Planar und Und/Oder

*Ein Graph G(V,E) heißt **planar**, wenn er in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass jeder Punkt, den zwei Kanten gemeinsam haben, eine Ecke ist.*

Satz (von Kuratowski) Ein Graph G(V,E) ist genau dann nicht planar, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph einen Teilgraphen besitzt, der isomorph ist zu dem Graphen K_5 oder dem Graphen $K_{3,3}$ oder einer Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5.

Satz (Vierfarbensatz) In jedem planaren Graphen G(V,E) lassen sich die Ecken durch je eine von vier Farben so färben, dass keine zwei gleichfarbigen Ecken durch eine Kante miteinander verbunden sind.

*Sei $A := N \cup T$ ein Alphabet aus Nichtterminalzeichen und Terminalzeichen. Ein gerichteter Graph G(V,E) heißt ein **UND/ODER Graph**, wenn jeder Ecke $v \in V$ eine Zeichenkette aus A^* sowie eines der Symbole UND, bzw. ODER zugewiesen worden ist.*

Kantenfolge, Weg und erreichbar

*In einem Graphen G(V,E) ist eine **Kantenfolge** eine Folge, deren Glieder abwechselnd Ecken und Kanten sind: $v_0e_1\, v_1e_2v_2e_2v_3 \ldots e_kv_k$ wobei $0<k\in N$ und für i=1, …, k gilt: $s\_t(e_i) = \{v_{i-1},v_i\}$. Für gerichtete Kanten e_i müssen darüber hinaus $s(e_i)=v_{i-1}$ und $t(e_i)=v_i$ sein. Im Fall $v_0=v_k$ heißt die Kantenfolge **geschlossen**.*

*Eine Kantenfolge heißt ein **Weg** von v_0 nach v_k, wenn alle Ecken $v_0, \ldots, v_k$ (und damit auch alle Kanten $e_1, \ldots, e_k$) voneinander verschieden sind. Die Anzahl der Kanten eines Weges wird als **Länge** des Weges bezeichnet.*

*Eine geschlossene Kantenfolge heißt ein **Kreis**, wenn alle Ecken $v_0, \ldots, v_{k-1}$ und alle Kanten $e_1, \ldots, e_k$ voneinander verschieden sind und $v_0=v_k$ gilt.*

Sei G = (V,E) ein gerichteter Graph und es gelte $\forall v\in V: d_+(v)>0$ oder $\forall v\in V: d_-(v)>0$, dann besitzt G einen Kreis.

*Eine Ecke u heißt von einer Ecke v aus **erreichbar**, wenn entweder u = v ist oder es eine Kantenfolge gibt, in der v vor u auftritt.*

Zusammenhang

*In einem ungerichteten Graphen heißen zwei Ecken u und v **zusammen-hängend**, wenn u = v ist oder es einen Weg von u nach v gibt. In einem gerichteten Graphen heißen zwei Ecken u und v **stark zusammen-hängend**, wenn u = v ist oder es einen Weg von u nach v gibt und es einen Weg von v nach u gibt. In einem gerichteten Graphen heißen zwei Ecken u und v **schwach zusammenhängend**, wenn sie in dem zugrundeliegenden ungerichteten Graphen zusammenhängend sind.*

In einem ungerichteten Graphen G(V,E) ist die Relation $R \subseteq V \times V$ *mit* $(u,v) \in R :\Leftrightarrow$ u *und v sind zusammenhängend eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge V. Die zu den Äquivalenzklassen gehörenden Untergraphen von G heißen **Zusammenhangskomponenten** von G. G heißt zusammenhängend, falls G genau eine Komponente besitzt.*

Schnittecke und -kanten

*In einem ungerichteten zusammenhängenden Graphen G(V,E) heißt eine Ecke v eine **Schnittecke**, falls der Untergraph H von G mit Eckenmenge V\{v} nicht zusammenhängend ist. Entsprechend heißt eine Kante e eine **Schnittkante**, falls der Teilgraph* F(V,E\{e}) *von G nicht zusammen-hängend ist.*

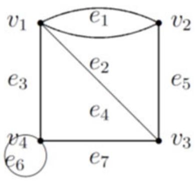
Speicherung von Graphen

*Die **Adjazenzmatrix** $A(G) := (a_{ij})$ des **ungerichteten** Graphen $G(V,E)$ ist eine symmetrische $|V| \times |V|$-Matrix mit:*

a_{ij} := Anzahl der Kanten mit den Endecken v_i und v_j

*Die **Inzidenzmatrix** $M(G) := (m_{ij})$ des **ungerichteten** Graphen $G(V,E)$ ist eine $|V| \times |E|$-Matrix mit:*

$$m_{ij} := \begin{cases} 0, \text{ falls } v_i \text{ nicht inzident ist mit } e_j \\ 1, \text{ falls } v_i \text{ eine der Endecken von } e_j \text{ ist} \\ 2, \text{ falls } v_i \text{ die Endecke der Schlinge } e_j \text{ ist} \end{cases}$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

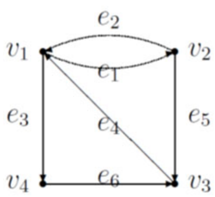
Speicherung von Graphen

*Die **Adjazenzmatrix** $A(G) := (a_{ij})$ des **gerichteten** Graphen $G(V,E)$ ist eine a(nti)symmetrische $|V| \times |V|$-Matrix mit:*

a_{ij} := Anzahl der Kanten mit der Anfangsecke v_i und der Endecke v_j

*Die **Inzidenzmatrix** $M(G) := (m_{ij})$ des schlingenfreien **gerichteten** Graphen $G(V,E)$ ist eine $|V| \times |E|$-Matrix mit:*

$$m_{ij} := \begin{cases} 0, \text{ falls } v_i \text{ nicht inzident ist mit } e_j \\ -1, \text{ falls } v_i \text{ die Anfangsecke von } e_j \text{ ist} \\ +1, \text{ falls } v_i \text{ die Endecke von } e_j \text{ ist} \end{cases}$$



$$A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M(H) = \begin{pmatrix} -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Speicherung von Graphen

Sei G ein gerichteter Graph mit der Inzidenzmatrix M(G). Der zugrundeliegende ungerichtete Graph werde mit G' bezeichnet. Dann gilt:

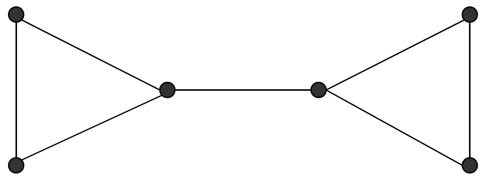
1. *Eine Menge von Kanten von G enthält einen Kreis von G' genau dann, wenn die zugehörigen Spalten von M(G) linear abhängig sind und bei der Darstellung des Nullvektors als Linearkombination dieser Spaltenvektoren werden alle Vektoren nur mit −1, 0 oder +1 multipliziert.*
2. *Eine Menge von Kanten von G enthält einen Kreis von G genau dann, wenn die zugehörigen Spalten von M(G) linear abhängig sind und bei der Darstellung des Nullvektors als Linearkombination dieser Spaltenvektoren alle Vektoren nur mit 0 oder +1 multipliziert werden.*

Aufgaben

1. Es sei $k : 1 \leq k \in N$ eine beliebige ganze Zahl. Der k-dimensionale Würfel Q_k ist der Graph, dessen Ecken mit den geordneten k-Tupeln von 0 und 1 bezeichnet werden. Zwei Ecken sind nur dann durch eine Kante verbunden, wenn ihre k-Tupel sich nur in einer Position unterscheiden.
   Beispiel: Sei k = 3, dann ist die Ecke (0, 1, 0) nur mit den Ecken (1, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 1) über eine Kante verbunden.
   (a) Zeichnen Sie ein Bild des 3-dimensionalen Würfels Q_3 unter Verwendung der bipartiten Eigenschaft, d.h. zeichnen Sie diesen Graphen als bipartiten Graphen!
   (b) Zeichnen Sie, falls möglich, den Würfel Q_3 planar.
   (c) Zeichnen Sie drei nicht isomorphe Gerüste des Q_3!
   (d) Zeigen Sie, dass der k-dimensionale Würfel Q_k 2^k Ecken und $k2^{k-1}$ Kanten hat.

Aufgaben

2. Prüfen Sie nach, ob der nachfolgende Graph zu einem stark zusammenhängenden Digraphen gemacht werden kann, indem Sie ggf. allen Kanten geeignete Richtungen geben. Weisen Sie nach, dass Ihr Graph stark zusammenhängend ist, oder erklären Sie für den allgemeinen Fall, warum Sie hier keine Lösung finden können!



3. Wie erhalten Sie aus der Adjazenzmatrix eines Graphen G die Adjazenzmatrix eines Teil- oder Untergraphen H?