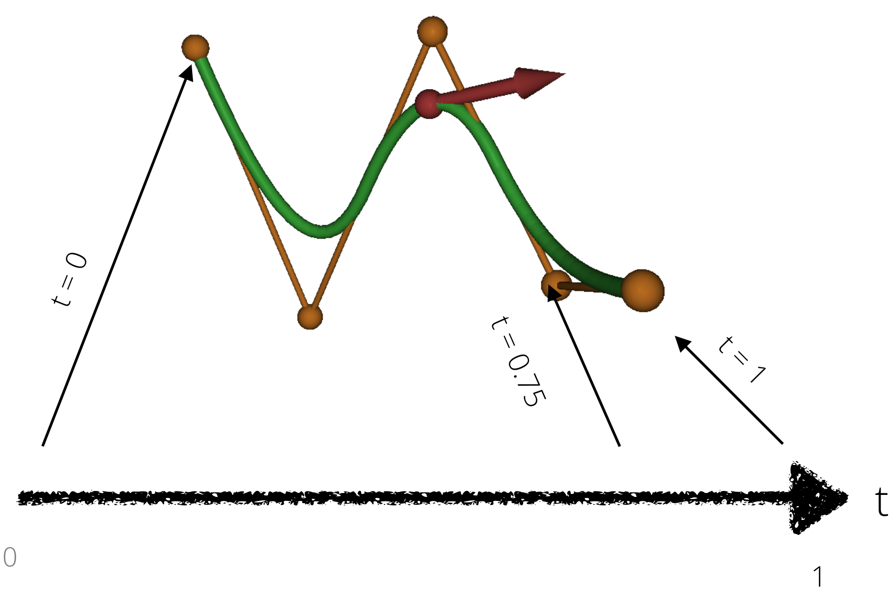
Parametrisierung und Basisfunktionen

Parameterisierung

- Funktion:

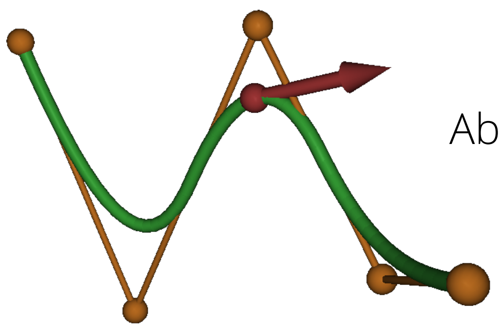
$$t \rightarrow \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

  - meist: t in [0,1]
  - Interpretation: t = Slider im Benutzerinterface



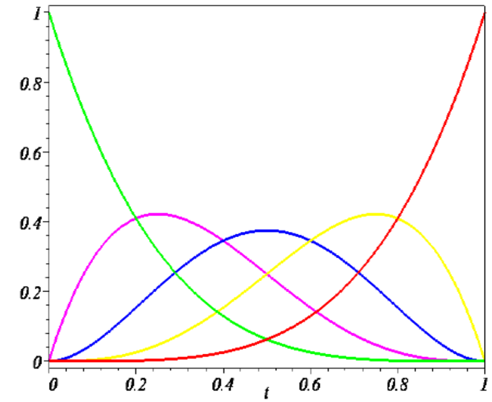
Ableitung

- Ableitung $f'(t)$ von f an der Stelle t
  - Ableitung ist Vektor
  - zeigt in Richtung der Tangente



Ableitung = Tangentenrichtung

Kurven-Repräsentation

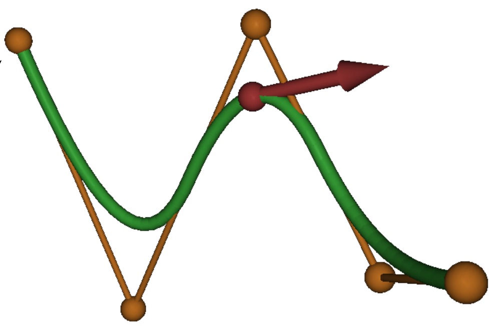


- Basisfunktionen:
    - Gewichtsfunktionen für Kontrollpunkte

$$B_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Kontrollpunkte:

$$c_i \in \mathbb{R}^3$$



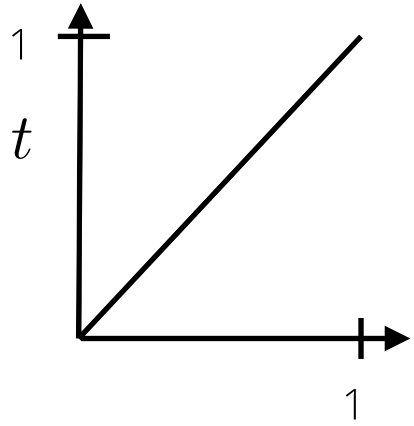
$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$$

Basisfunktionen

$$B_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Basisfunktionen = parametrisiertes Gewicht
- für Kurven
  - Gewicht für jeden Kontrollpunkte
  - jeder Kontrollpunkt hat eine eigene Basisfunktion
  - meist: Werte zwischen 0 (kein Einfluß) und 1 (maximaler Einfluß)
- Beispiele

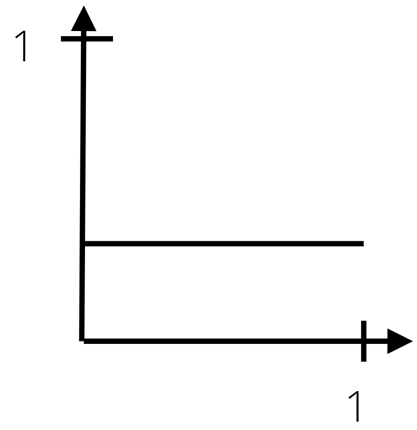
$$B(t) = t$$



kein Einfluß für t = 0,
max. Einfluß für t = 1

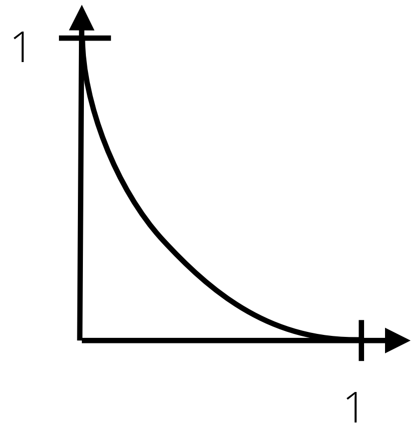
Basisfunktionen

$$B(t) = 0.3$$



konstantes Gewicht (0.3, unabhängig von t)

$$B(t) = (t-1)^2$$



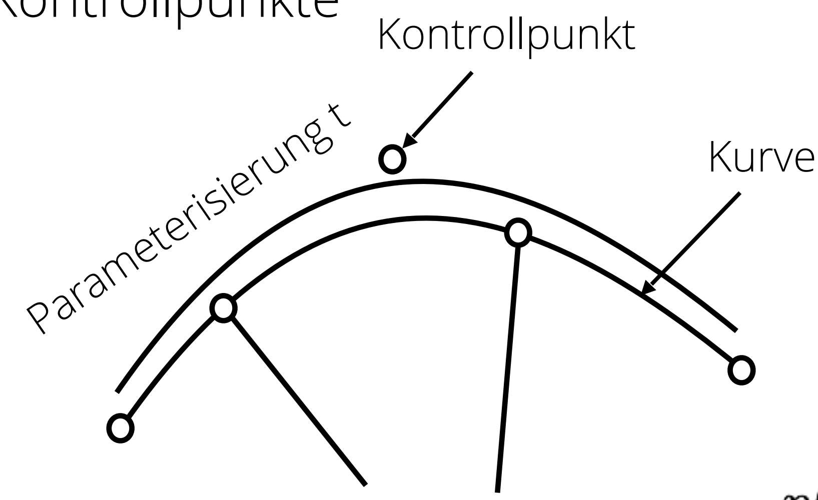
max. Gewicht für t = 0, kein Gewicht für t = 1, Gewicht sinkt schneller zu Beginn

Basisfunktionen

- lineare Interpolation
  - spezieller Kurvenfall: 2 Kontrollpunkte

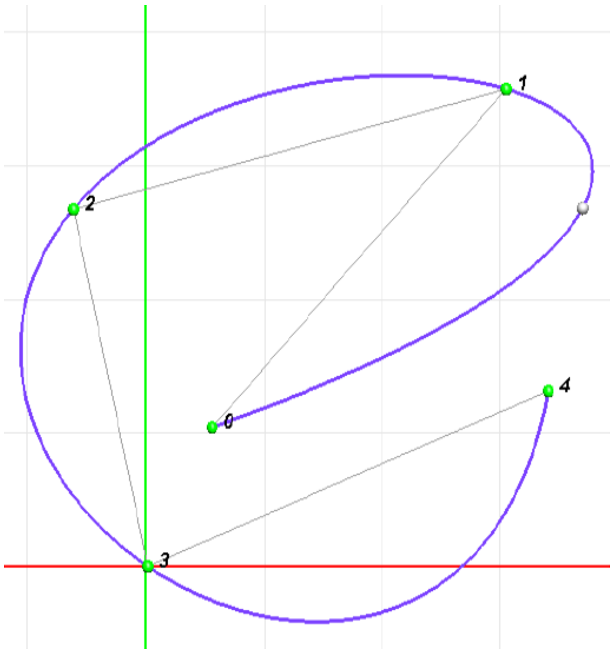
$$B_0(t) = 1 - t$$
$$B_1(t) = t$$

- allgemeiner Fall
  - Kurvenpunkte = gewichtete Summe (Basisfunktionen) der Kontrollpunkte

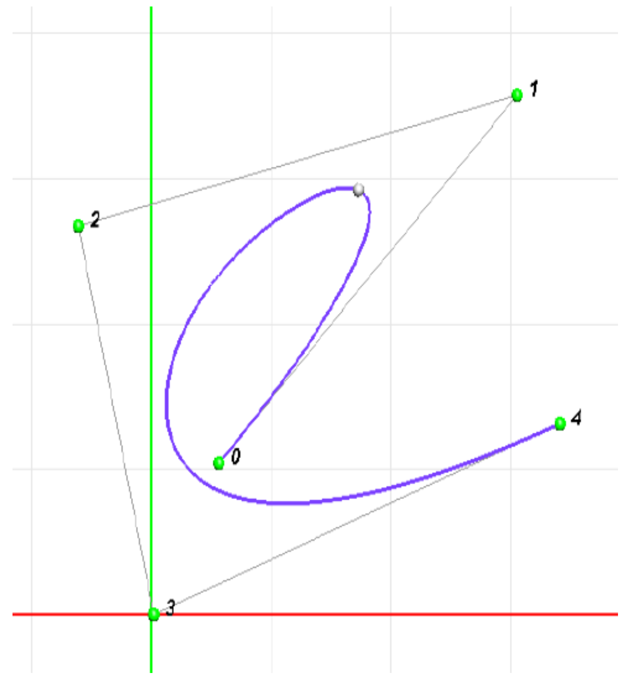


$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$$

Interpolation vs. Approximation



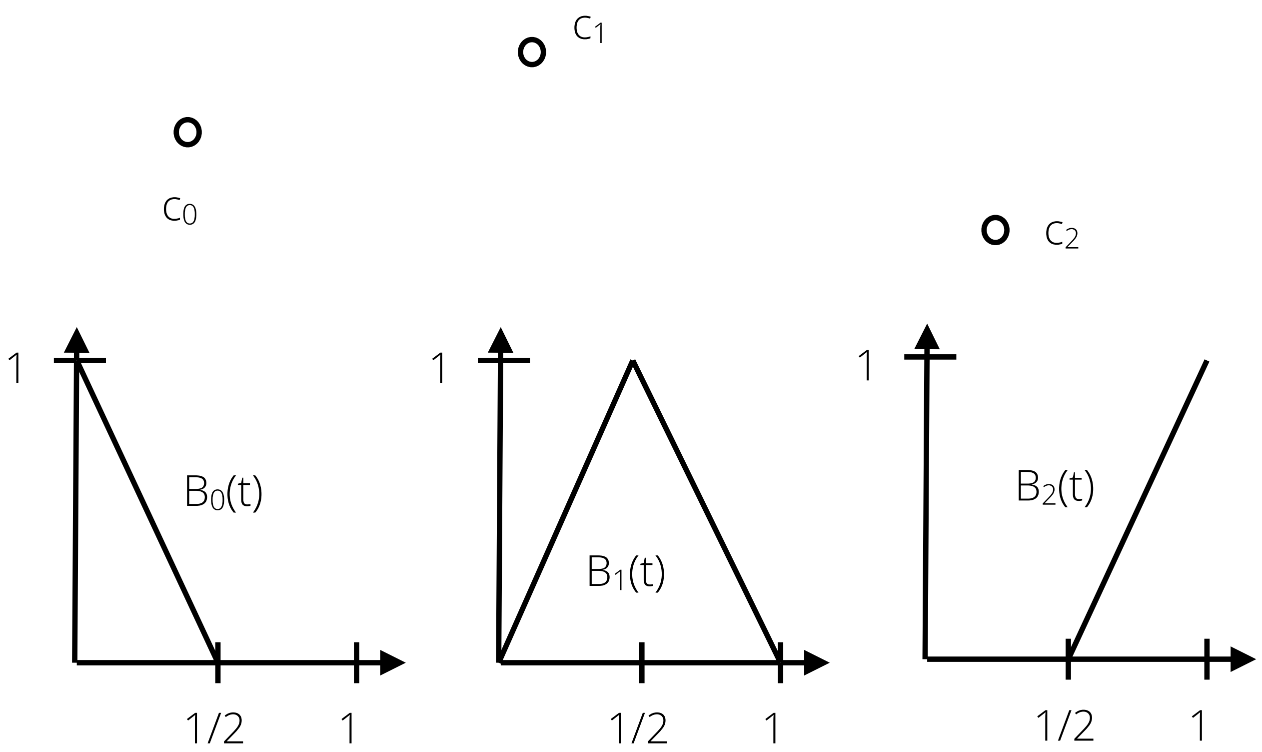
Interpolation

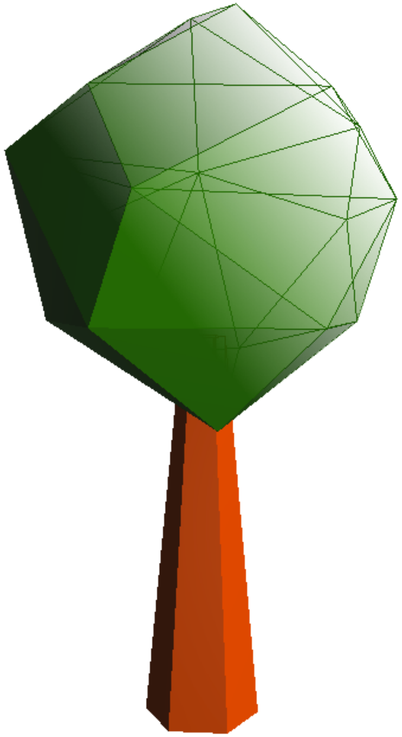


Approximation

Übung: Basisfunktionen

- gegeben:
  - 3 Kontrollpunkte (c_0 bis c_2)
  - 3 Basisfunktionen (B_0 bis B_2)
- Zeichnen Sie die Kurve

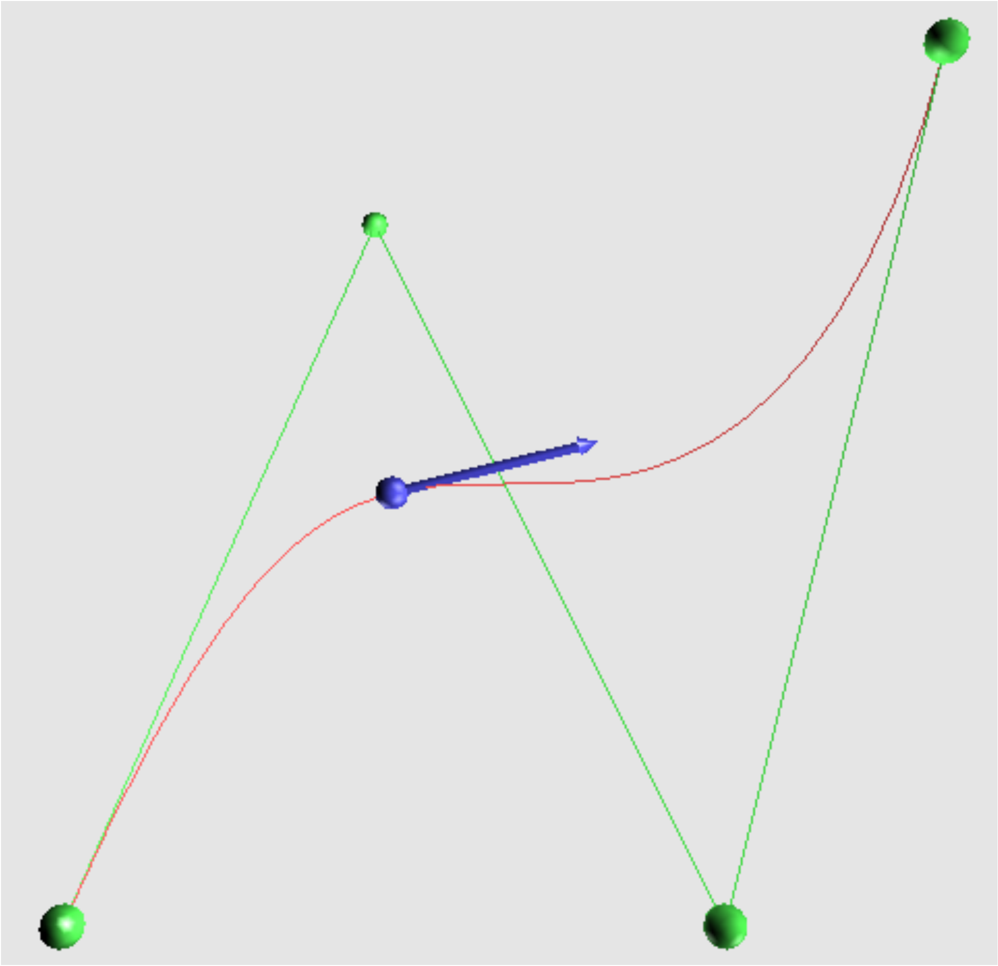




Bézier-Kurven

siehe auch: http:*//pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/*, abgerufen am 23.8.2018

Bézier-Kurve



Bézier-Kurve

- Basisfunktionen: $B_i^n(t)$
- Grad: n
- Kontrollpunkte: c_i
- Eigenschaften
    - approximiert Kontrollpunkte 1 … n-1
    - interpoliert Kontrollpunkte 0 und n

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot B_i^n(t)$$

Bézier-Kurve

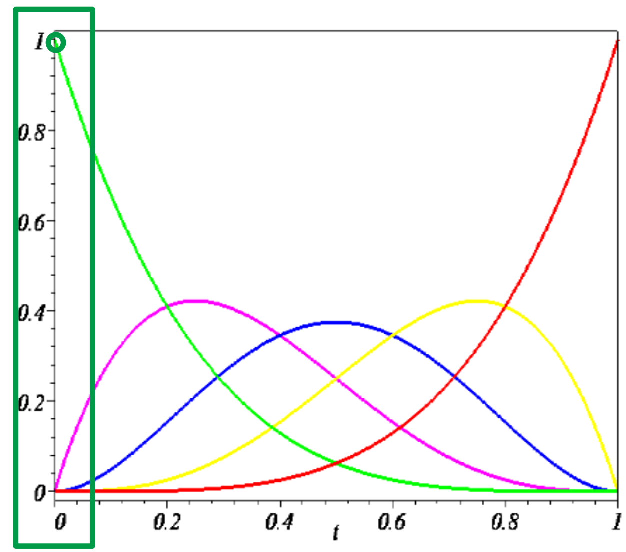
- Polynome

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$$

- genannt: Bernstein-Polynome aus [0,1] mit Grad n
- stellen Basis von (n+1)-dimensionalem Polynomraum dar
- Herleitung aus Binomialkoeffizienten:

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$



$B_0^4(t)$

Basis $B^4(t)$

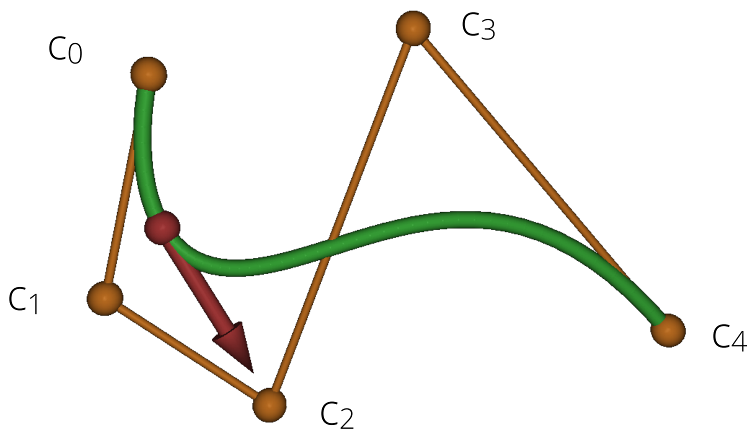
Eigenschaften

- Partition der 1: $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$
- Positivität: $B_i^n(t) > 0, t \in [0,1]$
- Symetrie: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

Bézier-Kurve

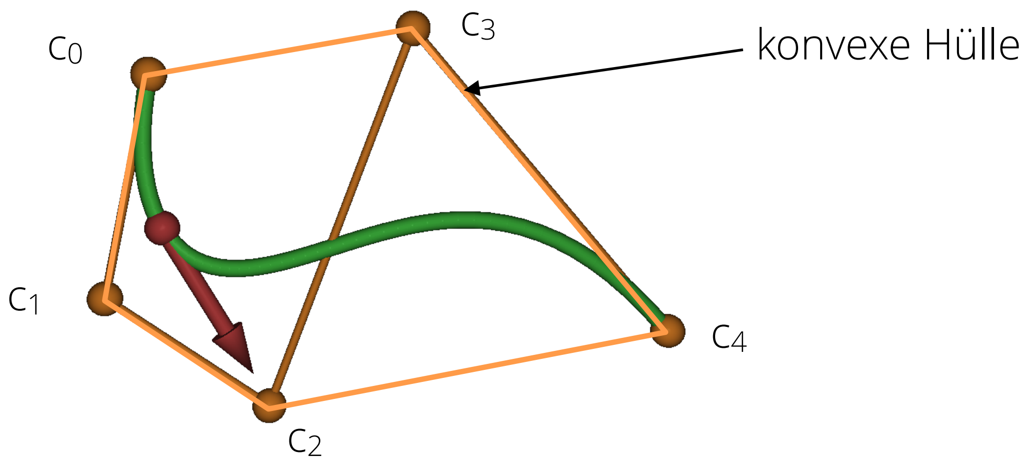
- Beispiel

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot B_i^n(t)$$



Konvexe Hülle

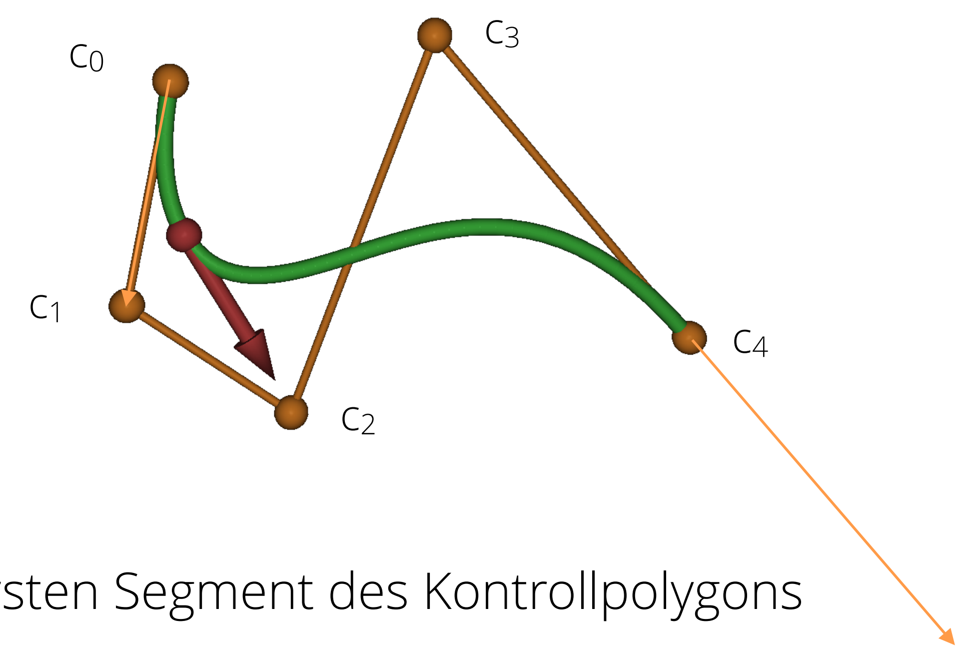
- Kurve innerhalb der konvexen Hülle



Tangente am Start- und Endpunkt

- Interpolation am Start- und Endpunkt
- $t(0) = c_0$, $t(1) = c_n$
- Ableitung am Start- und Endpunkt

$$p'(0) = n(c_1 - c_0)$$
$$p'(1) = n(c_n - c_{n-1})$$

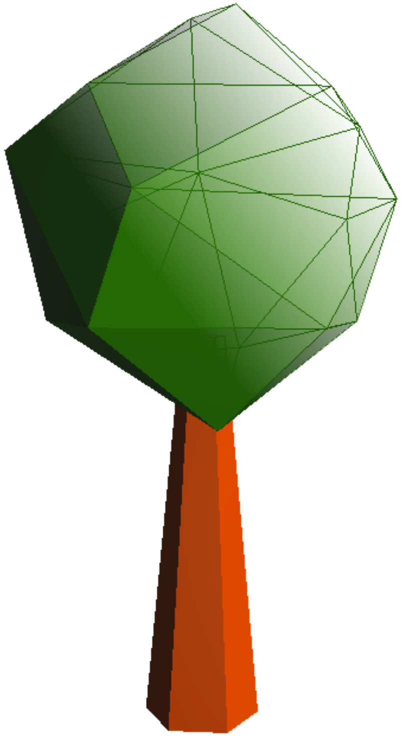


- Tangente
  - an c_0: parallel zum ersten Segment des Kontrollpolygons
  - an c_4: parallel zum letzten Segment des Kontrollpolygons

Übung: Bezier-Kurve

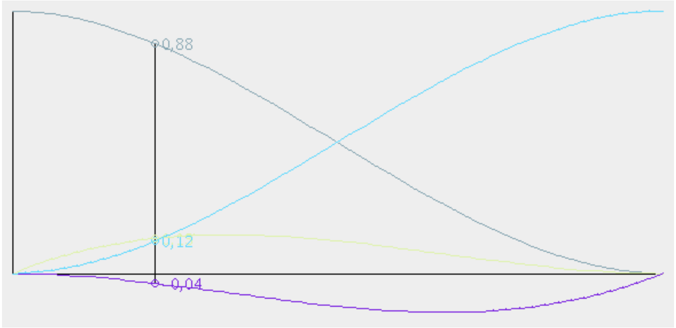
- Geben Sie die Kontrollpunkte einer Bezier-Kurve vom Grad 3 mit den folgenden Eigenschaften an:
    - Startpunkt: (0,0,0)
    - Endpunkt: (1,2,3)
    - Ableitung am Startpunkt: (1,1,0)
    - Ableitung am Endpunkt: (1,-1,-1)

nur die Richtung zählt, Länge kann frei gewählt werden

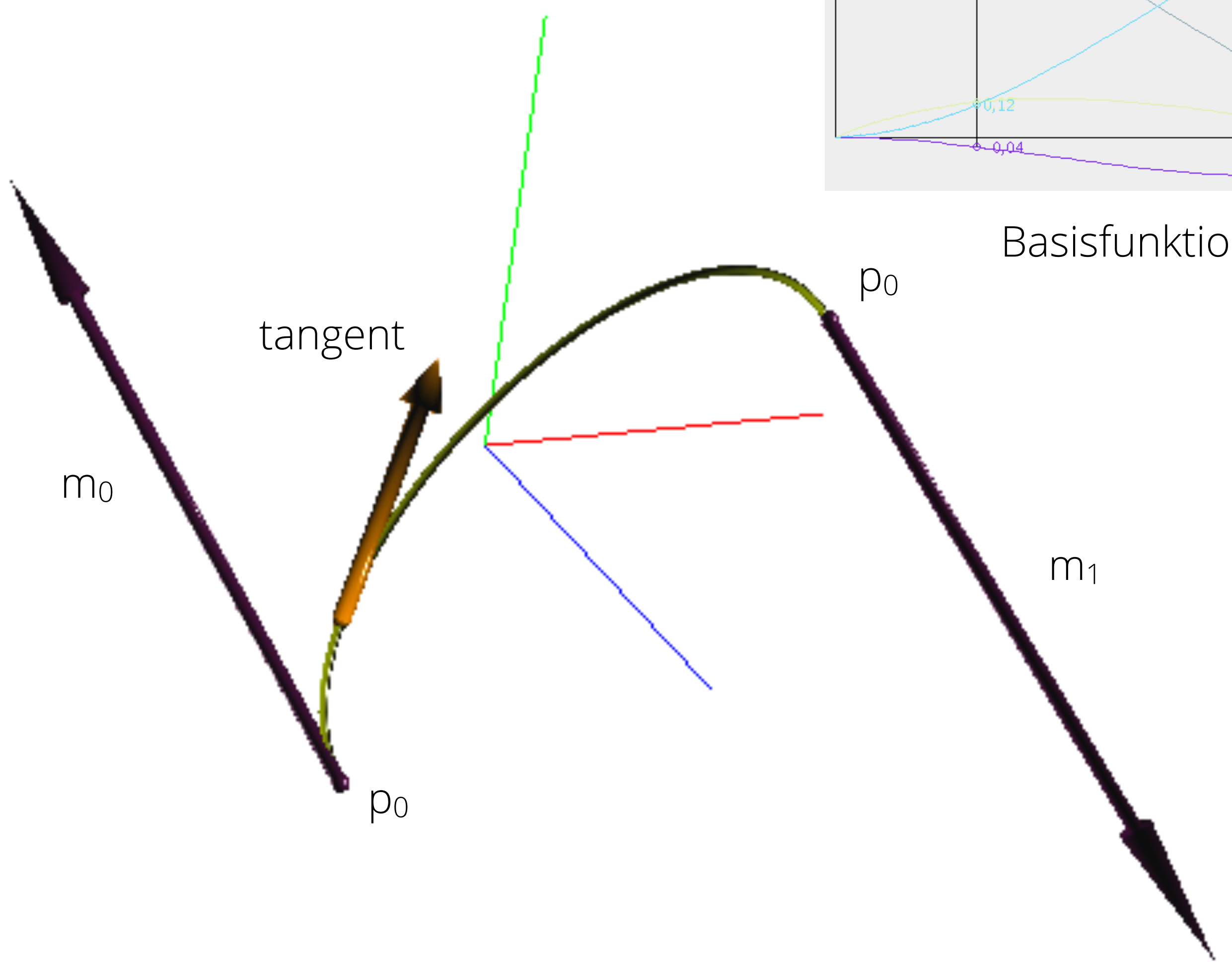


Hermite-Kurve

Hermite-Kurve

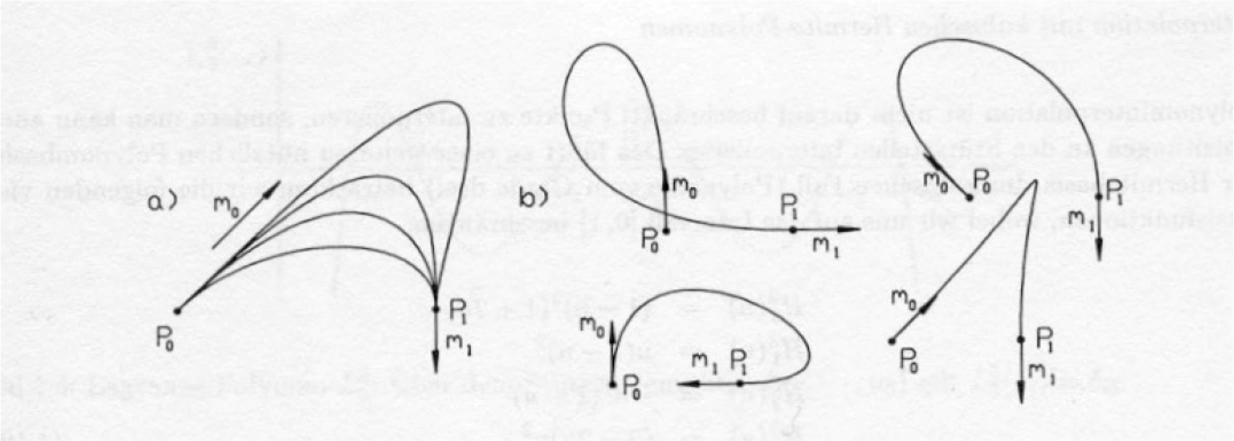


Basisfunktionen



Hermite-Kurve

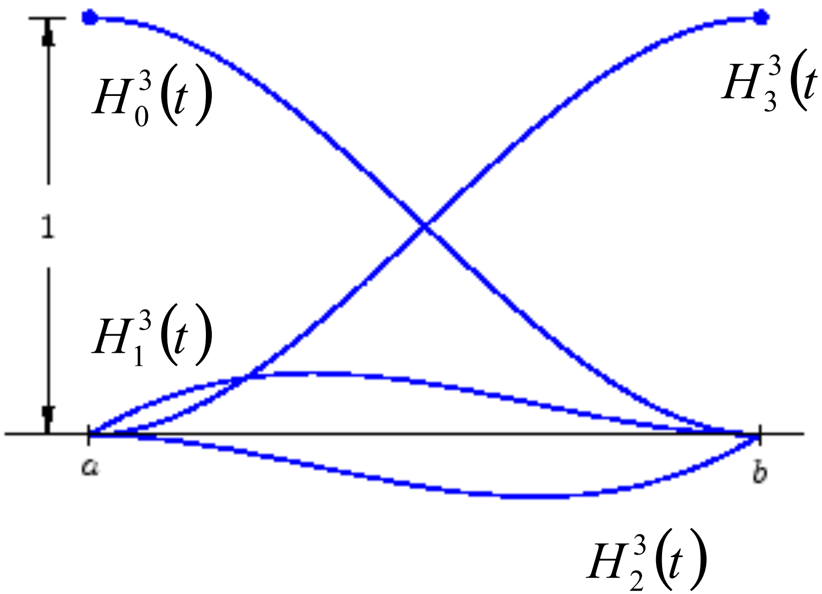
- Hermite-Kurve: $$p(t) = c_0 \cdot H_0^3(t) + c_1 \cdot H_1^3(t) + c_2 \cdot H_2^3(t) + c_3 \cdot H_3^3(t)$$
- alternative Notation
    - $c_0 = p_0$, $c_1 = m_0$, $c_2 = m_1$, $c_3 = p_1$
- Koeffizienten 0 und 3 sind Punkte
- Koeffizienten 1 and 2 sind die Ableitungen (m_0, m_1) an diesen Punkten



Basisfunktionen

- Idee: Interpolation der Punkte und Ableitungen
  - Hermite-Basis
  - nur kubischer Fall: 4 Basisfunktionen in [0,1]:

$$H_0^3(t) = (1-t)^2(1+2t)$$
$$H_1^3(t) = t(1-t)^2$$
$$H_2^3(t) = -t^2(1-t)$$
$$H_3^3(t) = (3-2t)t^2$$

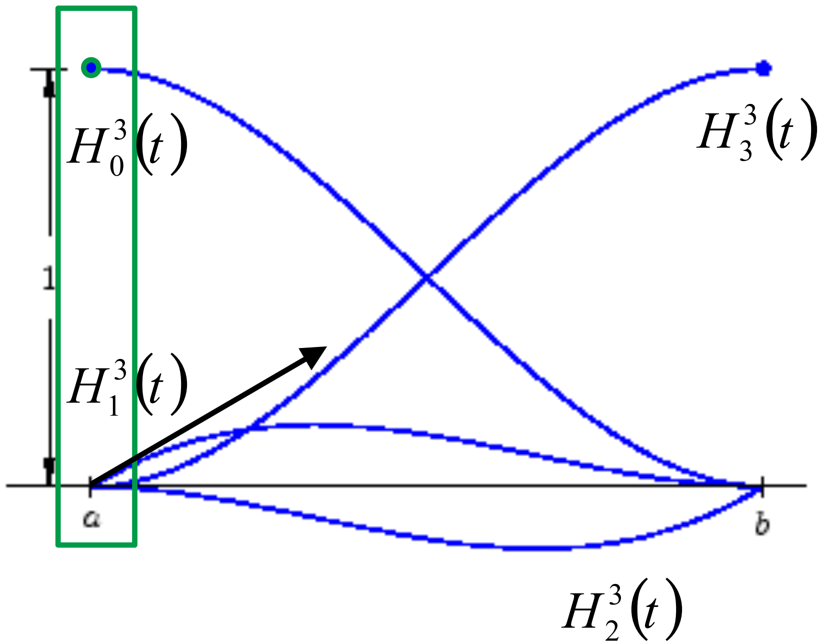


Basisfunktionen

- an Stelle t = 0
  - $H_0^3(t)$ ist 1, alle anderen Basisfunktionen geben 0

    → Interpolation von p_0 (c_0)
  - $H_1^{3'}(t)$ ist 1, alle anderen Basisfunktionen geben 0

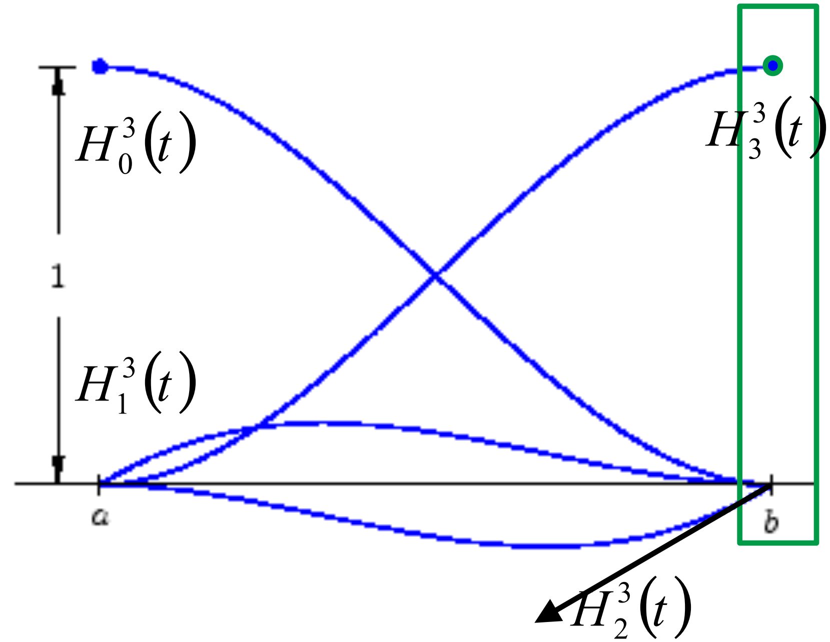
    → Ableitung ist m_0 (c_1)



$$p(t) = p_0 \cdot H_0^3(t) + m_0 \cdot H_1^3(t) + m_1 \cdot H_2^3(t) + p_1 \cdot H_3^3(t)$$

Basisfunktionen

- Stelle t = 1
  - gleiche Argumentation
  - Interpolation von p_1 (c_3) wegen $H_3^3(t)$
  - Ableitung isr m_1 (c_2) wegen $H_2^{3'}(t)$



$$p(t) = p_0 \cdot H_0^3(t) + m_0 \cdot H_1^3(t) + m_1 \cdot H_2^3(t) + p_1 \cdot H_3^3(t)$$

Zusammenfassung Hermite

- Kurve:

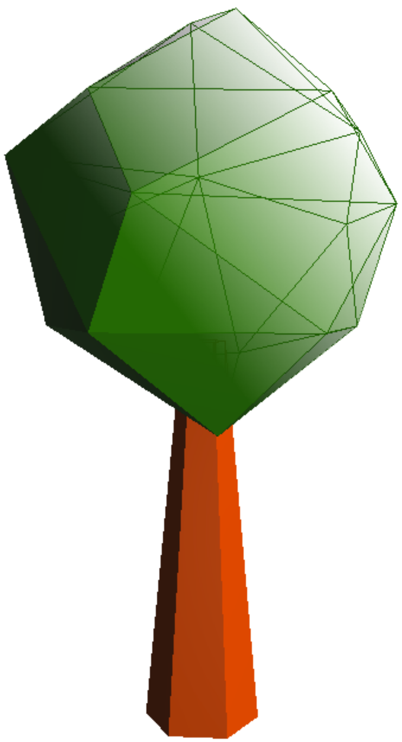
$$p(t) = c_0 \cdot H_0^3(t) + c_1 \cdot H_1^3(t) + c_2 \cdot H_2^3(t) + c_3 \cdot H_3^3(t)$$

$$p(t) = p_0 \cdot H_0^3(t) + m_0 \cdot H_1^3(t) + m_1 \cdot H_2^3(t) + p_1 \cdot H_3^3(t)$$

- Startpunkt-Interpolation bei c_0
- Endpunkt-Interpolation bei c_3
- Tangente (Ableitung) am Startpunkt: c_1
- Tangente am Endpunkt: c_2

Übung: Hermite-Kurve

- Zeichnen Sie eine Hermite-Kurve mit der folgenden Information:
    - $p_0 = (0,0,0)$
    - $p_1 = (1,1,0)$
    - Tangente m_0 an $p_0 = (1,0,0)$
    - Tangente m_1 an $p_1 = (-1,0,0)$

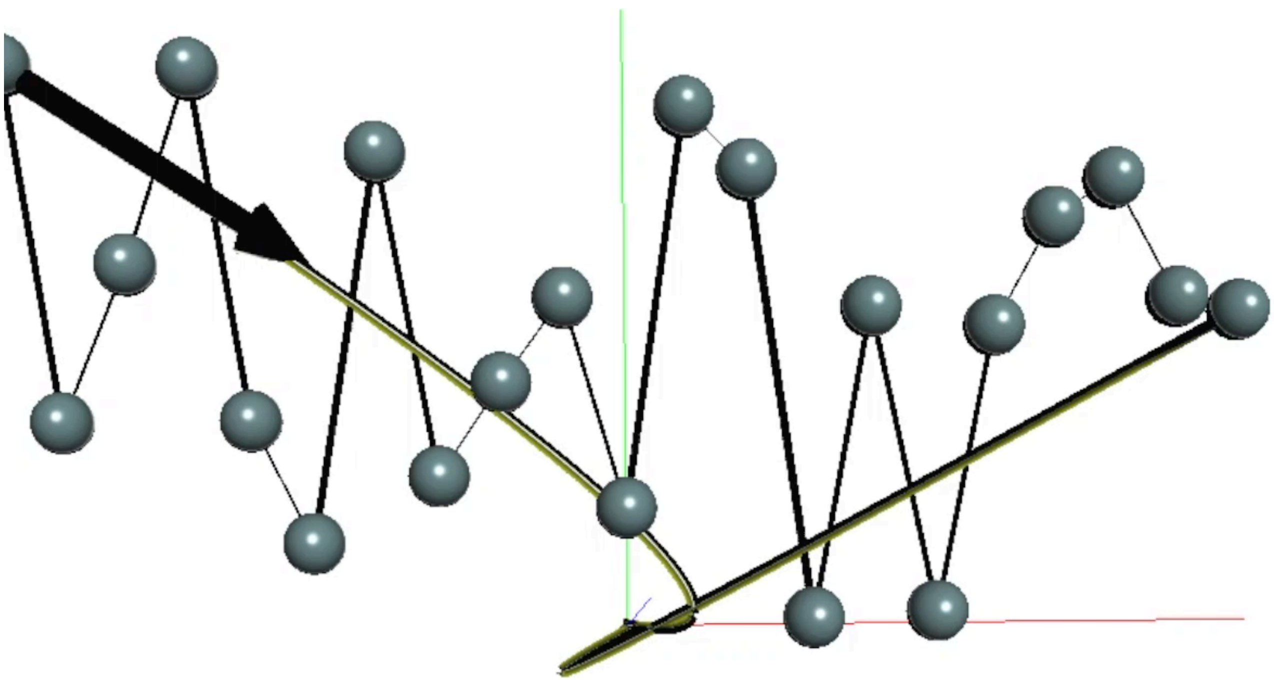


Splines

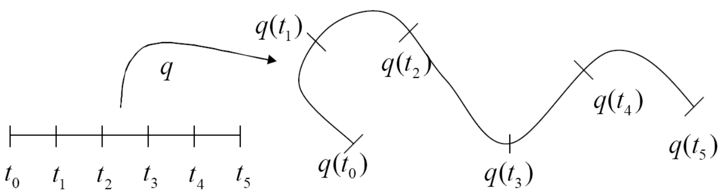
siehe auch: http:*//pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/*, abgerufen am 23.8.2018

Limitationen Kurven

- bei hoher Anzahl von Kontrollpunkten
  - hoher Grad
  - Oszillation



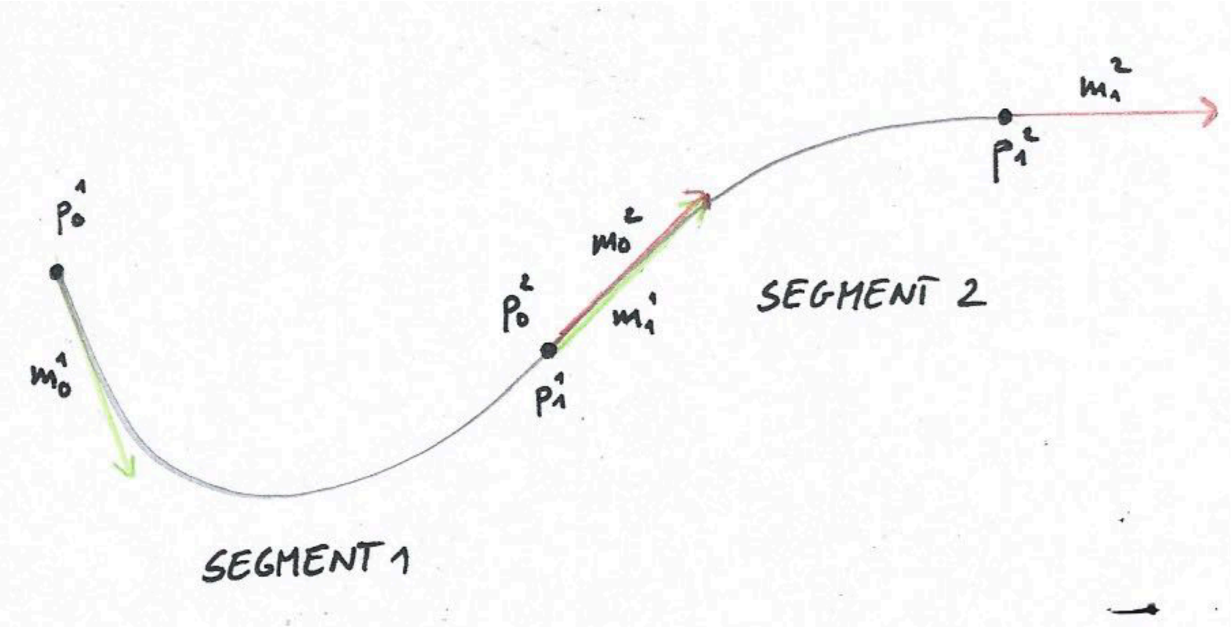
Splines



- Zusammenfügen mehrer Kurven von niedrigem Grad
- glatte Übergänge
- Idee
    - stetiger Übergang zwischen den Kurvensegmenten (z.B. Hermite, Bezier)
- Verallgemeinerung
    - Splines mit eigenen Basisfunktionen
    - Lokalität: Basisfunktionen mit kleinem Grad
    - Splines über Bezier-Basis: B-Splines

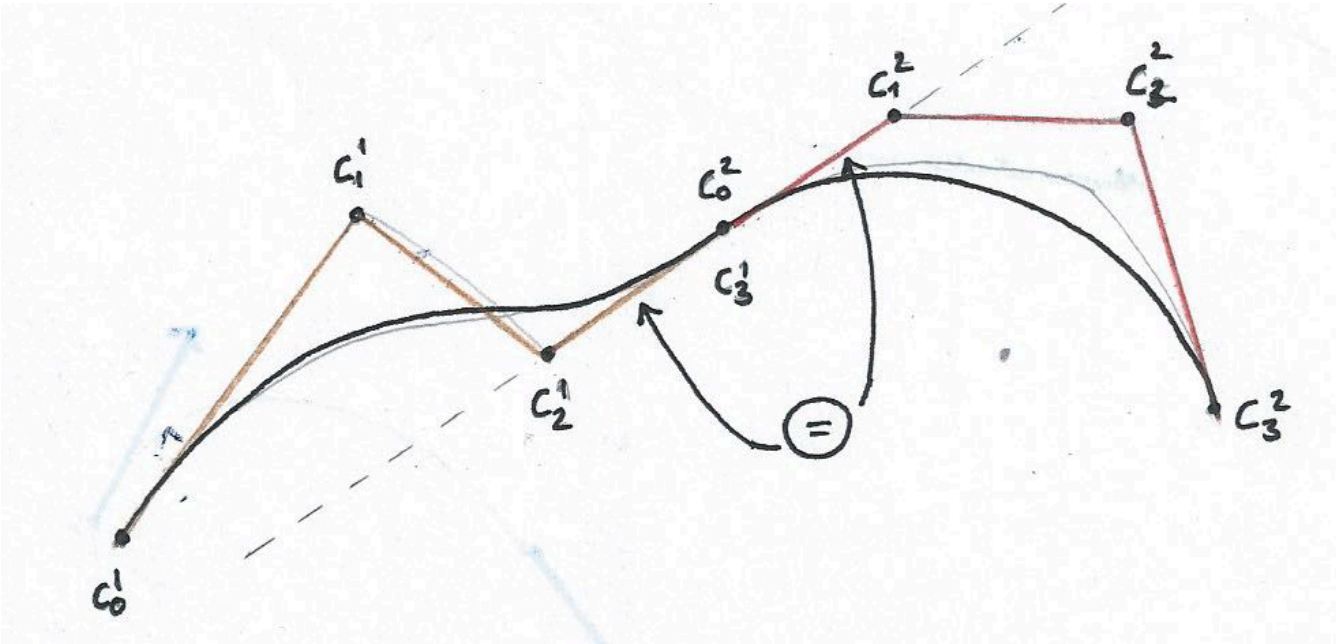
Hermite-Spline

- Spline-Segment n → n+1
- Endpunkt des Segments n = Startpunkt des segment n+1: $p_1^1 = p_0^2$
- Stetigkeit
    - Tangente am Endpunkt Segment n = Tangent am Startpunkt segment n+1: $m_1^1 = m_0^2$



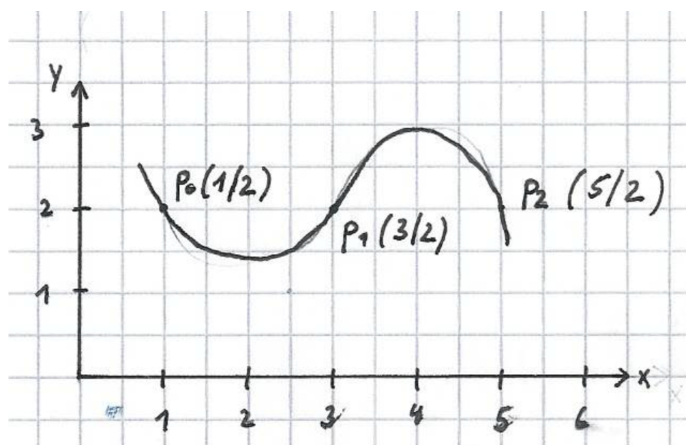
Bezier-Spline

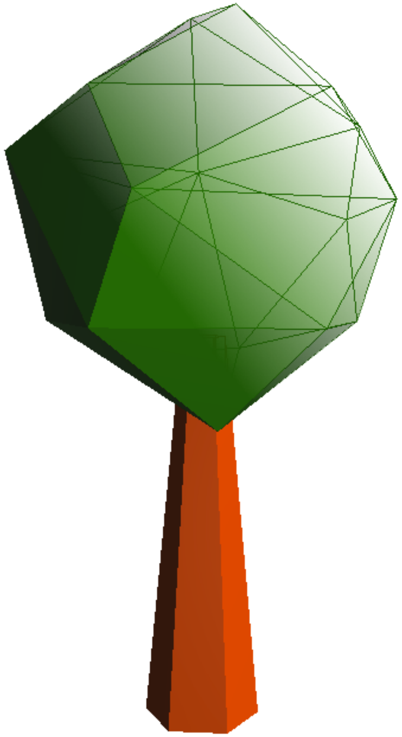
- Spline-Segment n ➞ n+1
- Endpunkt des Segments n = Startpunkt des Segments n+1
- Stetigkeit
  - letztes Segment des Kontrollpolygons n mit gleicher Länge und Richtung wie erstes Segment des Kontrollpolygons n+1



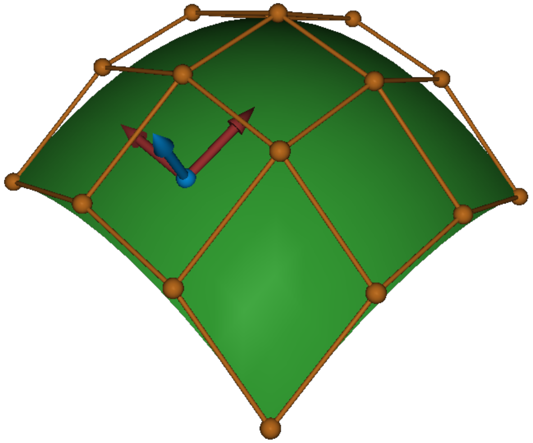
Übung: Bezier-Spline

- Bestimmen Sie einen Bezier-Spline mit Grad 3 und den folgenden Eigenschaften:
  - Interpolation an $p_0 = (1,2)$, $p_1 = (3,2)$ und $p_2 = (5,2)$
  - glatter Übergang an p_1 (Kurve 1 nach Kurve 2)
  - resultierende Kurve ähnlich zu Abbildung unten
- Geben Sie eine Liste von Kontrollpunkten an





Parametrisierte Flächen



Parametrisierte Flächen

- Abbildung

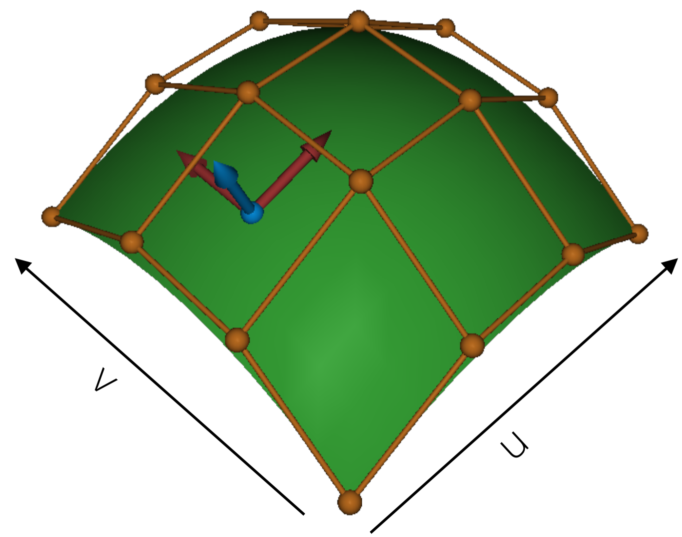
$$(u, v) \to \mathbb{R}^n, (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- also: zwei Parameter (u,v) anstelle von einem (t)
- Definitionsbereich:

$$D = [a, b] \times [c, d] \text{ oder } D = [0, 1]^2$$

Tensorproduktflächen

- zwei verschachtelte Kurven: u-Richtung und v-Richtung
- Kontrollgitter anstelle eines Kontrollpolygons
- resultierende Fläche:



Kontrollpunkte (i,j)

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} \cdot F_i^n(u) \cdot G_j^m(v)$$

Basisfunktionen der ersten Kurve vom Grad n

Basisfunktionen der zweiten Kurve vom Grad m

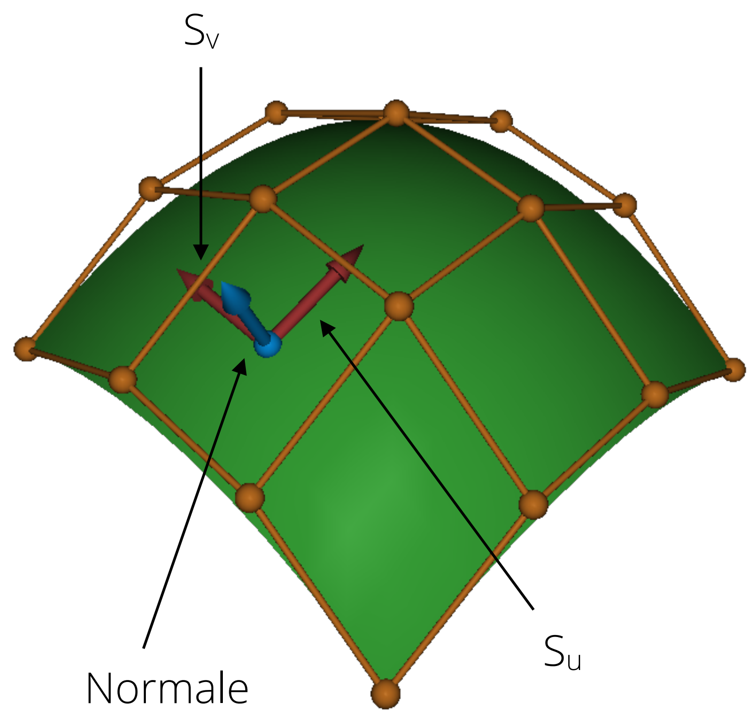
Tangenten

- Oberflächenpunkte S(u,v)
  - zwei Tangenten (u-Tangente und v-Tangente)
  - partielle Ableitungen

$$S_u(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial u}$$

$$S_v(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial v}$$

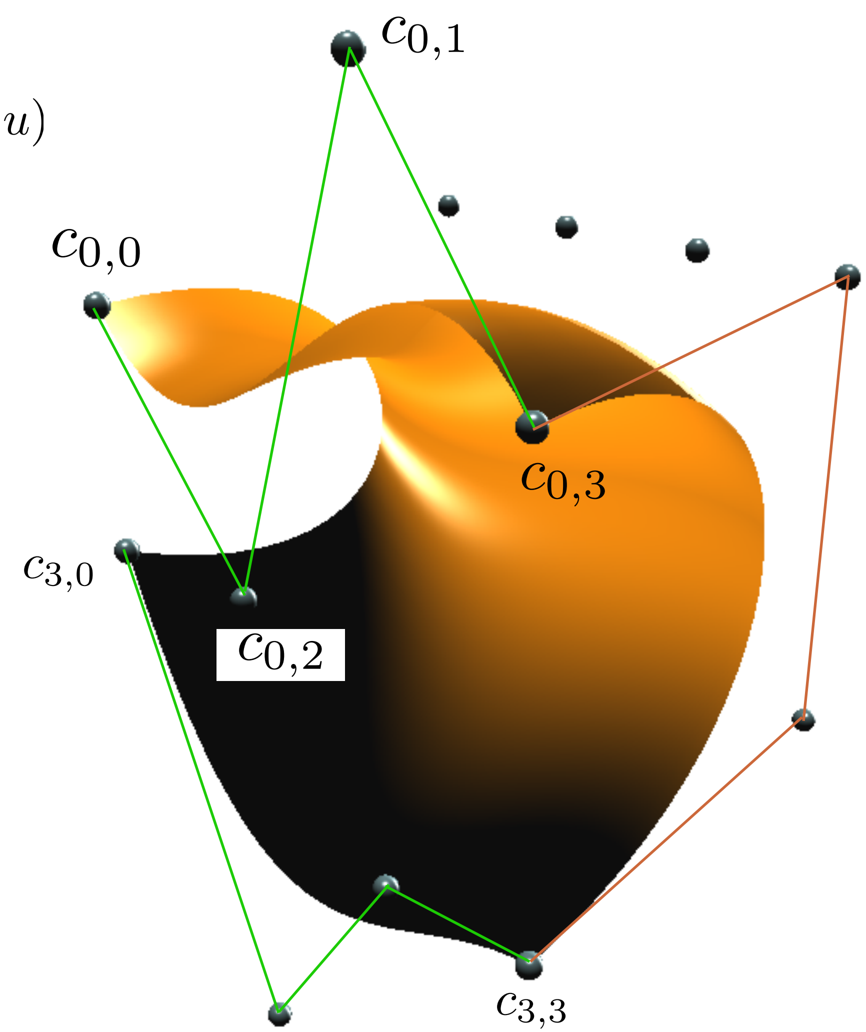
  - Normale bei S(u,v) = normaliertes Kreuzprodukt der Tangenten



Beispiel

- Bezier-Fläche mit Grad 3 (4x4 Kontrollpunkte)

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{i,j} B_i^3(u)$$



Kontrollpunkte:
(-1, 0, -1)
(-1, -2, -0.33)
(-1, -1, 0.33)
(-1, -1, 1)
(1, -1, -1)
(1, -1, -0.33)
(1, -1, 0.33)
(1, -1, 1)
(1, 1, -1)
(1, 1, -0.33)
(1, 1, 0.33)
(1, 1, 1)
(-1, 1, -1)
(-1, 0, -0.33)
(-1, 2, 0.33)
(-1, 1, 1)

Zusammenfassung

- Interpolation
- Parametrisierung & Basisfunktionen
- Kurventypen
  - Bezier
  - Hermite
- Splines
- Parametrisierte Flächen