

**LUCRAREA DE LABORATOR NR. 2**  
**PROIECTAREA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ CU STRUCTURĂ**  
**VARIABILĂ ÎN MOD ALUNECĂTOR PRIN COMUTAȚIE BAZATĂ PE EROAREA DE**  
**REGLARE (SRA-ma-e)**

**A. OBIECTIVELE LUCRĂRII**

1. Însușirea unor procedee de proiectare a SRA-ma-e.
2. Studiul SRA-ma-e proiectate prin simularea pe calculator numeric a comportării.

**B1. CONSIDERAȚII PREGĂTITOARE**

1. Modelul matematic al procesului condus trebuie adus la forma:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) + b u(t) + f(t), \quad (2)$$

unde:

$x_1(t) = e = w(t) - y(t)$  – eroarea de reglare,  
 $u(t)$  – comanda,  
 $a_1, a_2, b = \text{const}$ , cu  $a_2 > 0$ .  
 $f(t)$  – termenul perturbator (care conține  $w, w', v, v'$ , etc.)

2. Se tratează patru variante de structuri de regatoare cu structură variabilă (RG-SV) combinate cu elemente sau regatoare de tip PI (RG-PI).

**I. RG-SVPI** (RG-PI este în aval față de regulatorul cu structură variabilă propriu-zis) – de tip:

*I.a) cvasi-releu:*

$$u(t) = \Psi(t)x_1(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \Psi(\tau)x_1(\tau)d\tau, \quad (3)$$

$$\text{în care } \Psi(t) = \alpha \operatorname{sgn}\{g(t)x_1(t)\}, \alpha = \text{const} > 0; \quad (4)$$

*I.b) releu ideal:*

$$u(t) = U_0 \operatorname{sgn}\{g(t)\} + \frac{1}{T_i} \int_0^t U_0 \operatorname{sgn}\{g(\tau)\}d\tau, \quad (5)$$

cu  $U_0 = \text{const} > 0$ ;

**II. RG-PISV** (RG-PI este situat între elementul de comparație care generează pe  $x_1(t)$  și regulatorul cu structură variabilă propriu-zis) – de tip:

*II. a) cvasi-releu:*

$$u(t) = \Psi(t)x_1(t); \quad (6)$$

*II. b) releu ideal:*

$$u(t) = U_0 \operatorname{sgn}\{g(t)\}. \quad (7)$$

3. Variabila de comutație  $g(t)$  are expresia:

- pentru I.a) și I.b):

$$g(t) = c x_1(t) + x_2(t), \text{ cu } c = \text{const} > 0; \quad (8)$$

- pentru II.a) și II.b):

$$g(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_3(t), \quad (9)$$

cu  $c_1, c_2 = \text{const} > 0$  și  $x_3(t)$  – ieșirea RG-PI (având ca intrare pe  $x_1(t)$ ).

4. Proiectarea regulatorului cu structură variabilă combinat cu RG-PI se face urmărind etapele:

a) se determină  $T_i$  aplicând principiul compensării;

b) se aleg parametrii pozitivi  $c$  (pentru I) și  $c_1, c_2$  (pentru II) ținând seama de performanțele impuse (valori relativ mari ale lui  $c, c_1$ , și  $c_2$  determină răspunsuri rapide) și de relațiile:

- pentru I.a) și I.b):

$$c < a_2, \quad (10)$$

- pentru II.a) și II.b):

$$c_1 + 1 < c_2 a_2; \quad (11)$$

c) se calculează parametrii pozitivi  $\alpha$  și  $U_0$  ținând seama de domeniul dorit de existență a modului alunecător (m.a.) și de următoarele relații:

- pentru I.a):

$$b\alpha < -\frac{|(c^2 - a_2c + a_1)x_1(t) - f(t)|}{|x_1(t)| + \frac{1}{T_i} \int_0^t |x_1(\tau)| d\tau}; \quad (12)$$

- pentru I.b):

$$bU_0 < -\frac{|(c^2 - a_2c + a_1)x_1(t) - f(t)|}{1 + \frac{t}{T_i}}; \quad (13)$$

- pentru II.a):

$$b\alpha|x_1(t)| < -\left|\left(\frac{c_1^2 - c_1c_2a_2 + c_2^2a_1 + c_1}{c_2^2} - \frac{1}{T_ic_2}\right)x_1(t) + \frac{c_1 - c_2a_2 + 1}{c_2^2}x_2(t) - f(t)\right|; \quad (14)$$

- pentru II.b):

$$bU_0 < -\left|\left(\frac{c_1^2 - c_1c_2a_2 + c_2^2a_1 + c_1}{c_2^2} - \frac{1}{T_ic_2}\right)x_1(t) + \frac{c_1 - c_2a_2 + 1}{c_2^2}x_2(t) - f(t)\right|. \quad (15)$$

*Observație 1:* Condițiile (12) ... (15) sunt suficiente dar nu și necesare pentru respectarea condiției de atingere și de existență a m.a. pe hipersuprafața de comutație  $g(t) = 0$ :

$$g(t) \cdot \dot{g}(t) < 0. \quad (16)$$

*Observație 2:* Termenul perturbator  $f(t)$  din modelul (1), (2) și care apare în expresiile (12)–(15) depinde de valorile cunoscute ale referinței și de cele estimate ale perturbației (de obicei necunoscută și nemăsurabilă) și de derivatele acestora de ordin superior. De asemenea, poate include incertitudini de modelare nesurprinse de modelul simplificat de ordin 2 din (1),(2). Pe parcursul scenariului de reglare,  $f(t)$  poate lua valori neprevăzute, caz în care alegerea unei valori constante pentru  $f(t)$  poate duce la nerespectarea temporară a condițiilor suficiente (12)–(15). Pentru a remedia acest aspect, se poate recurge la o majorare a valorii absolute a termenului  $f(t)$  cu o constantă pozitivă care reflectă gradul de incertitudine asupra cunoașterii lui  $f(t)$ , și anume  $|f(t)| < \tilde{f} > 0$ , cu  $\tilde{f}$  aleasă de utilizator de valoare mare însemnând o incertitudine mai mare asupra lui  $f(t)$  și cuprinzând o gamă mai largă de situații practice (diverse forme de variație pentru referințe și perturbații, de diferite amplitudini, diverse incertitudini de modelare: variații parametrice în timp, dinamici nemodelate, etc.). Cu alte cuvinte, în calculul  $\tilde{f}$  nu mai trebuie incluse evaluările dinamice ale referințelor, perturbațiilor și ale derivatelor lor. Atunci, pe baza inegalității triunghiului, condițiile suficiente (12)–(15) mai conservative devin

$$b\alpha < -\frac{|(c^2 - a_2c + a_1)x_1(t)| + \tilde{f}}{|x_1(t)| + \frac{1}{T_i} \int_0^t |x_1(\tau)| d\tau}, \quad (17)$$

$$bU_0 < -\frac{|(c^2 - a_2c + a_1)x_1(t)| + \tilde{f}}{1 + \frac{t}{T_i}}, \quad (18)$$

$$b\alpha|x_1(t)| < -\left|\left(\frac{c_1^2 - c_1c_2a_2 + c_2^2a_1 + c_1}{c_2^2} - \frac{1}{T_ic_2}\right)x_1(t) + \frac{c_1 - c_2a_2 + 1}{c_2^2}x_2(t)\right| - \tilde{f}, \quad (19)$$

$$bU_0 < -\left|\left(\frac{c_1^2 - c_1c_2a_2 + c_2^2a_1 + c_1}{c_2^2} - \frac{1}{T_ic_2}\right)x_1(t) + \frac{c_1 - c_2a_2 + 1}{c_2^2}x_2(t)\right| - \tilde{f}. \quad (20)$$

## B2. ABORDAREA BAZATĂ PE FUNCȚIE LYAPUNOV

Analiza Lyapunov este deosebit de utilă în determinarea stabilității sistemelor dinamice neliniare generale pentru care este dificilă soluționarea analitică. Pentru un sistem nelinier oarecare (autonom)  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ , pentru un punct de echilibru  $\mathbf{x}_e$  care respectă  $\mathbf{0} = f(\mathbf{x}_e)$ , funcția scalară  $V(E(\mathbf{x}))$  (cu  $E(\mathbf{x})$  o expresie dependentă de stare) este o funcție Lyapunov pentru sistemul dinamic dacă

1)  $V(E(\mathbf{x}_e))=0$  și  $V(E(\mathbf{x}))\geq 0$  într-o vecinătate  $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_e\|<B$  a punctului de echilibru. Se spune că  $V$  este local pozitiv (semi)-definită.

2)  $\dot{V}(E(\mathbf{x}))=\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}f(\mathbf{x})\leq 0$ , adică derivata funcției  $V$  în raport cu timpul (explicitată prin regula de derivare a funcțiilor compuse) este o funcție local negativ (semi)-definită.

Se poate concluziona că dacă sistemul dinamic admite o funcție Lyapunov, atunci punctul de echilibru este stabil în sens Lyapunov. Dacă  $\dot{V}(\mathbf{x})<0$  este negativ definită (strict), atunci  $\mathbf{x}_e$  este asimptotic stabil.

În continuare, o construcție potrivită a unei funcții Lyapunov pentru procesul extins cu element comparator din relațiile (1), (2), poate fi utilizată la determinarea unui regulator (a unei expresii a comenzii funcție de stare) concomitent cu garantarea stabilității sistemului de reglare rezultat, în ansamblu.

Fie  $V(g(\mathbf{x}=[x_1 \ x_2]^T))=\frac{1}{2}g^2(\mathbf{x})>0$  o funcție Lyapunov și modelul pe stare al procesului extins cu element comparator conform relațiilor (1), (2).

Atunci  $\dot{V}(g(\mathbf{x}))=g(\mathbf{x})\dot{g}(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})[(c-a_2)x_2-a_1x_1+bu+f]$  iar pentru a asigura condiția de atingere este suficient să fie asigurat că  $\dot{V}<0$ , sau, pentru atingerea dreptei de comutație în timp finit,  $\dot{V}<-\varepsilon, \varepsilon>0$ . Pentru a asigura  $\dot{V}<0$ , cele două condiții posibile sunt:

$$\begin{aligned} 1) g>0, \dot{g}<0 &\Leftrightarrow bu < a_1x_1 - (c-a_2)x_2 - f, \\ 2) g<0, \dot{g}>0 &\Leftrightarrow bu > a_1x_1 - (c-a_2)x_2 - f. \end{aligned} \quad (21)$$

Presupunând  $b<0$  (pentru  $b>0$  calculele sunt imediate și urmăresc același tipar), condițiile (21) exprimă comanda în forma

$$\begin{aligned} 1) g>0, \dot{g}<0 &\Leftrightarrow u > -\frac{a_1x_1 - (c-a_2)x_2 - f}{|b|}, \\ 2) g<0, \dot{g}>0 &\Leftrightarrow u < -\frac{a_1x_1 - (c-a_2)x_2 - f}{|b|}, \end{aligned} \quad (22)$$

pentru care condiții suficiente de realizare sunt

$$\begin{aligned} 1) g>0, \dot{g}<0 &\Leftrightarrow u > \frac{|a_1x_1 - (c-a_2)x_2 - f|}{|b|}, \\ 2) g<0, \dot{g}>0 &\Leftrightarrow u < -\frac{|a_1x_1 - (c-a_2)x_2 - f|}{|b|}, \end{aligned} \quad (23)$$

iar folosind majorarea  $|f(t)|<\tilde{f}>0$  (Observația 2), condițiile și mai conservative devin

$$\begin{aligned} 1) g>0, \dot{g}<0 &\Leftrightarrow u = \frac{|a_1x_1 - (c-a_2)x_2| + \tilde{f}}{|b|} + \delta, \\ 2) g<0, \dot{g}>0 &\Leftrightarrow u = -\frac{|a_1x_1 - (c-a_2)x_2| + \tilde{f}}{|b|} - \delta, \end{aligned} \quad (24)$$

cu  $\delta>0$  o constantă mică aleasă de utilizator. Condițiile (24) pot fi reunite în legea de comandă

$$u(t) = \left( \frac{|a_1x_1(t) - (c-a_2)x_2(t)| + \tilde{f}}{|b|} + \delta \right) \text{sgn}(g(\mathbf{x}(t))). \quad (25)$$

Figura L2-1 de mai jos ilustrează o implementare sliding mode folosind abordarea funcției Lyapunov pentru procesul din Fig. L2-2, pentru referința  $20\sigma(t)$  și perturbația  $-12\sigma(t-0.6)$ . Pentru comparație, este simulat și comportamentul sistemului de reglare cu un regulator PI proiectat cu criteriul modulului optim (CM-2). Implementarea folosește un bloc de tip Embedded Function (sau Matlab Function în versiuni mai noi de Matlab) care implementează (25) pe baza mărimilor  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  ca argumente ale funcției tratate ca și intrări ale blocului de tip Embedded, respectiv pe baza celorlalți parametri (constante) care sunt de asemenea argumente ale funcției însă trebuie setate de tip *Parameter* pentru a fi preluate în mod corespunzător din workspace-ul de bază al Matlab.

Pentru o selecție potrivită a parametrilor regulatorului sliding mode Lyapunov, performanțele de reglare sunt mai bune decât în cazul SRA cu regulator PI în ceea ce privește viteza de răspuns în raport cu modificarea referinței, respectiv cu cea a perturbației, efectele negative fiind însă chattering-ul la nivelul

comenzii și neasigurarea erorii de reglare nule în regim staționar constant (de verificat pe osciloscoapele digitale).

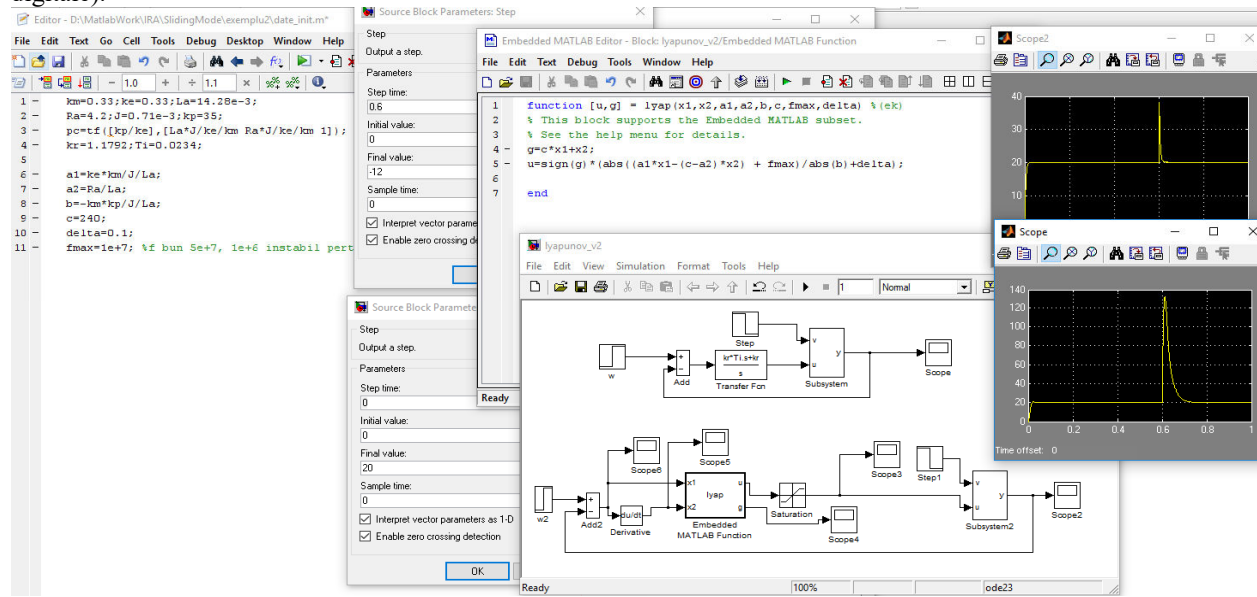


Fig. L2-1. Relativă la implementarea regulatorului sliding-mode în abordarea bazată pe funcția Lyapunov

### B3. ABORDAREA BAZATĂ PE LEGEA DE ATINGERE

Considerăm procesul condus nelinier de ordinul doi exprimabil în forma mai generală

$$\ddot{y}(t) = \hat{\varphi}(y(t), \dot{y}(t)) + b(y(t), \dot{y}(t))u(t). \quad (26)$$

Acest model nu mai necesită transformarea în reprezentare pe stare în eroare de urmărire precum modelul (1),(2) și nici nu depinde în mod explicit de perturbație. Funcția  $\hat{\varphi}(\bullet, \bullet)$  ilustrează faptul că se lucrează cu o aproximare a funcției  $\varphi(\bullet, \bullet)$  reale. Deci  $\varphi(\bullet, \bullet)$  și  $b(y, \dot{y})$  poate conține în plus dinamici nemodelate, incertitudini, parametrice, perturbații, etc.

Fie dreapta de comutație aleasă de forma

$$g = ce + \dot{e}, \quad (27)$$

cu  $e = y - y_d$ , și o lege de atingere cu viteză de variație constantă de forma

$$\dot{g} = -k \operatorname{sgn}(g), \quad (28)$$

cu  $k > 0$ . Se calculează, prin integrarea ultimei relații, timpul de atingere egal cu  $t_a = |g(0)|/k$ .

Derivând (27) și înlocuind în (28) folosind (26), rezultă legea de comandă

$$u = u_{eq} + u_{com} = \underbrace{b^{-1}(\ddot{y}_d - c\dot{e} - \hat{\varphi})}_{u_{eq}} - b^{-1}k \operatorname{sgn}(g). \quad (29)$$

Poate fi remarcat compromisul alegerii valorii  $k$ : o valoare mare scade durata fazei de atingere însă amplifică chattering-ul prin componenta de comutație  $u_{com}$  a comenzii.

Schema cu regulator sliding mode în această variantă bazată pe legea de atingere nu adresează problema incertitudinilor de modelare și a perturbațiilor structurale, parametrice sau exogene. Fie aceste incertitudini și perturbații grupate în estimata incertă  $\hat{\varphi}(y(t), \dot{y}(t))$  a termenului  $\varphi(y(t), \dot{y}(t))$  și fie eroarea maximă de estimare a lui  $\varphi(y(t), \dot{y}(t))$  dată de

$$\tilde{f} = \sup_t |\hat{\varphi}(t) - \varphi(t)|. \quad (30)$$

Cu legea de comandă

$$u = \underbrace{b^{-1}(\ddot{y}_d - c\dot{e} - \hat{\varphi})}_{u_{eq}} - b^{-1}k \operatorname{sgn}(g), \quad (31)$$

prin înlocuirea (31) în (26), expresia legii de atingere capătă forma

$$\dot{g} = (\hat{\varphi} - \varphi) - k \operatorname{sgn}(g), \quad (32)$$

pentru care poate fi calculată o valoare conservativă pentru  $k$  care asigură  $g \rightarrow 0$  și anume

$$k > \tilde{f}, \forall t. \quad (33)$$

De remarcat în această abordare este faptul că o incertitudine mare reflectată în valori mari ale lui  $\tilde{f}$  duce la o valoare  $k$  mărită care rezultă din nou în comenzi agresive datorită componentei de comutație a comenzii în (31). Cu alte cuvinte, se recomandă folosirea unor modele cât mai complete/detaliat în proiectare.

Exemplificând construcția regulatorului în mod alunecător în varianta bazată pe legea de atingere pentru procesul din Fig. L2-1, acesta poate fi adus succesiv de la expresia din domeniul operațional la cel din timp continuu prin relațiile

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{0.625}{s(1+0.25s)} U(s) - \frac{12.5}{s} V(s) \Big| \times s(1+0.25s), \\ 0.25s^2 Y(s) + sY(s) &= 0.625U(s) - 3.125sV(s) - 12.5V(s) \Big| L^{-1}(\cdot) \\ \ddot{y}(t) &= -4\dot{y}(t) + 2.5u(t) - 12.5\dot{v}(t) - 50v(t). \end{aligned} \quad (34)$$

Din ultima relație de mai sus, se poate identifica direct  $b(y, \dot{y}) = 2.5$  în (26). Pe de altă parte, termenul  $\hat{\phi}(y(t), \dot{y}(t))$  din (26) poate fi ales de forma  $\hat{\phi}(y(t), \dot{y}(t)) = -4\dot{y}(t)$  dacă perturbația este nemăsurabilă (sau ne-observabilă) sau de forma  $\hat{\phi}(y(t), \dot{y}(t)) = -4\dot{y}(t) - 12.5\dot{v}(t) - 50v(t)$  în caz contrar. În oricare din situații, termenul constatat  $\tilde{f} = \sup_t |\hat{\phi}(t) - \phi(t)|$  ales de către utilizator va surprinde toate incertitudinile de modelare și/sau termenii perturbatori, adică  $\tilde{f}$  va fi cu atât mai mare cu cât se crede că  $\hat{\phi}$  deviază de la valoarea reală  $\phi$  (adică cu cât  $\hat{\phi}$  este mai incert).

Ultima relație din (34) poate fi adusă la forma ecuațiilor (1), (2) prin substituții repetate ale expresiilor  $e = w - y = x_1, \dot{e} = \dot{w} - \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$ , conducând la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_2 - 2.5u + f, f = \ddot{w} + 4\dot{w} + 12.5\dot{v} + 50v, \end{aligned} \quad (35)$$

care poate fi supusă ulterior oricăreia dintre metode de proiectare anterioare care utilizează (35).

## C. TEMATICA LUCRĂRII

1. Pentru cele două procese având schemele bloc informaționale simplificate prezentate în fig. L2-2 și fig. L2-3 să se proiecteze structuri de RG-SVPI și RG-PISV (în cele patru variante); performanțele sunt impuse de către proiectant.

2. Să se simuleze pe calculator numeric comportarea SRA-ma-e proiectate în raport cu modificările intrărilor de referință și de perturbație urmărind inclusiv efectele alegerii parametrilor  $\alpha$ ,  $U_0$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  precum și efectele modificării parametrilor procesului condus asupra performanțelor realizabile de SRA-ma-e.

Valorile parametrilor PC sunt următoarele:

- procesul din fig.L2-1:  $R_a = 4.2 \Omega$ ,  $L_a = 14.28 \text{ mH}$ ,  $k_e = k_m = 0.33$ ,  $J = 0.71 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $k_p = 35 \text{ V/V}$ ;
- procesul din fig.L2-2:  $g_0 = 0.005$ ;  $T_{i1} = 0.0025 \text{ sec}$ ;  $T_{i2} = 0.08 \text{ sec}$ ,  $k = 20$ .

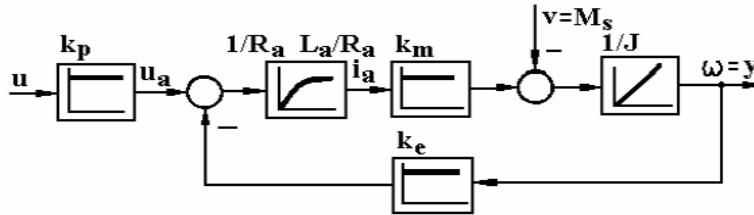


Fig.L2-2.

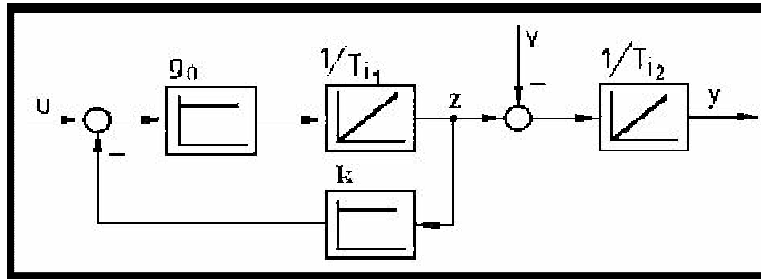


Fig.L2-3.

3. Se reia implementarea și simularea regulatorului sliding-mode în abordarea bazată pe funcția Lyapunov în comparație cu regulatorul PI pentru primul proces, se urmărește efectul alegerii diverșilor parametri asupra performanțelor și se notează observațiile.

4. Pentru primul proces condus, se cere implementarea soluției de reglare sliding mode bazată pe metoda legii de atingere, pentru comparații cu soluțiile de reglare de la punctul 3 anterior. Se înregistrează rezultatele de simulare și observațiile privind efectul alegerii parametrilor de acordare asupra performanțelor.

#### D. CONȚINUTUL REFERATULUI

- aducerea modelelor matematice ale proceselor conduse la forma prezentată în relațiile (1) și (2);
- calcule de proiectare a celor patru variante de regatoare cu structură variabilă;
- rezultate de simulare pe calculator numeric a comportării SRA-ma-e proiectate în raport cu modificările intrărilor de referință și de perturbație urmărind inclusiv efectele alegerii parametrilor  $\alpha$ ,  $U_0$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  precum și efectele modificării parametrilor procesului condus asupra performanțelor (de regim dinamic și staționar constant) realizabile de SRA-ma-e;
- programe Matlab și Simulink;
- studiu comparativ însoțit de comentarii privind performanțele realizate de cele patru SRA-ma-e;
- comentarii privind efectul alegerii parametrilor de acordare ai regatoarelor cu structură variabilă asupra performanțelor SRA-ma-e.

#### E. BIBLIOGRAFIE

- Preitl, St., Precup, R.-E., Preitl, Zs.: Structuri și algoritmi pentru conducerea automată a proceselor, vol. 1, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2009.
- Preitl, St., Precup, R.-E.: Tehnici de proiectare a structurilor de reglare automată. Aplicații, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2008.
- Preitl, St., Precup, R.-E.: Regatoare pentru servosisteme. Metode de proiectare, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2007.
- Preitl, St., Precup, R.-E.: Elemente de reglare automată. Aplicații la sistemele de reglare automată a excitației și vitezei generatoarelor sincrone, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2005.
- Preitl, St., Precup, R.-E.: Introducere în ingineria reglării automate, Editura Politehnica, Timișoara, 2001.
- Preitl, St., Precup, R.-E.: Automatizări, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2001.