LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 11. Januar 2010

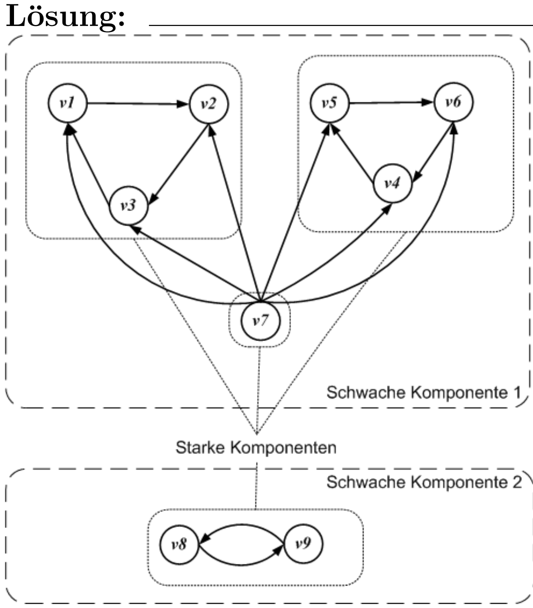
Aufgabe I: .... **20 Punkte**

1. Gegeben sei ein schlichter Graph G, der

   - 9 Knoten,
   - 4 starke Komponenten[1] und
   - 2 schwache Komponenten[2] hat,
   - mindestens einen Knoten mit Ausgangsgrad $d_-(v) = 6$ hat.

   (a) Geben Sie bitte ein Beispiel für G an: .... **5 Punkte**

   Lösung:



wobei $d_-(v7) = 6$

   (b) Kann es einen wie oben beschrieben Graphen geben, der aber einen Knoten mit $d_-(v) \geq 8$ hat?
   Begründen Sie bitte Ihre Antwort. .... **5 Punkte**

   Lösung:
   Nein: Weil im schlichten Graphen weder Mehrfachkanten noch Schlingen erlaubt sind, muss der Knoten mit $d_-(v) = 8$ mit den 8 anderen in Verbindung stehen. Dann gibt es aber keine 2 schwache Komponenten.
   Also, geht das nicht.

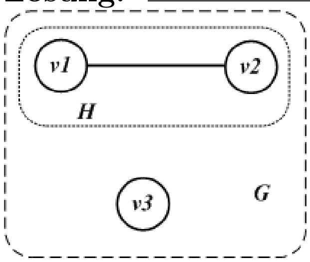
[1] i.e. 4 starke Zusammenhangskomponenten

[2] i.e 2 Zusammenhangskomponenten auf dem zugrundeliegenden ungerichteten Graph

2. Gegeben ein ungerichteter Multigraph G und ein Untergraph $H \sqsubseteq G$. Dann gilt: Wenn für alle Knoten in H der Knotengrad[3] gleich dem Knotengrad des jeweiligen Knotens im Graph G ist, dann ist G nicht zusammenhängend oder $G = H$.

   (a) Geben Sie bitte dafür ein Beispiel . . . . **3 Punkte**

   Lösung:



   (b) und erläutern Sie, warum die Aussage immer gilt. . . . . **7 Punkte**
   Sei der Multigraph $G = (V, E)$ und ein Untergraph $H = (W, F)$ dann gilt: wenn $v_1, v_2 \in W$ und $(v_1, v_2) \in E$ dann auch $(v_1, v_2) \in F$.

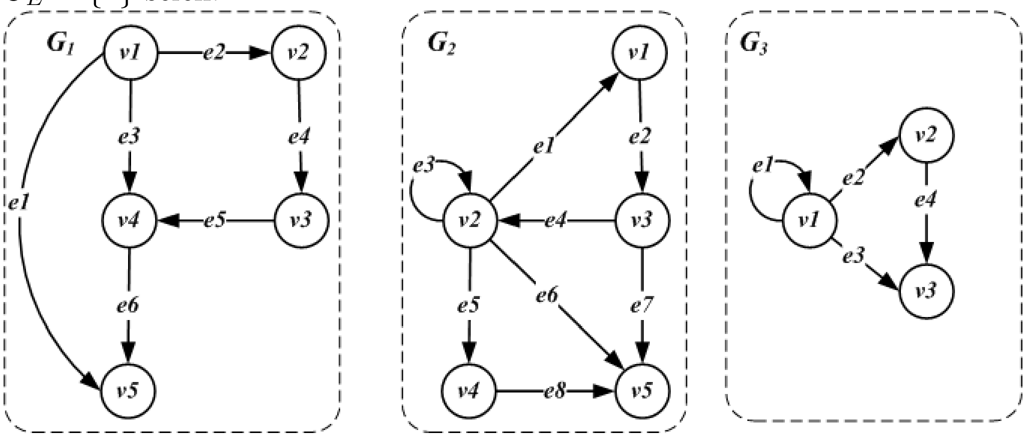
   Wenn es eine Kante e in G aber nicht in H gibt (also $e \in E \setminus F$), dann darf die mit keinem Knoten in $v \in W \subseteq V$ verbunden sein, sonst wäre ja der Knotengrad $d_G(v) \neq d_H(v)$:

   - Also gibt es entweder mindestens eine weitere Komponente in G, die e enthält und mit keinem Knoten in W verbunden ist. Dann ist G nicht zusammenhängend.
   - Oder es gibt diese Kante nicht, dann ist aber jede Kante aus H auch in G und damit ist $G = H$
     oder ist gibt noch einzelne Knoten, dann ist G aber nicht zusammenhängend.

[3] i.e. Eckengrad

Aufgabe II: .... **20 Punkte**

1. Gegeben die folgenden Graphen, wobei die Knoten und Kantenalphabete $C_V = C_E = \{*\}$ seien:



Gibt es einen Morphismus zwischen den folgenden Graphen? .... **10 Punkte**

Wenn ja, dann geben Sie ihn bitte an (sowohl f_V und f_E).
Wenn nein, oder begründen Sie bitte, warum nicht?

(a) $f : G_1 \rightarrow G_2$

Lösung:

Ja, mit

$$f_V: \begin{array}{l} v1 \rightarrow v2 \\ v2 \rightarrow v1 \\ v3 \rightarrow v3 \\ v4 \rightarrow v2 \\ v5 \rightarrow v4 \end{array} \quad \text{und} \quad f_E: \begin{array}{l} e1 \rightarrow e5 \\ e2 \rightarrow e1 \\ e3 \rightarrow e3 \\ e4 \rightarrow e2 \\ e5 \rightarrow e4 \\ e6 \rightarrow e5 \end{array}$$

(b) $f : G_2 \rightarrow G_3$

Lösung:

Ja, mit

$$f_V: \begin{array}{l} v1 \rightarrow v1 \\ v2 \rightarrow v1 \\ v3 \rightarrow v1 \\ v4 \rightarrow v2 \\ v5 \rightarrow v3 \end{array} \quad \text{und} \quad f_E: \begin{array}{l} e1 \rightarrow e1 \\ e2 \rightarrow e1 \\ e3 \rightarrow e1 \\ e4 \rightarrow e1 \\ e5 \rightarrow e2 \\ e6 \rightarrow e3 \\ e7 \rightarrow e3 \\ e8 \rightarrow e4 \end{array}$$

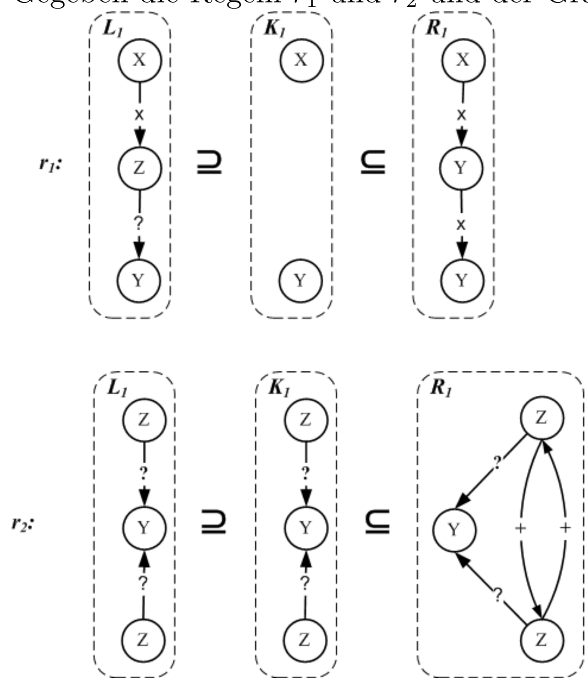
(c) $f : G_3 \to G_1$
Lösung: ___
Nein, den die Schlinge $e1$ kann nicht abgebildet werden.

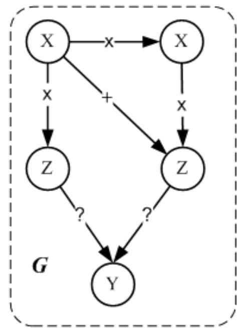
(d) $f : G_3 \to G_2$
Lösung: ___
Ja, mit

$$f_V : \begin{array}{l} v1 \to v2 \\ v2 \to v4 \\ v3 \to v5 \end{array} \quad \text{und} \quad f_E : \begin{array}{l} e1 \to e3 \\ e2 \to e5 \\ e3 \to e6 \\ e4 \to e8 \end{array}$$

(e) $f : G_2 \to G_1$
Lösung: ___
Nein, den die Schlinge $e3$ kann nicht abgebildet werden.

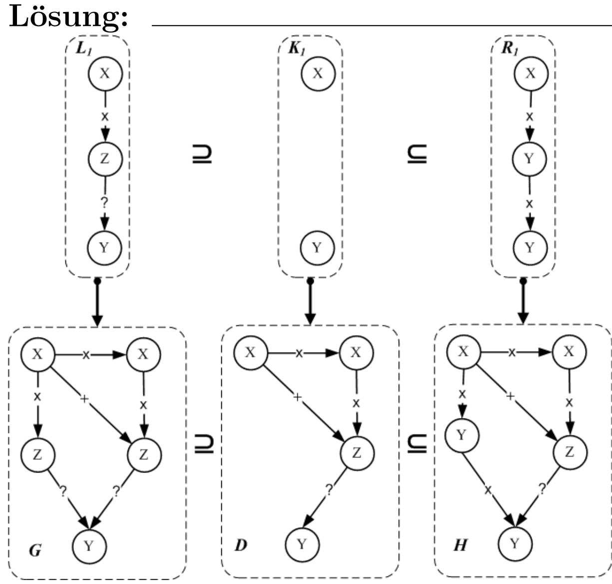
2. Gegeben die Regeln r_1 und r_2 und der Graph G:





   (a) Wenden Sie Regel r_1 bitte auf den Graphen G an, indem Sie die direkte Ableitung $G \overset{r_1}{\Longrightarrow} H$ zeichnen. . . . . **6 Punkte**

   Lösung:



   (b) Ist r_2 mit den einzig möglichen Vorkommen von L_2 parallel unabhängig oder nicht? Bitte begründen Sie Ihre Antwort. . . . . **4 Punkte**

   r_2 ist parallel abhängig, denn es gibt gar keinen Graphmorphismus von K_2 nach D, also auch keinen mit $L_2 \to G = L_2 \to D \to G$.

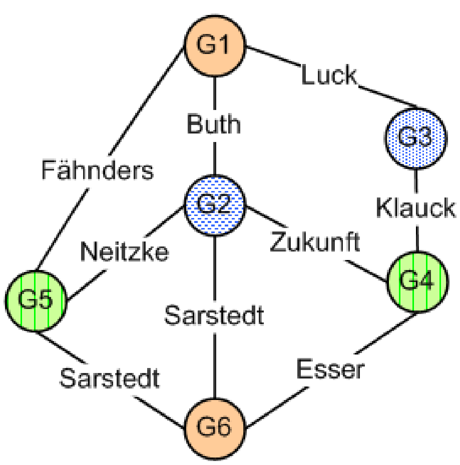
Aufgabe III: .... **20 Punkte**

1. Angenommen, das Department Informatik hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen.
   Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat?
   Die Gremien sind:
   G1 : Luck, Padberg, Buth, Meisel, Fähnders ;
   G2 : Buth, Zukunft, Sarstedt, Neitzke;
   G3 : Padberg, Luck, Klauck;
   G4 : Zukunft, Klauck, Esser, Wendholt;
   G5 : Neitzke, Sarstedt, Fähnders;
   G6 : Sarstedt, Esser, Hübner;

   Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Knotenfärbung zur Lösung. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. .... **10 Punkte**

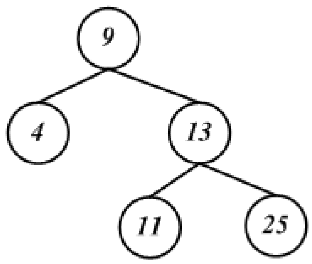
   Lösung:
   Zur Modellierung der Problemstellung wird ein Konfliktgraph G mit 6 Knoten verwendet, so dass jeder Knoten einem Gremium entspricht. Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Gremien mindestens ein gemeinsames Mitglied haben, das auf der Kante eingetragen wird.

   Gremien, die benachbarten Ecken entsprechen, dürfen also nicht zur gleichen Zeit tagen. Die verschiedenen Sitzungstermine werden durch unterschiedliche Farben dargestellt, dann ist die chromatische Zahl $\chi(G)$ des Graphen gleich der kleinstmöglichen Anzahl an Terminen.

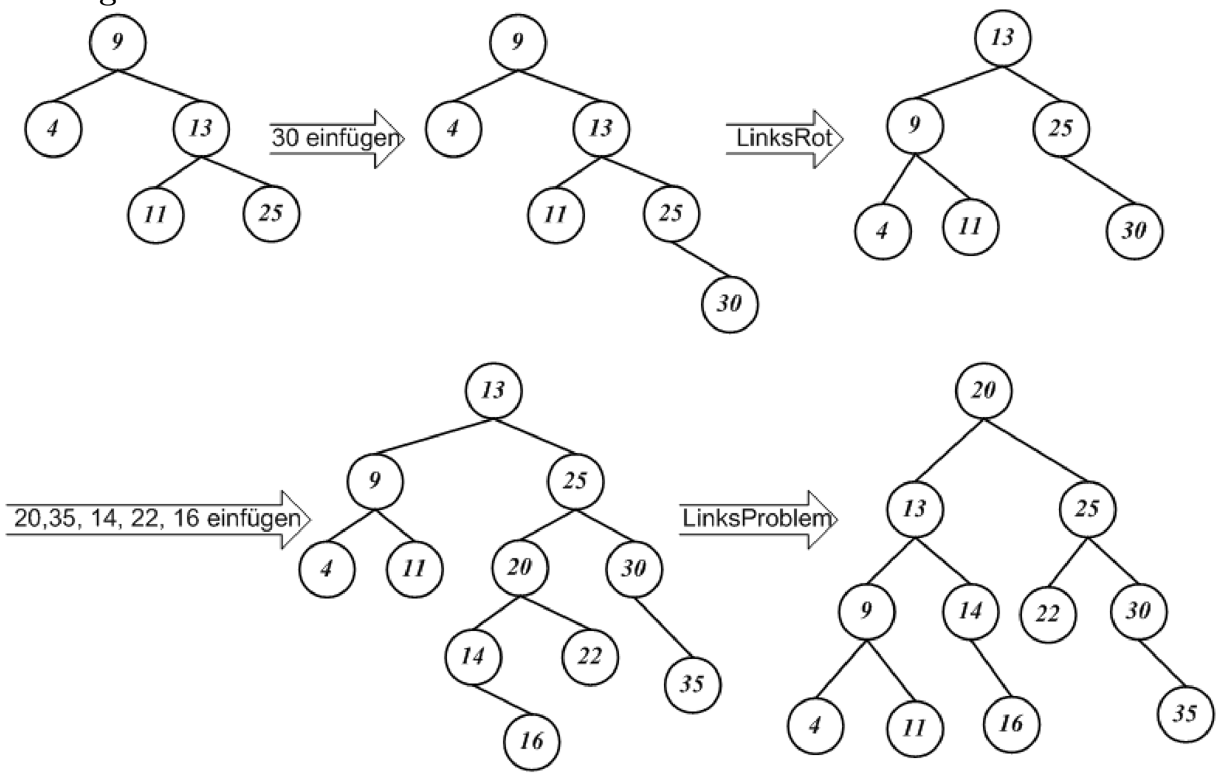
   In diesem Fall ist $\chi(G) = 3$. Es werden also 3 Sitzungstermine notwendig.

2. Gegeben dieser AVL-Baum geordnet durch < auf natürlichen Zahlen: **10 Punkte**



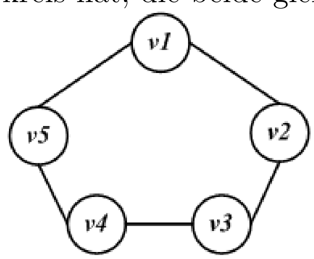
Fügen Sie bitte die Zahlen in dieser Reihenfolge $30, 20, 35, 14, 22, 16$ ein und geben Sie an welche Operationen Sie benötigen, um eine AVL-Baum zu erhalten.

Lösung:

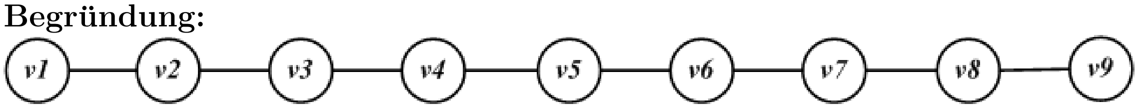


Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?? **Jeweils** .... **1 Punkte**
Falsches Ankreuzen führt zu einem Punkt Abzug, aber es gibt insgesamt für die Aufgabe keine negativen Punkte.
Bitte geben Sie eine Begründung: **Jeweils** .... **2 Punkte**
Für ungerichtete, schlichte Graphen gilt:

1. Es gibt einen ungerichteten Graphen mit 5 Knoten, der genau einen Hamiltonkreis und genau einen Eulerkreis hat, die beide gleich sind. [X] wahr oder [ ] falsch
   Begründung:
   

2. Es gibt einen planaren Graphen mit 11 Knoten, der K_5 als Teilgraphen enthält. [ ] wahr oder [X] falsch
   Begründung:
   Dann ist aber K_5 Graphminor und damit ist der Graph nicht planar (Satz von Wagner).

3. Es gibt einen zusammenhängenden Graphen mit 9 Knoten, der genau zwei Knoten mit ungeradem Knotengrad, aber keinen Hamiltonkreis hat. [X] wahr oder [ ] falsch
   Begründung:
   

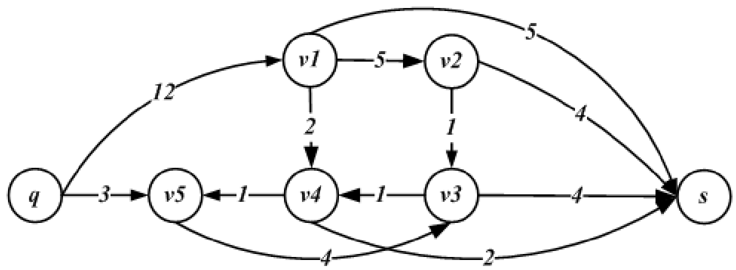
4. Es gibt einen Graphen, in dem die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad ungerade ist. [ ] wahr oder [X] falsch
   Begründung: Wenn wir aus einem Graphen eine Kante löschen, bleibt die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad gleich, wird 2 mehr oder 2 weniger, aber sie bleibt immer gerade oder immer ungerade.
   Wäre diese Anzahl ungerade, so könnte man solange Kanten löschen bis nur noch ein Knoten mit ungeradem Knotengrad übrig bleibt. Das geht aber nicht, da dann diese Kante nur einen inzidenten Konten hat.

   Also muss diese Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad gerade sein

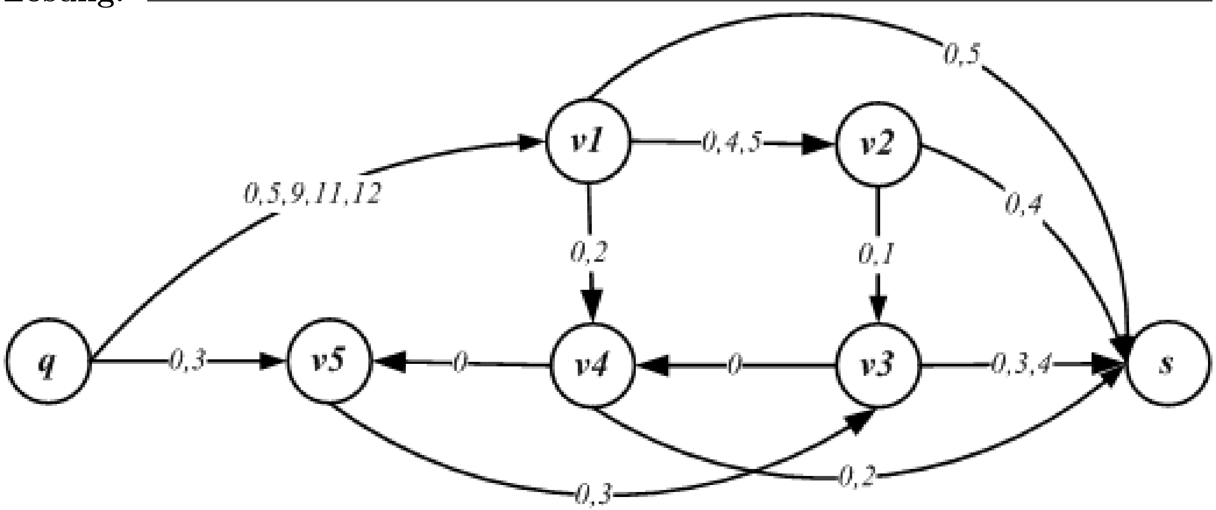
5. Es gibt keinen nicht-planaren Graphen G mit $\chi(G) = 2$. [ ] wahr oder [X] falsch
   Begründung: $K_{3,3}$ ist nicht planar und bipartit, also $\chi(K_{3,3}) = 2$

Aufgabe V: .... **15 Punkte**

Gegeben das folgende Netzwerk. Berechnen Sie bitte den maximalen Fluss mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus, wobei sie dieses unbewertete Netzwerk benutzen dürfen.



Lösung:



Knoten	q	$v1$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 12)$	$(+v1, 5)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v1$	$v2$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 7)$	$(+v1, 5)$	$(+v2, 4)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v5$	$v3$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v5, 3)$	$(+v3, 3)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v1$	$v4$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v1, 2)$	$(+v4, 2)$

Es gibt noch vergrößernde Wege:

Knoten	q	$v1$	$v2$	$v3$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 1)$	$(+v1, 1)$	$(+v2, 1)$	$(+v3, 1)$

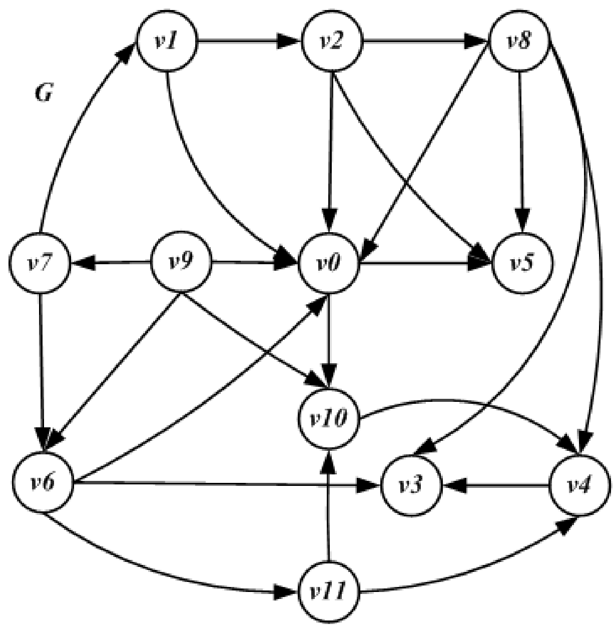
Es gibt keinen vergrößernden Weg mehr, der Maximalfluss ist $d = 15$

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

Gegeben diese Algorithmen[4] zur Tiefen- und Breitensuche und ein Graph G:

Tiefensuche

1. Bestimme den Knoten an dem die Suche beginnen soll
2. Expandiere den Knoten und speichere alle Nachfolger in einem Stack
3. Rufe rekursiv für jeden der Knoten in dem Stack DFS (depth first search oder Tiefensuche) auf
   - Falls der Stack leer sein sollte, tue nichts.
   - Falls das gesuchte Element gefunden worden sein sollte, brich die Suche ab und liefere „gefunden".



Breitensuche

1. Bestimme den Knoten, an dem die Suche beginnen soll, und speichere ihn in einer Warteschlange ab.
2. Entnimm einen Knoten vom Beginn der Warteschlange und markiere ihn.
   - Falls das gesuchte Element gefunden wurde, brich die Suche ab und liefere „gefunden" zurück.
   - Anderenfalls hänge alle bisher unmarkierten Nachfolger dieses Knotens, die sich noch nicht in der Warteschlange befinden, ans Ende der Warteschlange an.
3. Wiederhole Schritt 2.
4. Wenn die Warteschlange leer ist, dann wurde jeder Knoten bereits untersucht. Beende die Suche und liefere „nicht gefunden" zurück.

[4] `http://de.wikipedia.org/wiki/Tiefensuche` und `http://de.wikipedia.org/wiki/Breitensuche`

1. Führen Sie die Breitensuche für den gegebenen Graphen G und der Suche ausgehend von Knoten $v7$ nach $v3$ durch unter Angabe der Warteschlange und der markierten Knoten. .... **5 Punkte**

   Lösung:

   Q ist die Schlange und M die Menge der markierten Knoten.

	Q	M
1	$(v7)$	$\emptyset$
2	$(v1, v6)$	$\{v7\}$
3	$(v6, v2, v0)$	$\{v7, v1\}$
4	$(v2, v0, v3, v11)$	$\{v7, v1, v6\}$
5	$(v0, v3, v11, v5, v8)$	$\{v7, v1, v6, v2\}$
6	$(v3, v11, v5, v8, v10)$	$\{v7, v1, v6, v2, v0\}$
7		$v3$ gefunden!!!

2. Führen Sie die Tiefensuche für den gegebenen Graphen G und der Suche ausgehend von Knoten $v1$ nach $v4$ durch unter Angabe der Stacks zweimal durch, um zu zeigen dass der Weg nicht eindeutig ist. .... **5 Punkte**

   Lösung:

   Die Stacks sind Wörter und werden mit dem jeweiligen Knoten als Index versehen:

   $S_{v1} = v2v0$ dann
   $S_{v2} = v8v5$
   $S_{v8} = v3$ gefunden

   $S_{v1} = v0v2$ dann
   $S_{v0} = v10v5$
   $S_{v10} = v4$
   $S_{v4} = v3$ gefunden

3. Erläutern Sie bitte die Unterschiede zwischen den beiden Algorithmen unter Berücksichtigung von unendlichen Graphen. .... **5 Punkte**

   Lösung:

   Breitensuche

   Da alle Knoten gespeichert werden, ist der Speicherplatzverbrauch immens, so dass Breitensuche für größere Probleme ungeeignet ist. Im schlimmsten Fall werden alle möglichen Pfade zu allen möglichen Knoten betrachtet, also ist die Laufzeit ebenfalls für für größere Probleme ungeeignet.

   Dafür findet die Breitensuche die Lösung, wenn eine Lösung existiert. Und Breitensuche findet den kürzesten Pfad. Das gilt auch für unendliche Graphen, sofern jeder Knoten nur endlich viele Nachbarn hat.

   Tiefensuche

   Im schlimmsten Fall müssen auch alle möglichen Pfade zu allen möglichen Knoten betrachtet werden, also kann die Laufzeit von Tiefensuche auch sehr hoch werden.

   Das gilt nur für den endlichen Fall. Ist Graph unendlich oder existieren Zyklen, kann die Tiefensuche divergieren und die existierende Lösung nicht finden.

   Bessere Verfahren kombinieren Tiefen- und Breitensuche.

Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Die Brauerei braut Bier und stellt die Fässer in ihr kleines Lager. Das Lager der Brauerei fasst jedoch nur 40 Fässer. Die Fässer werden mit einem der drei Pferdewagen zum Gasthof transportiert. Ein Pferdewagen transportiert genau 10 Fässer Bier. In der Gaststätte lassen sich aus einem Fass 50 Gläser Bier zapfen. Die Kellnerin kann maximal 6 Gläser tragen, geht aber nur los, wenn mindestens 3 Gläser gefüllt auf dem Tresen stehen. Modellieren Sie dieses Szenario bitte mit Hilfe eines Stellen/Transitionsnetzes.

Lösung: