En los ejercicios 59 y 60, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio. Apoye sus respuestas trazando la gráfica de la función.

59. $h(x) = x - [\![x]\!]$ **60.** $F(x) = x + [\![x]\!]$

61. Las gráficas de las funciones de los ejercicios 51 y 52 parecen letras del alfabeto. Defina otras dos funciones cuyas gráficas se parezcan a dos letras diferentes y dibújelas.

62. En esta sección se utilizaron los símbolos f, $f(x)$ y $y = f(x)$ concernientes a una función particular, los cuales tienen significados diferentes. Explique lo que significa cada notación, invente una función y utilícela para distinguir los tres símbolos.

63. Explique por qué la gráfica de una función es consistente con la definición de la función como un conjunto de pares ordenados. En su explicación utilice un ejemplo específico.

1.2 OPERACIONES CON FUNCIONES Y TIPOS DE FUNCIONES

Se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones dadas mediante adición, sustracción, multiplicación y división de sus valores. De acuerdo con esto, las nuevas funciones se conocen como la *suma, diferencia, producto* y *cociente* de las funciones originales.

1.2.1 Definición de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones

Dadas las dos funciones f y g:

(i) su **suma,** denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) su **diferencia,** denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) su **producto,** denotado por $f \cdot g$, es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) su **cociente,** denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

En cada caso, el *dominio* de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, con el requerimiento adicional en el caso (iv) de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dado que f y g son las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x-4}$$

defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: **(a)** $f + g$; **(b)** $f - g$; **(c)** $f \cdot g$; **(d)** f/g.

Solución

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$

(b) $(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

El dominio de f es $[-1, +\infty)$ y el dominio de g es $[4, +\infty)$. Así, el dominio de las funciones resultantes en los incisos (a), (b) y (c) es $[4, +\infty)$. En el inciso (d), el denominador es cero cuando $x = 4$; por lo que 4 también se excluye y se obtiene como dominio $(4, +\infty)$. ◀

Otra operación entre funciones es la obtención de la *función compuesta* de dos funciones dadas.

1.2.2 Definición de función compuesta

Dadas las dos funciones f y g, la función compuesta, denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

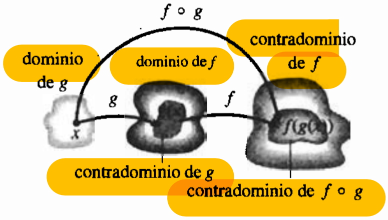


FIGURA 1

Esta definición indica que cuando se calcula $(f \circ g)(x)$, primero se aplica g a x y después se aplica f a $g(x)$. Para visualizar este cálculo Consulte la figura 1. La función g asigna el valor $g(x)$ al número x del dominio de g. La función f asigna el valor $f(g(x))$ al número $g(x)$ del dominio de f. Observe que en la figura 1 el contradominio de g es un subconjunto del dominio de f y que el contradominio de $f \circ g$ es un subconjunto del contradominio de f.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 3$$

entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x - 3)\\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$ y el dominio de f es $[0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números reales x para los cuales $2x - 3 \geq 0$ o, equivalentemente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

▶ **EJEMPLO 2** Sean

$$f(x) = \frac{5}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 1$$

Obtenga $(f \circ g)(3)$ mediante dos métodos: **(a)** calcule $g(3)$ y utilice este número para determinar $f(g(3))$; **(b)** calcule $(f \circ g)(x)$ y emplee el resultado para determinar $(f \circ g)(3)$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}g(3) &= 2(3) + 1\\ &= 7\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(g(3)) &= f(7)\\ &= \frac{5}{7 - 2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x + 1)\\ &= \frac{5}{(2x + 1) - 2}\\ &= \frac{5}{2x - 1}\end{aligned}$$

$= 1$

Por tanto

$$(f \circ g)(3) = \frac{5}{2(3) - 1}$$
$$= 1$$

◀

EJEMPLO 3 Dado que f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 1$$

calcule: **(a)** $f \circ f$; **(b)** $g \circ g$; **(c)** $f \circ g$; **(d)** $g \circ f$. También determine el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f es $[0, +\infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, +\infty)$.

(a)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

(b)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$.

(c)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

El dominio es

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - 1 \\ &= x - 1\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

En el inciso (d) observe que aunque $x - 1$ está definido para todos los valores de x, el dominio de $g \circ f$, por la definición de función compuesta, es el conjunto de todos los números x del dominio de f tales que $f(x)$ está en el dominio de g. De donde, el dominio de $g \circ f$ debe ser un subconjunto del dominio de f. ◀

Observe en los resultados de los incisos (c) y (d) del ejemplo 3 que $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ no son necesariamente iguales.

Un teorema importante en Cálculo, llamado la *regla de la cadena*, que se estudiará en la sección 2.8, trata sobre funciones compuestas. Cuando se aplica la regla de la cadena, es necesario considerar una función como la composición de otras dos funciones, tal como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $h(x) = (4x^2 + 1)^3$, h se puede expresar como la composición de las dos funciones f y g para las cuales

$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = 4x^2 + 1$$

debido a que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

◀

La función h del ejemplo ilustrativo 2 también puede expresarse como la composición de otro par de funciones. Por ejemplo, si

$$F(x) = (4x + 1)^3 \quad \text{y} \quad G(x) = x^2$$

entonces

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= F(G(x)) \\ &= F(x^2) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Dada

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

exprese h como la composición de dos funciones f y g en dos formas: (**a**) la función f contiene el radical; (**b**) la función g contiene el radical.

Solución

(**a**) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

$g(x) = x^2$

Entonces

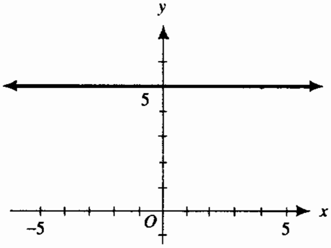
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$

(**b**) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Entonces

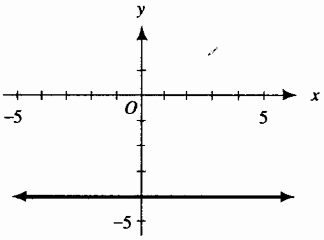
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x^2 + 3}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$



$f(x) = 5$

FIGURA 2

Una función cuyo contradominio consta de un solo número recibe el nombre de **función constante.** De este modo, si $f(x) = c$, y c es cualquier número real, entonces f es una función constante y su gráfica es una recta horizontal a una distancia dirigida de c unidades a partir del eje x.



$g(x) = -4$

FIGURA 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

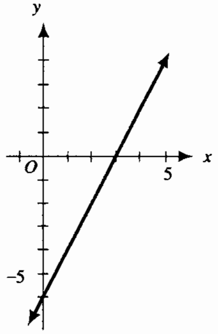
(**a**) La función definida por $f(x) = 5$ es una función constante, y su gráfica, mostrada en la figura 2, es una recta horizontal situada a 5 unidades sobre el eje x.

(**b**) La función definida por $g(x) = -4$ es una función constante cuya gráfica es una recta horizontal ubicada a 4 unidades debajo del eje x. Consulte la figura 3.

Una **función lineal** se define por

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su gráfica es una recta cuya *pendiente* es m y su *intercepción y* u *ordenada al origen* es b.



$f(x) = 2x - 6$

FIGURA 4

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 La función definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

es lineal. Su gráfica es la recta mostrada en la figura 4.

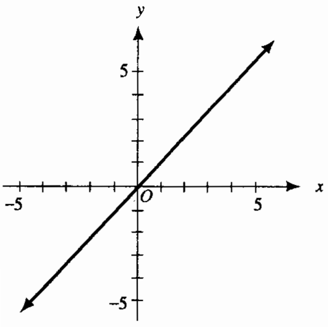


FIGURA 5

La función lineal particular definida por

$$f(x) = x$$

se denomina **función identidad.** Su gráfica, dibujada en la figura 5, es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero.

Si una función f se define por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales ($a_n \neq 0$) y n es un número entero no negativo, entonces recibe el nombre de **función polinomial** de grado n. Así, la función definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

es una función polinomial de grado 5.

Una función lineal es una función polinomial de grado 1. Si el grado de una función polinomial es 2, entonces se le llama **función cuadrática,** y si el grado es 3, entonces recibe el nombre de **función cúbica.**

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, entonces se denomina **función racional.**

Una **función algebraica** es aquella formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y una función constante. Estas operaciones algebraicas incluyen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación (elevación a una potencia) y radicación (extracción de una raíz). Las funciones polinomiales y racionales son tipos particulares de funciones algebraicas. Un ejemplo complejo de una función algebraica es aquella definida por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Además de las funciones algebraicas, se considerarán las *funciones trascendentes*, ejemplos de estas funciones son las funciones trigonométricas, discutidas en la sección A.9 del apéndice, y las funciones logarítmica y exponencial estudiadas en el capítulo 5.

Una *función par* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y, y una *función impar* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al origen. A continuación se presenta la definición formal de estas funciones.

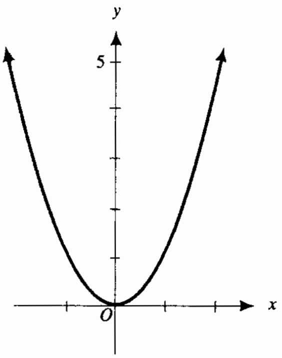
1.2.3 Definición de función par y función impar

(i) Una función f es una **función par** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Una función f es una **función impar** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.

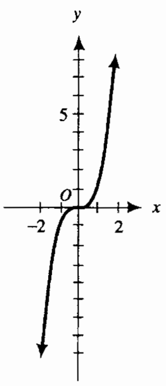
En los dos incisos (i) y (ii) se sobrentiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

Las propiedades de simetría de las funciones pares e impares se deducen de los criterios de simetría dados en la sección A.2 del apéndice.



$f(x) = x^2$

FIGURA 6



$g(x) = x^3$

FIGURA 7

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) Si $f(x) = x^2$, entonces $f(-x) = (-x)^2$. Por tanto, $f(-x) = f(x)$ y en consecuencia, f es una función par. Su gráfica es una parábola simétrica con respecto al eje y. Véa la figura 6.

(b) Si $g(x) = x^3$, entonces $g(-x) = (-x)^3$. Como $g(-x) = -g(x)$, entonces g es una función impar. La gráfica de g, mostrada en la figura 7, es simétrica con respecto al origen. ◀

▶ *EJEMPLO 5*

Trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos; después confirme la conjetura analíticamente.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

(b) $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

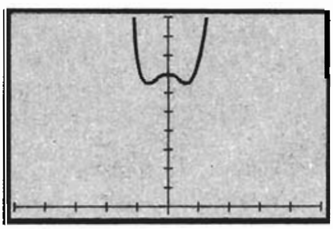
(c) $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

Solución

(a) La gráfica de f, trazada en la figura 8, parece simétrica con respecto al eje y. Por tanto, se sospecha que la función es par. Para probar este hecho analíticamente, se calcula $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

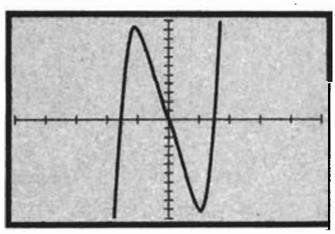
Como $f(-x) = f(x)$, entonces f es par.



$[-5, 5]$ por $[0, 10]$

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

FIGURA 8



$[-5, 5]$ por $[-11, 11]$

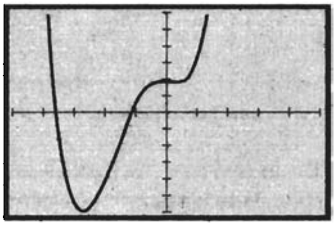
$g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

FIGURA 9

(b) La figura 9 muestra la gráfica de la función g, la cual parece simétrica con respecto al origen. Por tanto, se sospecha que la función es impar. Al calcular $g(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Como $g(-x) = -g(x)$, entonces se ha demostrado analíticamente que la función g es impar.



$[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

$h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

FIGURA 10

(c) Como la gráfica de h, mostrada en la figura 10, no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen, la función no es par ni impar. Al calcular $h(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se ha confirmado que h no es par ni tampoco impar. ◀

▶ *EJEMPLO 6* Sea

$$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$$

(a) Defina $F(x)$, sin las barras de valor absoluto, a trozos en los intervalos siguientes: $(-\infty, -3)$; $[-3, 3)$; $[3, +\infty)$. **(b)** Apoye la respuesta gráficamente trazando la gráfica de F a partir de la ecuación dada. **(c)** De la gráfica del inciso (b) establezca si F es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. **(d)** Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación.

Solución

(a) A partir de la definición del valor absoluto de un número

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) & \text{si } x + 3 < 0 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

Esto es

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty, -3)$, $|x + 3| = -x - 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. En consecuencia

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= -x - 3 - (-x + 3) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Si $x \in [-3, 3)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. Así

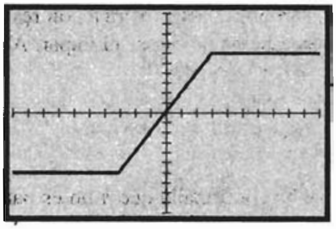
$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (-x + 3) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Si $x \in [3, +\infty)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = x - 3$. Por tanto

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (x - 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Con estos resultados, se define $F(x)$ a trozos de la siguiente forma

$$F(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < -3 \\ 2x & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$

FIGURA 11

(b) La figura 11 muestra la gráfica de F trazada a partir de la ecuación. La gráfica apoya la respuesta del inciso (a).

(c) Como la gráfica de la figura 11 es simétrica con respecto al origen, la función F es impar.

(d) Al calcular $F(-x)$ a partir de la ecuación dada, se confirma la respuesta del inciso (c):

$$\begin{aligned} F(-x) &= |-x + 3| - |-x - 3| \\ &= |-(x - 3)| - |-(x + 3)| \\ &= |x - 3| - |x + 3| \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado analíticamente que F es impar. ◀

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1 a 10, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

1. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

7. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

8. $f(x) = \sqrt{x - 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

10. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

En los ejercicios 11 a 14, para las funciones f y g y el número c, obtenga $(f \circ g)(c)$ mediante dos métodos: (a) calcule $g(c)$ y utilice este número para determinar $f(g(c))$; (b) Determine $(f \circ g)(x)$ y emplee ese valor para calcular $(f \circ g)(c)$.

11. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $g(x) = 2x - 5$; $c = 4$

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$; $g(x) = x^2 - 3x$; $c = 5$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$; $c = \dfrac{1}{2}$

14. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x + 3}}{x}$; $g(x) = \dfrac{2x + 5}{x^4}$; $c = -2$

En los ejercicios 15 a 24, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

15. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

16. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

17. Las funciones del ejercicio 1.

18. Las funciones del ejercicio 2.

19. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$

20. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

22. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

23. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 25 y 26 defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$; (d) $(f \circ f)(-x)$.

25. $f(x) = \sqrt{x}$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

En los ejercicios 27 a 32, exprese h como composición de las dos funciones f y g en dos formas.

27. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

28. $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$

29. $h(x) = \left(\dfrac{1}{x - 2}\right)^3$

30. $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^3 + 3}}$

31. $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$

32. $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

En los ejercicios 33 a 38, trace en la graficadora la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

33. **(a)** $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ **(b)** $g(x) = 5x^5 + 1$

34. **(a)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **(b)** $g(x) = x^6 - 1$

35. **(a)** $f(x) = 5x^3 - 7x$ **(b)** $g(x) = |x|$

36. **(a)** $f(x) = 4x^5 + 3x^3$ **(b)** $g(x) = x^3 + 1$

37. **(a)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = 5x^4 - 4$

38. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **(b)** $g(x) = 2|x| + 3$

En los ejercicios 39 y 40, determine analíticamente si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos.

39. **(a)** $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ **(b)** $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

40. **(a)** $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + x}$ **(b)** $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 44, haga lo siguiente: (a) defina $f(x)$, sin las barras de valor absoluto, en los intervalos indicados. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente trazando la gráfica de f en la graficadora a partir de la ecuación dada. (c) A partir de la gráfica del inciso (b), establezca si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. (d) Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación dada.

41. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

42. $f(x) = x\,|x|$; $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$

43. $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$;
$(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$

44. $f(x) = \dfrac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$

$(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $(0, 1]$, $(1, +\infty)$

45. ¿Es conmutativa la composición de dos funciones? Es decir, si f y g son dos funciones cualesquiera, ¿son iguales $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Justifique su respuesta proporcionando un ejemplo.

Si f y g son dos funciones tales que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$, entonces se dice que f y g son inversas una de la otra. En los ejercicios 46 a 50, demuestre que f y g son inversas una de la otra.

46. $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

48. $f(x) = x^2, x \geq 0,$ y $g(x) = \sqrt{x}$

49. $f(x) = x^2, x \leq 0,$ y $g(x) = -\sqrt{x}$

50. $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

51. La función escalón unitario U y la función signo sgn se definieron en los ejercicios 47 y 49, respectivamente, de la sección 1.1. **(a)** Defina $\operatorname{sgn}(U(x))$ y dibuje la gráfica. **(b)** Defina $U(\operatorname{sgn}(x))$ y dibuje la gráfica.

52. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $(f + g)$ y $(f - g)$ también son funciones impares, mientras que $f \cdot g$ y f/g son funciones pares.

53. Determine si la función compuesta $f \circ g$ es par o impar en cada uno de los casos siguientes: **(a)** f y g son impares; **(b)** f es par y g es impar; **(c)** g es par.

54. Encuentre fórmulas para $(f \circ g)(x)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Dibuje las gráficas de f, g y $f \circ g$.

55. Encuentre fórmulas para $(g \circ f)(x)$ a partir de las funciones del ejercicio 54. Dibuje la gráfica de $g \circ f$.

56. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

57. Si $f(x) = x^2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

58. Demuestre que si f y g son dos funciones lineales, entonces $f \circ g$ es una función lineal.

59. Existe una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales que es a la vez par e impar. ¿Cuál es esa función? Demuestre que es única esta función.

60. Suponga que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $h(x) = -x$. Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ y explique por qué $f \circ g$ ni $g \circ f$ son la misma que h.

61. Trace en la graficadora las gráficas de las dos funciones F y G definidas por

$$F(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 4}} \quad \text{y} \quad G(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 4}}$$

[Observe que F es la misma función que f/g del ejemplo 1(d)]. Explique por qué las gráficas de F y G no son las mismas y, consecuentemente, las funciones no son iguales.

1.3 FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

En las aplicaciones del Cálculo, se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada **modelo matemático** de la situación. Esta sección está destinada a proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos y al mismo tiempo para mostrarle algunas de las aplicaciones que encontrará posteriormente.

Aunque no siempre se emplea un método específico para obtener un modelo matemático, a continuación se le presentan algunos pasos que le proporcionarán un procedimiento posible que deberá seguir. Conforme estudie los ejemplos, refiérase a estos pasos para ver cómo se aplican.