

L2. Proiectarea sistemelor de reglare automată în timp discret cu două grade de libertate

Lucrarea formulează problema reglării cu două grade de libertate (2DOF) și exemplifică etapele de aplicare.

Dependența intrare-ieșire aferentă SRA cu două grade de libertate din Fig. 1 pentru un proces caracterizat

de funcția de transfer (f.d.t) $H_p(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$ este de forma (Preitl et al., 2009)

$$y(k) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} w(k) + \frac{B(q)R(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} v(k), \quad (1)$$

cu polinomul caracteristic $\Delta(q) = A(q)R(q) + B(q)S(q)$, cu $R(q)$ presupus **monic**.

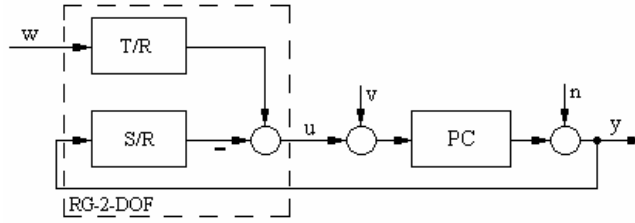


Fig. 1. SRA cu două grade de libertate. (Preitl et al., 2009)

Fie considerate următoarele:

- Modelul de referință de forma $H_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)}$,
- Polinomul de la numărătorul f.d.t. a procesului factorizabil în zerouri $B^+(q)$ stabile (potențial compensabile) și $B^-(q)$ instabile (necompensabile, inclusiv timp mort) sub forma $B(q) = B^+(q)B^-(q)$, cu $B^+(q)$ **monic**,
- Selecția polinoamelor $\Delta = A_o A_m B^+$, $R = B^+ \bar{R}$, $T = \bar{B}_m A_o$, $B_m = B^- \bar{B}_m$ care rezultă în necesitatea verificării ecuației diofantice $A_o A_m = A \bar{R} + B^- S$.

Rezultă, pentru dependența intrare ieșire a SRA în cazul neseparării cerințelor de comportare în raport cu referința și în raport cu perturbăția, următoarea relație

$$y(k) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} w(k) + \frac{B(q) \bar{R}(q)}{A_o(q) A(q)} v(k). \quad (2)$$

Dacă se dorește **separarea** cerințelor de comportare în raport cu perturbăția și în raport cu referința atunci factorizările $R = A_m B^+ \bar{R}$, $S = A_m \bar{S}$, $T = \bar{B}_m A_o A_c$ cu respectarea ecuației diofantice $A_o A_c = A \bar{R} + B^- \bar{S}$ conduc la dependența intrare-ieșire a SRA de forma

$$y(k) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} w(k) + \frac{B^-(q) \bar{R}(q)}{A_o(q) A_c(q)} v(k), \quad (3)$$

în care polinomul A_c diferă de polinomul A_m .

Soluția de grad minim aferentă metodei de proiectare prin alocarea polilor **pentru cazul** $A_m = A_c$ este sintetizată în condițiile de grad (Preitl et al., 2009):

$$\begin{aligned} \text{grad}(S) &= \text{grad}(R) = \text{grad}(T) = n-1, \text{ unde } n = \text{grad}(A), \\ \text{grad}(A_o) &= \text{grad}(A) - \text{grad}(B^+) - 1, \\ \text{grad}(A_m) &= \text{grad}(A) = n. \end{aligned} \quad (4)$$

În vederea rejectării perturbațiilor constante este necesară introducerea unei **componente integratoare (I)** în regulator, ceea ce echivalează cu impunerea factorului $(q-1)$ în polinomul R . Noua ecuație diofantică **pentru cazul** $A_m = A_c$ este

$$A_o A_m = A(q-1)\bar{R} + B^- S, \quad (5)$$

care trebuie respectată concomitent cu condițiile de grad incrementate pentru A_o , R , S , și T :

$$\begin{aligned} \text{grad}(S) &= \text{grad}(R) = \text{grad}(T) = n, \text{ unde } n = \text{grad}(A), \\ \text{grad}(A_o) &= \text{grad}(A) - \text{grad}(B^+), \\ \text{grad}(A_m) &= \text{grad}(A) = n. \end{aligned} \quad (6)$$

Etapele construcției modelului de referință pentru procese conduse de ordin cel puțin doi

Pentru alegerea modelului de referință, se procedează de obicei conform etapelor:

- Pentru model de referință continuu de forma $H_m(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$, se aleg valorile ζ, ω_0 care satisfac specificațiile de performanță (suprareglaj $M[\%]$, timp de creștere t_R) din graficele aferente Fig. 2 de mai jos.

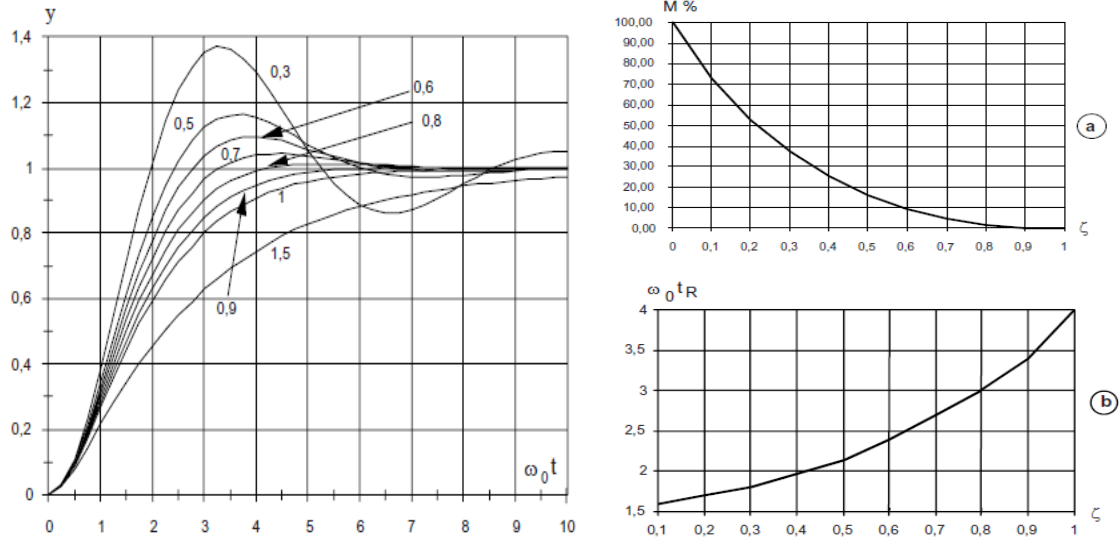


Fig. 2. (Landau and Zito, 2006) *Stânga*: Relativă la răspunsul la semnal treaptă al unui model de referință normalizat de ordinul doi; *Dreapta*: Relativă la alegerea valorilor pentru factorul de amortizare funcție de suprareglaj (a) și alegerea pulsației naturale funcție de tipul de creștere și factor de amortizare (b).

- Se discretizează modelul de referință la forma $H_m(q) = \frac{\tilde{B}_m(q)}{A_m(q)} = \frac{b_1 q + b_2}{q^2 + a_1 q + a_2}$ din care se reține numitorul $A_m(q)$. Dacă $\text{grad}(A_m(q)) \neq \text{grad}(A(q)) = n$ se introduc în $A_m(q)$ poli nedominanți suplimentari până la egalitate, pentru satisfacerea condițiilor de grad (4) respectiv (6).
- Se construiește $B_m(q)$ cu $\text{grad}(B_m(q)) \leq \text{grad}(B(q)) + d$, cu $d \in \mathbb{N}^*$ timpul mort al procesului, în funcție de compensarea sau lipsa compensării zerourilor stabile $B^+(q)$ din $B(q)$, astfel încât să fie asigurată condiția $B_m(1)/A_m(1) = 1$. Întotdeauna $B_m(q)$ trebuie să păstreze timpul mort și zerourile instabile ale procesului condus.

Exemplu de proiectare. Fie procesul condus fără timp mort de forma $H_p(s) = \frac{k_p}{s(s+1)}$ discretizabil cu metoda

r.i.s.t. la forma f.d.t. $H_p(q) = \frac{K(q-b)}{(q-1)(q-a)} = \frac{B(q)}{A(q)}$ cu $\text{grad}(B(q)) = 1$, $\text{grad}(A(q)) = 2$, $d = 0$. Se cere

proiectarea unui regulator 2DOF:

- cu componentă (I) în regulator, pentru rejecția perturbațiilor constante,
- în variantele **cu și fără** compensare a zeroului stabil din f.d.t. a procesului,
- pentru același comportament în raport cu referința și în raport cu perturbația (cazul $A_m = A_c$).

Cazul 1) cu compensare zero stabil, $B^+(q) = q - b$, $B^-(q) = K$. Alegerea modelului de referință de ordinul doi conduce la polinomul $A_m(q)$ de forma $A_m(q) = q^2 + p_1q + p_2$ de grad $n=2$ egal cu cel al polinomului $A(q)$. Polinomul $A_m(q)$ ales în funcție de specificațiile de performanță impune răspunsul dinamic al SRA în raport atât cu referința cât și cu perturbația. Din condițiile $\text{grad}(B_m(q)) \leq \text{grad}(B(q)) + d = 1 + 0 = 1$ (rezultă din condiția $\text{grad}(A_m(q)) - \text{grad}(B_m(q)) \geq \text{grad}(A(q)) - \text{grad}(B(q)) - d$) și $B_m(1) = A_m(1)$, se alege $B_m(q)$ de forma $B_m(q) = Kq \frac{(1 + p_1 + p_2)}{K} = q(1 + p_1 + p_2)$ astfel încât să se respecte **simultan** condițiile:

- $\text{grad}(B_m(q)) \leq \text{grad}(B(q)) + d = 1$, în particular se alege gradul maxim posibil.
- $B_m(q)$ să conțină $B^-(q) = K$ și să asigure $B_m(1) = A_m(1)$,
- $B_m(q)$ să nu conțină $B^+(q) = q - b$ ceea ce este echivalent cu compensarea zeroului stabil al procesului.

Pentru că factorizarea $B_m(q) = B^-(q)\bar{B}_m(q)$ presupune păstrarea $B^-(q) = K$, rezultă $\bar{B}_m(q) = q(1 + p_1 + p_2)/K$.

Cu factorizarea $R(q) = B^+(q)\bar{R}(q) = B^+(q)(q-1)\bar{\bar{R}}(q)$ aferentă introducerii componentei (I), condițiile de grad (6) devin: $\text{grad}(S) = \text{grad}(R) = \text{grad}(T) = 2$, $\text{grad}(\bar{\bar{R}}) = 0$, $\text{grad}(A_0) = 1$.

Fie parametrizările $\bar{\bar{R}}(q) = r_0 = 1$ (deoarece $R(q)$ monic), $S(q) = s_2q^2 + s_1q + s_0$ și respectiv $A_o(q) = q$. Ecuația diofantică care trebuie rezolvată este $A_oA_m = A(q-1)\bar{\bar{R}} + B^-S$ echivalentă cu

$$q(q^2 + p_1q + p_2) = (q-1)(q-a)(q-1) + K(s_2q^2 + s_1q + s_0) \Leftrightarrow$$

$$q^3 + p_1q^2 + p_2q = q^3 + (Ks_2 - a - 2)q^2 + (Ks_1 + 2a + 1)q + Ks_0 - a \Leftrightarrow, \quad (7)$$

$$\begin{cases} Ks_2 - a - 2 = p_1, \\ Ks_1 + 2a + 1 = p_2, \\ Ks_0 - a = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_2 = (p_1 + a + 2)/K, \\ s_1 = (p_2 - 2a - 1)/K \\ s_0 = a/K. \end{cases}$$

din care rezultă coeficienții $S(q)$ ca soluție a unui sistem compatibil determinat. În final $R(q) = (q-b)(q-1)$, $T(q) = q^2(1 + p_1 + p_2)/K$.

Cazul 2) fără compensare zero stabil, $B^+(q) = 1$, $B^-(q) = K(q-b)$. Alegerea modelului de referință de ordinul doi conduce la polinomul $A_m(q)$ de forma $A_m(q) = q^2 + p_1q + p_2$ de grad $n=2$ egal cu cel al

polinomului $A(q)$. Din condițiile $\text{grad}(B_m(q)) \leq \text{grad}(B(q)) + d = 1 + 0$ și $B_m(1) = A_m(1)$, se alege

$$B_m(q) = \frac{K(q-b)(1+p_1+p_2)}{K(1-b)} = \frac{(q-b)(1+p_1+p_2)}{1-b} \text{ care îndeplinește simultan condițiile}$$

- $B_m(q)$ conține zerourile necompensabile ale procesului $B^-(q) = K(q-b)$ și asigură totodată $B_m(1) = A_m(1)$.
- $\text{grad}(B_m(q)) \leq 1$, în particular se alege gradul maxim posibil.
- $B_m(q)$ să nu conțină $B^+(q) = 1$, ceea ce oricum se respectă deoarece constanta 1 este element neutru la înmulțire.

Datorită factorizării $B_m(q) = B^-(q)\bar{B}_m(q)$, rezultă $\bar{B}_m(q) = (1+p_1+p_2)/[K(1-b)]$.

Cu factorizarea $R(q) = B^+(q)\bar{R}(q) = 1(q-1)\bar{R}(q)$ aferentă introducerii componentei (I), condițiile de grad (6) devin: $\text{grad}(S) = \text{grad}(R) = \text{grad}(T) = 2$, $\text{grad}(\bar{R}) = 1$, $\text{grad}(A_0) = 2$.

Fie parametrizările $\bar{R}(q) = q + r_0$ (deoarece $R(q)$ monic), $S(q) = s_2q^2 + s_1q + s_0$ și respectiv $A_o(q) = q^2$. Ecuația diofantică care trebuie rezolvată este $A_oA_m = A(q-1)\bar{R} + B^-S$ echivalentă cu $q^2(q^2 + p_1q + p_2) = (q-1)(q-a)(q-1)(q+r_0) + K(q-b)(s_2q^2 + s_1q + s_0) \Leftrightarrow$
 $q^4 + p_1q^3 + p_2q^2 = q^4 + (Ks_2 + r_0 - a - 2)q^3 + [K(s_1 - bs_2) - r_0a - 2r_0 + 2a + 1]q^2 +$
 $+ [K(s_0 - bs_1) + 2r_0a + r_0 - a]q - Kbs_0 - r_0a \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} Ks_2 + r_0 - a - 2 = p_1, \\ K(s_1 - bs_2) - r_0a - 2r_0 + 2a + 1 = p_2, \\ K(s_0 - bs_1) + 2r_0a + r_0 - a = 0 \\ -Kbs_0 - ar_0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 1 \\ -bK & K & 0 & -a-2 \\ 0 & -bK & K & 2a+1 \\ 0 & 0 & -bK & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \\ s_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + a + 2 \\ p_2 - 2a - 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

din care rezultă coeficienții $S(q)$ și $\bar{R}(q)$ ca soluție a unui sistem compatibil determinat. În final $R(q) = (q-1)(q+r_0)$, $T(q) = q^2(1+p_1+p_2)/[K(1-b)]$.

Pentru procesul $H_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ discretizat cu perioada de eșantionare $T_e = 0.25$ sec, pentru un model de referință ales de forma $H_m(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$, cu valorile $\zeta = 0.7, \omega_0 = 1$ care asigură suprareglaj sub 5%

și timp de creștere de aproximativ 2.75 secunde, pentru scenariu de test caracterizat de referință treaptă unitate la momentul inițial și perturbăție treaptă aditivă pe ieșire de amplitudine -1 la momentul 10 secunde, rezultatele de simulare pentru cele două tipuri de regulatoare de tip 2DOF pentru același comportament în raport cu referința și cu perturbăția:

- cu componentă (I) și cu compensare zero stabil al procesului,
- cu componentă (I) și fără compensare zero stabil al procesului,

sunt redată în fig. 3 de mai jos, în care se observă efectul de riplu pe intrarea procesului atunci când se efectuează compensarea zeroului procesului condus.

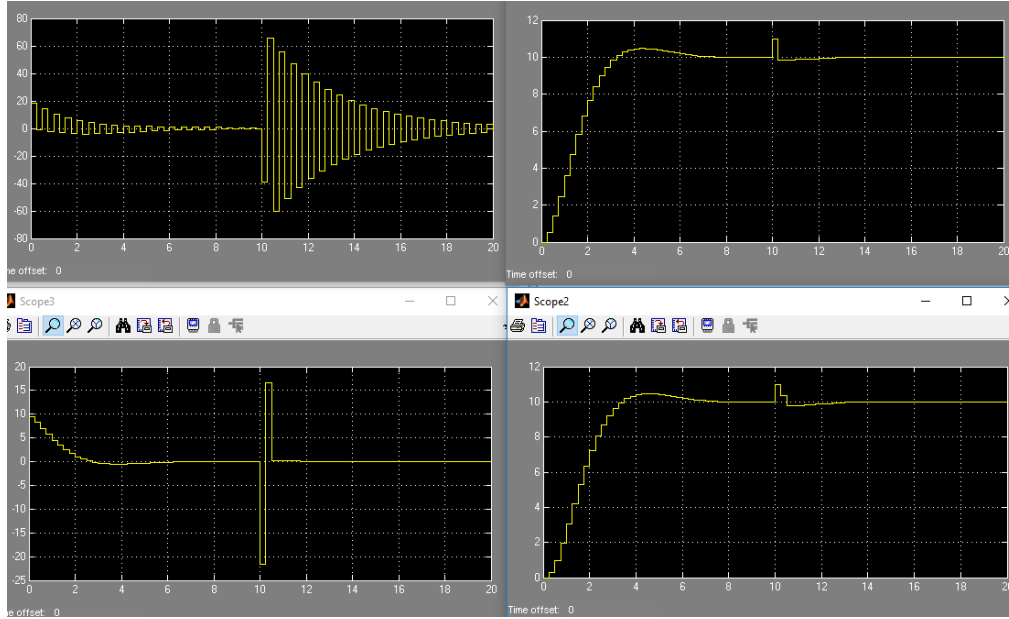


Fig. 3. Graficele de sus: intrarea procesului (stânga) și ieșirea reglată (dreapta). Graficele de jos: intrarea procesului (stânga) și ieșirea reglată (dreapta).

În concluzie, regulatorul 2DOF este pe deplin justificat doar atunci când comportamentul SRA în raport cu referința este decuplat de cel în raport cu perturbația, adică pentru polinoamele $A_m \neq A_c$. În acest caz, proiectarea conduce la factorizări polinomiale și ecuație diofantică ușor diferite. De asemenea, necesită tratarea particulară a compensării zerourilor procesului precum și a introducerii componentei (I) în regulator. În plus față de mai simpla metodă a alocării polilor, regulatorul 2DOF prezentat tratează totuși problema compensării zerourilor stabile ale procesului.

Tematica lucrării

Fie procesul redat prin schema bloc informațională din Fig. 4 mai jos discretizat cu perioada de eșantionare $T_e = 0.01$ sec utilizând metoda r.i.s.t., pentru un model de referință ales de forma $H_m(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$, cu valorile $\zeta = 0.7, \omega_0 = 55$ care asigură suprareglaj sub 5% și timp de creștere de aproximativ 0.05 secunde, pentru scenariul de test caracterizat de referință treaptă unitate la momentul inițial și perturbație treaptă aditivă pe ieșire de amplitudine -0.2 la momentul 0.6 secunde. Să se proiecteze două regulatoare de tip 2DOF pentru același comportament în raport cu referința și cu perturbația:

- cu componentă (I) și cu compensare zero stabil al procesului,
- cu componentă (I) și fără compensare zero stabil al procesului,

și să se simuleze comportamentul SRA rezultate, în scenariul impus. Valorile parametrilor PC sunt următoarele:

$R_a = 4.2 \, \Omega$, $L_a = 14.28 \, \text{mH}$, $k_e = k_m = 0.33$, $J = 0.71 \times 10^{-3} \, \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $k_p = 35 \, \text{V/V}$.

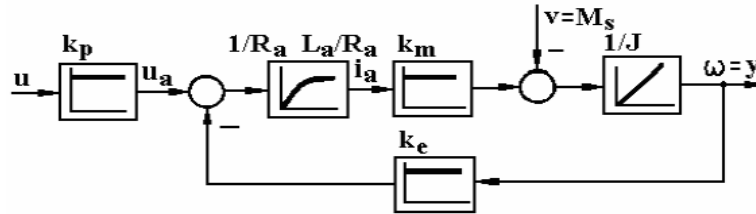


Fig. 4. Procesul condus (Preitl et al., 2009)

Interesează comparații (diferențe, avantaje, dezavantaje) observate ale celor două variante de structuri 2DOF propuse precum și comentariile privind performanțele.

Se va verifica prin simulare efectul modificării parametrului $k_p=25$ V/V asupra performanțelor de reglare.

Bibliografie

Preitl, St., Precup, R.-E., Preitl, Zs.: Structuri și algoritmi pentru conducerea automată a proceselor, vol. 2, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2009.

Landau, I.-D., Zito G., Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation, Springer-Verlag, London, 2006.