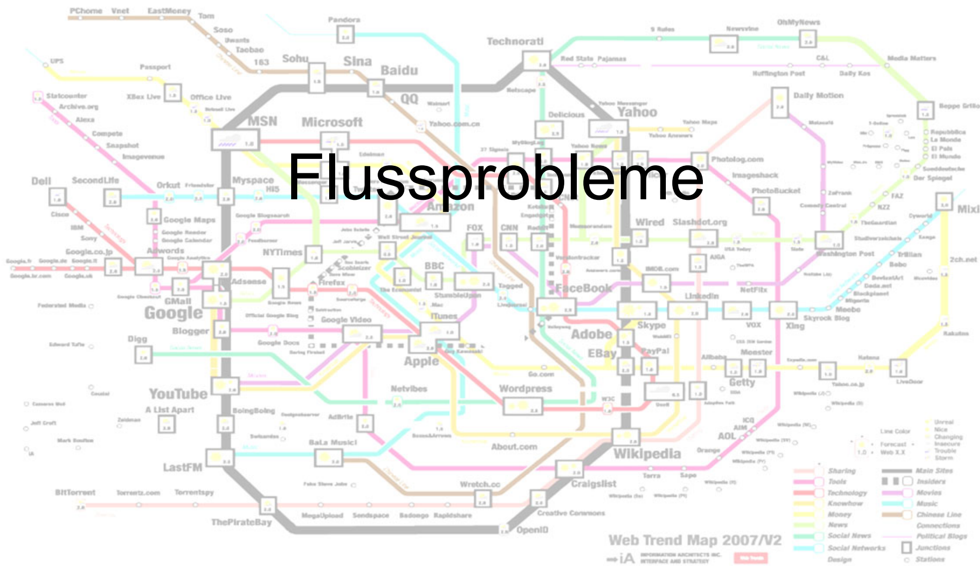


# Flussprobleme





## Flussprobleme

*Für eine Ecke $v_i$ ist $O(v_i) = \{e_{ij} \in E \mid s(e_{ij}) = v_i\}$ der **output** dieser Ecke und $I(v_i) = \{e_{ij} \in E \mid t(e_{ij}) = v_i\}$ der **input** dieser Ecke. Es gilt $|O(v_i)| = d_+(v_i)$ und $|I(v_i)| = d_-(v_i)$.*

*Sei $G = (V,E)$ ein schwach zusammenhängender, schlichter gerichteter Graph mit $|V| = n$ Ecken, wobei in G (genau) zwei Ecken besonders hervorgehoben seien: eine Quelle $q := v_1$ mit $d_-(q) = 0$ und eine Senke $s := v_n$ mit $d_+(s) = 0$.*

*Eine **Kapazität** ist eine Funktion c, die jeder Kante $e_{ij} \in E$ eine positive rationale Zahl (> 0) als Kapazität zuordnet.*

*Ein **Fluss** in G von der Quelle q zu der Senke s ist eine Funktion f, die jeder Kante $e_{ij} \in E$ eine nicht negative rationale Zahl zuordnet, so dass*

1. *für jede Kante $e_{ij}$ : $f(e_{ij}) \le c(e_{ij})$ gilt (Kapazitätsbeschränkung),*
2. *der gesamte Fluss, der von der Quelle $v_1$ wegtransportiert wird, in vollem Umfang an der Senke $v_n$ eintrifft,*

$$\sum_{e_{1j} \in O(q)} f(e_{1j}) = \sum_{e_{in} \in I(s)} f(e_{in})$$

*und*

# Flussprobleme

*3. für jede übrige Ecke, den sogenannten inneren Ecken, werden eintreffende Mengen des „Gutes" verlustlos weitergeleitet, d.h. es gilt die Flusserhaltung.*

$$\forall j \in \{1,\ldots n\}: \sum_{e_{ij} \in O(v_i), e_{ji} \in I(v_i)} (f(e_{ij}) - f(e_{ji})) = 0$$

*Wir bezeichnen einen solchen Graphen mit einem Fluss als* ***Flussnetzwerk*** *(V,E, f, c). Der Wert des Flusses f ist dann*

$$d = \sum_{e_{1j} \in O(q)} f(e_{1j}) = \sum_{e_{in} \in I(s)} f(e_{in})$$

*Es sei f der Fluss eines Graphen G = (V,E), und* $\forall X \subset V$ *bezeichne* $X^{-1}$ *das* ***Komplement*** *von X in V , d.h.* $X^{-1} = V \setminus X$.

*Wenn X, Y* $\subset$ *V, dann bezeichnet* ***A(X,Y)*** *die Menge der Kanten, die Ecken aus X mit Ecken aus Y verbinden. Der Fluss dieser Kanten wird mit g(X,Y) bezeichnet:*

$$g \in \{f, c\}; X, Y \subset V : g(X,Y) = \sum_{e \in A(X,Y)} g(e)$$





# Flussprobleme

*Ein* ***Schnitt*** *ist eine Menge von Kanten* $A(X,X^{-1})$, *wobei* $q \in X$ *und* $s \in X^{-1}$.

*Es sei f ein Fluss in einem Graphen G = (V,E), und es sei d der Wert des Flusses. Wenn* $A(X,X^{-1})$ *ein Schnitt in G ist, dann gilt* $d = f(X,X^{-1}) - f(X^{-1},X)$ *und* $d \leq c(X,X^{-1})$.

*Ein Fluss, dessen Wert* $\min\{c(X,X^{-1}) \mid A(X,X^{-1})$ *ist ein beliebiger Schnitt} entspricht, heißt ein* ***maximaler Fluss***.

*Ein ungerichteter Weg von der Quelle q zur Senke s heißt ein* ***vergrößernder Weg***, *wenn gilt:*

- *Für jede Kante* $e_{ij}$, *die auf dem Weg entsprechend ihrer Richtung durchlaufen wird (sie wird als Vorwärtskante bezeichnet), ist* $f(e_{ij}) < c(e_{ij})$.
- *Für jede Kante* $e_{ij}$, *die auf dem Weg entgegen ihrer Richtung durchlaufen wird (sie wird als Rückwärtskante bezeichnet), ist* $f(e_{ij}) > 0$.

*Ist eine Kantenfolge* $W = v_1 v_2 \ldots v_n$ *in dem unterliegenden Graphen G' des Graphen G gegeben, dann sind die zugehörigen Kanten in G entweder in der Form* $e_{(i-1)i}$, *genannt Vorwärtskante von W, oder* $e_{i(i-1)}$, *genannt Rückwärtskante von W.*

# Flussprobleme

*Wenn f ein Fluss in G ist, wird einer Kantenfolge W eine nichtnegative Zahl i(W), das Inkrement von W, zugeordnet, wobei*

*$i(W) = \min\{i(e_{ij}) \mid e_{ij}$ ist eine Kante der Kantenfolge $W\}$*

$$i(e_{ij}) = \begin{cases} c(e_{ij}) - f(e_{ij}) & e_{ij} \quad \text{Vorwärtskante} \\ f(e_{ij}) & e_{ij} \quad \text{Rückwärtskante} \end{cases}$$

*Die Kantenfolge W heißt **f-gesättigt**, wenn i(W)=0, und **f-ungesättigt**, wenn i(W) >0.*

*Wenn in einem Graphen G ein Fluss der Stärke d von der Quelle q zur Senke s fließt, gilt genau eine der beiden Aussagen:*

1. *Es gibt einen vergrößernden Weg.*
2. *Es gibt einen Schnitt $A(X,X^{-1})$ mit $c(X,X^{-1}) = d$.*

***Max-flow-min-cut Theorem von Ford und Fulkerson***

*In einem schwach zusammenhängendem schlichten Digraphen G mit genau einer Quelle q und genau einer Senke s sowie der Kapazitätsfunktion c und dem Fluss f ist das Minimum der Kapazität eines q und s trennenden Schnitts gleich der Stärke eines maximalen Flusses von q nach s.*





# Flussprobleme

*Algorithmus von **Ford und Fulkerson**: Gegeben sei ein schwach zusammenhängender, schlichter Digraph G = (V,E), eine Kapazitätsfunktion c und ein Fluss f.*

1. *(Initialisierung) Weise allen Kanten $f(e_{ij})$ als einen (initialen) Wert zu, der die Nebenbedingungen erfüllt, d.h. falls $f(e_{ij}) > 0$ muss er von q zu s durchfließen können. Markiere q mit (undefiniert, ∞).*
2. *(Inspektion und Markierung)*
   *(a) Falls alle markierten Ecken inspiziert wurden, gehe nach 4.*
   *(b) Wähle eine beliebige markierte, aber noch nicht inspizierte Ecke $v_i$ und inspiziere sie wie folgt (Berechnung des Inkrements)*
      - *(Vorwärtskante) Für jede Kante $e_{ij} \in O(v_i)$ mit unmarkierter Ecke $v_j$ und $f(e_{ij}) < c(e_{ij})$ markiere $v_j$ mit $(+v_i, \delta_j)$, wobei $\delta_j$ die kleinere der beiden Zahlen $c(e_{ij}) - f(e_{ij})$ und $\delta_i$ ist.*
      - *(Rückwärtskante) Für jede Kante $e_{ji} \in I(v_i)$ mit unmarkierter Ecke $v_j$ und $f(e_{ji}) > 0$ markiere $v_j$ mit $(-v_i, \delta_j)$, wobei $\delta_j$ die kleinere der beiden Zahlen $f(e_{ji})$ und $\delta_i$ ist.*

   *(c) Falls s markiert ist, gehe zu 3., sonst zu 2.(a).*
3. *…*

# Flussprobleme

*2. …*

*3. (Vergrößerung der Flussstärke) Bei s beginnend lässt sich anhand der Markierungen der gefundene vergrößernde Weg bis zur Ecke q rückwärts durchlaufen. Für jede Vorwärtskante wird $f(e_{ij})$ um $\delta_s$ erhöht, und für jede Rückwärtskante wird $f(e_{ji})$ um $\delta_s$ vermindert. Anschließend werden bei allen Ecken mit Ausnahme von q die Markierungen entfernt. Gehe zu 2.*

*4. Es gibt keinen vergrößernden Weg. Der jetzige Wert von d ist optimal. Ein Schnitt A(X,X) mit c(X,X) = d wird gebildet von genau denjenigen Kanten, bei denen entweder die Anfangsecke oder die Endecke inspiziert ist.*

*Wenn jede Vergrößerung der Flussstärke d durch einen vergrößernden Weg minimaler Kantenanzahl erfolgt, dann sind höchstens $O(|E| \cdot |V|)$ vergrößernde Wege zu berechnen, bis d seinen Maximalwert erreicht hat.*





# Flussprobleme

*Wir definieren ein **Residualnetzwerk** RF := (V',E',r) des Flussnetzwerkes F = (V,E,f,c) wie folgt:*

- *V ' = V , d.h. die Menge der Ecken ist gleich.*
- *Die Residualfunktion r ordnet jeder Kante $e'_{ij} \in E'$ eine positive rationale Zahl (> 0) zu.*
- *$\forall (v_i, v_j) = e_{ij} \in E$ ist*
  - *$e'_{ij} \in E'$, falls $c(e_{ij}) - f(e_{ij}) > 0$, mit $r(e'_{ij}) := c(e_{ij}) - f(e_{ij})$*
  - *$e'_{ji} \in E'$, falls $f(e_{ij}) > 0$, mit $r(e'_{ij}) := f(e_{ij})$.*

*Das Residualnetzwerk übernimmt die Rolle der Markierungen im Algorithmus von Ford und Fulkerson. Diese Methode ist eager, da sie zunächst alle Möglichkeiten der Veränderungen berechnet und sucht dann auf diesem Netzwerk einen Weg (über Vorwärtskanten). Der Algorithmus von Ford und Fulkerson ist lazy, da er die Veränderungsmöglichkeiten erst berechnet, wenn sie an der Wegefindung direkt beteiligt werden.*

# Aufgaben

1. In nachfolgender Abbildung sind die Markierungen in der Form (Kapazität, Fluss) und es besteht bereits ein Fluss! Fertigen Sie eine Dokumentation an, aus der der Ablauf des Algorithmus deutlich wird. Sofern Sie eine Wahlmöglichkeit haben, ist stets die Ecke mit der größten Zahl in der Markierung zu wählen. Bei mehreren Ecken mit gleicher Zahl ist diejenige mit dem kleinsten Index zu wählen.
   a) Führen Sie den Algorithmus von Ford und Fulkerson auf nachfolgendem Graphen gemäß den Vorgaben durch (bis zum Abbruch!).
   b) Bestimmen Sie den maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt!
   c) Zeichnen Sie zu dem Flussnetzwerk nach dem dritten vergrößernden Schritt das zugehörige Residualnetzwerk.