Zuordnungsprobleme

Sei G(V,E) ein ungerichteter Graph. Eine Menge $F \subseteq E$ heißt ein ***Matching*** *(oder: eine Zuordnung), wenn keine zwei Elemente von F eine Ecke gemeinsam haben.*

Sei F ein Matching in einem Graphen G(V,E).

1. *Eine Ecke, die mit keiner Kante aus F inzident ist, heißt von F* ***unversorgt****.*
2. *Ein Weg in G, der abwechselnd Kanten aus F und aus E \ F enthält, heißt ein* ***alternierender Weg****.*
3. *Ein alternierender Weg, dessen erste und letzte Ecke unversorgt sind, heißt ein* ***vergrößernder Weg****.*
4. *F heißt* ***perfekt****, wenn G keine unversorgten Ecken besitzt.*

In einem Graphen G(V,E) besitzt ein Matching F genau dann die maximal mögliche Anzahl von Kanten, wenn es keinen vergrößernden Weg gibt.

Ungarische Methode (Kuhn-Munkres-Algorithmus) In G liege ein Matching F vor (z.B. F = ∅).

1. *Markiere alle unversorgten Ecken aus X. Alle anderen Ecken sind unmarkiert.*
2. *…*

Zuordnungsprobleme

1. *…*
2. *Markiere in Y alle bislang unmarkierten Ecken, die mit einer im letzten Schritt markierten Ecke durch eine Kante aus E \ F verbunden sind mit der Nummer dieser X-Ecke.*
   - *(a) Wurde keine Ecke in Y neu markiert, dann gibt es keinen vergrößernden Weg. F ist maximal. ENDE*
   - *(b) Wurde eine unversorgte Ecke in Y neu markiert, dann wurde ein vergrößernder Weg gefunden. Weiter mit 4.*
   - *(c) Sonst (d.h. nur versorgte Ecken in Y wurden markiert) weiter mit 3.*
3. *Markiere in X alle Ecken, die mit den im letzten Schritt neu markierten Ecken aus Y durch eine Kante aus F verbunden sind. Weiter mit 2.*
4. *Ausgehend von der beim letzten Durchlauf von Schritt 2. markierten unversorgten Y -Ecke verfolge den vergrößernden Weg W zurück, indem jeweils von einer Y -Ecke zu der aus der Markierung ersichtlichen X-Ecke und von einer X-Ecke zu der über eine Kante aus F erreichbaren Y –Ecke gegangen wird. Bilde hieraus ein Matching $F' := (F \setminus (W \cap F)) \cup (W \setminus F)$ mit $|F'| = |F| + 1$. Lösche alle Markierungen. Weiter mit 1.*

Zuordnungsprobleme

Anfangslösung mit dem Greedy-Algorithmus:

1. Bringe die Kanten des vorgelegten Graphen in eine beliebige Reihenfolge (z.B. die lexikographische Ordnung der zugehörigen Eckenpaare).

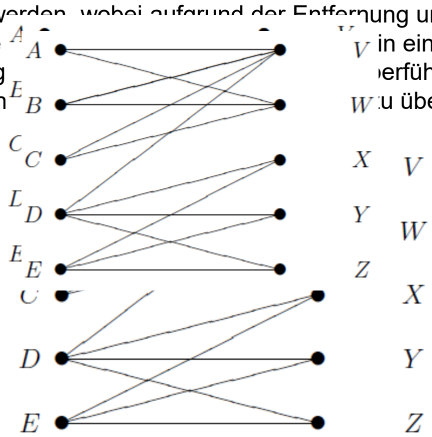
2. Beginnend mit $F := \emptyset$ gehe die Kanten der Reihe nach durch und füge nur dann eine Kante nicht zu F hinzu, wenn sie mit einer Kante aus F eine gemeinsame Ecke hat.

Jedes vom Greedy-Algorithmus gelieferte Matching besitzt mindestens halb so viele Kanten wie ein maximales Matching.

*(**Heiratssatz**) Für eine beliebige Menge Z von Ecken eines Graphen bezeichne N(Z) die Nachbarschaft von Z, d.h. die Menge der mit Elementen aus Z adjazenten Ecken. Ein bipartiter Graph $G(X \cup Y,E)$ mit $|X| = |Y|$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn für jede Teilmenge $Z \subseteq X$ von X gilt: $|N(Z)| \geq |Z|$ (wenn also jede Teilmenge von X mindestens so viele Nachbarn besitzt wie sie selbst an Elementen umfasst).*

Aufgaben

1. Ein Autohersteller präsentiert fünf Exemplare seines allerneusten Modells. Zur Zeit befinden sich die Autos in A,B,C,D und E. Sie sollen anschließend in V,W,X, Y und Z präsentiert werden, wobei aufgrund der Entfernung und der Verkehrsverhältnisse … in einem Tag zu erreichen ist. Der folg… …erführungen an. Ist es möglich, die Autos an… …u überführen ?



Aufgaben

1. Untersuchen Sie, ob M = {1b, 2a, 4c, 5f, 6e} ein maximales Matching in folgendem Graphen ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein größeres Matching.