LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 22. Juni 2010

Aufgabe I: .... **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?
Bitte kreuzen Sie an, jeweils .... **1 Punkt**

1. Ein vollständiger Graph ist eulersch genau dann, wenn die Anzahl der Konten gerade ist. .... [ ] wahr oder [X] falsch
2. Jeder zusammenhängende Graph, der nicht eulersch ist, hat einen Hamiltonkreis. .... [ ] wahr oder [X] falsch
3. Planare, bipartite Graphen lassen sich mit mindestens drei Farben färben. .... [ ] wahr oder [X] falsch
4. Für einen schlichten, ungerichteten Graphen G gilt: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .... [X] wahr oder [ ] falsch
5. Ein schlichter, ungerichteter Graph mit 2 Komponenten hat mindestens $|V| - 2$ Kanten. .... [X] wahr oder [ ] falsch
6. Jede formale Sprache läßt sich auch mit Hilfe einer Graphgrammatik beschreiben. .... [X] wahr oder [ ] falsch
7. Petrinetze sind bipartite Graphen. .... [X] wahr oder [ ] falsch
8. Ein Petrinetz muss zusammenhängend sein. .... [ ] wahr oder [X] falsch
9. Nur Bäume und bipartite Graphen sind 2-färbbar. .... [X] wahr oder [ ] falsch
10. Die Adjazenzmatrix hat eine größere Dimension als die Inzidenzmatrix .... [ ] wahr oder [X] falsch
11. Kreise können nicht bipartit sein .... [ ] wahr oder [X] falsch
12. Ein Fluss in einem Netzwerk darf alle Kanten mit 0 bewerten. .... [X] wahr oder [ ] falsch
13. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Hamiltonkreis und/oder einen Eulerkreis. .... [ ] wahr oder [X] falsch
14. Ein schlichter, ungerichteter Graph hat immer eine größte Paarung. .... [X] wahr oder [ ] falsch
15. In bipartiten Graphen lassen sich Paarungen mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus' finden. .... [ ] wahr oder [X] falsch

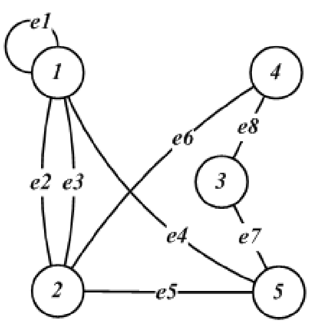
Aufgabe II: .... **15 Punkte**

Gegeben die folgende Adjazenzmatrix:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Geben Sie bitte den dazugehörigen Graphen G an:



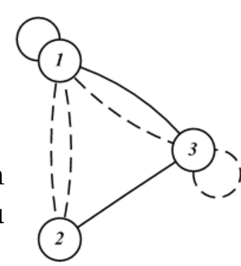
2. Geben Sie bitte die dazugehörige Inzidenzmatrizen $M(G)$ an:

$$M(G) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Was bedeutet die Addition zweier Adjazenzmatrizen, also $A(G_1) + A(G_2)$?
Graph hat ebensoviele Knoten, aber die Kanten werden aufaddiert.

BSP $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

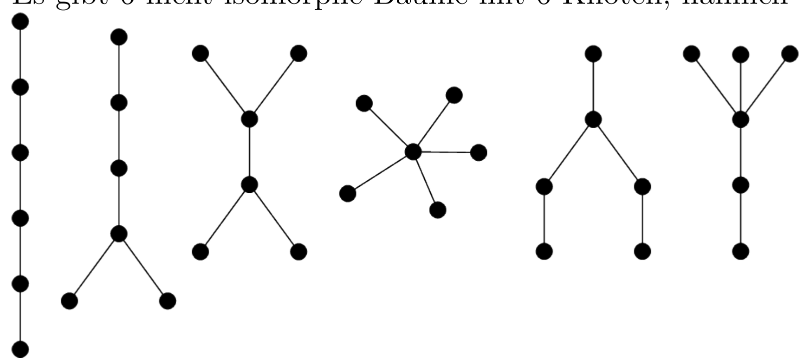
In dem Graph hier gehöre die durchgezogenen Kanten zum ersten und die gestrichelten zum zweiten Graph und beide zu Ergebnisgraph.



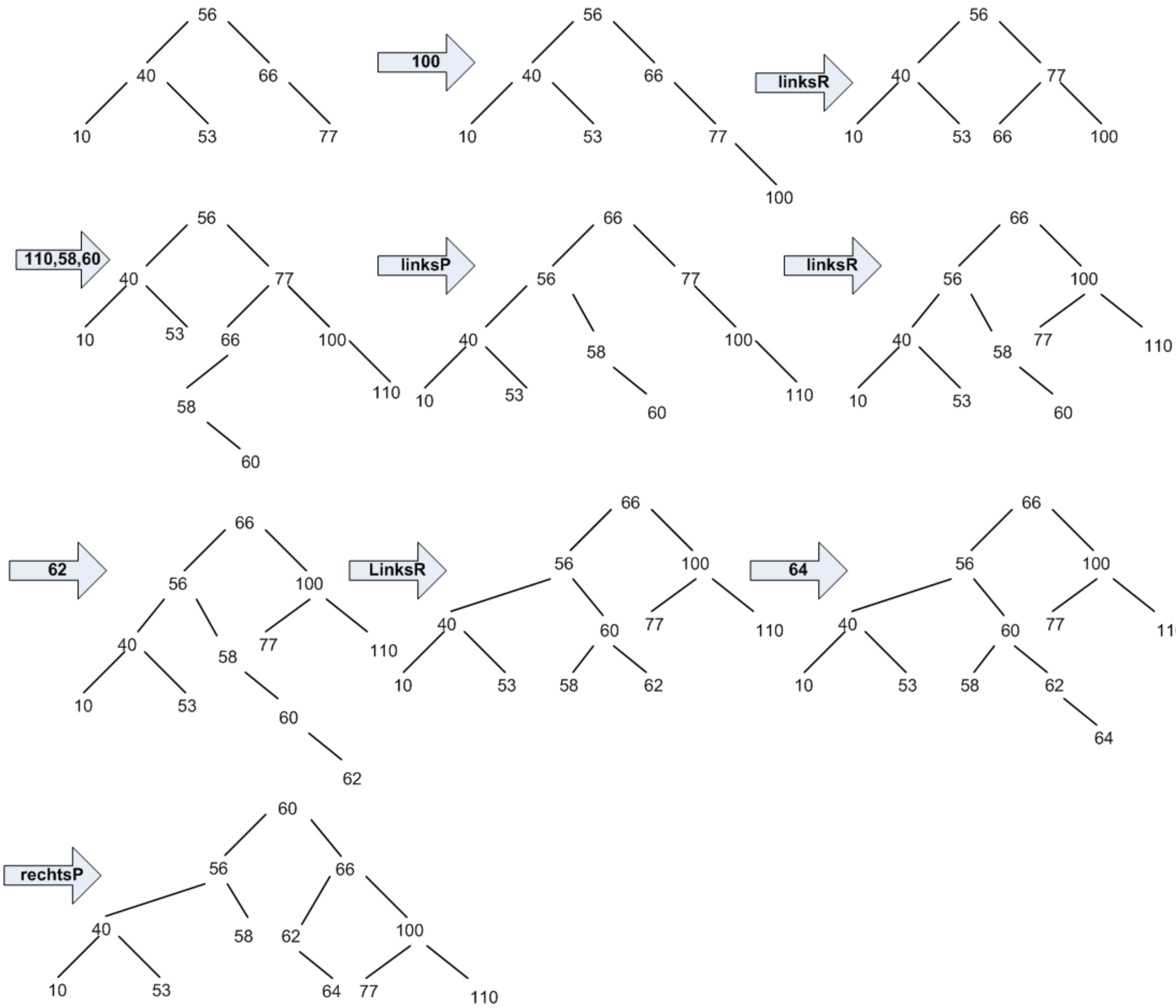
Aufgabe III: .... **15 Punkte**

Lösung:

1. Es gibt 6 nicht-isomorphe Bäume mit 6 Knoten, nämlich



2.



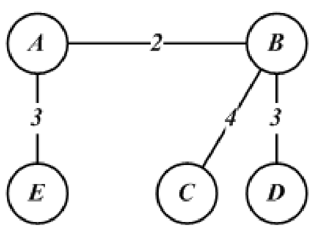
Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

Gegeben die folgende Entfernungstabelle.

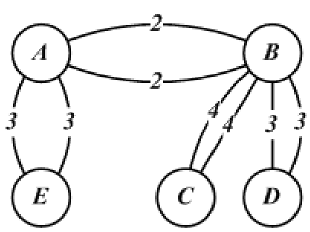
	A	B	C	D
E	3 $\boxed{2}$	4	4	5
D	6	3 $\boxed{3}$	6	
C	5	4 $\boxed{4}$		
B	2 $\boxed{1}$			

Lösung:

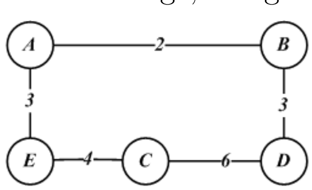
1. Lösen Sie bitte das dazugehörige TSP mit der Minimum-Spanning-Tree-Heuristik. Zunächst Kruskal, anhand der Ordnung, die in der Tabelle mit Kästchennummern dargestellt ist.

   Dann Eulertour auf den verdoppelten Kanten.

   Dann solange, wie geht „Dreiecke abkürzen“

   Länge: 18

2. Wie lang ist die optimale Tour mindestens?
   Mindestens halb solang wie Eulertour nach Kruskal, also ist die Mindestlänge: 12

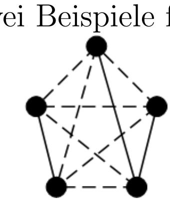
Aufgabe V: .... **15 Punkte**

Das Komplement $\overline{G}$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist gegeben durch $G = (V, (V \times V) \setminus E)$. Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist $\overline{G}$ zusammenhängend.

Lösung:

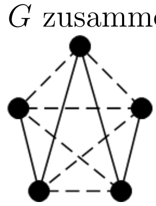
- Geben Sie bitte zwei Beispiele für diesen Zusammenhang:

  Dabei gehören die durchgezogenen Kanten zu G und die gestrichelten zu $\overline{G}$.

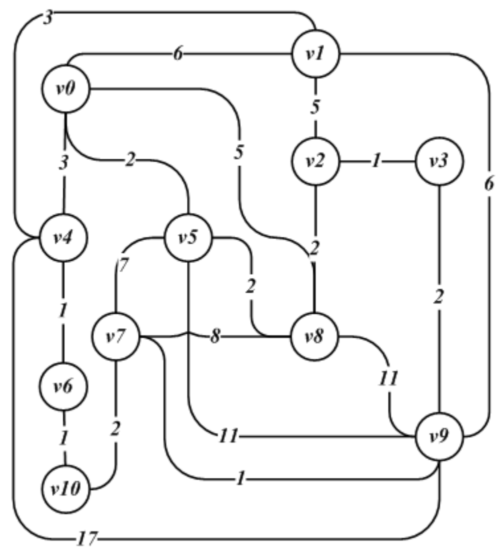
- Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt, also:
  G zusammenhängend $\not\Longrightarrow$ $\overline{G}$ nicht zusammenhängend.:

  Dabei gehören die durchgezogenen Kanten zu G und die gestrichelten zu $\overline{G}$, beides sind aber zusammenhängende Graphen. Also gilt **nicht**, dass
  G zusammenhängend $\Longrightarrow$ $\overline{G}$ nicht zusammenhängend.

- Begründen Sie bitte die Aussage:
  Die Aussage ist äquivalent dazu, dass nicht G und $\overline{G}$ unzusammenhängend sein können. Seien K_1 und K_2 die zwei Komponenten von G, dann müssen aber in $\overline{G}$ alle Konten in K_1 mit allen Knoten in K_2 verbunden sein, dann gibt es aber von jedem Konten zu jedem Knoten in $\overline{G}$ eine Pfad. Dann ist aber $\overline{G}$ zusammenhängend.

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**



Gegeben sei dieser gewichtete Graph:
Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v9$.

Lösung:

	$v0$	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$	$v7$	$v8$	$v9$	$v10$
$Entf$	0	6			3	2		9	5		
$Vorg$	$v0$	$v0$			$v0$	$v0$		$v5$	$v0$		
OK	t					t					
$Entf$	0	6	6		3	2	4	9	4	13	5
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v8$		$v0$	$v0$	$v4$	$v5$	$v5$	$v5$	$v6$
OK	t				t	t	t		t		t
$Entf$	0	6	6	7	3	2	4	7	4	13	5
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v8$	$v2$	$v0$	$v0$	$v4$	$v10$	$v5$	$v5$	$v6$
OK	t	t	t		t	t	t		t		t
$Entf$	0	6	6	7	3	2	4	7	4	12	5
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v8$	$v2$	$v0$	$v0$	$v4$	$v10$	$v5$	$v1$	$v6$
OK	t	t	t		t	t	t	t	t		t
$Entf$	0	6	6	7	3	2	4	7	4	8	5
$Vorg$	$v0$	$v0$	$v8$	$v2$	$v0$	$v0$	$v4$	$v10$	$v5$	$v7$	$v6$
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t

Der kürzeste Weg hat die Länge 8 mit $v0 - v4 - v6 - v10 - v7 - v9$.

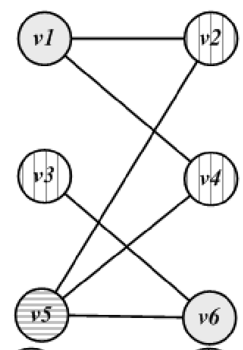
Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Ein Färbealgorithmen ist für bipartite Graphen optimal, wenn er diese immer mit zwei Farben färbt. Welche der folgenden Algorithmen ist optimal für bipartite Graphen?
Bitte begründen Sie Ihre Antwort, jeweils .... **5 Punkte**.

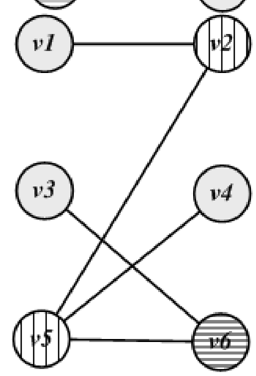
Lösung:

1. *Greedy-Färbealgorithmus*

   Sei die Ordnung $v1, v6, v3, v5, v4, v2$ dann wird G so mit drei Farben gefärbt und ist also nicht optimal.



2. *Färbungsalgorithmus ColorFirst*
   Beginnend mit $v1$ wird $v3$, dann $v4$ und dann $v5$ in einer Farbe gefärbt, dann $v2$ und $v5$ in einer zweiten Farbe und für $v6$ wird dann eine dritte benötigt.

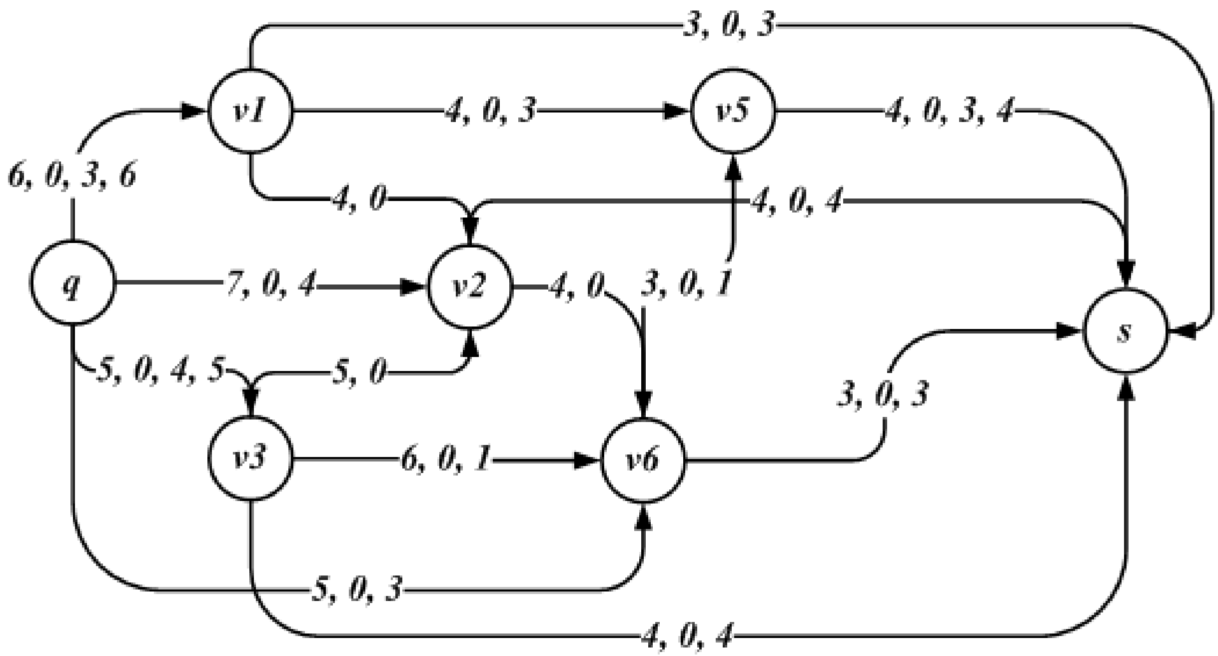


3. *Färbungsalgorithmus BFS*
   färbt bipartite Graphen optimal: Er braucht immer nur zwei Farben, denn die eine Partionierung erhält die eine Farbe. Dann bekommen alle Nachbarn immer die jeweils andere Farbe, weil der Graph bipartit sind die auch immer in der anderen Partionierung.

Aufgabe VIII: .... **15 Punkte**

Gegeben das folgende Netzwerk. Berechnen Sie bitte den maximalen Fluss mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus, wobei sie dieses unbewertete Netzwerk benutzen dürfen.

Lösung:



Knoten	q	$v2$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 7)$	$(+v2, 4)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v1$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 6)$	$(+v1, 3)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v3$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 5)$	$(+v3, 4)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v6$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 5)$	$(+v6, 3)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v1$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v1, 3)$	$(+v5, 3)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v3$	$v6$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 1)$	$(+v3, 1)$	$(+v6, 1)$	$(+v5, 1)$

Es gibt keine vergrößernden Wege mehr, also ist $d = 18$.