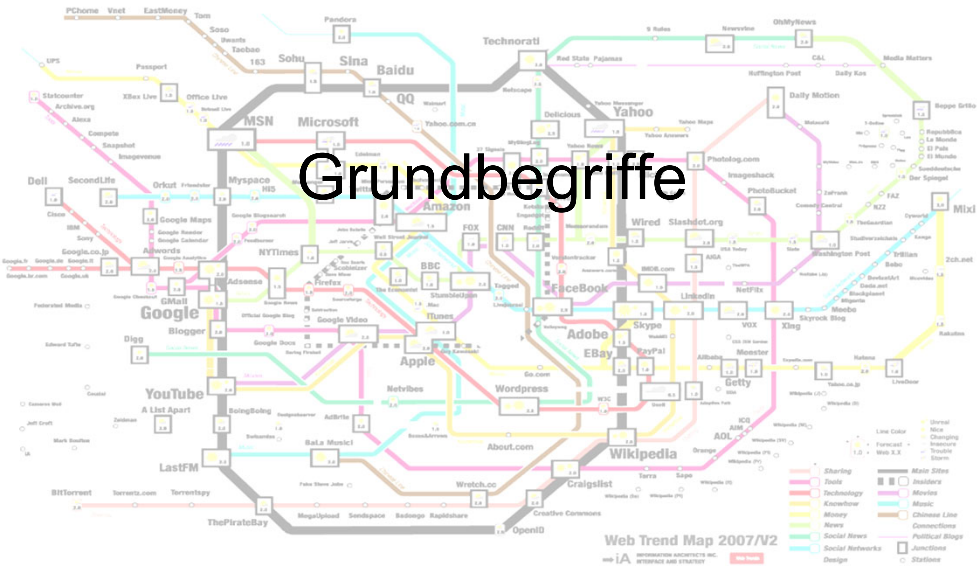
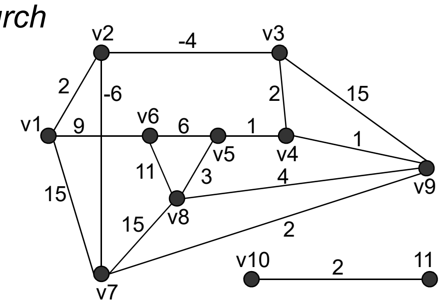


Grundbegriffe

Ungerichteter Graph

Ein ***Graph G(V,E)*** *besteht aus einer* ***nicht leeren Menge V von Ecken*** *(englisch vertices) und einer* ***Menge E von*** **Kanten** *(englisch edges), die je zwei Ecken miteinander, oder eine Ecke mit sich selbst, verbinden.*

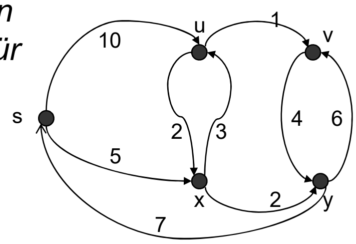
Sei G = (V,E) ein ungerichteter Graph, dann bezeichne ***s_t*** *:* E → P(V) *die Menge der durch eine Kante verbundenen Ecken.*



Gerichteter Graph

Eine Kante, die genau eine Anfangsecke und eine Endecke besitzt, heißt eine ***gerichtete Kante*** *(oder ein Pfeil, englisch* arc*). Ein Graph, dessen Kanten sämtlich gerichtet sind, heißt ein* ***gerichteter Graph*** *(oder ein Digraph). Wenn gerichtete Kanten durch Eckenpaare bezeichnet werden, wird die Anfangsecke stets zuerst genannt.*

Sei G = (V,E) ein gerichteter Graph, dann bezeichne ***s, t*** *:* E → V *die Ecke, die für eine Kante Anfangsecke (s, source) bzw. Endecke (t, target) ist.*



Gerichteter Graph

Sei G ein gerichteter Graph. Der Graph H, der entsteht, wenn alle gerichteten Kanten von G durch ungerichtete Kanten ersetzt werden, heißt der G ***zugrundeliegende ungerichtete Graph****.*

Ein Graph, der sowohl gerichtete als auch nicht gerichtete Kanten besitzt, wird als ***gemischter Graph*** *bezeichnet.*

Eine Menge $E \subseteq E$ *von Kanten, deren Anfangs- und Endecken übereinstimmen, d.h.* $\forall e1,e2 \in E$*: s_t(e1)=s_t(e2), bzw. im Falle gerichteter Kanten* $\forall e1,e2 \in E$*: s(e1)=s(e2)*$\wedge$ *t(e1)=t(e2), werden als* ***Mehrfachkanten*** *oder auch* ***parallele Kanten*** *bezeichnet. Gilt im Falle von gerichteten Kanten* $\forall e1,e2 \in E$*: s(e1)=t(e2)*$\wedge$*t(e1)=s(e2), so werden diese als* ***antiparallele Kanten*** *oder als* ***inverse Kanten*** *bezeichnet, jedoch nicht als Mehrfachkante.*

Ein Graph mit Mehrfachkanten heißt ein ***Multigraph****.*

leerer/schlichter/einfacher (Teil-/Unter-)Graph

*Ein Graph G(V,E) mit E=∅ heißt **leerer Graph**. G(V,E) mit V=E= ∅ heißt **Nullgraph** (und ist kein Graph!)*

*Eine Kante e∈E mit s(e)=t(e) (gerichtete Kante) bzw. |s_t(e)|=1 (ungerichtete Kante) heißt eine **Schlinge**. Ein Graph ohne Schlingen oder Mehrfachkanten heißt ein **einfacher** oder **schlichter Graph**.*

*Sei G(V,E) ein Graph. Jeder Graph H(W,F) mit W⊆V und F⊆E heißt ein **Teilgraph** von G. Ein Graph H(W,F) mit W⊆V heißt ein **Untergraph** von G(V,E), wenn seine Kantenmenge F genau diejenigen Kanten aus E enthält, die zwei Ecken aus W verbinden.*

Teilgraph aus G erzeugen:
Entfernen von einigen Ecken (inklusive inzidenter Kanten) und/oder entfernen einiger Kanten

Untergraph aus G erzeugen:
Entfernen von einigen Ecken (inklusive inzidenter Kanten)

adjazent/inzident und Eckengrad

*Zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, heißen **adjazent** (oder benachbart). Wenn v eine (Anfangs oder) Endecke der Kante e ist, heißen v und e **inzident**.*

Sei v∈V eine Ecke eines Graphen G=(V,E).
Falls G ungerichtet ist, ist die Zahl d(v) definiert als
d(v)=|{e∈E: v∈s_t(e)}| + |{e∈E: v∈s_t(e) ∧ |s_t(e)| = 1}|,
*d.h. die Anzahl der Kanten, deren Endecke v ist (dabei werden Schlingen doppelt gezählt). **d(v)** heißt **Grad der Ecke v**.*
Falls G gerichtet ist, ist die Zahl $d_-(v)$ [bzw. $d_+(v)$] definiert als
$d_+(v)$= |{e∈E: s(e)=v}| bzw. $d_-(v)$=|{e∈E: t(e)=v}|,
d.h. die Anzahl der Kanten, deren Ausgangsecke [bzw. Endecke] v ist.
*$d_+(v)$ [bzw. $d_-(v)$] heißt **Ausgangsgrad** [bzw. **Eingangsgrad**] der Ecke v.*

Satz Für die Eckengrade eines ungerichteten Graphen G(V,E) gilt:

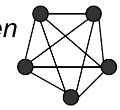
$$2 \bullet |E| = \sum_{v \in V}^{n} d(v)$$

isomorph, vollständig, bipartit

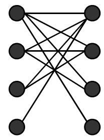
Zwei Graphen G(V,E) und H(W, F) heißen ***isomorph****, wenn es zwei bijektive Abbildungen* ϕ: V → W, σ: E → F *gibt, so dass für alle u,v∈V und e∈E gilt:*

$$e = uv \Longleftrightarrow \sigma(e) = \phi(u)\,\phi(v)$$

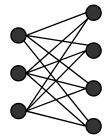
Ein einfacher Graph mit n Ecken heißt ***vollständig****, wenn je zwei Ecken durch eine Kante verbunden sind. Er wird dann mit dem Symbol* $\mathbf{K_n}$ *bezeichnet.*



Ein ungerichteter Graph G(V,E) heißt ***bipartit****, wenn sich seine Eckenmenge V derart in zwei disjunkte Teilmengen X, Y zerlegen lässt (V=X∪Y; X∩Y=∅), dass jede Kante von G genau eine Endecke in X und eine Endecke in Y besitzt.*



Ein schlichter bipartiter Graph mit |X|=m, |Y|=n, bei dem jede Ecke aus X mit jeder Ecke aus Y durch eine Kante verbunden ist, heißt ein ***vollständiger bipartiter Graph*** *und wird mit dem Symbol* $\mathbf{K_{m,n}}$ *bezeichnet.*



Aufgaben

1. Zeichnen Sie einen Graphen mit vier Ecken, die die Grade 1, 2, 3 und 4 haben.
   Warum gibt es keinen einfachen Graphen mit dieser Eigenschaft ?
2. Sieben Städte sollen durch Fluglinien miteinander verbunden werden und von jeder Stadt aus sollen genau drei andere Städte im (ungerichteten) Direktflug erreichbar sein. Geben Sie einen Plan an oder erklären Sie ggf. warum er nicht machbar ist.
3. Geben Sie 10 nichtisomorphe ungerichtete Graphen mit 4 Ecken und 4 Kanten an.
4. Wir betrachten im Folgenden die vollständigen Graphen K_n.
   (a) Zeigen Sie für $2 \le n \in N$: Löscht man beim vollständigen Graphen K_n eine beliebige Ecke, so entsteht der vollständige Graph K_{n-1}.
   (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $|E_{K_n}| = 0{,}5 * n * (n-1)$