

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE A ABORDAGEM EM GRAFO E/OU E O ALGORITMO DE WANG PARA O PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL

ANDREA CARLA GONCALVES VIANNA (FC/UNESP)

vianna@fc.unesp.br

ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA (FC/UNESP)

adriana@fc.unesp.br

Resumo: NESTE TRABALHO CONSIDERAMOS O CLÁSSICO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE BIDIMENSIONAL CUJA SOLUÇÃO CONSISTE EM DETERMINAR O PADRÃO DE CORTE QUE MINIMIZA A PERDA TOTAL DE MATERIAL. ENTRE OS VÁRIOS MÉTODOS ENCONTRADOS NA LITERATURA QUE RESOLVEM PROBLEMAS DE CORTE ENVOLVENDO DUAS DIMENSÕES, FAZEMOS UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE AS SOLUÇÕES OBTIDAS PELA ABORDAGEM EM GRAFO E/OU, PROPOSTA INICIALMENTE POR MORABITO (1989), E O ALGORITMO PROPOSTO POR WANG (1983). PARA ESTA ANÁLISE, CONSIDERAMOS PROBLEMAS COM CORTE GUILHOTINADO COM RESTRIÇÕES NAS QUANTIDADES DE ITENS A SEREM PRODUZIDOS. OS RESULTADOS COMPUTACIONAIS SÃO APRESENTADOS PARA EXEMPLARES DA LITERATURA.

Palavras-chaves: PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE BIDIMENSIONAL;
ABORDAGEM EM GRAFO E/OU; ALGORITMO DE WANG.

COMPARITIVE STUDY OF THE AND/OR GRAPH APPROACH AND WANG'S ALGORITHM FOR THE TWO- DIMENSIONAL CUTTING PROBLEM

Abstract: *IN THIS WORK WE CONSIDER THE CLASSICAL TWO-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM WHOSE THE SOLUTION CONSISTS IN DETERMINE THE CUTTING PATTERN THAT MINIMIZE THE TOTAL WASTE OF MATERIAL. BETWEEN SEVERAL METHODS OF THE LITERATURE THAT SOLVE CUTTING PATTERN WITH TWO DIMENSIONS, WE MAKE A COMPARATIVE STUDY BETWEEN THE SOLUTIONS OBTAINED BY THE AND/OR GRAPH APPROACH, INITIALLY PROPOSED BY MORABITO (1989) AND WANG'S ALGORITHM (1983). TO REALIZE THIS ANALYZE, WE CONSIDER PROBLEMS WITH GUILLOTINE CUTTING AND RESTRICTIONS IN THE QUANTITIES OF ITEMS TO BE PRODUCED. THE COMPUTATIONAL RESULTS ARE PRESENTED FOR LITERATURE EXAMPLES.*

Keyword: *TWO-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEMS, AND/OR GRAPH APPROACH, WANG'S ALGORITHM.*

1. Introdução

Os problemas de corte bidimensionais aparecem em diversos processos produtivos em que placas retangulares são cortadas para a produção de diversos tipos de itens, tais como o corte de chapas metálicas e de madeira, placas de vidro, caixas de papelão, entre outros.

De modo geral, o processo de corte implica em consideráveis perdas de matéria-prima, com consequente aumento nos custos de produção. Desta forma, as indústrias procuram investir em técnicas adequadas de corte para tentar reduzir o desperdício e aumentar seus lucros. Esse é um dos motivos pelo qual os problemas de corte têm sido amplamente estudados. O objetivo é auxiliar as mais diversas áreas da indústria, considerando sua aplicabilidade no setor produtivo, onde as perdas de materiais no processo de corte podem alcançar níveis elevados.

Os problemas de corte bidimensionais são considerados de classe NP-difíceis, de modo que não existem algoritmos exatos que os solucionem em tempo polinomial. Em vista disso, vários métodos heurísticos e meta-heurísticos são desenvolvidos para solucioná-los. Embora esses métodos não garantam a obtenção da solução ótima, fornecem boas soluções para os problemas de corte bidimensionais em um tempo computacional baixo, quando comparado à utilização de algoritmos exatos.

O número de aplicações para os problemas de corte é muito grande. Na literatura existem diversas abordagens para resolvê-los, sendo que, nestes trabalhos, restrições específicas são inseridas nos problemas em função dos equipamentos de corte e condições envolvidas no processo, como por exemplo, o corte guilhotinado, o problema restrito, o problema estagiado, entre outras. Estas restrições aparecem em trabalhos como, por exemplo, as revisões em Dyckhoff e Finke (1992), Dyckhoff *et al.* (1997) Herz (1972), Christofides e Whitlock (1977), Wang (1983), Beasley (1985), Morabito (1992), Arenales e Morabito (1995), Morabito e Arenales (1994, 1996), Hifi (1997), Vianna (2000), Lodi *et al.* (2002), Hifi (2004), entre outros. Referências adicionais podem ser encontradas em ESICUP (2010).

O problema de corte guilhotinado bidimensional restrito possui um amplo alcance em aplicações comerciais e industriais e é objeto de estudo desse trabalho. Devido a sua importância e aplicabilidade, vários autores têm proposto abordagens para resolução desse tipo de problema. Dentre eles, focamos nosso estudo no algoritmo de Wang (1983) e na abordagem em Grafo E/OU de Morabito (1989). Nosso objetivo com esse estudo é comparar as soluções obtidas por esses dois métodos mostrando a viabilidade da abordagem Grafo E/OU e verificando que esse método é mais eficiente e flexível.

A abordagem em Grafo E/OU para a resolução de problemas de corte foi inicialmente proposta por Morabito (1989), para problemas de corte guilhotinado bidimensional irrestrito e não-estagiado. Morabito *et al.* (1992) estendeu esta abordagem para problemas de corte guilhotinado restrito, considerando as dimensões unidimensional, bidimensional e tridimensional (Morabito e Arenales, 1994, 1996). Arenales (1993) generalizou a abordagem para problemas de corte diversos, incluindo cortes não-guilhotinados (Arenales e Morabito, 1995). Vianna (2000) estendeu a abordagem para diferentes processos de corte.

Wang (1983), com o objetivo de minimizar a perda, propõe um método combinatório para gerar padrões de corte bidimensionais restritos. O algoritmo desenvolvido encontra modelos de corte guilhotinado por sucessivas montagens horizontais e verticais de peças retangulares, ao invés de enumerar todos os possíveis modelos de corte que podem ser feitos

na peça original. Além disso, o algoritmo determina limites de erros que medem a proximidade dos melhores modelos para a solução ótima.

Na seção 2 deste trabalho, apresentamos a definição do problema de corte de estoque bidimensional. Na Seção 3 apresentamos a abordagem em Grafo E/OU proposta inicialmente por Morabito (1989). Na Seção 4 apresentamos o algoritmo proposto por Wang em 1983. Na Seção 5 apresentamos os testes computacionais, onde comparamos as soluções obtidas pelo Grafo E/OU e pelo algoritmo de Wang. A Seção 6 destina-se às conclusões e proposta para pesquisas futuras.

2. Definição do problema de corte bidimensional

Os problemas de corte de estoque são problemas de otimização combinatória de difícil solução e grande impacto prático. Desde os trabalhos pioneiros de Gilmore e Gomory (1961, 1963 e 1965), intensa atenção vem sendo dedicada a esta família de problemas. No problema de corte bidimensional, comprimento e largura são relevantes no processo de corte.

Basicamente, problema de corte bidimensional é definido como:

Um conjunto de tipos de peças retangulares (itens) de dimensão (ℓ_i, w_i) , em que ℓ_i é o comprimento e w_i é a largura da peça i , $i = 1, \dots, m$, deve ser produzido a partir do corte de placas retangulares (objetos) de dimensões (L_k, W_k) , em que L_k é o comprimento e W_k é a largura da placa k em estoque, $k = 1, \dots, K$. São dadas as demandas dos itens e as quantidades disponíveis das placas. As demandas devem ser atendidas, cortando-se as placas disponíveis, de modo a otimizar uma determinada função objetivo.

A maneira na qual os itens são alocados na placa é chamada de padrão de corte. Um padrão de corte pode ser utilizado para cortar várias placas. A Figura 1 ilustra padrões de corte bidimensional.

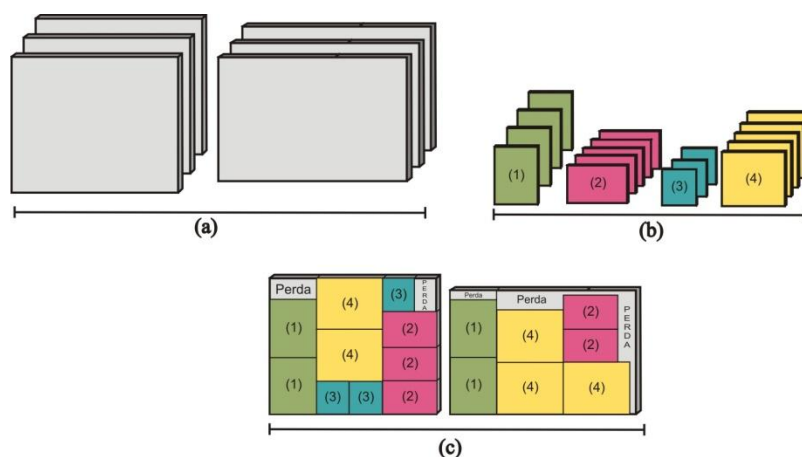


FIGURA 1 - (a) Placas em estoque; (b) Itens demandados; (c) Padrão de corte bidimensional.

O corte é chamado *guilhotinado* quando aplicado em um retângulo, produz dois novos retângulos, ou seja, o retângulo é cortado paralelamente a um de seus lados. Um padrão de corte é do tipo guilhotinado se for obtido por cortes guilhotinados sucessivos. A Figura 2

mostra um corte guilhotinado e um padrão de corte guilhotinado.

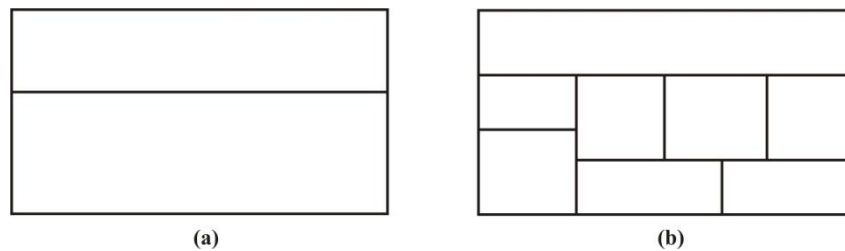


FIGURA 2 - (a) Corte guilhotinado horizontal, (b) Padrão de corte guilhotinado.

Se o corte produz novos retângulos arranjados de modo que não formam um padrão de corte guilhotinado, então dizemos que o corte é *não-guilhotinado* (Figura 3).

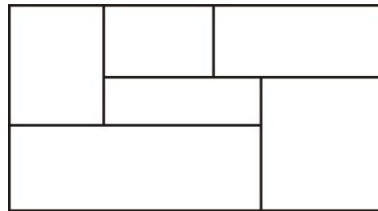


FIGURA 3 - Padrão de corte não-guilhotinado.

Um padrão de corte guilhotinado é do tipo *estagiado* se no primeiro estágio, todos os cortes são feitos de forma paralela a um dos lados da placa, no segundo estágio, os cortes são ortogonais aos do estágio anterior e assim por diante. O número de estágios de um padrão de corte é limitado por k .

A Figura 4 mostra um exemplo de padrão de corte guilhotinado 2-estágios.

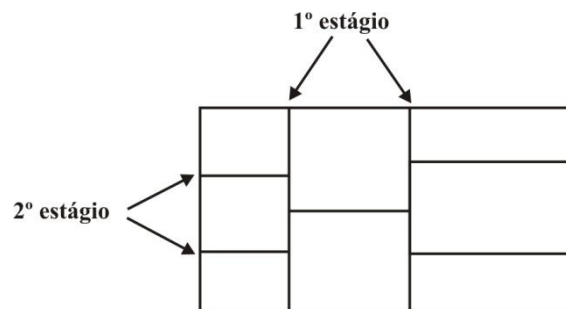


FIGURA 4 - Padrão de corte guilhotinado 2-estágios.

Um padrão de corte é chamado de *irrestrito* quando não existe limitações no número de cada tipo de itens que deve ser alocado em um padrão de corte. Caso contrário, o problema é chamado de *restrito*. O fato de ser restrito implica em um pequeno detalhe na formulação matemática do problema que dificulta sua resolução.

A modelagem do problema de corte bidimensional restrito é dada por:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } G = \sum_{i=1}^n \ell_i \cdot w_i \cdot x_i \\ &\text{sujeito a :} \\ &\quad 0 \leq x_i \leq d_i, \quad i = 1, \dots, n \\ &\quad x_i \text{ inteiro} \end{aligned}$$

em que x_i é um número inteiro que representa o número de vezes que a peça do tipo i é alocada na placa de dimensão (L_k, W_k) .

Para a construção dos padrões de corte bidimensionais utilizamos a abordagem em Grafo E/OU que é apresentada na Seção 3.

3. Abordagem em Grafo E/OU

A abordagem em Grafo E/OU para resolver problemas de corte bidimensionais foi proposta por Morabito (1989).

O Grafo E/OU pode ser definido para representar todos os possíveis padrões de corte, em que os nós representam retângulos (no caso do problema de corte bidimensional, com placa e peças retangulares) e os arcos representam cortes. Um arco (corte) estabelece uma relação entre um nó N do grafo (retângulo), com dois outros nós N_1 e N_2 (retângulos obtidos após o corte), portanto, um arco-E. Os nós N_1 e N_2 são chamados sucessores de N e, N predecessor de N_1 e N_2 . Os padrões de corte são gerados examinando-se todas as possibilidades alternativas de corte (daí, arcos-OU) e uma delas é reproduzir o próprio retângulo N (chamado de corte-0, lê-se *corte zero*), ao qual nenhum outro corte será feito, indicando o final do processo de corte. O corte-0, na Figura 5, pode ser observado no primeiro arco a esquerda emergindo da raiz.

Um corte-0 é representado por um arco ordinário (isto é, aponta para um único nó). O nó inicial é representado pela placa (L, W) e os nós finais são aqueles originados de um corte-0. Sem perda de generalidade, associam-se aos retângulos finais um ou mais itens idênticos.

Os cortes, verticais ou horizontais, podem ser restritos a um conjunto finito, chamado de *conjunto de discretização*, formado pelas combinações lineares não-negativas dos tamanhos dos itens (Herz (1972) e Morabito e Arenales (1995)). A Figura 5 ilustra diversas sequências de corte e, portanto, diversos padrões de corte. Por exemplo, três arcos-OU emergem da raiz, indicando alternativas diferentes para se obter um padrão de corte. Note que um padrão de corte é bem definido seguindo-se uma sequência de arcos-E (cortes) a partir da raiz (placa inicial) até nós finais (nós após cortes-0). Esta sequência é chamada de caminho completo e todo padrão de corte tem um caminho completo associado.

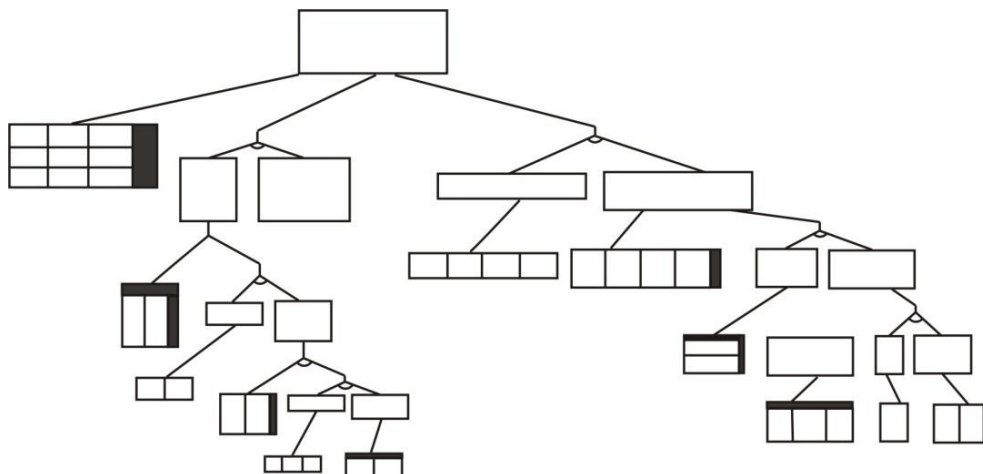


FIGURA 5 – Grafo E/OU representando padrões de corte alternativos.

Um mesmo nó também pode pertencer a sequências diferentes (isto é, retângulos de mesmos tamanhos podem ser obtidos por diferentes sequências de corte), o que caracteriza um ciclo. Apesar disto, por simplicidade de implementação (limitação do uso de memória que pode ser explosivo), duplicamos tais nós, ou seja, nós diferentes podem representar retângulos idênticos, porém obtidos de sequências de corte diferentes e, portanto, trabalhamos com árvores (grafo conexo sem ciclos). O valor de utilidade do padrão de corte é a soma dos valores de utilidade dos nós finais do caminho completo associado. A Figura 6 representa um grafo E/OU com três possíveis padrões de corte (caminho completo), sendo destacado o padrão de corte de maior valor de utilidade.

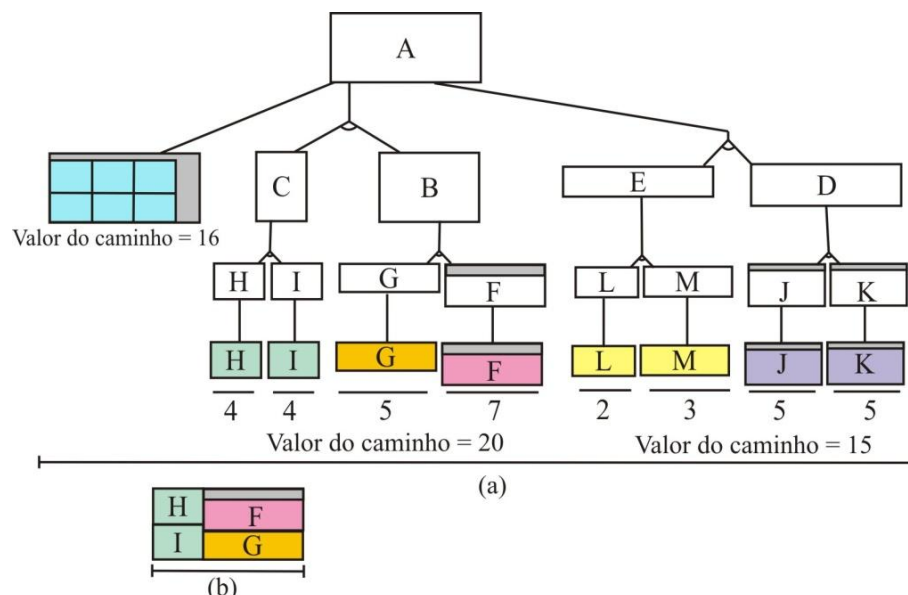


FIGURA 6 - (a) Grafo E/OU com três padrões de corte, (b) padrão de corte gerado pelo caminho com maior valor de utilidade.

Para a resolução do problema utiliza-se um método de enumeração implícita baseado numa busca no Grafo E/OU que descreve o espaço de soluções possíveis. A estratégia de

busca combina duas estratégias básicas: *backtracking* (BT) e *hill-climbing* (HC). *Backtracking* é uma variação da estratégia de busca em profundidade (*depth-first*), que consiste em ramificar primeiro o nó gerado mais recentemente, de modo que todos os caminhos do grafo sejam percorridos. *Hill-climbing*, por outro lado, é uma estratégia de busca míope, baseada em otimização local, que escolhe a melhor solução encontrada entre os sucessores de um nó, descartando os demais. Esta escolha é baseada numa avaliação dos limitantes inferior e superior da solução.

Estas duas estratégias básicas podem ser combinadas, buscando uma solução mais promissora dentre descendentes de um nó, um pouco além de seus sucessores imediatos. Para isto, é necessária a noção de profundidade de um nó no grafo. A profundidade de um nó no grafo é definida tal que, o nó raiz tem profundidade zero e, a profundidade de qualquer outro nó é igual à profundidade de seu predecessor imediato, acrescido de 1. As estratégias podem, então, ser combinadas, de modo que BT investiga todos os possíveis caminhos até uma profundidade máxima e, HC escolhe o mais promissor, descartando-se os demais (se a profundidade máxima for igual a 1, então tem-se HC pura, se ilimitado, tem-se BT puro). Cada nó no caminho mais promissor com profundidade máxima é novamente investigado por BT até a profundidade máxima, e assim por diante.

Considere um nó N , seus nós sucessores N_1 e N_2 . Seja $v(N)$ o valor do nó N dado por uma solução viável (por exemplo, a solução homogênea, ou outra melhor quando disponível) e, $LI(N)$ e $LS(N)$ o limitante inferior e limitante superior do nó N , respectivamente. Durante a expansão deste nó, são utilizados os limitantes inferiores e superiores para evitar a geração de nós desnecessários, descartando caminhos não promissores. Assim,

- se $v(N) = LS(N)$, então a solução que fornece $v(N)$ é solução ótima para o nó N .
- se $v(N) < LI(N_1) + LI(N_2)$, então o valor do nó N é atualizado por $v(N) = LI(N_1) + LI(N_2)$. Uma nova solução viável é fornecida pela composição das soluções de nós sucessores.
- se $v(N) > LS(N_1) + LS(N_2)$, ou seja, se o valor de uma solução viável no nó N é melhor que a soma dos limitantes superiores de seus sucessores, então não é necessário investigar os nós N_1 e N_2 .

Observe que, o valor de um caminho completo é a soma dos valores dos nós finais e, o melhor caminho a partir do nó N é determinado por aquele que apresenta o melhor valor $v(N)$. Com o limitante na profundidade do grafo e a estratégia *hill-climbing*, a otimalidade do problema de corte pode ser perdida.

A seguir, apresentamos o algoritmo para esta estratégia de busca híbrida.

Algoritmo BT-HC

Passo 0

Considere a placa (L, W) , as peças (t_i, w_i) , $i = 1, \dots, m$, e MP , a profundidade máxima permitida na estratégia de busca.

Considere o nó raiz como o nó que contém as informações da placa inicial.

Passo 1 – *Backtracking*

Aplice a estratégia de busca *backtracking* com profundidade MP a partir do nó raiz, armazenando o caminho que apresenta o melhor valor para este nó.

Passo 2 – Hill-Climbing

Para cada nó final (profundidade MP) do caminho gerado pela estratégia backtracking, verifique se é possível expandi-lo. Se for, retorne ao Passo 1, considerando-o como nó raiz.

Para reduzir o espaço de busca, recorre-se a algumas heurísticas que podem ser aplicadas no algoritmo, de forma a diminuir o espaço de busca (Morabito *et al.*, 1992; Arenales e Morabito, 1995; Morabito e Arenales, 1996, Vianna, 2000).

4. Algoritmo de Wang

O Algoritmo de Wang propõe um método combinatório que gera um padrão de corte restrito por meio de sucessivas montagens horizontais e verticais de peças retangulares, gerando novos retângulos R_i , a fim de obter a placa inicial com mínima perda. A Figura 7 ilustra uma montagem horizontal e vertical, respectivamente.

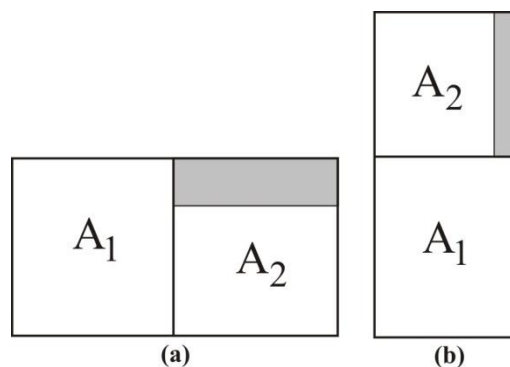


FIGURA 7 - (a) Montagem horizontal, (b) Montagem vertical.

No algoritmo de Wang existe um parâmetro para limitar a percentagem máxima aceitável de perda gerada durante a busca pelo plano de corte ótimo. Desta forma, o algoritmo de Wang pode ser descrito no Quadro 1 a seguir, sendo dados:

β : parâmetro de rejeição ($0 \leq \beta \leq 1$);

S_k : solução parcial obtida na iteração k ;

$F(k)$: lista com todas as soluções parciais obtidas na iteração k ;

$L(k)$: lista contendo todas as soluções parciais obtidas até a iteração k ;

R_i : peças retangulares i , $i = 1, 2, \dots, n$

```

Leia  $\beta$ ;
 $F(0) = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ ;
 $L(0) = F(0)$ ;
 $k = 1$ ;
Enquanto  $F(k)$  não for nulo faça
     $k = k + 1$ ;
     $F(k) = \{\}$ ;
    Gere todas as soluções parciais  $S_k$  adicionando todos os elementos de  $F(k-1)$  a todos os
    elementos de  $L(k-1)$ ;
    Para cada  $S_k$  faça
        Se ( $S_k$  não extrapolar a placa retangular) e (número de vezes que a peça  $R_i$ 
        aparece em  $S_k \leq b_i$ ) e (perda em  $S_k \leq \beta HW$ ) então
             $F(k) = F(k) + S_k$ ;
     $L(k) = L(k-1) + F(k)$ ;
 $M = k - 1$ ;
escolha elemento de  $L(M)$  como menor perda total;

```

QUADRO 1 - Algoritmo de Wang.

Na Seção 5 apresentamos os resultados computacionais obtidos utilizando a abordagem em Grafo E/OU e o Algoritmo de Wang.

5. Resultados Computacionais

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos com conjuntos de exemplos da literatura bastante conhecidos. Os testes computacionais foram realizados em um computador AMD Athlon 64 X2 Dual Core, 2600 MHz com 2 Gbytes de RAM.

No Algoritmo de Wang foram utilizados os seguintes valores de beta: 0,01, 0,02 e 0,03 respectivamente. Para o Grafo E/OU, utilizou-se de profundidade 3 sem simetria e sem heurísticas.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo de Wang e pela abordagem em Grafo E/OU nos exemplos apresentados por Wang (1983). Na tabela, n indica o número de tipo de itens de cada exemplo e, o valor de cada item é igual a sua área.

TABELA 1 - Resultados obtidos dos exemplos de Wang (1983).

	Exemplo	n	Wang	Tempo (s)	Grafo E/OU	Tempo (s)
1	W1	20	2277*	< 1	2277*	<1
2	W2	20	2694*	< 1	2694*	<1
3	W3	20	2721*	< 1	2721*	<1

* Solução ótima

As soluções para os exemplos de Oliveira e Ferreira (1990) são apresentadas na Tabela 2.

TABELA 2 - Resultados obtidos dos exemplos de Oliveira e Ferreira (1990).

	Exemplo	n	Wang	Tempo (s)	Grafo E/OU	Tempo (s)
1	OF1	10	2737*	< 1	2737*	<1
2	OF2	10	2690*	< 1	2690*	<1

* Solução ótima

Para os exemplos de Christofides e Whitlock (1977) foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 3:

TABELA 3 - Resultados obtidos com exemplos de Christofides e Whitlock (1977).

	Exemplo	n	Wang	Tempo (s)	Grafo E/OU	Tempo (s)
1	CW1	7	130	< 1	244*	<1
2	CW2	10	2768	< 1	2892*	<1
3	CW3	20	1860	< 1	1860*	<1

Nos exemplos apresentados observamos que a abordagem em Grafo E/OU obteve solução ótima para todos problemas.

Testes computacionais também foram realizados com instâncias de Fayard *et al.* (1998) e Hifi (1997), conforme Tabela 4. Nos exemplos apresentados em Fayard *et al.* (1998), o valor do item é diferente de sua área, assim não foi possível utilizar o algoritmo de Wang nesses casos. Nas demais instâncias, o valor de cada item é sua área.

TABELA 4 - Resultados obtidos com exemplos de Fayard *et al.* (1998) e Hifi (1997).

	Exemplo	n	Wang	Tempo (s)	Grafo E/OU	Tempo (s)
1	CW1	25	N/A	N/A	6402*	<1
2	CW2	35	N/A	N/A	5354*	<1
3	CW3	45	N/A	N/A	5689*	<1
4	CW4	45	N/A	N/A	6175*	<1
5	CW5	50	N/A	N/A	11659*	9
6	CW6	45	N/A	N/A	12923*	10
7	CW7	45	N/A	N/A	9898*	<1
8	CW8	35	N/A	N/A	4605*	5
9	CW9	25	N/A	N/A	10748*	<1
10	CW10	40	N/A	N/A	6515*	6
11	CW11	50	N/A	N/A	6321*	5
12	CU1	25	11900	< 1	12330*	<1
13	CU2	35	25950	< 1	26100*	<1
14	CU3	45	N/A	N/A	16723*	<1

* Solução ótima

O exemplo CU3, apresentados por Hifi (1997), possuem valor da peça igual a sua área. Porém, por ser um exemplo que gera muitos padrões de corte, o algoritmo de Wang não conseguiu obter resultados com beta diferente de 0%, ou seja, as peças não poderiam ter perda e, desta forma, não foi possível obter solução para o exemplo.

Com os testes computacionais, realizados com instâncias da literatura, observamos que a abordagem em Grafo E/OU obteve solução ótima em todos com baixo tempo computacional, mostrando que o método é bastante eficiente para resolver problemas bidimensionais.

Além destes resultados, novos testes estão sendo realizados com exemplares gerados aleatoriamente.

6. Conclusões e pesquisa futura

Neste trabalho revisamos e fizemos um estudo comparativo entre dois métodos existentes na literatura que resolvem problemas de corte bidimensionais quando há limitações nas quantidades de itens que devem ser produzidos e os cortes realizados são do tipo guilhotinado. Os métodos estudados que resolvem problemas com estas restrições foram a abordagem em Grafo E/OU e o algoritmo de Wang.

Com os testes computacionais realizados observamos que para alguns exemplares da literatura, a abordagem em Grafo E/OU apresentou resultados similares ao algoritmo de Wang, em um tempo muito baixo. Entretanto, para outros exemplares não foi possível realizar a comparação das soluções pelo fato de não haver informações suficientes nos exemplares para executar o algoritmo de Wang, o que não ocorreu com a abordagem em Grafo E/OU, já que obteve a solução ótima em todas as instâncias.

Como proposta futura, pretende-se implementar o algoritmo de Oliveira e Ferreira (1990), que propõe uma melhoria do algoritmo de Wang (1983).

Referências

- ARENALES, M. *Uma Teoria para o Problema de Corte*. Tese (Livre-docência) – Instituto de Ciências Matemática e Computação, Universidade de São Paulo - USP, São Carlos, 1993.
- ARENALES, M. N., MORABITO, R. An AND/OR - graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*, n.84, p.599-617, 1995.
- BEASLEY, J. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, n.36, p.297-306, 1985.
- CHRISTOFIDES, N. E WHITLOCK, N. C. An algorithm for two-dimensional cutting problem. *Operations Research*, n.25, p.31-44, 1977.
- DYCKHOFF, H. E FINKE, U. *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Heidelberg: Springer, 1992.
- DYCKHOFF, H., SCHEITHAUER, G., TERNO, J. *Cutting and Packing*. In *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, edited by M. Amico, F. Maffioli and S. Martello. New York: Wiley, p.393-414, 1997.
- ESICUP – Euro Special Interest Group on Cutting and Packing. (<http://www.apdio.pt/esicup/>) (accessed in 2010).
- FAYARD, D.; HIFI, M.; ZISSIMOPOULOS, V. An efficient approach for large-scale two-dimensional guillotine cutting stock problems. *Journal of the Operational Research Society*, n.49, p.1270-1277, 1998.
- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E. Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, n.13, p.94-120, 1965.
- HERZ, J. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, n.16, p.462-469, 1972.
- HIFI, M. An improvement of Viswanathan and Bagchi's exact algorithm for constrained two-dimensional cutting stock. *Computers and Operations Research*. n.24, p.727-736, 1997.
- HIFI, M. Dynamic Programming and Hill-climbing Techniques for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems. *Journal of Combinatorial Optimization*. n.8, p.65-84, 2004
- LODI, A., MARTELLO, S., MONACI, M. Two-dimensional packing problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, 141, 241-252, 2002.
- MORABITO, R. *Corte de Estoque Bidimensional*. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Matemática e Computação, Universidade de São Paulo - USP, São Carlos, 1989.

MORABITO, R. *Uma Abordagem em Grafo E/OU para o Problema do Empacotamento: Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

MORABITO, R., ARENALES, M.; ARCARO, V. An AND/OR-Graph Approach for Two-Dimensional Cutting Problems. *European Journal of Operational Research*, n.58, p.263-271, 1992.

MORABITO, R., ARENALES, M. N. An AND/OR-graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, n.1, p.59-73, 1994.

MORABITO, R., ARENALES, M. N. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR - graph approach. *European Journal of Operational Research*, n.94, p.548-560, 1996.

OLIVEIRA, J., FERREIRA, J. An improved version of Wang's Algorithm for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, n.44, p.256-266. 1990.

VIANNA, A. C. G. *Problema de Corte e Empacotamento: uma Abordagem em Grafo E/OU*. Tese (Doutorado) – Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos, 2000.

WANG, P.Y. Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems. *Operations Research* n.31, p.573-586, 1983.