

# **MODELO MATEMÁTICO PARA RESOLVER O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM SOBRAS APROVEITÁVEIS: UMA ALTERNATIVA SUSTENTÁVEL**

**KAREN ROCHA COELHO** - karenrc345@hotmail.com  
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU-FEB

**DOUGLAS NOGUEIRA DO NASCIMENTO** - douglasnn@fc.unesp.br  
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU-FC

**ADRIANA CRISTINA CHERRI** - adriana@fc.unesp.br  
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU-FC

**EDMÉA CÁSSIA BAPTISTA** - baptista@fc.unesp.br  
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU

**Resumo:** NO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM SOBRAS APROVEITÁVEIS (PCESA) UM CONJUNTO DE OBJETOS PADRONIZADOS (COMPRADOS DE FORNECEDORES) OU NÃO PADRONIZADOS (RETALHOS GERADOS DURANTE O PROCESSO DE CORTE) DISPONÍVEIS EM ESTOQUE DEVEM SER CORTADOS EMM UM CONJUNTO DE ITENS COM DIMENSÕES E QUANTIDADES ESPECIFICADAS. O OBJETIVO CONSISTE EM DETERMINAR QUAL A MELHOR FORMA DE CORTAR OBJETOS DE MODO QUE A PERDA SEJA MINIMIZADA E CONSIDERANDO QUE UMA DETERMINADA QUANTIDADE DE RETALHOS PODE RETORNAR AO ESTOQUE PARA ATENDER FUTURAS DEMANDAS. COM ESSA ESTRATÉGIA, EVITA-SE AO MÁXIMO O DESPERDÍCIO DE MATERIAL, COLABORANDO COM O MEIO AMBIENTE E PROPORCIONANDO MAIOR LUCRO AO FABRICANTE. PARA RESOLVER O PCESA UTILIZAMOS UM MODELO DA LITERATURA E PROPOMOS ALTERAÇÕES PARA MELHOR DESIGNAR OS RETALHOS GERADOS. TESTES COMPUTACIONAIS FORAM REALIZADOS COM EXEMPLARES GERADOS ALEATORIAMENTE E MOSTRARAM UM BOM DESEMPENHO DO MODELO PROPOSTO.

**Palavras-chaves:** PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL;  
APROVEITAMENTO DE SOBRAS; OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA.

**Área:** 6 - PESQUISA OPERACIONAL  
**Sub-Área:** 6.1 - PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

# MATHEMATICAL MODEL FOR SOLVING THE CUTTING STOCK PROBLEM WITH USABLE LEFTOVERS: A SUSTAINABLE ALTERNATIVE

**Abstract:** *IN THE CUTTING STOCK PROBLEM WITH USABLE LEFTOVERS (CSPUL) A SET OF STANDARD OBJECTS (BOUGHT FROM SUPPLIERS) OR NON STANDARD OBJECTS (RETAILS GENERATED IN PREVIOUS CUTTING PROCESSES) AVAILABLE IN STOCK MUST BE CUT IN ORDER TO PRODUCE A SET OF DEMANDED ITEMS WITH DIMENSIONS AND QUANTITIES SPECIFIED. THE OBJECTIVE CONSISTS OF CUTTING THE OBJECTS SO THAT THE WASTE IS MINIMIZED AND CONSIDERING THAT A CERTAIN AMOUNT OF RETAILS CAN RETURN TO STOCK TO MEET FUTURE DEMANDS. THIS STRATEGY AVOIDS THE MATERIAL WASTE, COLLABORATES WITH THE ENVIRONMENT AND PROVIDES GREATER PROFIT TO THE MANUFACTURER. TO SOLVE THE PCESA, A MODEL OF THE LITERATURE WAS USED. WE ALSO PROPOSE SOME CHANGES IN THIS MODEL TO BETTER DESIGNATE THE RETAILS GENERATED. COMPUTATIONAL TESTS WERE PERFORMED WITH INSTANCES RANDOMLY GENERATED AND SHOWED A GOOD PERFORMANCE OF THE PROPOSED MODEL.*

**Keyword:** *ONE-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEMS; USABLE LEFTOVERS; COMBINATORIAL OPTIMIZATION.*

## 1. Introdução

Os problemas de corte de estoque (PCE) consistem em cortar um conjunto de objetos disponíveis em estoque em um conjunto de itens, cujas quantidades e tamanhos são especificados, com a finalidade de atender demandas de clientes ou compor estoque e otimizando uma determinada função objetivo. São exemplos de função objetivo: minimizar o número total de objetos cortados, minimizar o custo de cortar objetos, maximizar o lucro, minimizar a perda e o descarte de resíduos, entre outras. A aplicação desse tipo de problema ocorre em diversos processos industriais tais como o corte de bobinas de aço e de papel, peças de couro, chapas de vidro, peças de madeira, barras de ferro.

As várias aplicações na indústria, sua importância econômica, a dificuldade em resolvê-los e a complexidade computacional tornam os PCE problemas muito importantes da otimização combinatória, além de motivar a comunidade de pesquisa operacional a encontrar boas soluções para esses problemas.

Uma solução para os PCE, frequentemente chamada de plano de corte, é gerada por um conjunto de padrões de corte (um padrão de corte define um subconjunto de itens que deve ser cortado de um objeto disponível em estoque) e suas respectivas frequências, isto é, quantas vezes cada padrão de corte deve ser cortado para produzir itens. Determinar de forma ótima a frequência com que cada padrão de corte deve ser produzido é uma das grandes dificuldades na resolução destes problemas. A frequência de um padrão de corte deve ser um número inteiro e, mesmo para problemas de pequeno porte, isso pode ser inviável. Desta forma, recorre-se a procedimentos heurísticos que, embora não forneçam solução ótima para o problema, de modo geral, apresentam soluções próximas da otimalidade.

Os PCE começaram a ser estudados por volta de 1940, embora as principais pesquisas sobre o assunto tenham surgido na década de 1960 com os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963). Em 1961 os autores apresentaram um método pioneiro para a resolução de PCE, no qual utilizaram o *método simplex com geração de colunas* para um modelo de otimização linear, que resolveu pela primeira vez um problema real de corte de estoque unidimensional. Em Gilmore e Gomory (1963) foi apresentado um novo método para o problema da mochila e foi realizado um estudo de caso no corte de papel. Nos PCE, o problema da mochila surge como um subproblema a ser resolvido, fornecendo as novas colunas (padrões de corte) para o problema.

São várias as situações em que surgem os problemas de corte de estoque, cada um deles com suas especificidades, restrições e objetivos definidos pelas exigências práticas

impostas em cada ambiente em que estes problemas aparecem. Uma consequência do processo de corte é o aproveitamento de sobras de objetos cortados desde que estas sejam suficientemente grandes para retornar ao estoque e atender futuras demandas. Estas sobras que retornam ao estoque são denominadas *retalhos*. Este problema é conhecido na literatura como Problema de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis (PCESA).

Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory (1963) e considerou o aproveitamento de sobras durante o processo de corte. Gradisar et al. (1997) apresentaram um estudo sobre PCE em uma indústria de tecidos que possuía em estoque todos os objetos (rolos) com diferentes comprimentos. Foi proposto um modelo matemático para minimizar o número de itens cujas demandas não são atendidas durante o processo de corte e a perda total de material, entretanto, este modelo não foi utilizado para resolver o problema. Os autores propuseram um procedimento heurístico (COLA) que também considera a possibilidade de retalhos retornarem ao estoque para atender futuras demandas.

Abuabara e Morabito (2009) utilizaram o modelo matemático proposto por Gradisar et al. (1997) para resolver o PCESA em uma empresa brasileira que corta tubos estruturais metálicos para a produção de aeronaves agrícolas. O problema resolvido considerou diferentes tipos de objetos em estoque em quantidades suficientes para atender a demanda.

Cherri et al. (2009) realizaram alterações em heurísticas (construtivas e residuais) clássicas da literatura para solucionar o PCESA. Embora as soluções obtidas tenham sido boas em termos de perdas, nenhuma prioridade de uso dos retalhos em estoque foi imposta. Assim, estes poderiam permanecer em estoque durante longo período de tempo. Em Cherri et al. (2013) são modificadas as heurísticas desenvolvidas em Cherri et al. (2009) e, além de minimizar a perda, assume-se que retalhos em estoque devem ter prioridade em utilização durante o processo de corte.

Cherri et al. (2014) reuniram trabalhos da literatura que consideram o PCESA para o caso unidimensional. Neste survey, os autores apresentam as aplicações do PCESA, o modelo matemático (quando proposto), comentários dos resultados obtidos em cada trabalho e propostas para continuidades de estudos relacionados ao PCESA.

Considerando que o objetivo central de uma empresa é maximizar o lucro e a matéria prima não convertida em produto pode significar prejuízos, tecnologias e processos que visam o máximo aproveitamento das peças de estoque e a utilização eficiente dessa matéria prima, como é o caso dos PCESA, são de extrema importância no processo industrial, pois, uma vez

que as sobras não são descartadas, ocorre menor desperdício que gera aumento no lucro da empresa e minimiza os prejuízos ao meio ambiente, que recebe menor quantidade de resíduos.

Neste trabalho, para resolver o PCESA, realizamos uma pequena alteração no modelo matemático proposto por Silva et al. (2013), que é baseado no modelo de Gilmore e Gomory (1963) e também propomos alterações para melhor aproveitamento das sobras. No modelo utilizado, os padrões de corte com ou sem retalho são considerados para um mesmo tipo de objeto e a quantidade total de retalhos gerados é limitada. Para verificar o desempenho do modelo, testes computacionais foram realizados com exemplares gerados aleatoriamente.

A Seção 2 deste trabalho discorre brevemente sobre o PCESA e como esse tipo de problema é importante para o desenvolvimento sustentável. Na Seção 3 será apresentado o método de resolução do modelo matemático e na Seção 4 alguns testes computacionais são realizados. A Seção 5 refere-se às conclusões e trabalhos futuros.

## 2. O PCESA e a Sustentabilidade

O PCESA tem por finalidade a obtenção de itens com dimensões e quantidades especificadas a partir do corte de objetos padronizados (comprados de fornecedores) ou não padronizados (retalhos gerados durante os processos de corte) disponíveis em estoque, objetivando que a sobra de material seja minimizada e permitindo que uma quantidade limitada de retalhos retorne ao estoque, não sendo computado como perda. Além disso, os retalhos disponíveis em estoque, devem ter prioridade de uso, pois, ocupam espaço físico e, dependendo do material, estes podem se tornar sucatas se não forem utilizados em um certo período de tempo.

A Figura 1 ilustra um PCESA. Neste exemplo, uma sobra com tamanho igual ou superior a 5 metros é um retalho. Os objetos com comprimentos 11, 10 e 7 são retalhos em estoque.

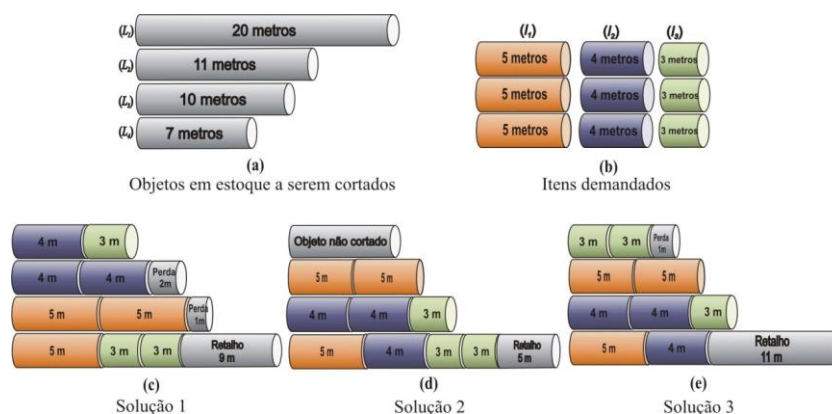


FIGURA 1 – Exemplo de PCESA. Fonte: Cherri (2009)

Neste exemplo, a Solução 1 e a Solução 3 cortam todos os retalhos do estoque e geram um novo que deve retornar ao estoque. Assim, como a perda total na Solução 3 é menor, ela é melhor do que a Solução 1. A Solução 2 tem perda nula, mas fica com dois retalhos em estoque. Considerando nossa abordagem, a Solução 3 é a mais adequada.

No presente trabalho, para resolver o PCESA realizamos uma pequena alteração no modelo matemático de Silva *et al.* (2013), o qual foi resolvido utilizando a técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory (1963)). Com este modelo, cortes parciais nos objetos padronizados disponíveis em estoque são avaliados implicitamente, permitindo que retalhos sejam gerados para atender demandas futuras.

Consideraremos os seguintes dados para a modelagem do problema:

- $S$ : número de tipos de objetos padronizados. Denotamos objetos tipo  $s \in \{1, \dots, S\}$ ;
- $R$ : número de tipos de retalhos em estoque. Denotamos retalhos  $s \in \{S+1, \dots, S+R\}$ ;
- $L_s$ : comprimento do objeto tipo  $s$ ,  $s = 1, \dots, S$ ;
- $e_s$ : número de objetos tipo  $s$  em estoque,  $s = 1, \dots, S$ ;
- $m$ : número de tipos de itens demandados;
- $\ell_i$ : comprimento do item tipo  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
- $d_i$ : demanda do item tipo  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
- $J_s$ : conjunto de padrões de corte para o objeto tipo  $s$ ,  $s = 1, \dots, S+R$ ;
- $J_s(k)$ : conjunto de padrões de corte para o objetos padronizados tipo  $s$  com sobra do tipo  $k$ ,  $k = 1, \dots, R$ ,  $s = 1, \dots, S$ ;
- $a_{ijs}$ : número de itens tipo  $i$  cortados no padrão  $j$  para o objeto  $s$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
- $c_{js}$ : custo de cortar o objeto  $s$  de acordo com o padrão de corte  $j$ ,  $j \in \{J_s, s = 1, \dots, S+R\} \cup \{J_s(k), k = 1, \dots, R, s = 1, \dots, S\}$ ;
- $U$ : número máximo permitido de retalhos;
- $\alpha$ : parâmetro utilizado para estimular a geração de novos retalhos;
- $\beta$ : parâmetro utilizado para estimular o uso de retalhos disponíveis em estoque.

### Variáveis:

$x_{js}$ : número de objetos tipo  $s$  cortados segundo o padrão de corte  $j$ ,  $j \in \{J_s, s = 1, \dots, S+R\} \cup \{J_s(k), k = 1, \dots, R, s = 1, \dots, S\}$ ;

### Observações:



- i. Um objeto padronizado pode ser completamente cortado ou parcialmente cortado. No segundo caso, dois objetos são gerados: um objeto reduzido que será cortado em itens e um retalho que retornará ao estoque para atender futuras demandas;
- ii. Novos retalhos podem ser gerados apenas com a finalidade de reduzir a perda;
- iii. Os tamanhos dos retalhos obtidos de um objeto padronizado  $s$  são  $L_s - \ell$ , em que  $\ell \in [l_s^{\min}, l_s^{\max}]$ . O intervalo  $[l_s^{\min}, l_s^{\max}]$  pré-define o comprimento dos novos retalhos.

### Modelo Matemático

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} + \alpha \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} c_{js} x_{js} + \beta \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} a_{ijs} x_{js} + \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} a_{ijs} x_{js} + \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} a_{ijs} x_{js} \geq d_i, i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J_s} x_{js} + \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} x_{js} \leq e_s, s = 1, \dots, S \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J_s} x_{js} \leq e_s, s = S+1, \dots, R \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} x_{js} - \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} x_{js} \leq U - \sum_{s=S+1}^{S+R} e_s \quad (5)$$

$$x_{js} \geq 0 \text{ inteiro}, j \in \{J_s, s=1, \dots, S+R\} \cup \{J_s(k), k=1, \dots, R, s=1, \dots, S\} \quad (6)$$

No modelo (1)-(6) a principal decisão a ser tomada consiste em determinar a frequência com que cada padrão de corte deve ser cortado (modelo matemático orientado ao padrão). A função objetivo (1) minimiza os custos de cortar objetos, sejam eles padronizados ou não padronizados (retalhos). A restrição (2) nos assegura que a quantidade de itens cortados atenda a demanda. As restrições (3) e (4) garantem que a quantidade de objetos padronizados ou retalhos utilizados durante o processo de corte não seja superior à quantidade disponível em estoque. A restrição (5), que se diferencia do modelo apresentado por Silva et al. (2013), limita a quantidade de retalhos que podem ser gerados durante o processo de corte. A restrição (6) refere-se a integralidade da variável  $x_{js}$ .

Com o modelo (1)-(6), pretende-se melhor aproveitar a matéria prima, aumentando o lucro da empresa e diminuindo os danos ao meio ambiente. A lei nº 12.305 de 2 de Agosto de

2010, que Institui a Política Nacional de Resíduos sólidos, define resíduo industrial como “os gerados nos processos produtivos e instalações industriais” e estabelece que, na gestão e gerenciamento de resíduos sólidos deve ser observada a ordem de prioridade: não geração, redução, reutilização, reciclagem, tratamento de resíduos e disposição final ambientalmente adequada. Também estabelece que deve haver uma responsabilidade compartilhada pelo ciclo de vida dos produtos, ou seja, um conjunto de atribuições individualizadas e encadeadas dos fabricantes e demais membros da cadeia produtiva. Dessa forma, o aproveitamento das sobras é uma importante ação do fabricante para atender esta política, diminuindo, assim, a geração de resíduos e seu descarte no meio ambiente.

O fabricante pode considerar a imagem ambiental como forte pré-requisito ao realizar um negócio, bem como pode ganhar encomendas devido à sua capacidade ambiental. Durante as últimas décadas as empresas começaram a adotar o conceito amplo de desenvolvimento sustentável, como proposta de que o crescimento econômico pode ocorrer ao mesmo tempo em que se protege o meio ambiente. O desenvolvimento sustentável pode ser definido como a “satisfação das necessidades da geração atual, sem comprometer a capacidade das gerações futuras satisfazerem as suas próprias necessidades” (ANGELL E KLASSEN, 1999).

Govindan et al. (2014), apresentam algumas definições para eco-eficiência, que é uma ferramenta de desenvolvimento sustentável que traz elevados benefícios ao desempenho operacional da empresa. Esse é um dos objetivos do modelo utilizado para resolver o PCESA apresentado nesse trabalho. Desejamos cortar objetos de modo que a maior quantidade possível de material seja aproveitada, o que possibilita menor geração de resíduos e, conseqüentemente, aumento no lucro da empresa que não desperdiça matéria-prima.

Outra possibilidade para colaborar com o desenvolvimento sustentável é considerar no modelo apresentado a venda de retalhos gerados durante o processo de corte, ou seja, além de gerar retalhos para atender a demandas futuras, os retalhos gerados poderiam ser vendidos para empresas cujas necessidades sejam atendidas por objetos não padronizados. De acordo com Angell e Klassen (1999), os resíduos de um processo industrial podem servir como matéria prima para outro processo industrial. Desta forma, os retalhos gerados durante o processo de corte podem ser utilizados como matéria-prima por outra empresa, criando uma nova fonte de renda para a empresa que vende estes retalhos.

Inserindo a possibilidade de vendas no retalho no modelo (1)-(6), propomos a função objetivo:



$$\text{Minimize } f(x) = \sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} + \alpha \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} c_{js} x_{js} + \beta \sum_{s=S+1}^R \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} - \gamma \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} v_{js} y_{js}$$

em que  $y_{js}$  representa o número de retalhos cortados do objeto tipo  $s$  segundo o padrão de corte  $j$  que serão vendidos e  $v_{js}$  é o valor do retalho a ser vendido. O parâmetro  $\gamma$  pode ser utilizado para estimular a venda de retalhos.

Para esta função objetivo, a restrição (5) que limita o total de padrões de corte gerados com retalho deve ser alterada para  $\sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} (x_{js} - y_{js}) - \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} x_{js} \leq U - \sum_{s=S+1}^{S+R} e_s$ , para limitar o total de retalhos considerando que parte dos mesmos será vendida e não apenas estocada como anteriormente. Também devem ser acrescentadas duas novas restrições:

- $\sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} y_{js} \leq Q$ : garante que a quantidade de retalhos vendida não seja maior que uma quantidade permitida  $Q$ ;
- $x_{js} - y_{js} \geq 0, s = 1, \dots, S, j \in J_s$ : garante que não podemos vender uma quantidade de retalhos maior do que a quantidade gerada. Assim como ocorre com  $x_{js}$  no problema original,  $y_{js} \geq 0$ , inteiro e  $j \in \{J_s, s=1, \dots, R\} \cup \{J_s(k), k=1, \dots, R, s=1, \dots, S\}$ .

### 3. Método

Devido às condições de integralidade das variáveis (restrição (6)), é muito difícil resolver o modelo (1)-(6) na otimalidade. Neste caso, as condições de integralidade (6) são relaxadas e a técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory (1963)) foi utilizada. A implementação da geração de colunas foi desenvolvida utilizando o software CPLEX, que é uma poderosa ferramenta para resolver problemas de otimização linear, com a interface OPL (Optimization Programming Language).

Além de alterarmos a restrição (5) do modelo proposto em Silva et al. (2013), alteramos a implementação computacional e os testes computacionais realizados. A implementação de Silva et al. (2013) não considera retalhos em estoque e desta forma, o modelo (1)-(6) não pôde ser totalmente avaliado, pois, são anulados o último bloco de somatórios na função objetivo (1) do modelo e a restrição (4). A restrição (5) também foi parcialmente utilizada. Como consequência, os testes computacionais apresentados consideram apenas um tipo de objeto padronizado em estoque, ou seja, não há retalhos.

Apesar de propormos alterações para o modelo matemático (1)-(6) incluindo a possibilidade de venda de retalhos, essas alterações ainda estão em fase de implementação.

Nos testes computacionais realizados, consideramos objetos padronizados e alguns retalhos em estoque. Além disso, valores diferenciados são atribuídos aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para estimular gerar ou cortar retalhos. As soluções apresentadas na seção a seguir foram obtidas com a condição de integralidade das variáveis relaxadas, ou seja, os valores obtidos para as variáveis  $x_{js}$  são contínuos. Para tornar estas variáveis inteiras, alguns procedimentos já foram implementados, porém, não retornaram boas soluções. Outros procedimentos heurísticos estão sendo estudados e adaptados para considerar o aproveitamento de sobras.

#### 4. Resultados

Para avaliar o comportamento do modelo (1)-(6), testes computacionais foram realizados com problemas gerados aleatoriamente. Geramos um estoque com 4 tipos de objetos, sendo 1 objeto padronizado e 3 tipos de retalhos. A dimensão dos objetos padronizados variou entre 1200 e 1500, com estoque suficiente para atender toda a demanda. Para os retalhos em estoque, a dimensão variou entre 400 e 700, com disponibilidade de 5 unidades. Na Tabela 1, são apresentados os dados referentes ao estoque de objetos e a demanda de itens de cada problema. Nesta tabela, (Obj. Pad.) refere-se ao comprimento do objeto padronizado, (tipo/tamanho) refere-se à quantidade de tipos de itens demandados e o intervalo no qual os mesmos foram gerados. Em (Demanda) apresenta-se o intervalo no qual a demanda dos itens foi gerada.

TABELA 1: Dados do estoque e demanda

Teste	Obj. Pad.	Retalhos		Itens	Demanda
		Tamanho	Estoque	(tipo/tamanho)	
1	1500	400/500/600	5	11/[50,750]	[15,350]
2	1500	400/500/600	5	11/[200,500]	[1,10]
3	1500	400/500/600	5	11/[200,500]	[5,250]
4	1400	580/640/695	5	11/[200,650]	[50,250]
5	1300	400/500/600	5	15/[50,750]	[15,350]
6	1200	580/640/695	5	15/[200,500]	[1,100]
7	1400	580/640/695	5	20/[300,600]	[1,100]

Os testes computacionais foram realizados em um microcomputador Intel Core i5 (2.67 GHz, com 4 GB de memória RAM).

As tabelas 2 a 5 apresentam os dados obtidos para diferentes números de retalhos (U), com  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\alpha = 0,95$  e  $\beta = 1,05$  e,  $\alpha = 1,05$  e  $\beta = 0,95$ . Nestas tabelas, (Ret. Ger.) refere-se à quantidade de retalhos gerados durante o processo de corte e (Ret. Usad.) refere-se à quantidade de retalhos usados durante o processo de corte. As dimensões dos novos retalhos foram definidas no intervalo [400, 700]. Para cada problema foi permitido gerar 3 tipos de retalhos com quantidade U definida em cada tabela.

TABELA 2: Resultados de perda para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com 'U' = 0.

Teste	$\alpha = \beta = 1$			$\alpha = 0,95 / \beta = 1,05$			$\alpha = 1,05 / \beta = 0,95$		
	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.
1	0,0125	0	0	0,0125	0	0	0,0125	0	0
2	1,1599	0	0	1,1599	0	0	1,1599	0	2
3	0,0861	0	0	0,0861	0	0	0,0861	0	0
4	1,5832	4	4	1,6157	0	0	1,6105	0	4
5	0,2254	2	2	0,2272	0	0	0,2266	0	2
6	0,6281	4	4	0,6439	0	0	0,6355	0	4
7	0,2090	0	0	0,2090	0	0	0,2090	0	0

TABELA 3: Resultados de perda para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com 'U' = 2.

Teste	$\alpha = \beta = 1$			$\alpha = 0,95 / \beta = 1,05$			$\alpha = 1,05 / \beta = 0,95$		
	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.
1	0,0125	2	0	0,0125	2	0	0,0125	0	0
2	0,8300	2	0	0,8300	2	0	1,1599	0	2
3	0,0849	2	0	0,0849	2	0	0,0861	0	0
4	1,5697	6	4	1,6020	2	0	1,6105	0	4
5	0,2242	4	2	0,2260	2	0	0,2266	0	2
6	0,6244	6	4	0,6401	2	0	0,6355	0	4
7	0,2067	2	0	0,2067	2	0	0,2090	0	0

TABELA 4: Resultados de perda para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com 'U' = 4.

Teste	$\alpha = \beta = 1$			$\alpha = 0,95 / \beta = 1,05$			$\alpha = 1,05 / \beta = 0,95$		
	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.
1	0,0125	4	0	0,0125	4	0	0,0125	0	0
2	0,5653	4	0	0,5653	4	0	1,1599	0	2
3	0,0836	4	0	0,0836	4	0	0,0861	0	0
4	1,5562	8	4	1,5884	4	0	1,6105	0	4
5	0,2230	6	2	0,2248	4	0	0,2266	0	2
6	0,6207	8	4	0,6364	4	0	0,6355	0	4
7	0,2044	4	0	0,2044	4	0	0,2090	0	0

TABELA 5: Resultados de perda para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com 'U' = 8.

Teste	$\alpha = \beta = 1$			$\alpha = 0,95 / \beta = 1,05$			$\alpha = 1,05 / \beta = 0,95$		
	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.	Perda (%)	Ret. Ger.	Ret. Usad.
1	0,0125	8	0	0,0124	8	0	0,0125	0	0

2	0,3888	7,92	0	0,3746	8	0	1,1599	0	2
3	0,0820	8	0	0,0820	8	0	0,0861	0	0
4	1,5294	12	4	1,5614	8	0	1,6105	0	4
5	0,2206	10	2	0,2225	8	0	0,2266	0	2
6	0,6188	9,1	4	0,6290	8	0	0,6355	0	4
7	0,1999	8	0	0,1999	8	0	0,2090	0	0

Observando os resultados das tabelas 2 a 5 verificamos que as soluções obtidas são muito boas, com porcentagens de perdas muito baixas, mesmo para problemas com itens grandes e demandas baixas. Problemas com essas características tendem a apresentar soluções com perdas elevadas pelo fato de não ser possível realizar muitas combinações de itens nos padrões de corte.

Nos resultados apresentados, é possível verificar que, mesmo para  $U = 0$  alguns problemas geram retalhos. Isso ocorre pelo fato da restrição (5), limitar a quantidade de retalhos gerados baseando-se em  $U$  e na quantidade de retalhos cortados. Por exemplo, quando  $U = 0$ , não será proibido gerar retalhos. Apenas limita-se a quantidade de retalhos gerados à quantidade de retalhos cortados, ou seja, se nenhum retalho em estoque for cortado, nenhum retalho poderá ser gerado mas, se 1 ou mais retalhos do estoque forem cortados, a mesma quantidade de retalhos poderá ser gerada. É o caso dos testes 4, 5 e 6 na Tabela 2.

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  têm uma grande influência sobre o uso ou produção de retalhos. Quando se atribui um valor menor ou maior que 1 a um dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , há estímulo ou penalidade para gerar ou cortar retalhos. Essas diferenças influenciam diretamente na solução final. Por exemplo, quando  $\beta = 0,95$ , de modo geral, as perdas apresentam um pequeno aumento. Isso ocorre pelo fato de o modelo priorizar o corte de retalhos do estoque e, como esses objetos possuem comprimentos menores que os objetos padronizados, a combinação de itens no padrão de corte fica mais restrita e a perda nesses objetos tendem a ser maiores.

Outra variação que observa-se nas tabelas é a redução da perda quando o valor de  $U$  aumenta. Essa redução no valor da perda já era esperada, pois, se o modelo permite gerar mais retalhos, uma consequência é que padrões de corte com perdas mais elevadas sejam alterados por padrões de corte com retalhos e com perdas menores.

Embora as soluções apresentadas sejam muito boas, elas não são ideais por serem contínuas, ou seja, a frequência com que os padrões de corte devem ser cortados para gerar os itens demandados não é um número inteiro. Desta forma, procedimentos heurísticos estão sendo estudados e serão implementados para torná-las inteiras.

Com relação ao tempo computacional, todos os problemas foram resolvidos em um tempo aceitável na prática (em média, 5 minutos por problema).

## 5. Conclusões e trabalhos futuros

Para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis (PCESA), alteramos um modelo matemático proposto recentemente na literatura, o qual foi implementado utilizando a interface OPL do software CPLEX. Utilizando o modelo, cortes parciais nos objetos disponíveis em estoque foram realizados, permitindo que retalhos sejam gerados para atender demandas futuras. Para avaliar o desempenho do modelo alguns exemplos foram gerados aleatoriamente e os resultados obtidos mostraram um bom comportamento e desempenho do modelo matemático que penaliza ou incentiva a geração ou o uso de retalhos do estoque e, estas imposições influenciam diretamente a perda gerada.

Como as soluções obtidas até o momento são contínuas, um procedimento heurístico que também deve considerar o aproveitamento de sobras está sendo estudado. Novos testes computacionais serão gerados e devem simular uma situação por períodos, em que os retalhos gerados em um período devem ser utilizados no período seguinte.

Também pretende-se avaliar o modelo incluindo a possibilidade de venda dos retalhos e considerando as novas restrições decorrentes da venda. Desta forma, será analisado qual deve ser o tamanho dos possíveis retalhos e qual o valor de venda dos mesmos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) e *Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP – Proc.: 2013/18607-9).

## Referências

- ABUABARA, A.; MORABITO, R. Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, v. 169, n. 1, p. 149-165, 2009.
- ANGELL, L. C.; KLASSEN, R. D. Integrating environmental issues into the mainstream: an agenda for research in operations management. *Journal of Operations Management*, v. 17, n. 5, p. 575-598, 1999.
- BRASIL. Lei nº 12.305, de 02 de agosto de 2010. Institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 03 ago. 2010, p. 2.
- CHERRI, A. C. *Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis*. 215 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover – A heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, v. 196, n. 3, p. 897-908, 2009.

- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. The usable leftover one-dimensional cutting stock problem – a priority-in-use heuristic. *International Transactions in Operational Research*, v. 20, n. 2, p. 189-199, 2013.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H.; POLDI, K. C.; VIANNA, A. C. G. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers – A survey. *European Journal of Operational Research*, v. 236, n. 2, p. 395-402, 2014.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting – stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849-859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem – Part II. *Operations research*, v. 11, n. 6, p. 863-888, 1963.
- GOVINDAN, K.; SARKIS, J.; JABBOUR, C. J. C.; ZHU, Q.; & GENG, Y. Eco-efficiency based green supply chain management: Current status and opportunities. *European Journal of Operational Research*, v. 233, n. 2, p. 293-298, 2014.
- GRADISAR, M.; JESENKO, J.; RESINOVIC, C. Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operations Research*, v. 24, n. 10, p. 945-953, 1997.
- SCHEITHAUER, G. A note on handling residual lengths. *Optimization*, v. 22, n. 3, p. 461-466, 1991.
- SILVA, E. F.; VIANNA, A. C. G.; CHERRI, A. C.; SILVA, C. T. L.; ARENALES, M. *Modelo matemático para o problema de corte com sobras aproveitáveis*. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL – SUDESTE, 2., 2013, Bauru.