Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen

WiSe 2009

Probeklausur vom 11. Januar 2010
Deckblatt

J. Padberg

Bitte heften Sie die Lösungen an das ausgefüllte Deckblatt.

Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt, dass Sie abgeben, Ihren Namen und Matrikelnummer und vermerken Sie bitte an der Aufgabe, falls Sie zusätzliche Blätter zur Lösung benutzt haben.

Name	
Matrikelnummer	

DAUER: Für die Bearbeitung sind 90 Minuten vorgesehen.

Bewertung:

Klausurpunkte	Leistungspunkte
> 100	15
≥ 96	14
≥ 91	13
≥ 86	12
≥ 81	11
≥ 76	10
≥ 71	9
≥ 66	8
≥ 61	7
≥ 56	6
≥ 50	5
< 50	0-4

Erlaubte Hilfsmittel:

- 3 doppelseitig beschriftete Seiten mit Notizen
- Papier und Schreibgerät
- und sonst nichts:
  - keine Folienkopien
  - kein Skript
  - **keine elektronischen Geräte** (kein Taschenrechner, kein Laptop, kein PDA, kein Handy, etc.)

Erreichte Leistungspunkte:

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe I: .... **20 Punkte**

1. Gegeben sei ein schlichter Graph G, der

   - 9 Knoten,
   - 4 starke Komponenten[1] und
   - 2 schwache Komponenten[2] hat,
   - mindestens einen Knoten mit Ausgangsgrad $d_{-}(v) = 6$ hat.

   (a) Geben Sie bitte ein Beispiel für G an:

   (b) Kann es einen wie oben beschrieben Graphen geben, der aber einen Knoten mit $d_{-}(v) \geq 8$ hat?
   Begründen Sie bitte Ihre Antwort. .... **5 Punkte**

2. Gegeben ein ungerichteter Multigraph G und ein Untergraph $H \sqsubseteq G$. Dann gilt: Wenn für alle Knoten in H der Knotengrad[3] gleich dem Knotengrad des jeweiligen Knotens im Graph G ist, dann ist G nicht zusammenhängend oder $G = H$.

   (a) Geben Sie bitte dafür ein Beispiel .... **3 Punkte**

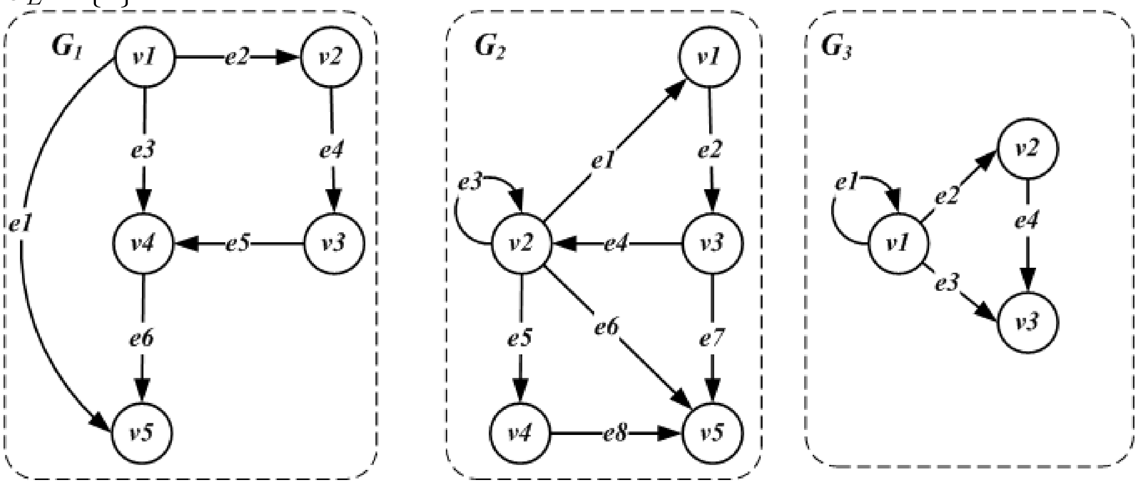
   (b) und erläutern Sie, warum die Aussage immer gilt. .... **7 Punkte**

[1] i.e. 4 starke Zusammenhangskomponenten
[2] i.e 2 Zusammenhangskomponenten auf dem zugrundeliegenden ungerichteten Graph
[3] i.e. Eckengrad

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe II: .... **20 Punkte**

1. Gegeben die folgenden Graphen, wobei die Knoten- und Kantenalphabete $C_V = C_E = \{*\}$ seien:



Gibt es einen Morphismus zwischen den folgenden Graphen? .... **10 Punkte**

Wenn ja, dann geben Sie ihn bitte an (sowohl f_V und f_E).
Wenn nein, oder begründen Sie bitte, warum nicht?

(a) $f : G_1 \to G_2$

(b) $f : G_2 \to G_3$

(c) $f : G_3 \to G_1$

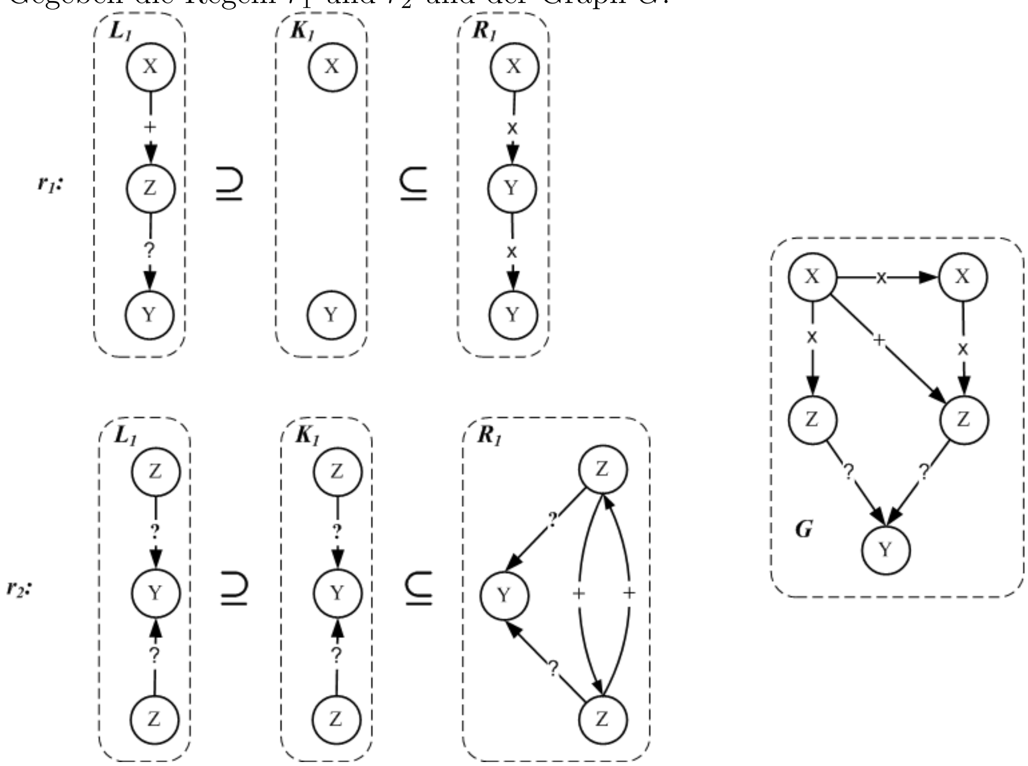
(d) $f : G_3 \to G_2$

(e) $f : G_2 \to G_1$

Name	
Matrikelnummer	

Fortsetzung der Aufgabe II:

2. Gegeben die Regeln r_1 und r_2 und der Graph G:



   (a) Wenden Sie Regel r_1 bitte auf den Graphen G an, indem Sie die direkte Ableitung $G \overset{r_1}{\Longrightarrow} H$ zeichnen. ....**6 Punkte**

   (b) Ist r_2 mit den einzig möglichen Vorkommen von L_2 parallel unabhängig oder nicht? Bitte begründen Sie Ihre Antwort. ....**4 Punkte**

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe III: .... **20 Punkte**

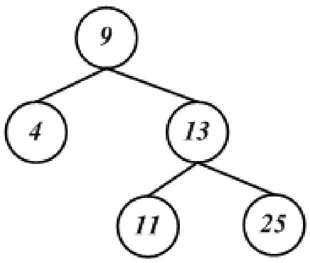
1. Angenommen, das Department Informatik hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen.
   Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat?
   Die Gremien sind:
   G1 : Luck, Padberg, Buth, Meisel, Fähnders ;
   G2 : Buth, Zukunft, Sarstedt, Neitzke;
   G3 : Padberg, Luck, Klauck;
   G4 : Zukunft, Klauck, Esser, Wendholt;
   G5 : Neitzke, Sarstedt, Fähnders;
   G6 : Sarstedt, Esser, Hübner;

   Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Knotenfärbung zur Lösung. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. .... **10 Punkte**

Name	
Matrikelnummer	

Fortsetzung der Aufgabe III:

2. Gegeben dieser AVL-Baum geordnet durch $<$ auf natürlichen Zahlen: **10 Punkte**



Fügen Sie bitte die Zahlen in dieser Reihenfolge $30, 20, 35, 14, 22, 16$ ein und geben Sie an welche Operationen Sie benötigen, um eine AVL-Baum zu erhalten.

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe IV: .... **15 Punkte**

Wahr oder Falsch?? **Jeweils** .... **1 Punkte**

Falsches Ankreuzen führt zu einem Punkt Abzug, aber es gibt insgesamt für die Aufgabe keine negativen Punkte.

Bitte geben Sie eine Begründung: **Jeweils** .... **2 Punkte**

Für ungerichtete, schlichte Graphen gilt:

1. Es gibt einen ungerichteten Graphen mit 5 Knoten, der genau einen Hamiltonkreis und genau einen Eulerkreis hat, die beide gleich sind. ☐ wahr oder ☐ falsch
   Begründung:

2. Es gibt einen planaren Graphen mit 11 Knoten, der K_5 als Teilgraphen enthält. ☐ wahr oder ☐ falsch
   Begründung:

3. Es gibt einen zusammenhängenden Graphen mit 9 Knoten, der genau zwei Knoten mit ungeradem Knotengrad, aber keinen Hamiltonkreis hat. ☐ wahr oder ☐ falsch
   Begründung:

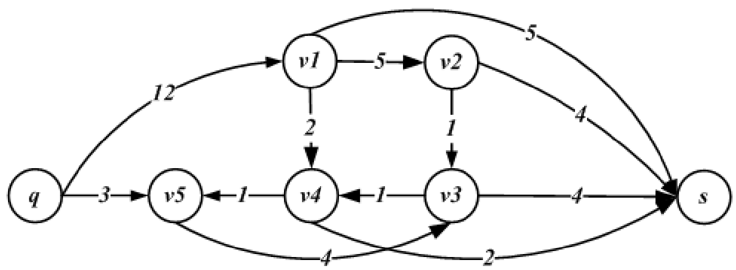
4. Es gibt einen Graphen, in dem die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad ungerade ist. ☐ wahr oder ☐ falsch
   Begründung:

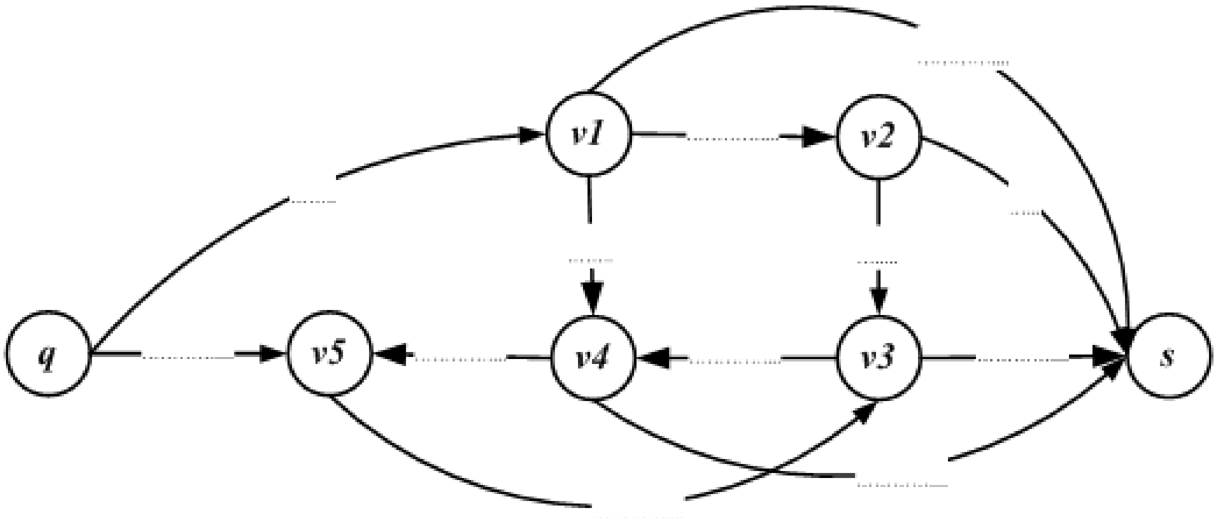
5. Es gibt keinen nicht-planaren Graphen G mit $\chi(G) = 2$. ☐ wahr oder ☐ falsch
   Begründung:

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe V: .... **15 Punkte**

Gegeben das folgende Netzwerk. Berechnen Sie bitte den maximalen Fluss mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus, wobei sie dieses unbewertete Netzwerk benutzen dürfen.





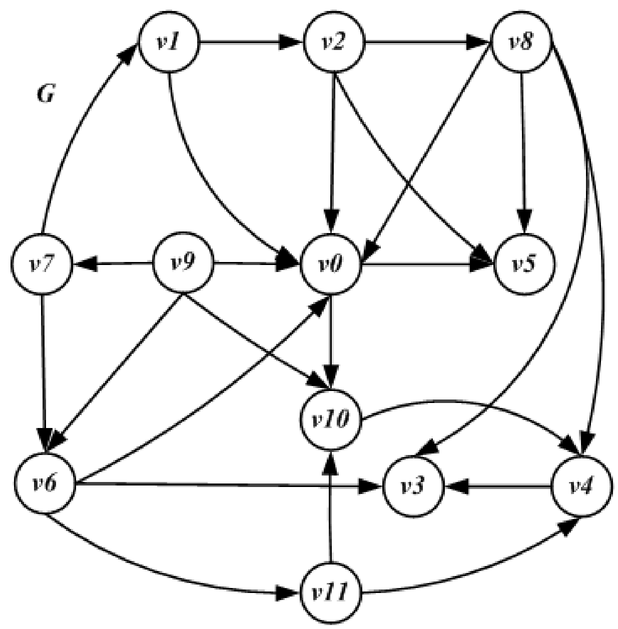
Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VI: .... **15 Punkte**

Gegeben diese Algorithmen[4] zur Tiefen- und Breitensuche und ein Graph G:

Tiefensuche

1. Bestimme den Knoten an dem die Suche beginnen soll
2. Expandiere den Knoten und speichere alle Nachfolger in einem Stack
3. Rufe rekursiv für jeden der Knoten in dem Stack DFS (depth first search oder Tiefensuche) auf
    - Falls der Stack leer sein sollte, tue nichts.
    - Falls das gesuchte Element gefunden worden sein sollte, brich die Suche ab und liefere „gefunden“.



Breitensuche

1. Bestimme den Knoten, an dem die Suche beginnen soll, und speichere ihn in einer Warteschlange ab.
2. Entnimm einen Knoten vom Beginn der Warteschlange und markiere ihn.
    - Falls das gesuchte Element gefunden wurde, brich die Suche ab und liefere „gefunden“ zurück.
    - Anderenfalls hänge alle bisher unmarkierten Nachfolger dieses Knotens, die sich noch nicht in der Warteschlange befinden, ans Ende der Warteschlange an.
3. Wiederhole Schritt 2.
4. Wenn die Warteschlange leer ist, dann wurde jeder Knoten bereits untersucht. Beende die Suche und liefere „nicht gefunden“ zurück.

[4] `http://de.wikipedia.org/wiki/Tiefensuche` und `http://de.wikipedia.org/wiki/Breitensuche`

Name	
Matrikelnummer	

Fortsetzung der Aufgabe VI:

1. Führen Sie die Breitensuche für den gegebenen Graphen G und der Suche ausgehend von Knoten $v7$ nach $v3$ durch unter Angabe der Warteschlange und der markierten Knoten. .... **5 Punkte**

2. Führen Sie die Tiefensuche für den gegebenen Graphen G und der Suche ausgehend von Knoten $v1$ nach $v4$ durch unter Angabe der Stacks zweimal durch, um zu zeigen dass der Weg nicht eindeutig ist. .... **5 Punkte**

3. Erläutern Sie bitte die Unterschiede zwischen den beiden Algorithmen unter Berücksichtigung von unendlichen Graphen. .... **5 Punkte**

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe VII: .... **15 Punkte**

Die Brauerei braut Bier und stellt die Fässer in ihr kleines Lager. Das Lager der Brauerei fasst jedoch nur 40 Fässer. Die Fässer werden mit einem der drei Pferdewagen zum Gasthof transportiert. Ein Pferdewagen transportiert genau 10 Fässer Bier. In der Gaststätte lassen sich aus einem Fass 50 Gläser Bier zapfen. Die Kellnerin kann maximal 6 Gläser tragen, geht aber nur los, wenn mindestens 3 Gläser gefüllt auf dem Tresen stehen.
Modellieren Sie dieses Szenario bitte mit Hilfe eines Stellen/Transitionsnetzes.