

# Helikopterlab

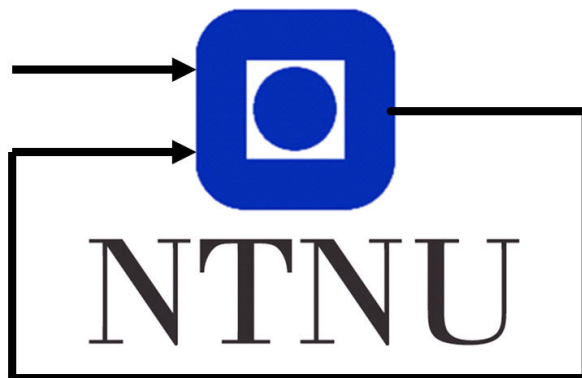
Gruppe 5

Student nr. 539107

Student nr. 544915

Student nr. 544951

September 13, 2022



Institutt for teknisk kybernetikk

## Sammendrag

I denne labbrapporten skal vi skrive om helikopter labben i TTK 4115 Lineær systemteori. Denne labben går ut på å få et helikopter til å fly stabilt og følge en referanse på en god måte ved hjelp av forskjellige styresystemer og metoder for å finne tilstandene til helikopteret. I de to første labbene bruker vi enkodere til å finne tilstandene, som er veldig gode måleapparater, og varierer mellom PD regulator og en LQR regulator. Så på de to siste dagene fortsetter vi med LQR regulatoren men eksperimenterer med to forskjellige metoder for å få gode estimater av tilstandene ved hjelp av målinger fra en IMU. Disse to metodene er en Luenberger observer og et Kalman filter.

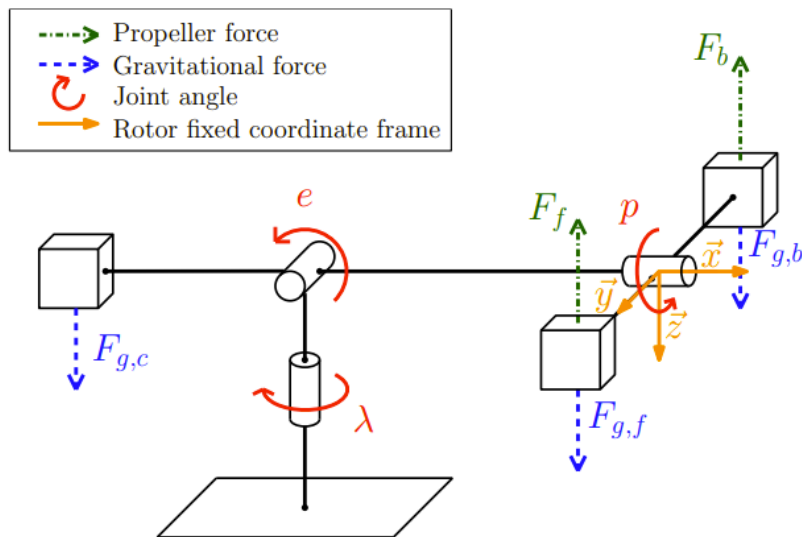
# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Monovariabel kontroll</b>	<b>2</b>
2.1	Introduksjon . . . . .	2
2.2	Testplan . . . . .	2
2.3	Resultat og diskusjon . . . . .	2
2.4	Konklusjon . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Multivariabel Kontroll</b>	<b>5</b>
3.1	Introduksjon . . . . .	5
3.2	Testplan . . . . .	5
3.3	Resultat og diskusjon . . . . .	7
3.4	Konklusjon . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Luenberger observer</b>	<b>9</b>
4.1	Introduksjon . . . . .	9
4.2	Testplan . . . . .	9
4.3	Resultat og diskusjon . . . . .	10
4.4	Konklusjon . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Kalmanfilter</b>	<b>12</b>
5.1	Introduksjon . . . . .	12
5.2	Testplan . . . . .	12
5.3	Resultat og diskusjon . . . . .	13
5.4	Konklusjon . . . . .	14

# 1 Introduction

I løpet av fire labdager har vi implementert og testet forskjellige styringssystemer på en modell av et helikopter. Modellen av helikopteret består av en stang med to propeller i den ene enden og en motvekt i den andre enden. Stangen kan beveges som vist på Figur 1. De tre vinklene som hører til bevegelse kaller vi pitch ( $p$ ), elevation ( $e$ ) og travel ( $\lambda$ ). På første labdag styrte vi kun pitchvinkelen på helikopteret, og baserte oss på målinger fra encodere som sitter i leddene på helikopteret. På dag to brukte vi en LQR regulator til å kontrollere tilstandene pitch, pitchendring og elevation. Vi implementerte også integraleffekt og sammelignet responsen til systemet med og uten dette. Encodere måler hvor langt vi har gått i en retning på helikoptermodellen, og vil ikke kunne funke på et helikopter som ikke er festet i en pinne. På dag tre og fire brukte vi derfor en IMU med akselerometer og gyroskop til å måle fart og akselerasjon. Disse målingene gir en del støy, og vi har derfor implementert Luenberg observer og Kalman filter for at systemet skal estimere tilstandene bedre, selv med mye støy i målingene. Når vi bruker IMUen og har fått et helikopter som flyr stabilt med gode estimater kunne styresystemet vårt, med noen tilpassninger, vært brukt på for eksempel en drone i kommersielt bruk.

Denne rapporten består av 4 hoveddeler, en del for hver labdag. Hver del starter med en introduksjon av oppgaven som skal bli gjort på lab sammen med en kortfattet del om hva som ble gjort i labforarbeidet. Deretter blir testplanen presentert med en tabell over nummerete tester og en hypotese til hver test. Videre kommer en diskusjonsdel som viser resultatene fra labdagen med figurer og diskusjon rundt om resultatene stemte med hypotesene. Til slutt kommer en kort konklusjon om hva de viktigste resultatene fra labdagen var.



Figur 1: Skisse av hvordan helikopteret på laben ser ut med de tre vinklene  $p = pitch$ ,  $e = elevation$  og  $\lambda = travel$ .

## 2 Monovariabel kontroll

### 2.1 Introduksjon

På dag 1 av helikopterlab implementerte vi et monovariabelt kontrollsystem for å kunne styre pitchen til helikopteret. For å få til dette lagde vi en matematisk modell av helikopteret. Denne modellen var ulineær så vi linearisere modellen for å kunne designe en PD-regulator. Etter å ha satt in PD-regulatoren i vår modell av systemet fant vi transferfunksjonen fra pitch referansen til pitchen. Denne transferfunksjonen brukte vi til å finne polene til systemet som vi ønsker å plassere på ønskede steder i det komplekse plan for å få oppførselen vi er ute etter. Det er denne plasseringen som gir oss utgangspunktet for hypotesene vi senere kommer til å presentere.

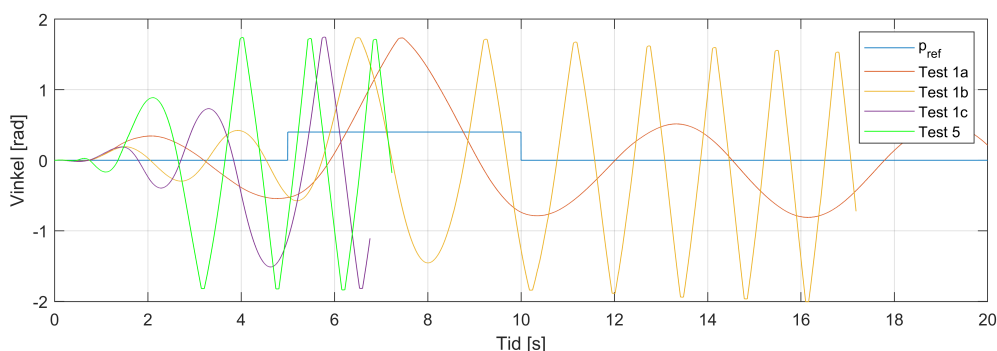
### 2.2 Testplan

Testplan				
Test	Polplassering	Teoretisk stabilitet	Hypotese	Regulatorparametre
1	Komplekskonj. på imaginæraksen	Marginalt stabilt	Oscillerende, ustabilt	$K_{pd} = 0, K_{pp} = 1, 5, 12$
2	En pol i origo en i VHP	Marginalt stabilt	Ustabilt	$K_{pd} = 1, 5, K_{pp} = 0$
3	To negative og reelle poler	Stabilt	Stabilt, ikke oscillerende	$K_{pd} = 12, K_{pp} = 5$
4	Negative, komplekskonj.	Stabilt, oscillerende	Stabilt, oscillerende	$K_{pd} = 1, K_{pp} = 1$ og 5
5	Negative, komplekskonj.	Stabilt	Ustabilt (metning)	$K_{pd} = 2, K_{pp} = 1000$

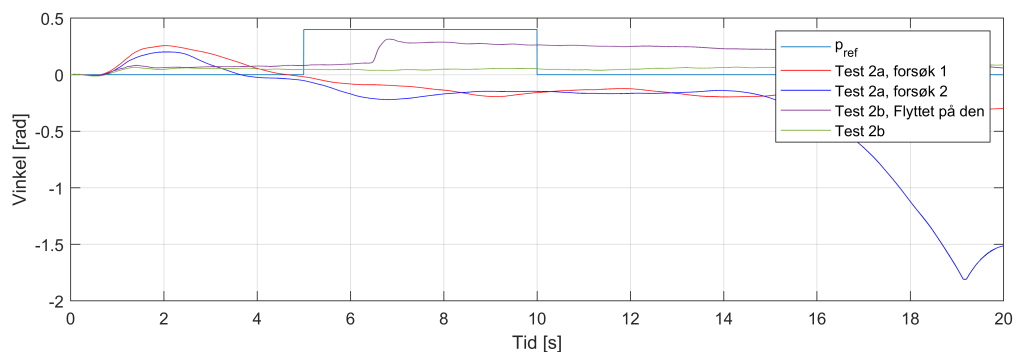
Tabell 1: Testplan for dag 1.  $K_{pd}$  og  $K_{pp}$  er henholdsvis demperledd og proporsjonalledd i PD-regulatoren og er valgt til ulike verdier for å teste responsen ved forskjellige variasjoner av polplasseringer.

Når vi skulle lage en testplan ønsket vi å teste systemet med forskjellige polplasseringer i det imaginære plan. Dette gjorde vi ved å endre på parameterene  $K_{PD}$  og  $K_{PP}$ . De viktigste teoriene vi ville teste var: om to negative reelle poler ga stabilitet, om komplekskonjugerte poler vil gi oscillerende innsvingningstid, om marginal stabilitet ville bli ustabilt eller holde seg marginal stabilt, om kritisk demping ville bli over- eller underdempet og å demonstrere metning i praksis. Som en kan se av Tabell 1 er hypotesene generelt at systemet er mer ustabilt enn den teoretiske stabiliteten da vi tror linearisering, forenklinger og forstyrrelser vil bidra til at systemet oppfører seg mer ustabilt enn teorien tilsier. Testene ble gjennomført ved å få helikopteret til å fly med referanse i pitch lik 0, for så å endre referansen til  $0.4rad$  etter 5 sekunder, og tilbake til 0 etter 5 nye sekunder. Deretter fikk helikopteret fly i 10 sekunder

### 2.3 Resultat og diskusjon

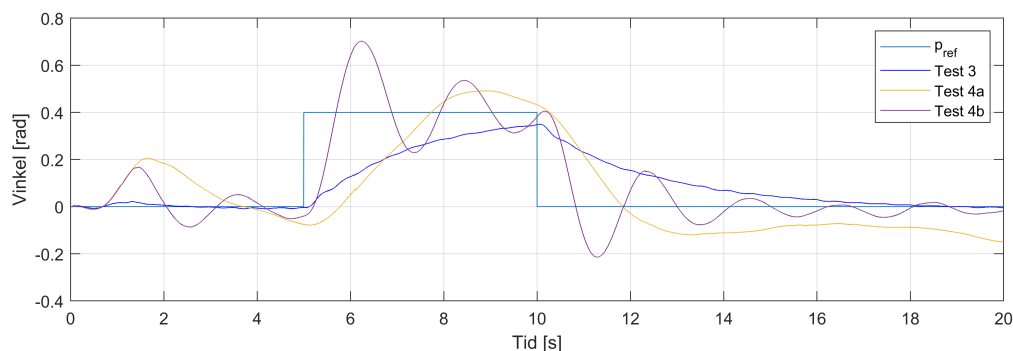


Figur 2: Test 1 og 5. Komplekskonjugerte poler på imaginær akse og metning. 1a ser ut til å være marginalt stabilt, de andre er ustabile.  $K_{pp}$  verdiene stiger med bokstavene.



Figur 3: Test 2. En pol i origo og en i VHP. Tydelig at de ikke er asymptotisk stabile. På 2b, flyttet på den, tok vi tak i helikopteret og endret pitchen før vi så slapp det igjen.

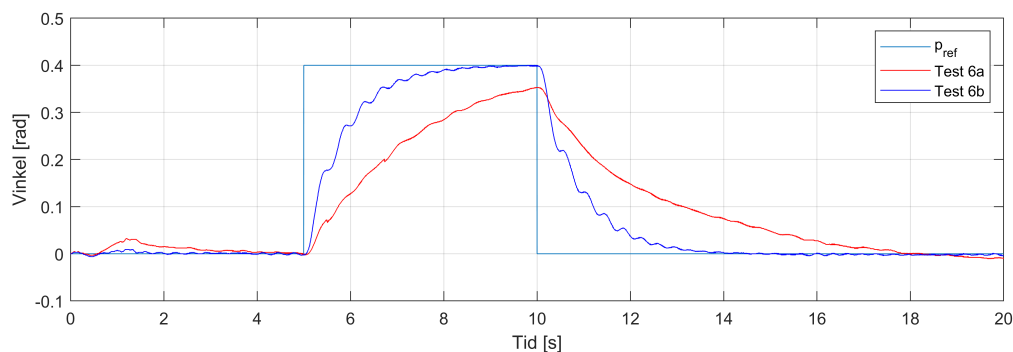
I test 1 og 2 vil vi sjekke marginal stabilitet. I test 1 har systemet to komplekskonjugerte poler på imaginæraksen som i teorien vil gi stående svigninger rundt referansen. Som vi ser av resultatene i Figur 2 går to av grafene mot  $\frac{\pi}{2} \approx 1.6$  radianer som er det maksimale utslaget for pitchen som tyder på at systemet er ustabil. Den røde grafen ser ut til å være marginalt stabilt siden amplituden på svingningene ikke øker. Vår hypotese om at systemet blir ustabil oscillerende stemte altså for noen forsøk i test 1. I test 2 har systemet en pol i origo som vil gi et marginalt stabilt system uten oscillasjon. I Figur 3 ser vi resultatene fra test 2 som viser at tre av grafene holder seg rundt referansen uten å oscillere. Test 2a, forsøk 2 er tydelig ustabil. Test 2 viser at med en pol i origo og en i VHP kan et slikt system noen ganger ha flaks og holde seg rundt referansen mens andre ganger bli ustabil. Vår hypotese stemte altså for noen av tilfellene.



Figur 4: Test 3 og 4. Alle poler i VHP, på 3 er begge på den reelle akse mens på 4 er det komplekskonjugerte par.

I test 5 testet vi metning ved å ha stor  $K_{PP}$  verdi som ga større pådrag enn den faktiske motoren kan gi. Vår hypotese var at dette ville føre til ustabilitet til tross for at begge poler er i VHP, dette ser vi tydelig i Figur 2 at stemmer.

Både test 3 og 4 har alle poler i venstre halvplan, og test 3 har begge poler på reell akse, mens test 4 har to komplekskonjugerte poler. Hensikten med testene var å se om test 3 ville gi et overdempet system, mens test 4 ville gi et underdempet og oscillerende system. En kan se av Figur 4 at test 3 følger pitch-referansen fint, men ganske sakte, noe som stemte bra med hypotesen. Da vi gjennomførte test 4a, skjedde ikke det vi forventet, og helikopteret slet med å følge referansen. Ved gjentatte forsøk holdt det seg så vidt innenfor kontroll, noe som kan tyde på marginal stabilitet. Dette fulgte da ikke hypotesen vår fra Tabell 1. Vi tenkte dette kunne



Figur 5: Test 6. To overlappende poler i VHP, skulle gitt kritisk dempning. 6b har 3 ganger så store  $K_{pp}$  og  $K_{pd}$  verdier som 6a.

skyldes et for lite proposjonalledd som ga for lite pådrag ved avvik, og vi lagde da test 4b. Den nye testen kan en se følger referansen oscillatorisk som forventet.

Test 6 la vi til underveis i labdagen. Vi ønsket å se hvordan et kritisk dempet system ble i praksis, samt om det faktisk ble kritisk dempet, eller om lineariseringen og andre forenklinger gjorde at det i praksis ble over- eller underdempet. Resultatet, som kan ses i figur 5, var ganske overraskende. Hovedformen på grafene ser ut som den skal for et kritisk dempet system, men de er veldig hakkete. Vår hovedteori her er at det er på grunn av diskrete verdier, som på f.eks. encoderen. Dette fører til hopp med veldig store derivater som vil gjøre at derivatvirkningen pulserer med høye pådrag for å dempe endringen. Vi testet også med to forskjellige sett av verdier. Den hakkede oppførselen er mer synlig i den blå grafen som har høyere  $K_{PP}$  og  $K_{PD}$ , som gir høyere pådrag og dermed en hurtigere respons. Dette vil forsterke de pulserende derivatvirkningene og gjør at vi ender med mye hacking.

## 2.4 Konklusjon

Vi har sett at teorien i hovedsak stemmer i praksis. Poler i VHP gir stabilitet, og komplekskonjugerte poler fører til oscillasjon, mens reelle poler ikke gjør det. Hypotesene våre stemte ganske bra, og vi ser at systemer som i teorien skal være på grensen til ustabile, men stabile, fort kan bikke over og bli ustabile. De to mest overraskende funnene var at  $K_{PP} = K_{PD} = 1$ , som skulle være stabilt, ikke klarte å følge referansen så bra. Og de kritiske dempede systemene som hadde en hakkete respons. Teorien gir oss et godt utgangspunkt for å predikere virkeligheten.

## 3 Multivariabel Kontroll

### 3.1 Introduksjon

På dag 2 av helikopterlab implementerte vi en "reference-feedforward state-feedback" med LQR for å kontrollere et multivariabelt system. De forskjellige tilstandene vi kontrollerte var pitch, pitchendring og elevation. Til slutt implementerte vi integral effekt og sammenlignet responsen til LQR regulatoren med og uten integral effekt.

I labforarbeidet til dag 2 utledet vi det lineariserte systemet fra dag 1 inn i en tilstandsrom modell på formen

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} p & \dot{p} & \dot{e} \end{bmatrix}^T \quad u = \begin{bmatrix} V_s & V_d \end{bmatrix}^T \quad y = \mathbf{C}x \quad (1)$$

Det første vi ville sjekke var om systemet var kontrollerbart. Dette sjekket vi å se at kontrollerbarhetsmatrisen til systemet er full rank, noe den var. For å kunne kontrollere systemet vårt mot en referanse trenger vi en state-feedback controller med reference-feedforward. Pådraget vil se slik ut

$$u = \mathbf{F}r - \mathbf{K}x \quad \mathbf{F} = [\mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{21} & k_{23} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\mathbf{F}$  matrisen fant vi ved å sette uttrykkene for pådrag sammen med tilstandsrommodellen.  $\mathbf{K}$  matrisen inneholder  $k_{xy}$  og den finner vi i Matlab ved å kjøre kommandoen `lqr(A,B,Q,R)`. Til slutt i forarbeidet implementerte vi integraleffekt for å motvikre stasjonæravvik og støy. For å implementere dette legger vi til to nye tilstander. De to nye tilstandene vil straffe den integrerte feilen mellom  $p - p_c$  og  $\dot{e} - \dot{e}_c$ . Ved å introdusere integral effekt håper vi at systemet skal få null stasjonæravvik når vi setter forskjellige referanser.

### 3.2 Testplan

Testplan uten integralvirkning				
Test	Matrise som testes	$\mathbf{Q} = [Q_p, Q_{\dot{p}}, Q_{\dot{e}}]$	$\mathbf{R} = [R_{v_s}, R_{v_d}]$	Hypotese
1	Q	[100, 1, 1]	[0.01, 0.01]	Rask respons mot $p_c$ , kan tape høyde
2	Q	[1, 100, 1]	[0.01, 0.01]	Tregere respons pga straffing av deriverte i pitch
3	Q	[100, 1, 100]	[0.01, 0.01]	Tregere enn respons mot $p_c$ , vil holde høyden bedre
4	Q og R	[1, 1, 1]	[0.01, 0.01]	Ingenting straffes, så systemet vil nå referanser innen fornuftig tid
5	R	[1, 1, 1]	[0.01, 1]	Diffrenase mellom motorene straffes, så vi får veldig treg respons
6	R	[100, 1, 1]	[0.01, 1]	Krangling mellom Q og R, oppførsel ganske lik test 4, med mindre demping

Tabell 2: Testplan for dag 2 uten integralvirkning. Testene er satt opp for å teste hva som skjer når en straffer utslag i de ulike tilstandene og pådragene. Som base er R-verdiene satt til 0.01 for å få nok pådrag til å løfte helikopteret.

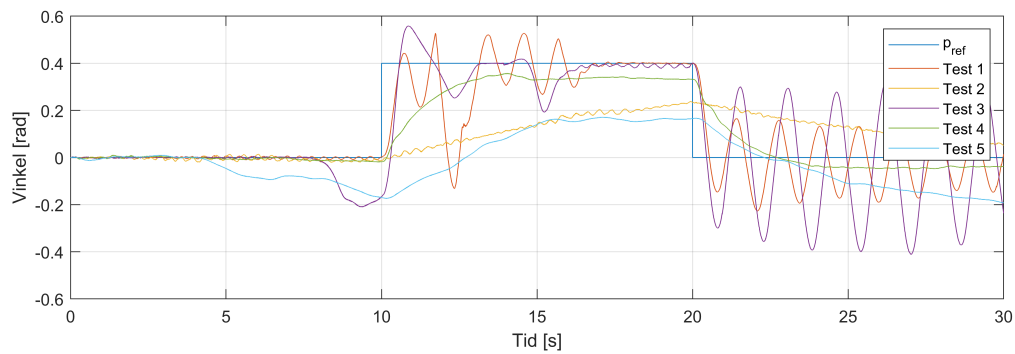
Da vi skulle sette opp testplanene for dag to tok vi utgangspunkt i at Q- og R-matrisene er forholdstall for hvilke avvik og pådrag som skal straffes og ikke. Vi tenkte at å sette alle verdiene til 1 da ville gjøre at helikopteret fløy greit og at vi derfra kunne endre på spesifikke verdier når



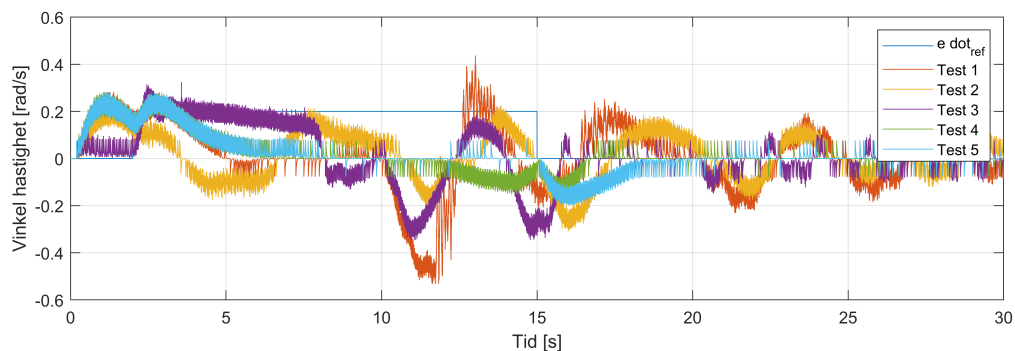
Testplan med integralvirkning				
Test	Matrise som testes	$Q = [Q_p, Q_{\dot{p}}, Q_{\dot{e}}, Q_\gamma, Q_\zeta]$	$R = [R_{v_s}, R_{v_d}]$	Hypotese
7	Q	$[1, 1, 1, 1, 1]$	$[0.01, 0.01]$	Stabil uten standardavvik
8	Q	$[1, 1, 1, 100, 1]$	$[0.01, 0.01]$	Ingen standardavvik i pitch, men fare for windup
9	Q	$[1, 1, 1, 1, 1]$	$[0.01, 1]$	Ingen standardavvik, men tregere respons enn i tilfellene over

Tabell 3: Testplan for dag 2 med integralvirkning. Testene er satt opp for å teste hva som skjer når en straffer utslag i de ulike tilstandene og pådragene. Her er fokuset å se hvordan integralvirkning påvirker oppførselen til helikopteret. Test 10 ble det bestemt å gjennomføre på labdagen.

vi ville straffe ulike avvik og pådrag. På lab ble det fort tydelig at det ikke ble gitt nok pådrag, og at R-verdiene måtte være mye lavere enn Q-verdiene. Tankegangen da vi satt opp testplanen uten integralvirkning (Tabell 2) var at vi ville straffe avvik fra en parameter om gangen og se om det var noen tydelig forskjell på oppførselen til systemet. Det ble også testet å straffe forskjell i spenning mellom motorene ( $v_d$ ) for å se om vi kunne få tregere respons.

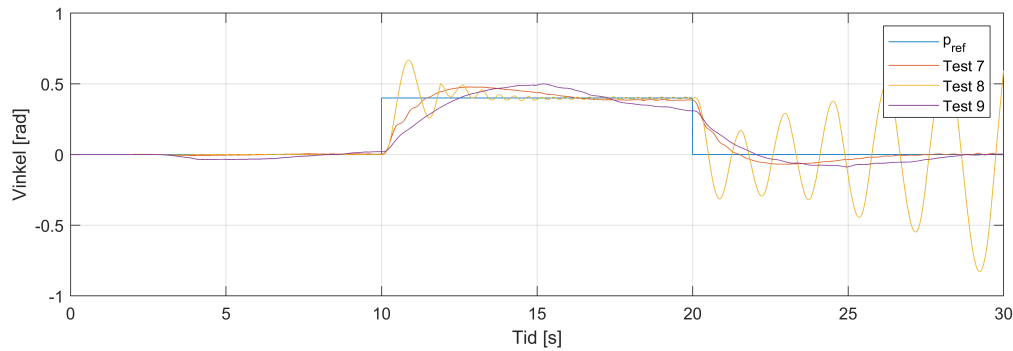


Figur 6: Pitchvinkel uten integralvirkning

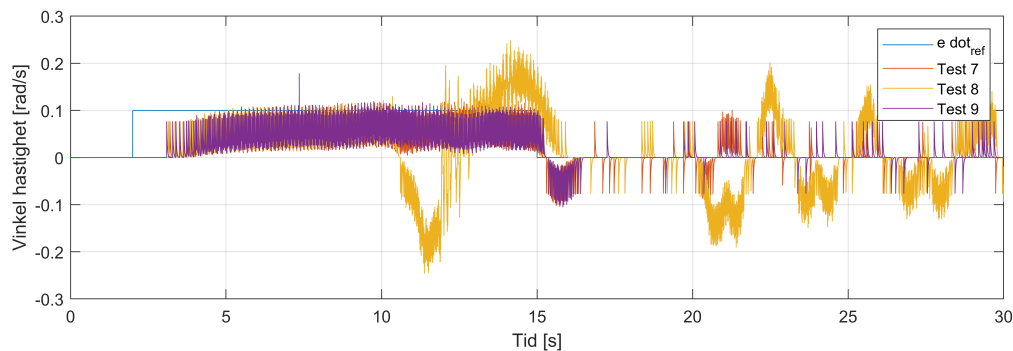


Figur 7: Elevasjons rate uten integralvirkning

For å sette opp testplanen med integralvirkning (Tabell 3) valgte vi å sette opp situasjoner som lignet på noen av de vi hadde hatt uten integralvirkning for å lettere kunne sammenligne om innføringen av integralvirkning hadde noe påvirkning på responsen.



Figur 8: Pitchvinkel med integralvirkning



Figur 9: Elevasjons rate med integralvirkning

### 3.3 Resultat og diskusjon

Det som var veldig slående i resultatene fra testene uten integrasjonsledd var at det ble et konstant avvik i elevasjons raten. Dette gjorde at helikopteret ikke klarte å holde seg flyvende og det ble derfor vanskelig å utføre gode tester. Vi la derfor til  $V_{s0}$  på pådraget til  $V_s$  for å holde helikopteret flyvende. Hadde vi istedenfor laget en regulator for elevasjonen hadde det konstante avviket bare ført til en litt lavere sveve høyde, dette ville nok vært et bedre styresystem. I tillegg er det tydelig at små konstante avvik i et av helikopterets tilstander kan før til store feil over tid i andre tilstander, for eksempel vil litt feil i pitch gjøre at det kommer krefter i travel retningen og travel vil gradvis øke.

På test 1, se Figur 6 og Figur 7, gikk helikopteret i bakken fordi pitchen endret seg fort og å forhindre avvik i elevasjonsrate var ikke høy prioritert i Q matrisen. For å se om vi kunne unngå å tape denne høyden, men beholde den raske endringen i pitch lagde vi test 3. Her straffes både avvik i pitch og endring i elevasjon, og som en kan se av figurene holder den høyden litt bedre enn test 1, men det kan se ut til at en konsekvens er at vi får litt større utslag i pitchvinkelen i test 3. Test 1 og 3 er testene som har størst endring i elevation og begge avslutter med stående svingninger i pitch, det å straffe avvik i pitch såpass hardt er kanskje ikke det lureste. Test 2 var laget for å se om det å straffe rask endring i pitch ville føre til en tregere respons, noe en kan se fra Figur 6 at det gjorde. Den ser ut til å følge referansen fint, men veldig sakte. En test som hadde en noe lik respons, var test 5. Her ble  $V_d$ , altså forskjell i spenning på motorene straffet. Dette forventet vi at ville gi en treg respons som i test 2, men som en kan se fulgte helikopteret referansen noe dårligere i test 5. For å ha med en test som ikke prioriterte noe fremfor noe annet, tok vi med test 4. Her fløy helikopteret som forventet med noe stasjonæravvik i pitchvinkel.

Etter vi la til integrasjonsleddene fikk vi vekk det konstante avviket og helikopteret klarte å holde høyden uten å legge til det konstante pådraget  $V_{s0}$ . Det mest spennende resultatet kom nok i test 8, fordi helikopteret ser ut til å ha blitt ustabilt i pitchvinkel som sett i Figur 8, dette førte og til dårlig styring av elevasjonsrate, se Figur 9. I test 7 og 9 fikk vi veldig like responser, som begge fulgte referansen godt. Tregheten vi forventet å se i test 9 var ikke så tydelig som vi hadde trodd. Generelt stemmer hypotesene våre veldig bra.

### **3.4 Konklusjon**

Vi har sett at for et helikopter vil konstante avik fra referansene ha mye å si fordi feilene i andre tilstander blir værre over tid. Dette gjør at integral effekt er kritisk for et fungerende system.

## 4 Luenberger observer

### 4.1 Introduksjon

På de forrige labdagene har vi brukt encoderene sine outputs til å gi oss tilnærmet eksakte målinger med lite støy. Denne løsningen er ikke god da et helikopter som flyr fritt ikke kan bruke encodere. Fra og med denne labdagen skal vi derfor bruke en IMU til å måle outputs fra helikopteret. Siden målingene fra IMUen er mer støyete og unøyaktige brukte vi en Luenberger observer til å estimere tilstandene.

Får å implementere en Luenberger observer måtte vi i forarbeidet først utvide tilstandsrom modellen, se Ligning 3. Deretter fant vi minimum sett av tilstander vi måtte måle for at systemet skulle være obeserverbart. Vi fant ut at  $C$  måtte være diagonalmatrisen vi ser i Ligning 3. De to tilstandene vi må måle er da  $e$  og  $\dot{\lambda}$ . Selvom dette er minimum vil det i praksis være mye vanskeligere å styre helikopteret med denne  $C$  matrisen så vi brukte at  $C$  var lik en  $5 \times 5$  identitetsmatrise isteden, det vil si at vi målte alle tilstandene. Til slutt i forarbeidet brukte vi Matlab til å finne verdiene til  $L$  matrisen for estimatoren i 4. Vi brukte kommandoen `place(A',C',p)`, der vi bestemte  $p$ (polene) gjennom testplanen.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} p & \dot{p} & e & \dot{e} & \dot{\lambda} \end{bmatrix}^T \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (diagonal)} \quad (3)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (4)$$

### 4.2 Testplan

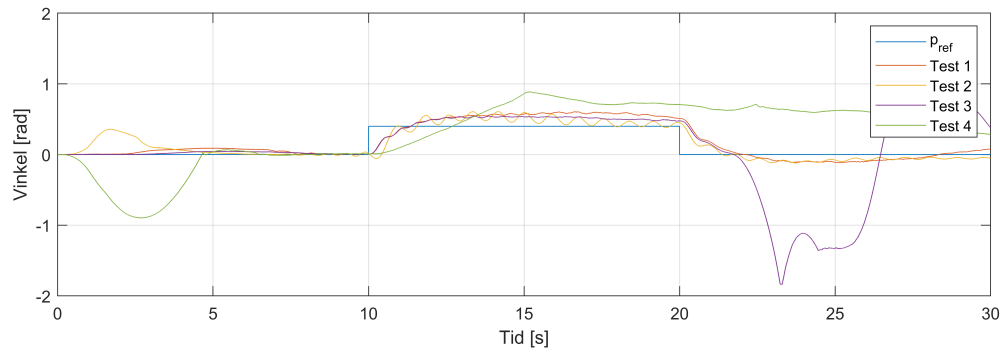
Testplan			
Test	Poler, $[p, \dot{p}, e, \dot{e}, \dot{\lambda}]$	Kommentar	Hypotese
1	$100 * [-0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}i + 0.5i, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.5i, -0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i]$	Alle tilstander er direkte målt, og har samme absoluttverdi	Vil fly fint
2	$25 * [-0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}i + 0.5i, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.5i, -0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i]$	Samme som test 1, men med mindre absoluttverdi	Tregere enn test 1, men mindre støy i estimator
3	$[-50, -50, -50, -50, -50]$	Alle polene overlapper	Overlappende poler vil skape problemer i oppførsel
4	$[60 * (-0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i), 40 * (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5i), 80, 60 * (-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.5i), 80 * (-0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)]$	Har nå kun to målinger i C-matrisen	Vil fly betydelig dårligere enn øvrige tester

Tabell 4: Testplan for dag 3. Test 1-3 tester forskjellige aspekter ved hvordan polplassering påvirker systemets oppførsel. Test 4 tester systemet med kun to målinger, mot 5 målinger i de øvrige testene.

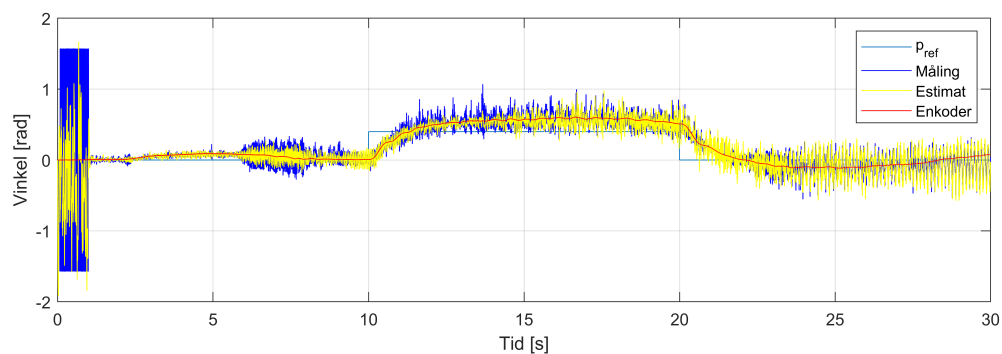
Da vi skulle sette opp testplanen for dag 3, ønsket vi å teste ulike konfigurasjoner av polplasseringer og se hvordan det påvirket systemets oppførsel. Test 1 og 2 fra Tabell 4 var laget for å teste om lenger avstand fra origo gir en raskere estimator med mer støy i målingene. Test 3 var laget for å teste om overlappende poler vil gi problemer i oppførsel, mens test 4 var med for å se hva som skjer når vi kun har med målinger av  $\dot{\lambda}$  og  $e$ . Med kun to målinger, må en bruke disse til å finne estimerte verdier på de resterende tilstandene. Da vi skulle sette polverdiene i denne testen, tenkte vi at vi lar tilstandene vi måler direkte være lengst unna origo, altså raskest, de tilstandene vi finner ut ifra målingene litt tregere, og  $\dot{p}$ , som vi finner til slutt ut fra  $p$ , nærmest origo. Dette er fordi vi tenkte at de vi måler direkte må være raskere så de er klare når de andre

baserer seg på de. For å unngå null under brøkstrek i utregningen av pitch og elevationvinkel ved initialisering har vi lagt inn en delay i starten av testen slik at vi ikke får noen definert oppførsel før etter ett sekund.

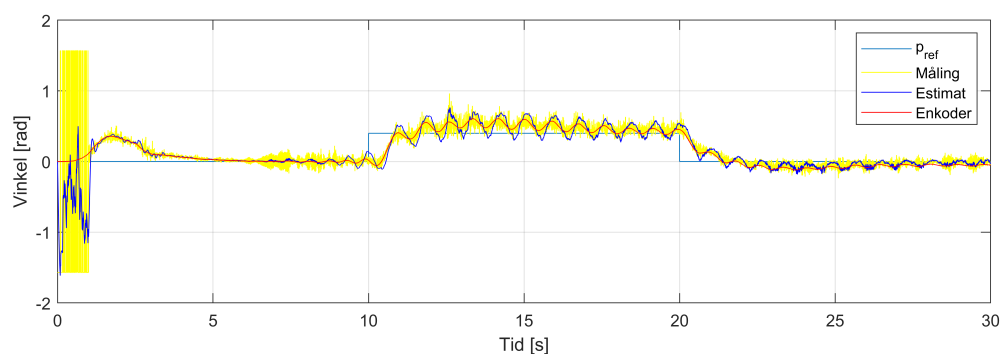
### 4.3 Resultat og diskusjon



Figur 10: Pitchvinkel fra enkoderen



Figur 11: Pitchvinkel fra de 3 kildene på test 1



Figur 12: Pitchvinkel fra de 3 kildene på test 2

I test 1 og test 2 vil vi sjekke hvordan støy og responstid for estimatoren blir påvirket av avstanden til polverdiene fra origo. I figur Figur 11 ser vi resultatene fra test 1 og i figur Figur 12 fra test 2. Med en gang ser vi for test 1 at det er mye mer støyete estimer, noe som stemte med hypotesten vår. Dette kommer av at polenes avstand fra origo er 100 som forstereker forskjellen

mye. Hvis vi ser på resultatene fra test 2 er disse estimatene mye mindre støyete, som også var vår hypotese, siden avstanden til polene kun er 25. En annen ting vi var innterestert i var responstiden. Vi ser at selvom resultatene var mer støyete i test 1 reagerer den mye raskere og er mer lik enkoderverdiene enn i test 2. Men selvom estimatene i test 2 var mindre støyete observerte vi at helikopteret fløy dårligere enn i test 1. Vi kan konkludere med at poler med lengre avstand fra origo gir mer støy men raskere respons.

Vi har lært at overlappende polplasseringer er uheldig og kan skape problemer, dette ønsket vi å teste i test 3 ved å la alle 5 polene overlappe. Som vi ser i Figur 10 stemte dette i praksis også, slik som hypotesen vår sa. Helikopteret nådde maksutslag i pitch og dette er svært uheldig for flyveegenskapene. Det som var overraskende var at det oppførte seg veldig bra helt til det plutselig ble ustabilt. En kan tenke seg at med flaks så kunne det flydd fint gjennom testen.

I test 4 ønsket vi å teste hva som skjer når vi kun bruker målinger fra elevation og travelvinkel. Dette var det minste antallet målinger vi kunne ha med for at systemet skulle være observerbart. En kan se fra Figur 10 at helikopteret slet en del mer med å følge referansen enn det gjorde i test 1 og 2. Denne oppførselen skyldes sannsynligvis at når vi kun har to målinger, må vi bruke disse til å finne de resterende tilstandene, og vi vil få mer støy enn om vi måler alt direkte. Dette gir mindre nøyaktige estimatorer, og vi får dårligere oppførsel på systemet. Med god tuning av polverdier burde det være mulig å få helikopteret til å fly greit med to målinger, men det var ikke noe vi fikk til på labdagen.

#### 4.4 Konklusjon

Det å estimere tilstander er kritisk om man bruker en IMU ettersom disse målingene er veldig støyete og ikke burde brukes direkte. Om man i tillegg tuner estimatoren utifra støy og hurtighet vil man kunne få veldig gode estimater og helikopteret vil fly fint. Det er viktig at estimatoren er hurtig nok selv om dette vil gi mer støy, da det går hardt utover flyeegenskapene om den er for treg.

## 5 Kalmanfilter

### 5.1 Introduksjon

På labdag 4 skal vi implementere et Kalmanfilter. Et Kalman filter er en observer som oppdaterer feedback gain matrisen  $L$  for å minimere variansen til estimator feilen. Når vi på labdag 3 brukte Luenberger observeren fant vi en konstant  $L$  matrise basert på polplassering. For et Kalmanfilter blir denne optimale  $L$  matrisen regnet ut for hvert tidssteg basert på hva vi vet om målestøyen og antagelsen om prosessstøyen.

I forarbeidet designet vi et diskret Kalmanfilter fordi IMUen gir oss diskrete målinger. For å diskretisere systemet brukte vi Matlab og satt tidssteget til 0.002 sek og fant de nye matrisene  $A_d$ ,  $B_d$  og  $C_d$ . Den optimale feedback gainen  $L$  er gitt av ligningen 8.

$$\hat{P}[k] = (I - L[k]C_d)\bar{P}[k](I - L[k]C_d)^T + L[k]R_dL^T[k] \quad (5)$$

$$\hat{x}[k] = \bar{x}[k] + L[k](y[k] - C_d\bar{x}[k]) \quad \bar{x}[k+1] = A_d\hat{x}[k] + B_d u[k] \quad (6)$$

$$\bar{P}[k+1] = A_d\hat{P}[k]A_d^T + Q_d \quad x[k+1] = A_dx[k] + B_d u[k] + w_d[k] \quad (7)$$

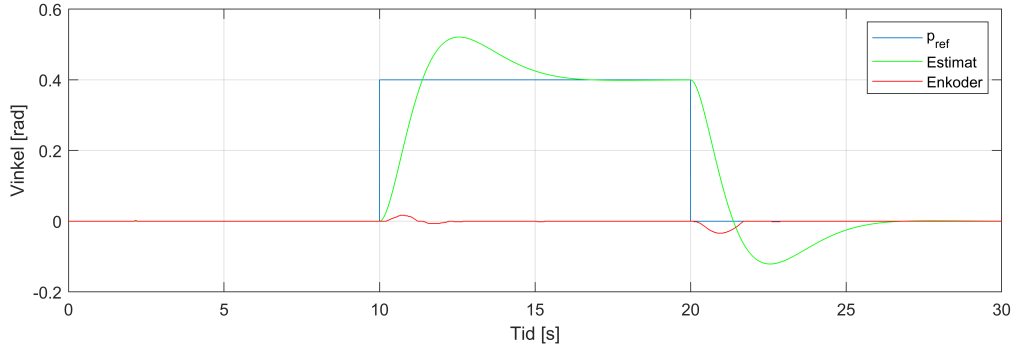
$$L[k] = \bar{P}[k]C_d^T(C_d\bar{P}[k]C_d^T + R_d)^{-1} \quad y[k] = C_dx[k] + v_d[k] \quad (8)$$

For å finne  $R_d$ , som beskriver koraviansen mellom målingene, brukte vi funksjonen `corr` i Matlab.  $Q_d$  beskriver prosess kovariansen og kan bli sett på om hvor gode vi tror estimatorene våre er. Verdiene til  $Q_d$  er det vi som velger og vi lager en test plan ut ifra hvilke verdier vi setter.

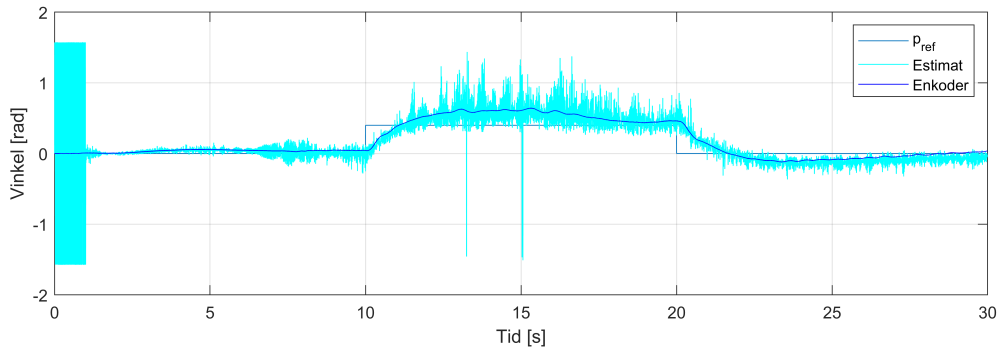
### 5.2 Testplan

Testplan		
Test	$Q_d$ (langs diagonalen)	Hypotese
1	0	Bruker kun estimator, og vil derfor ikke fly riktig da systemet aldri vet hvor det er. Det vil ikke være noe støy da målingene blir sett bort fra.
2	100 000	Bruker tilnærmet kun målinger. Systemet vil derfor merke en del støy, men holde seg i nærheten av ønsket verdi
3	Samme diagonal som $R_d^*$	Vi bruker estimatet og målingene like mye, helikopteret vil fly fint
4	$10^{-4}$	Laget på labdag
5	$10^{-5}$	Laget på labdag
6	$10^{-6}$	Laget på labdag

Tabell 5: Testplan for dag 4. I test 1 og 2 ønsket vi å teste ekstremtilfellene for bruk av estimatet og målinger. Test 3 er laget for å se hva som skjer når vi venter estimatet og målinger like mye. Test 4, 5 og 6 ble laget på labdag da vi så at helikopteret fløy best rundt disse verdiene. \*Diagonalen til  $R_d$  er: [0.0015, 0.00040777, 0.00545779, 0.00326869, 8.91122287e-05, 8.91122287e-05]



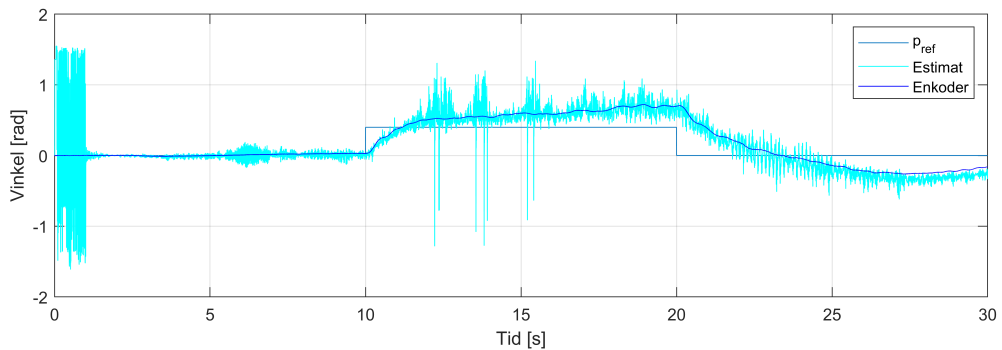
Figur 13: Pitchvinkel fra estimat og enkoder på test 1, der  $Q_d$  matrisen = 0.



Figur 14: Pitchvinkel fra estimat og enkoder på test 2, der diagonalen på  $Q_d = 99999$

Da vi satte opp testplanen for dag 4 ønsket vi å teste hvordan systemet fungerer når vi bruker forskjellige verdier langs diagonalen på  $Q_d$ -matrisen. Lave verdier her vil gjøre at Kalman filteret vektet estimatet tungt, mens høye verdier vil gjøre at vi stoler mer på målingene. Vi valgte å teste ekstremtilfellene i hver retning i test 1 og test 2 fra Tabell 5. I test 3 satte vi  $Q_d = R_d$  for å vekte estimat og måling like mye. Test 4, 5 og 6 ble laget på labdagen da vi testet forskjellige potenser av 10 og fant at dette var den størrelsesordenen som fløy best.

### 5.3 Resultat og diskusjon

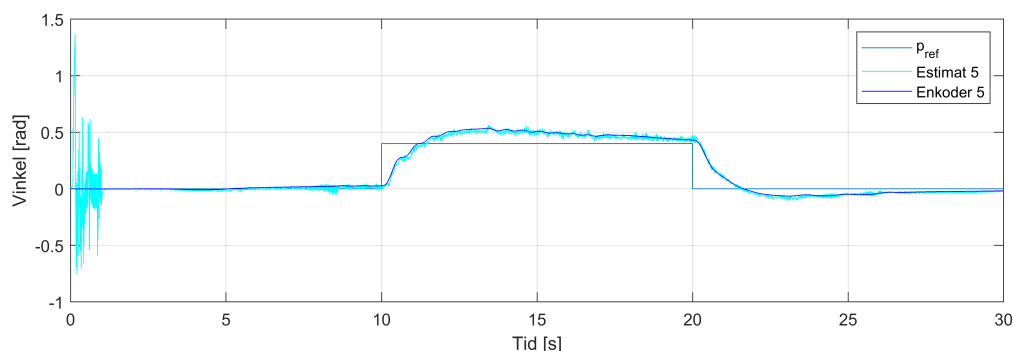


Figur 15: Pitchvinkel fra estimat og enkoder på test 3, der diagonalen på  $Q_d = R_d$

Vi startet med å teste ekstremtilfellene, der diagonalen på  $Q_d$  er enten 0 eller inf. På test 1, der diagonalen er 0, ser vi i Figur 13 at estimatene og enkoderen har lite sammenheng, men estimatene har veldig lite støy. Dette er fordi vi ikke bruker målingene i det hele tatt. Vi har



altså et estimat som har liten varians, men helt feil forventningsverdi. Dette kan komme av feil i modelleringen og av at vi har linearisert systemet i modellen vår. Det fører til at helikopteret bare blir liggende på bakken mens estimatet tror at det flyr fint. I test 2 derimot kan vi se fra Figur 14 at vi har det motsatte tilfellet. Her bruker vi ikke a priori utregningene våre i det hele tatt og sitter igjen med kun målingene. Da får vi mye varians men riktig forventningsverdi. Selv om dette er langt fra optimalt så har vi faktisk et helikopter som flyr, og ikke så altfor ille heller.



Figur 16: Pitchvinkel fra estimat og enkoder på test 5, der diagonalen på  $Q_d = 10^{-5}$

I test 3 fra Tabell 5 ville vi teste systemet med diagonalen på  $Q_d = R_d$ . Her skal altså estimatet og målingene vektes like mye, noe som bør gi et system som flyr bedre enn test 1, og med mindre støy på målingene enn i test 2. Dette kan vi se fra Figur 15 at stemmer ganske bra. En kan se at estimatet ligger omkring encoder-verdien gjennom hele flyvningen, men det er fortsatt relativt stor varians. Systemet ser også ut til å havne litt lenger unna referansene enn test 2 som bare følger målingene.

Til slutt prøvde vi oss frem med forskjellige verdier på diagonalen på  $Q_d$  til vi traff noe som så bra ut, uten å fin tune det altfor mye. Vi endte altså på  $10^{-5}$ . Som vi ser i Figur 16 ga dette svært gode estimer på pitch vinkelen, den følger encoderen veldig fint og har liten varians i målingene.

## 5.4 Konklusjon

Å bruke et Kalmanfilter er klart overlegent til å kun bruke målinger vi får fra en IMU direkte. Det er og tydelig at a priori utregningene ikke har riktig forventningsverdi, så en kombinasjon er helt klart optimalt. Med bare litt tuning er det mulig å oppnå estimer som er nesten like gode som enkoderen.