LUCRAREA DE LABORATOR 6. PARTEA I. MODELE MATEMATICE CU TIMP DISCRET ŞI PREDICTORI

A. OBIECTIVELE LUCRĂRII

1. Obținerea modelelor matematice cu timp discret pentru diverse clase de procese conduse şi perturbații.
2. Deducerea predictorilor de diferite ordine destinate unor clase de procese conduse.
3. Determinarea formelor matriceale pentru predictorii destinați unor clase de procese conduse.

B. CONSIDERAȚII PREGĂTITOARE

Pentru atingerea obiectivelor propuse va fi prezentat un exemplu concret de calcul (Lazăr, 1999). Se considerã sistemul cu douã rezervoare din fig. L6.1, proces condus frecvent întâlnit în industria chimicã. Presupunând cã debitul dintre rezervoare este proporțional cu diferența nivelurilor în rezervoare şi aplicând principiul conservării masei (a volumului, dacă fluidul este incompresibil), sistemul este descris de următoarele ecuații primare simplificate:

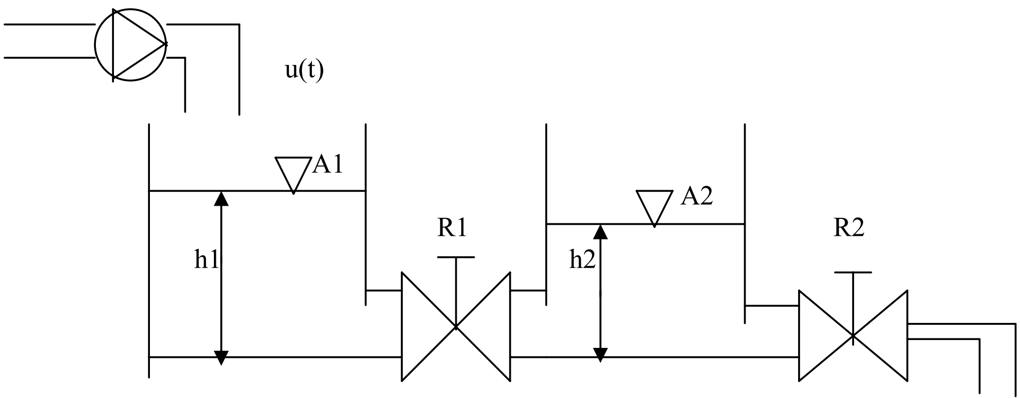

Fig. L6.1. Schema bloc funcțională simplificată a unui sistem cu două rezervoare.

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{R_1}(h_2 - h_1)u(t) \ ,$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = -\frac{1}{R_1}(h_2 - h_1) - \frac{1}{R_1} h_2 \ .$$

Considerând următoarele valori ale parametrilor procesului condus: $A_1 = A_2 = 1$, $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1/3$, se cere:

A) sã se deducă funcția de transfer (f.d.t.) a procesului condus având ca mãrime de intrare debitul u şi ca mãrime de ieşire nivelul $h_2 = y$ din rezervorul al doilea, $G_f(s) = \frac{H_2(s)}{U(s)}$;

B) sã se determine modelul ARX asociat f.d.t. determinate la punctul A), pentru o perioadã de esantionare T = 0,1 sec;

C) sã se gãseascã predictorul de ordinul 3 asociat modelului de la punctul B);

D) sã se determine forma matricealã a predictorului considerându-se orizontul de predicție p = 3.

Soluție:

A) Aplicând transformarea Laplace în condiții inițiale nule ecuațiilor primare care descriu dinamica sistemului, se obțin relatiil:

$$\begin{cases} sH_1(s) = 2H_2(s) - 2H_1(s) + u(s) \\ sH_2(s) = -5H_2(s) + 2H_1(s) \end{cases} \Rightarrow H_1(s) = \frac{2}{s+2} H_2(s) + \frac{1}{s+2} U(s) \ ,$$

care conduc imediat la f.d.t. cãutatã:

$$G_f(s) = \frac{2}{s^2+7s+6} = \frac{H_2(s)}{U(s)} \; .$$

B) Modelul ARX al procesului condus este de forma următoare:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) \; ,$$

care rezultă din f.d.t. $G_f(z^{-1})$ obținută din $G_f(s)$ prin discretizarea ca realizare invariantă la semnal treaptă în prezența unui extrapolator de ordinul zero (zero-order hold, ZOH):

$$G_f(z^{-1}) = \frac{0.008z^{-1} + 0.0063z^{-2}}{1 - 1.4536z^{-1} + 0.4966z^{-2}} \, ,$$

de unde rezultă imediat relația

$$(1 - 1.4536q^{-1} + 0.4966q^{-2})y(k) = (0.008 + 0.0063q^{-1})u(k-1) \; ,$$

deci polinoamele A şi B au expresiile

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - 1.4536q^{-1} + 0.4966q^{-2} \rightarrow n_A = 2 \\ B(q^{-1}) &= 0.008 + 0.0063q^{-1} \rightarrow n_B = 1 \end{aligned} \; .$$

C) Pentru calculul predictorului de ordinul 3 va fi folosit algoritmul prezentat la curs.

C.1. Pentru început vor fi calculate polinoamele E_3 şi F_3 rezolvând ecuația diofantică:

$$1 = A\,E_3 + q^{-3}F_3 \; ,$$

în care:

$$E_3 = e_0 + e_1q^{-1} + e_2q^{-2} \; , \; n_{E_3} = i - 1 = 3 - 1 = 2 \; ,$$

$$F_3 = f_0 + f_1q^{-1} \; , \; n_{F_3} = n_A - 1 = 2 - 1 = 1 \; .$$

Rescriind ecuația diofantică sub forma

$$1 = (1 - 1.4536q^{-1} + 0.4966q^{-2})(e_0 + e_1q^{-1} + e_2q^{-2}) + q^{-3}(f_0 + f_1q^{-1}) \; ,$$

sau

$$\begin{aligned} 1 &= e_0 + (e_1 - 1.4536e_0)q^{-1} + (e_2 - 1.4536e_1 + 0.4966e_0)q^{-2} + \\ &+ (-1.4536e_2 + 0.4966e_1 + f_0)q^{-3} + (0.4966e_2 + f_1)q^{-4} \end{aligned} \; ,$$

se obțin valorile coeficienților celor două polinoame menționate:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_1 &= 1.4536 \\ e_2 &= 1.6164 \\ f_0 &= 1.6277 \\ f_1 &= -0.8027 \end{aligned}$$

, care conduc la următoarele expresii pentru E_3 şi F_3:

$$\begin{aligned} E_3(q^{-1}) &= 1 + 1.4536q^{-1} + 1.6164q^{-2} \\ F_3(q^{-1}) &= 1.6277 - 0.8027q^{-1} \end{aligned} \; .$$

C.2. Al doilea pas al algoritmului prevede determinarea polinoamelor G_3 şi H_3 utilizând ecuația diofantică

$$E_3B = G_3 + q^{-3}H_3 \; , \; \text{cu:}$$

$$G_3(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + g_2q^{-2} \; , \; n_{G_3} = i - 1 = 3 - 1 = 2 \; ,$$

$$H_3(q^{-1}) = h_0 \; , \; n_{H_3} = n_B - 1 = 1 - 1 = 0 \; .$$

Calculând produsul E_3B, rezultă

$$\begin{aligned} E_3B &= (1 + 1.4536q^{-1} + 1.6164q^{-2})(0.008 + 0.0063q^{-1}) = \\ &= 0.008 + 0.0179q^{-1} + 0.0221q^{-2} + 0.0102q^{-3} \end{aligned} \; ,$$

primii trei coeficienți fiind cei ai polinomului G_3, iar ultimul cel al polinomului H_3:

$$g_0 = 0.008$$
$$g_1 = 0.0179$$
$$g_2 = 0.0221 \quad \text{, rezultând}$$
$$h_0 = 0.0102$$
$$G_3(q^{-1}) = 0.008 + 0.0179q^{-1} + 0.0221q^{-2} \ ,$$
$$H_3(q^{-1}) = 0.0102 \ .$$

C.3. Predictorul de ordinul 3 se obține în pasul al treilea folosind relația (cunoscută de la curs)

$$\hat{y}(k+3) = F_3 y(k) + H_3 u(k-1) + G_3 u(k+2) \ ,$$

iar prin înlocuirea polinoamelor F_3, H_3 şi G_3 cu expresiile gãsite, expresia acestui predictor va fi următoarea:

$$\hat{y}(k+3) = (1.6277 - 0.8027q^{-1})y(k) + 0.0102u(k-1) + \\ + (0.008 - 0.0179q^{-1} + 0.0221q^{-2})u(k+2) \ .$$

Forma matriceală a predictorului pentru un orizont de predictie p = 3 este:

$$\hat{y} = \hat{P}\hat{u} + \hat{\Psi}\hat{s} \ ,$$

unde:

$$\hat{y} = [\hat{y}(k+1), \hat{y}(k+2), \hat{y}(k+3)]^T \ ,$$
$$\hat{u} = [u(k), u(k+1), u(k+2)]^T \ ,$$
$$\hat{s} = [y(k), y(k-1), u(k-1)]^T \ ,$$

iar matricele $\hat{P}$ şi $\hat{\Psi}$ se construiesc utilizând relațiile de la curs.

Rezultã necesitatea determinãrii predictorilor de ordinul *i*, *i* = 1 … 3. Pentru gãsirea polinoamelor E_i şi F_i se vor folosi relațiile din curs, iar pentru polinoamele G_i şi H_i se va folosi ecuația diofanticã recomandată la curs sau în (Lazăr, 1999).

D) *Calculul polinoamelor E_1, F_1, H_1 şi G_1 pentru predictorul de ordinul 1.*

Polinoamele E_1 şi F_1 sunt de forma:

$$E_1 = e_{1,0} \ , \ n_{E_1} = i - 1 = 0 \ ,$$
$$F_1 = f_{1,0} + f_{1,1}q^{-1} \ , \ n_{F_1} = n_A - 1 = 1 \ ,$$

şi pot fi determinate folosind ecuația diofanticã:

$$1 = A\,E_1 + q^{-1}F_1 \ ,$$

sau formulele:

$$\begin{cases} e_{1,0} = 1 \\ f_{1,0} = -e_{1,0}a_1 = 1.4536 \\ f_{1,1} = -e_{1,0}a_2 = -0.4966 \end{cases}$$
$$E_1 = 1$$
$$F_1 = 1.4536 - 0.4966q^{-1} \ .$$

Pentru polinoamele H_1 şi G_1, prin rezolvarea ecuației diofantice:

$$E_1 B = G_1 + q^{-1}H_1 \ , \ \text{cu:}$$
$$G_1 = g_{1,0} \ , \ n_{G_1} = i - 1 = 0 \ ,$$
$$H_1 = h_{1,0} \ , \ n_{H_1} = i - 1 = 0 \ ,$$

se obține:

$$0.008 + 0.0063q^{-1} = g_{1,0} + h_{1,0}q^{-1}$$

$$\begin{cases} g_{1,0} = 0.008 \\ h_{1,0} = 0.0063 \end{cases} .$$

$$G_1 = 0.0008$$
$$H_1 = 0.0063$$

Calculul polinoamelor E_2, F_2, H_2 şi G_2 pentru predictorul de ordinul 2.

Pentru i = 2, polinoamele E_2 şi F_2 devin:

$$E_2 = e_{2,0} + e_{2,1}q^{-1} \ , \ \ n_{E_1} = i - 1 = 1 \ ,$$
$$F_2 = f_{2,0} + f_{2,1}q^{-1} \ , \ n_{F_2} = n_A - 1 = 1,$$

iar coeficienţii acestora se pot calcula cu formulele

$$\begin{aligned} e_{2,0} &= 1 \\ e_{2,1} &= -e_{2,0}a_1 = 1.4536 \\ f_{2,0} &= -e_{2,0}a_2 - e_{2,1}a_1 = 1.6164 \\ f_{2,1} &= -e_{2,0}a_3 - e_{2,1}a_2 = -1.4536 \cdot 0.4966 = -0.7219 \end{aligned} ,$$

rezultând:

$$E_2 = 1 + 1.4536q^{-1} \ ,$$
$$F_2 = 1.6164 - 0.7219q^{-1} \ .$$

Gãsirea expresiilor polinoamelor G_2 şi H_2 se face rezolvând următoarea ecuaţie diofantică:

$$E_2 B = G_2 + q^{-2}H_2 \ , \ \text{cu:}$$
$$G_2 = g_{2,0} + g_{2,1}q^{-1} \ , \ n_{G_2} = i - 1 = 1 \ ,$$
$$H_2 = h_{2,0} \ , \ \ n_{H_2} = n_B - 1 = 0 \ .$$

Ecuaţia este particularizată sub forma:

$$\begin{aligned} &(1 + 1.4536q^{-1})(0.008 + 0.0063q^{-1}) = g_{2,0} + g_{2,1}q^{-1} + h_{2,0}q^{-2} \\ &0.008 + 0.0063q^{-1} + 0.0011q^{-1} + 100091q^{-2} \\ &0.008 + 0.0179q^{-1} + 0.0092q^{-2} = g_{2,0} + g_{2,1}q^{-1} + h_{2,0}q^{-2} \end{aligned} ,$$

obţinându-se coeficienţii:

$$\begin{cases} g_{2,0} = 0.008 \\ g_{2,1} = 0.0179 \\ h_{2,0} = 0.0092 \end{cases} .$$

În final rezultă:

$$\begin{aligned} G_2 &= 0.008 + 0.0179q^{-1} \\ H_2 &= 0.0092 \end{aligned} .$$

Calculul polinoamelor E_3, F_3, H_3 şi G_3 pentru predictorul de ordinul 3.

Aceste polinoame au fost obţinute la punctul C) al exemplului şi sunt următoarele:

$$\begin{aligned} E_3 &= 1 + 1.4536q^{-1} + 1.6164q^{-2} \\ F_3 &= 1.6277 + 0.8027q^{-1} \\ G_3 &= 0.008 + 0.0179q^{-1} + 0.00221q^{-2} \\ H_3 &= 0.0102 \end{aligned} .$$

Cunoscând coeficienţii polinoamelor G_i, F_i şi H_i, $i = 1 \ldots 3$, se pot construi matricele $\widehat{P}$ şi $\widehat{\Psi}$:

$$\widehat{P} = \begin{bmatrix} g_{1,0} & 0 & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,0} & 0 \\ g_{3,2} & g_{3,1} & g_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.008 & 0 & 0 \\ 0.0179 & 0.008 & 0 \\ 0.0221 & 0.0179 & 0.008 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Psi} = \begin{bmatrix} f_{1,0} & f_{1,1} & h_{1,0} \\ f_{2,0} & f_{2,1} & h_{2,0} \\ f_{3,0} & f_{3,1} & h_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4536 & -0.4966 & 0.0063 \\ 1.6164 & -0.7219 & 0.0092 \\ 1.6277 & -0.8027 & 0.0102 \end{bmatrix},$$

şi astfel se obţine forma matriceală a predictorului:

$$\begin{bmatrix} \widehat{y}(k+1) \\ \widehat{y}(k+2) \\ \widehat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.008 & 0 & 0 \\ 0.0179 & 0.008 & 0 \\ 0.0221 & 0.0179 & 0.008 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+!) \\ u(k+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.4536 & -0.4966 & 0.0063 \\ 1.6164 & -0.7219 & 0.0092 \\ 1.6277 & -0.8027 & 0.0102 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \end{bmatrix}$$

C. TEMATICA LUCRĂRII:

Se consideră următoarele procese conduse de ordinul al doilea, des întâlnite în practică şi recomandate în literatură pentru testarea regulatoarelor de tip PI / PID (benchmarks) (Preitl şi Precup, 2001):

1.) $H_{PC}(s) = \dfrac{1}{(1+s)^n}$, $n \in \{1, 2, 3\}$ (situația de bază: n = 2);

2.) $H_{PC}(s) = \dfrac{1}{(1+s)(1+\alpha\, s)}$, $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$, $\alpha_n = 0{,}2$;

3.) $H_{PC}(s) = k_{PC}\,\dfrac{1-T_1 s}{(1+T_2 s)(\alpha_3 + T_3 s)}$, $k_{PCn} = 1$, $T_{1n} = 2$ $T_{2n} = 2.2$, $\alpha_{3n} = 1$, $T_{3n} = 6.8$,

$k_{PC} \in [0.75, 1.25]$, $\alpha_3 \in [0, 1]$, $T_1 \in [1.7, 2.7]$, $T_{2n} \in [0.8, 1.4]$;

4.)

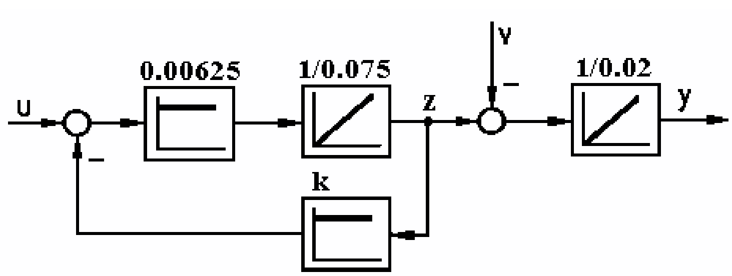

Fig. L6.2.

k – variabil (alegerea valorii sale rămâne la latitudinea proiectantului);

5.)

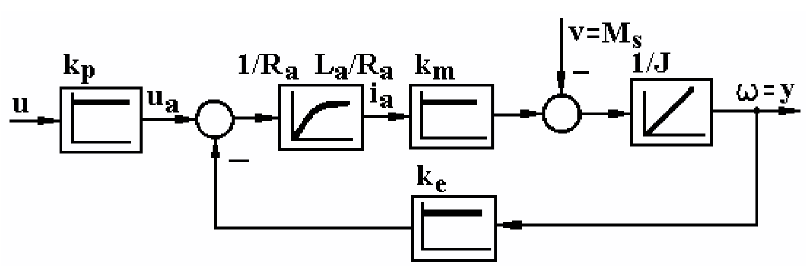

Fig. L6.3.

$k_e = 35$ V/V, $R_a = 4.2\ \Omega$, $L_a = 14.28$ mH, $k_e = k_m = 0.33$, $J = 0.71 \cdot 10^{-3}$ kg·m^2.

Pentru aceste cinci procese se cere rezolvarea punctelor A) … D) menționate în paragraful anterior, care conduc la obținerea modelor ARX şi a predictorilor asociați acestora.

Remarcă: Punctul A) este deja rezolvat pentru procesele 1.) … 3.).

LUCRAREA DE LABORATOR 6. PARTEA A II-A. PROIECTAREA ALGORITMILOR DE REGLARE AUTOMATĂ CU PREDICȚIE DE MINIMĂ VARIANȚĂ BAZAȚI PE MINIMIZAREA UNOR FUNCȚII OBIECTIV PĂTRATICE PE UN PAS

A. OBIECTIVELE LUCRĂRII

1. Cunoaşterea expresiilor uzuale ale funcțiilor obiectiv pătratice pe un pas bazate pe eroarea de urmărire şi, eventual, pe comandă.
2. Aplicarea metodologiei de proiectare a algoritmilor de reglare automată cu predicție de minimă varianță bazate pe minimizarea unor funcții obiectiv pătratice pe un pas destinate conducerii diverselor clase de procese.
3. Deducerea formei standard (RST, cu două grade de libertate, 2-DOF) a sistemului de reglare automată (SRA) cu predicție.
4. Studiul efectului modificării valorilor coeficienților de ponderare din funcțiile obiectiv asupra performanțelor SRA proiectate, inclusiv asupra valorii de regim staționar constant a erorii de reglare.

B. CONSIDERAȚII PREGĂTITOARE

Pentru atingerea obiectivelor propuse, va fi prezentat un exemplu concret de calcul (Lazăr, 1999). Se considerã că procesul condus este caracterizat prin următorul model ARX (a se vedea şi exemplul din partea I a lucrării):

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + e(k) \ ,$$

în care polinoamele au expresiile:

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.4536q^{-1} + 0.4966q^{-2} \rightarrow n_A = 2, a_1 = -1.4536, a_2 = 0.4966$$
$$B(q^{-1}) = 0.008 + 0.0063q^{-1} \rightarrow n_B = 1, b_0 = 0.008, b_1 = 0.0063 \ .$$

Se cere:

A) să se proiecteze algoritmul de reglare automată cu predicție (regulatorul cu predicție) obținut prin minimizarea următoarei funcții obiectiv:

$$J = \frac{1}{2}[\hat{y}(k+1) - r(k+1)]^2 + \frac{\lambda}{2}u^2(k) \ ,$$

în care λ≥0 reprezintă un coeficient de ponderare;

B) să se reprezinte structura standard de reglare automată (RST) care conține acest regulator;

C) să se calculeze valoarea de regim staționar constant a erorii de reglare (eroarea staționară) în condițiile unei referințe de tip treaptă unitate, r(k) = 1, k ≥ 0.

Soluție:

A) Pornind de la modelul matematic al procesului condus, rezultã următorul predictor de minimã varianță de ordinul 1:

$$\hat{y}(k+1) = Bu(k) + q(1-A)y(k)$$

Înlocuind expresia acestui predictor în funcția obiectiv, se obține:

$$J = \frac{1}{2}\left[Bu(k) + q(1-A)y(k) - r(k+1)\right]^2 + \frac{\lambda}{2}u^2(k) \ .$$

Prin minimizarea acestei funcții obiectiv în raport cu u(k) se gãşeste expresia legii de reglare:

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(k) = \frac{b_0}{b_0 B + \lambda} r(k+1) - \frac{q b_0 (1-A)}{b_0 B + \lambda} y(k)$$

şi astfel regulatorul cu predictie va obține forma:

$$u(k) = \frac{0.008}{0.008\left(0.008 + 0.0063q^{-1}\right) + \lambda} r(k+1) - \frac{0.008\left(1.4536 + 0.4966q^{-1}\right)}{0.008\left(0.008 + 0.0063q^{-1}\right) + \lambda} y(k) \ .$$

B) Pentru a se obține forma standard, se calculeazã polinoamele:

$$R = \frac{B+\lambda}{b_0+\lambda} = 0.008 + 0.0063q^{-1} + \lambda = 1 + \frac{0.0063}{0.008+\lambda}q^{-1}$$

$$S = \frac{qb_0(1-A)}{b_0+\lambda} = \frac{0.008\left(-1.4536+0.4966q^{-1}\right)}{0.008+\lambda} = \frac{0.0116}{0.008+\lambda} + \frac{0.0039}{0.008+\lambda}q^{-1} \quad .$$

$$T^* = \frac{b_0 c}{b_0+\lambda} = \frac{0.008}{0.008+\lambda}$$

Schema bloc informațională standard a structurii de reglare automată cu predicție rezultă conform fig. L6.4.

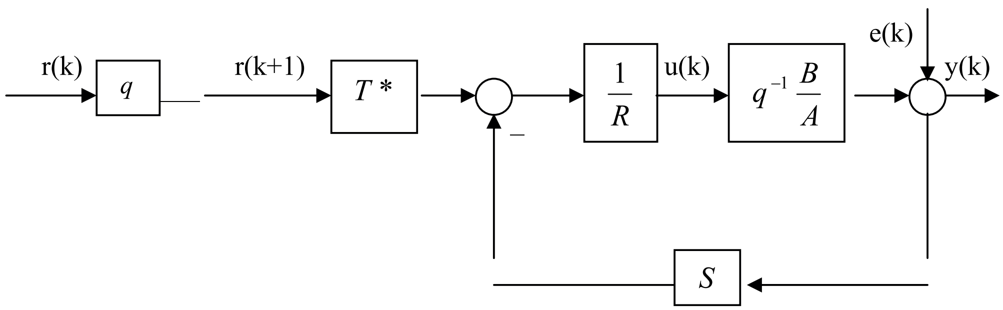

Fig. L6.4.

C) Calculul valorii de regim staționar constant a erorii de reglare se face aplicând următoarea formulă:

$$\varepsilon_s = r(k+1) - y_s = \frac{\lambda}{\lambda + \frac{B(1)}{A(1)}b_0} r(k+1) = \frac{\lambda}{\lambda + \frac{0.0143}{0.043}0.008} = \frac{\lambda}{\lambda + 0.0026} \quad .$$

C. TEMATICA LUCRĂRII

1. Se consideră aceleaşi procese conduse de tip benchmark acceptate în partea I a lucrării. Pentru cele cinci procese se cere rezolvarea punctelor A) … C) menționate în paragraful anterior, care permit:

- proiectarea algoritmului de reglare automată cu predicție;
- reprezentarea structurii standard de reglare automată (RST);
- calculul valorii de regim staționar constant a erorii de reglare.

2. Pentru fiecare proces se cere simularea comportării SRA proiectate în mediul Matlab & Simulink în condițiile aplicării unui semnal de tip treaptă unitate pe intrarea de referință şi ale aplicării, după ce SRA intră în regim staționar constant, a unei perturbații aditive pe ieşire de tip treaptă unitate.

3. Pentru fiecare proces se cere efectuarea unui studiu – pe baza simulării comportării SRA proiectate în mediul Matlab & Simulink conform scenariului de la punctul 2. – privind efectul modificării valorilor coeficienților de ponderare $\lambda \geq 0$ din funcțiile obiectiv asupra performanțelor SRA proiectate (exprimate sub forma indicatorilor de calitate empirici), inclusiv asupra valorii de regim staționar constant a erorii de reglare.

D. CONȚINUTUL REFERATULUI

- calcule conform tematicii din cele două părți ale lucrării;
- rezultate de simulare pe calculator numeric a comportării SRA proiectate în raport cu modificările intrărilor de referință şi de perturbație urmărind inclusiv efectele modificării coeficienților dfe ponderare λ asupra performanțelor (de regim dinamic şi staționar constant) realizabile de SRA;
- programe Matlab şi Simulink;
- comentarii privind efectul alegerii coeficienților de ponderare λ asupra performanțelor SRA ;

- important ! se pregăteşte un singur referat pentru întreaga lucrare, nu se pregătesc 2 referate corespunzătoare celor 2 părți ale lucrării.

E. BIBLIOGRAFIE

Lazăr, C.: Conducerea predictivă a proceselor cu model cunoscut, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1999.

Preitl, S. şi R.-E. Precup: Introducere în ingineria reglării automate, Editura Politehnica, Timişoara, 2001.

Partea a III-a. Folosirea predictorilor de ordin mai mare cu funcții obiectiv pe mai mulți pași

Exemplu de calcul al predictorului de ordin mai mare decât unu și folosirea acestuia într-o problemă de urmărire a traiectoriei de referință rezolvată în cadru MPC cu o funcție obiectiv pe mai mulți pași.
Fie predictorul de ordinul 3 al sistemului cu două rezervoare din *Partea I.B* a lucrării de laborator.

1) Să se implementeze și să se simuleze în Simulink o soluție de reglare de tip MPC pentru urmărirea unei intrări de referință de tip treaptă care comută din 0 în 1 la 0.2 sec, și răspunsul sistemului de reglare la o perturbație de amplitudine 0.2 care acționează la 0.6 sec. Funcția obiectiv MPC de minimizat la fiecare pas de eșantionare este $J(k)=\sum_{i=1}^{3}\left(r(k+i)-y(k+i)\right)^2+\lambda u^2(k+i-1)$ cu $\lambda = 0.0001$.

Soluție. Predictorii vor fi calculați de această dată prin itnermediul unui script Matlab care în prealabil discretizează funcția de transfer a procesului de la intrare la ieșire pentru o perioadă de eșantionare de 0.1 sec și o aduce la forma ARX cunoscută: $A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k-1)$. Calculul fiecărui predictor se face rezolvând ecuațiile diofantice aferente. Fie acest script redat mai jos:

```
COD 1
% ------------------date_init.m----------------------- %
s=tf('s');
pc=2/(s^2+7*s+6);
Ts=0.1;
pcd=c2d(pc,Ts,'zoh')
pcdf=filt(pcd.num{1},pcd.den{1},Ts);B=pcd.num{1}(2:3);A=pcd.den{1};
nA=2;nB=1; % forma ARX A(q^-1)*y(k)=B(q^-1)*u(k-1)

Tsim=20;
N=(Tsim/Ts);

Orizont=3;
Q=eye(Orizont);lambda=0.0001;
R=zeros(N+Orizont,1);R(21:end)=1;

%calcul forma matriceala predictor
%A=[1 a1*q^-1 a2*q^-2]=[1 a1 a2],B=[b0 b1*q^-1]
%predictor de ordin 3
e30=1;
E3=[e30 -A(2)*e30 A(2)*A(2)*e30-A(3)*e30]; %E3=[e30 e31 e32]
F3=[-A(2)*E3(3)-A(3)*E3(2) -A(3)*E3(3)]; %F3=[f30 f31];
tmp=conv(E3,B);
G3=tmp(1:3);H3=tmp(4);

%predictor de ordin 1
e10=1;E1=e10;F1=-e10*[A(2) A(3)];G1=B(1);H1=B(2);

%predictor de ordin 2
e20=1;E2=[e20 -e20*A(2)];F2=[-e20*A(3)-E2(2)*A(2) -E2(2)*A(3)];
tmp=conv(E2,B);G2=tmp(1:2);H2=tmp(3);

P=[G1 0 0;fliplr(G2) 0;fliplr(G3)];H=[F1 H1;F2 H2;F3 H3];

% to clear persistent vars in Fcn, call >>clear 'FcnName' in prompt
clear myMPC
%---------------------------------------------------------%
```

Apoi, se remarcă în primul rând faptul că forma matriceală a predictorului până la ordinul 3 inclusiv este:

$$\begin{bmatrix}\hat{y}(k+1)\\ \hat{y}(k+2)\\ \hat{y}(k+3)\end{bmatrix} = \mathbf{H}\begin{bmatrix}y(k)\\ y(k-1)\\ u(k-1)\end{bmatrix} + \mathbf{P}\begin{bmatrix}u(k)\\ u(k+1)\\ u(k+2)\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{P}\mathbf{U},$$

cu matricele $\mathbf{P}$ și $\mathbf{H}$ calculate în linia 38 din COD 1. Funcția obiectiv adusă în forma matriceală este $J = (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y})^T(\mathbf{R}_s - \mathbf{Y}) + \lambda\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \ldots = \mathbf{U}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{P} + \lambda\mathbf{I})\mathbf{U} - 2\underbrace{(\mathbf{R}_s - \mathbf{H}\boldsymbol{\xi})}_{\boldsymbol{\Psi}}{}^T\mathbf{P}\mathbf{U} + \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{\Psi}$ care minimizată în raport cu $\mathbf{U}$ conduce la soluția analitică $\mathbf{U}^* = (\mathbf{P}^T\mathbf{P} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{P}^T(\mathbf{R}_s - \mathbf{H}\boldsymbol{\xi})$, unde $\mathbf{R}_s = [r(k+1)\ r(k+2)\ r(k+3)]^T$ este vectorul referințelor viitoare.

Implementarea în Simulink a soluției se face folosind schema din Fig. 2, în care este folosit un bloc de tip Matlab Embedded Function care rulează la fiecare pas de eșantionare codul aferent. Esența schemei de implementare are la bază vectorul $\boldsymbol{\xi} = [y(k), y(k-1), u(k-1)]^T$ care trebuie reactualizat la fiecare pas de eșantionare. În acest sens, ξ este construit prin cod din doi vectori $yPast = [y(k), y(k-1)]^T, uPast = [u(k-1)]^T$ care sunt actualizați cu ultimele valori ale intrărilor blocului de tip Embedded (sau Matlab Function), a se vedea Fig. 2 de mai jos.

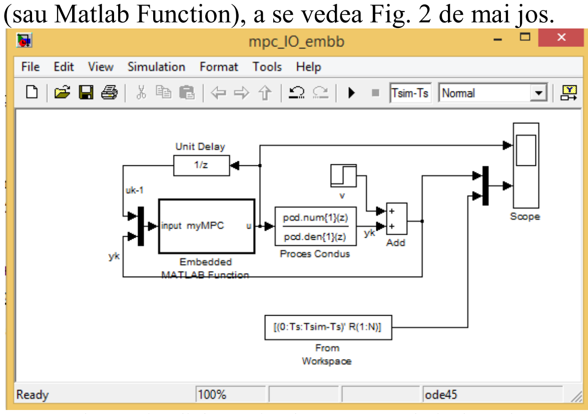

Fig. 2. Schema Simulink care implementează soluția de reglare MPC.

Este redat mai jos codul aferent blocului embedded care implementează soluția de reglare MPC:

```
COD 2
% ------------------myMPC.m---------------------- %
function u=myMPC(input,R,P,H,Q,nA,nB,lambda,Orizont)

% to clear persistent vars in Fcn, call >>clear 'FcnName' in prompt
%clear myMPC
persistent yPast uPast k

if isempty(yPast) % initializari variabile persistente la prima rulare
   yPast=zeros(2,1);
   uPast=zeros(1,1);
   k=1;
end

% actualizare uPast
for i=length(uPast):-1:2
   uPast(i)=uPast(i-1);
end
uPast(1)=input(1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% actualizare yPast
for i=length(yPast):-1:2
    yPast(i)=yPast(i-1);
end
yPast(1)=input(2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Rs=[R(k+1) R(k+1) R(k+1)]';
%eyeO=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];

Sol=-inv(P'*Q*P + lambda*eye(3)) * P' * Q * (H*[yPast;uPast]-Rs);
u=Sol(1);

k=k+1; %salt la pasul urmator

end % end myMPC
%----------------------------------------------------------%
```

Se remarcă în final următoarele aspecte de principiu:

1. Prin cod trebuie avut grijă ca vectorul ξ care conține valorile trecute ale intrării și valorile trecute ale ieșirii până la momentul curent să actualizeze la fiecare pas aceste valori, adică valorile intrării/ieșirii de la momentul curent devin valori trecute la pasul următor.
2. Implementarea poate prelua intrarea de referință ”din viitor” în cazul în care există o prognoză cunoscută aprioric. În caz contrar, cea mai bună predicție a valorilor viitoare ale referinței poate fi considerată valoarea de la momentul curent. Totuși, pentru scenariul care ia în calcul referința prognozată, pot fi observate două efecte interesante: răspunsul ieșirii reglate începe înainte de modificarea referinței și amplitudinea comenzilor în acest caz este mai mică, necesitând energie (efort) mai redusă la nivelul elementului de execuție, cu consecințe economice benefice.
3. Varianta de implementare nu este capabilă să asigure eroare de reglare nulă și nici rejecția perturbației, în regim staționar constant, după cum poate fi observat în rezultatul de simulare din Fig. 3 de mai jos. Pentru a remedia acest aspect, există diverse soluții care sunt discutate în cadrul cursului.
4. Conform principiului MPC, doar prima valoare din vectorul **U** este transmisă procesului după care, la pasul următor, valorile **U** vor fi suprascrise cu noua soluție.

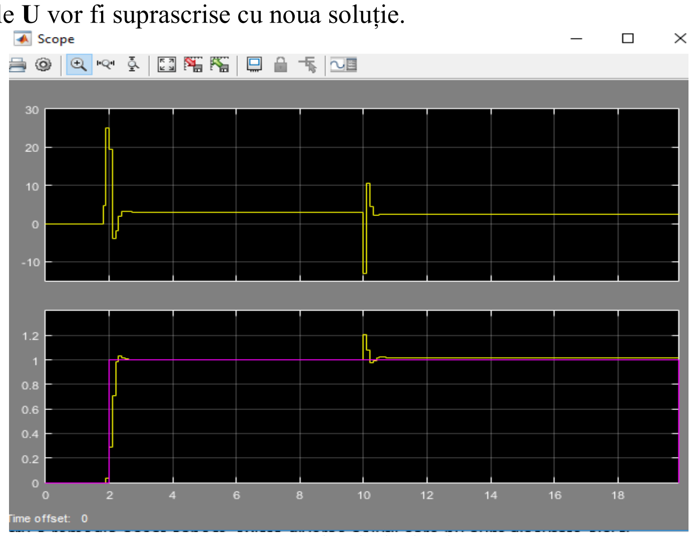

Fig. 3. Rezultatele de simulare.

Rămâne ca și exercițiu testarea mai multor variante de ”încărcare” a vectorului referințelor viitoare pentru a observa efectul asupra răspunsului de la ieșire (ieșirea poate anticipa modificarea viitoare a referinței și să înceapă răspunsul mai devreme). Se va testa și efectul diverselor alegeri ale parametrului $\lambda = 0.0001$ asupra soluției.

Tematica lucrării
Fie procesul condus redat prin schema bloc informațională de mai jos

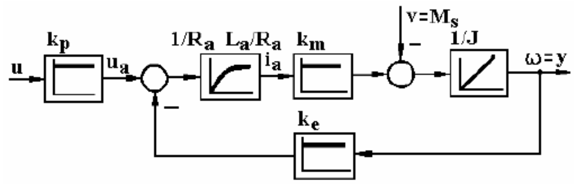

Fig. 1. Procesul condus. ()

cu valorile parametrilor k_p=35 V/V, R_a=4.2 Ω, L_a=14.28 mH, k_e=k_m=0.33, J=$0.71\cdot10^{-3}$ kg·m^2. Se cere:

1) Să se calculeze de mînă și să se verifice apoi cu calculatorul, forma matriceală a predictorului până la ordinul 3, folosind modelul intrare ieșire de forma ARX, pentru modelul în timp discret al procesului rezultat în urma discretizării cu metoda r.i.s.t. pentru perioada de elantionare de 0.01 sec.
2) Să se implementeze și să se simuleze în Simulink o soluție de reglare de tip MPC pentru urmărirea unei intrări de referință de tip treaptă care comută din 0 în 1 la 0.2 sec, și răspunsul sistemului de reglare la o perturbație de amplitudine 0.2 care acționează la 0.6 sec. Funcția obiectiv MPC de minimizat la fiecare pas de eșantionare este $J(k)=\sum_{i=1}^{3}\left(r(k+i)-y(k+i)\right)^2+\lambda u^2(k+i-1)$ cu $\lambda=0.1$.

Pe scenariul de test de mai sus, se vor nota observațiile privind

- influența parametrului parametrului λ asupra performanțelor de reglare,
- efectul modificării parametrului k_p=25 V/V asupra performanțelor de reglare,
- efectul încărcării referințelor viitoare cu valoarea de la pasul curent sau cu valori de evoluție cunoscute dinainte.

Bibliografie

Radac, M.-B., Învățare prin recompensă. Note de curs, Universitatea Politehnica Timișoara, 2019.

Preitl, St., Precup, R.-E., Preitl, Zs.: Structuri şi algoritmi pentru conducerea automată a proceselor, vol. 2, Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 2009.