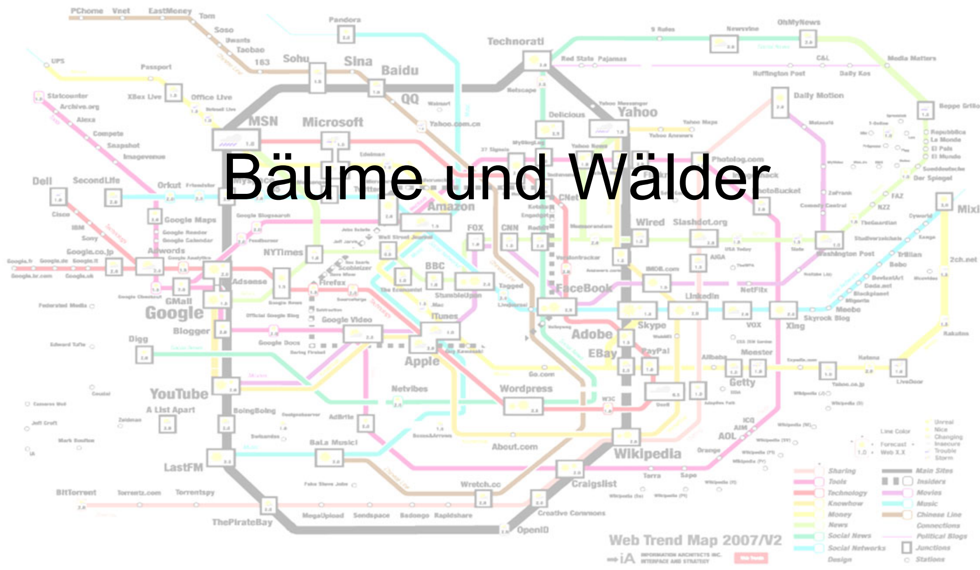
Bäume und Wälder



Bäume und Wälder

Ein ungerichteter zusammenhängender kreisloser Graph heißt ein ***Baum****. Ein ungerichteter Graph, dessen Komponenten Bäume sind, heißt ein* **Wald**. *Ein gerichteter Graph heißt ein Baum [Wald], wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph ein Baum [Wald] ist. Ein gerichteter kreisloser Graph heißt* ***azyklisch*** *(DAG: directed acyclic graph).*

Sei G(V,E) ein ungerichteter Graph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *G ist ein Baum.*
2. *Zwischen je zwei verschiedenen Ecken aus G gibt es genau einen Weg.*
3. *G ist zusammenhängend, und jede Kante aus E ist eine Schnittkante.*
4. *G ist zusammenhängend, und es ist* $|E| = |V| - 1$.
5. *G besitzt keinen Kreis, aber durch Hinzufügen einer beliebigen Kante zu E entsteht ein Graph mit genau einem Kreis.*

Sei G(V,E) ein ungerichteter Baum. Um eine Ecke von G in besonderer Weise hervorzuheben, kann sie als ***Wurzel*** *von G bezeichnet werden. G heißt dann ein* ***Wurzelbaum****. Die Ecken vom Grad 1 heißen* ***Blätter*** *des Wurzelbaums.*

Sei G = (V,E) ein gerichteter Baum. Die Ecke $v \in V$ *heißt* ***Wurzel*** *von G, wenn alle anderen Ecken in V von v aus erreichbar sind. Gilt für ein* $v \in V : d_+(v) = 0 \wedge d_-(v) > 0$, *so heißt v* ***Blatt****.*

Bäume und Wälder

*Die Länge des längsten Weges von der Wurzel aus wird als **Höhe** eines Wurzelbaumes bezeichnet. Teilweise wird dies in der Literatur auch als Tiefe bezeichnet.*

*Ein Wurzelbaum heißt **binär**, wenn die Wurzel einen Grad ≤ 2 besitzt und alle anderen Ecken mit Ausnahme der Blätter vom Grad 2 oder 3 sind, also maximal zwei Söhne haben. Er wird dann kurz als **binärer Baum** bezeichnet. Ein binärer Baum heißt **balanciert**, wenn zwischen jedem Blatt und der Wurzel dieselbe Anzahl von Kanten liegt und mit Ausnahme der Blätter jede Ecke genau zwei Söhne besitzt. Von diesen wird einer als rechter Sohn und der andere als linker Sohn bezeichnet.*

*Die **maximale Höhe** eines Wurzelbaumes mit N Ecken ist N − 1. Dieser Fall tritt ein, wenn der Baum zu einer Liste entartet. Die **minimale Höhe** eines binären Baumes mit N Ecken ist $\lfloor(\log_2 N)\rfloor$. Dieser Fall tritt ein, wenn alle Ecken bis auf die Blätter den Grad 3 haben. Ein balancierter binärer Baum der Höhe h hat $2^{h+1} - 1$ Ecken, wobei h eine natürliche Zahl ≥ 2 ist.*

Die Suche nach einem Datensatz in einem balancierten binären Baum mit n Ecken erfordert die Inspektion von O(log(n)) Datensätzen.

Traversierung eines binären Baums

Im folgenden bezeichne w die Wurzel des vorgelegten Baums, v die jeweils aktuelle Ecke und l_v, r_v den linken, bzw. den rechten Sohn von v.

1. ***Inorder** (symmetrische Reihenfolge): Lies zunächst den Inhalt des Teilbaums mit Wurzel l_v aus, dann den Inhalt von v und dann den Inhalt des Teilbaums mit Wurzel r_v.*
2. ***Preorder** (Tiefensuche, Hauptreihenfolge): Lies zunächst den Inhalt von v aus, dann den Inhalt des Teilbaums mit Wurzel l_v und dann den Inhalt des Teilbaums mit Wurzel r_v.*
3. ***Postorder** (Nebenreihenfolge): Lies zunächst den Inhalt des Teilbaums mit Wurzel l_v aus, dann den Inhalt des Teilbaums mit Wurzel r_v und dann den Inhalt von v .*

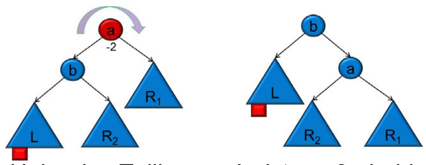
Für die Breitensuche kann man nicht die Baumstruktur verwenden. Dazu müssen die Ecken z.B. in einer Schlange (Queue) gemäß ihrer Entfernung zur Wurzel angeordnet werden.

Bäume und Wälder

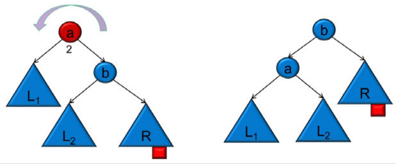
*Ein binärer Baum heißt **AVL-Baum**, wenn für jede Ecke v gilt, dass sich die Höhen des linken und rechten Teilbaums höchstens um 1 unterscheiden.*

*Die **Bedingungen für eine Rotation**, um den AVL-Baum nach dem Einfügen oder Löschen wieder in Balance zu bringen:*

1. ***Rechtsrotation**: Die Höhe des Teilbaums R_1 ist um 2 niedriger, als die Höhe des Teilbaums mit Wurzel b. Der Unterschied sei durch den Teilbaum L begründet.*

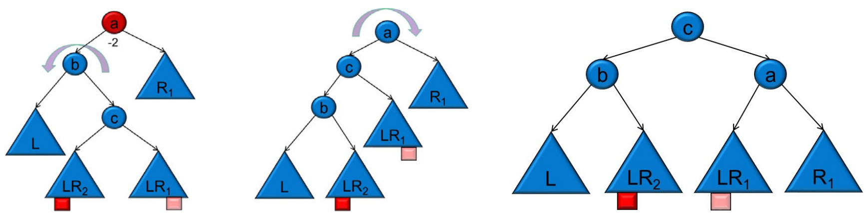


2. ***Linksrotation**: Die Höhe des Teilbaums L_1 ist um 2 niedriger, als die Höhe des Teilbaums mit Wurzel b. Der Unterschied sei durch den Teilbaum R begründet.*



Bäume und Wälder

3. ***Problemsituation rechts**: (**Doppelte Rechtsrotation**) Die Höhe des Teilbaums R_1 ist um 2 niedriger, als die Höhe des Teilbaums mit Wurzel b. Der Unterschied sei durch den Teilbaum mit Wurzel c begründet.*



4. ***Problemsituation links**: (**Doppelte Linksrotation**) Die Höhe des Teilbaums L_1 ist um 2 niedriger, als die Höhe des Teilbaums mit Wurzel b. Der Unterschied sei durch den Teilbaum L_2 begründet.*

Der Algorithmus arbeitet im Groben so, dass nach dem Einfügen/Löschen eines Elementes „bottom up“ überprüft wird (zentrale Bedingung für AVL-Bäume), ob eine der vier beschriebenen Situationen vorliegt. Es wird dann eine entsprechende Rotation bzw. Balancierung des Baumes vorgenommen.

Aufgaben

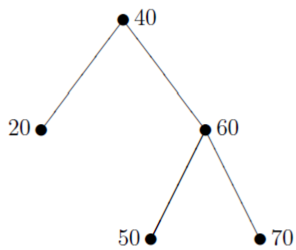
1. Zeigen Sie, dass jeder Baum mit mindestens zwei Ecken ein bipartiter Graph ist. Tipp: Entwickeln Sie einen Algorithmus, der aus einem Baum einen bipartiten Graphen macht. Zeigen Sie dann, dass für einen beliebigen Knoten niemals die Konfliktsituation entsteht, dass er beiden Mengen des bipartiten Graphen zugeordnet werden könnte.

2. Auf welche Weise müssen Sie einen binären Baum, in dessen Ecken Daten unter Beachtung des Anordnungsprinzips gespeichert sind, durchlaufen, um die Daten in der Reihenfolge der auf ihnen definierten Ordnungsrelation auszulesen?

3. Student Karl behauptet, dass in einem AVL-Baum der Höhe h sich jedes Blatt in der Ebene h oder h-1 befindet. Widerlegen Sie Karl durch ein Gegenbeispiel oder zeigen Sie diese Behauptung durch einen Beweis mittels vollständiger Induktion. Die Wurzel sei dabei Ebene eins und deren Söhne auf Ebene zwei usw.

Aufgaben

4. Gegeben sei nachfolgender AVL-Baum:



Fügen Sie folgende Zahlen in der vorgegebenen Reihenfolge in diesen AVL-Baum ein: (42, 43, 44, 45, 46, 47). Geben Sie die Anzahl der durchgeführten Rechts- und Linksrotationen an. Geben Sie am Ende den Baum in Inorder in einer Zeile aus.