

## O problema de corte unidimensional com geração de retalhos

**Adriana Cherri\***

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP,  
17033-360, Bauru, SP  
E-mail: [adriana@fc.unesp.br](mailto:adriana@fc.unesp.br)

**Everton Fernandes da Silva\*,**

Departamento de Computação, Faculdade de Ciências, UNESP,  
17033-360, Bauru, SP  
E-mail: [evertaum@fc.unesp.br](mailto:evertaum@fc.unesp.br),

**Andréa Vianna**

[vianna@fc.unesp.br](mailto:vianna@fc.unesp.br)

**Palavras-chave:** *Otimização, problema de corte, aproveitamento de sobras, geração de colunas.*

**Resumo:** *Neste trabalho apresentamos um estudo sobre o problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis (PCESA). Geralmente, os PCESA têm como objetivo principal perda mínima com a possibilidade de alguns retalhos retornarem ao estoque para atender futuras demandas. Desta forma, apresentamos o estudo de um modelo da literatura para resolver o PCESA e propomos algumas modificações para obter a solução. Para analisar as soluções, um gerador aleatório de exemplos foi utilizado, baseado em um trabalho da literatura. Neste gerador sucessivos problemas são resolvidos em um horizonte de tempo. Para cada período, novas demandas surgem e um novo problema é resolvido considerando informações do estoque e de retalhos gerados nos períodos anteriores. Os testes computacionais realizados mostraram um bom desempenho da estratégia desenvolvida.*

### 1. Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em cortar um conjunto de peças disponíveis em estoque para a produção de peças menores, em quantidades especificadas, otimizando uma determinada função objetivo. Estes problemas aparecem em diversos processos industriais, em que os objetos correspondem a barras de aço, bobinas de papel e alumínio, placas de madeira, chapas de vidro e fibra de vidro, peças de couro etc.

Um problema pouco estudado e comumente encontrado na prática industrial consiste em determinar uma política de aproveitamento das sobras de objetos cortados. Estas sobras, desde que não sejam demasiadamente pequenas, podem retornar ao estoque como retalhos para atender demandas futuras e, portanto, não são consideradas perdas. Esse problema é frequentemente denominado de *Problema de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis* (PCESA). O problema de aproveitamento de sobras foi citado por Brown (1971), entretanto, só mais tarde começaram a aparecer os primeiros trabalhos que abordam este tema.

Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory (1963) incluindo itens extras aos demandados e sem haver demandas para serem atendidas. Gradisar *et al.* (1997), com o objetivo de criar um plano de corte unidimensional para diminuir a perda ou então concentrá-las em um único objeto, apresentaram um procedimento heurístico para otimizar o corte de rolos em uma indústria de tecidos.

Abuabara e Morabito (2009) escreveram modelos matemáticos para o problema proposto por Gradisar *et al.* (1997). O PCESA também foi estudado por Cherri *et al.* (2009a) em que heurísticas bem conhecidas da literatura foram modificadas, de modo que as sobras geradas em cada padrão de corte deveriam ser pequenas para serem descartadas como perdas ou suficientemente grandes para serem estocadas como retalhos, os quais seriam utilizados no atendimento de futuras demandas.

Cui e Yang (2010) apresentaram uma extensão do modelo proposto por Scheithauer (1981). No modelo matemático de Cui e Yang (2010) a quantidade de retalhos gerada durante o processo de corte é limitada e os seus possíveis comprimentos são previamente definidos. Além disso, o retalho gerado é considerado na função objetivo com um valor associado. Os possíveis retalhos (definidos previamente)

\* Os autores agradecem à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

também são considerados durante o processo de corte, porém, sem demandas para serem atendidas. Neste trabalho, para resolver o PCESA, utilizamos a mesma ideia do trabalho de Cui e Yang (2010) com algumas alterações na definição dos retalhos, na forma de resolução do procedimento de geração de colunas e no procedimento heurístico utilizado para obter soluções inteiras. Para análise das soluções, utilizamos um gerador aleatório de exemplos, baseado no trabalho de Cherri (2009).

## 2. O problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis

Em várias empresas o processo de corte de peças pode gerar sobras que eventualmente são descartadas. Porém, algumas indústrias apresentam a possibilidade de utilizar estas sobras como matéria prima, desde que estas tenham tamanhos significativos.

A possibilidade de aproveitar sobras para atender demandas futuras introduz uma mudança no critério de seleção de uma solução, pois se estas forem grandes o suficiente para voltarem ao estoque e serem utilizadas novamente, não serão computadas como perda. Desta forma, definimos o problema de corte de estoque unidimensional com sobras de material aproveitáveis:

*Um conjunto de itens deve ser produzido a partir do corte de objetos, os quais podem ser de tamanhos padronizados (objetos que são comprados pela empresa) ou não-padronizados (objetos que são retalhos de cortes anteriores). São dados os tamanhos e as quantidades dos itens e dos objetos disponíveis em estoque. As demandas dos itens devem ser atendidas, cortando-se os objetos disponíveis, de modo que as sobras sejam ‘pequenas’ ou ‘suficientemente grandes’ para retornarem ao estoque, porém em número limitado.*

Pela definição do problema de corte com sobras aproveitáveis observa-se que as sobras dos padrões de corte devem ser ‘pequenas’ (perdas que serão descartadas) ou então ‘suficientemente grandes’ (retalhos com comprimento pré-definido). Uma alternativa para gerar sobras suficientemente grandes, é concentrar as sobras geradas durante o processo de corte em poucos padrões. Entretanto, a quantidade de retalhos gerada deve ser limitada, pois, os retalhos necessitam de espaço para armazenamento e, além disso, dependendo do material que está sendo cortado (por exemplo, bobinas de aço) retalhos estocados podem tornar-se sucatas caso não sejam utilizados após um determinado período de tempo.

## 3. Procedimento para a resolução do PCESA

Para resolver o problema de corte com sobras aproveitáveis, utilizamos o modelo matemático de Cui e Yang (2010) que é uma extensão do modelo proposto por Scheithauer (1991).

O modelo matemático proposto por Cui e Yang (2010) é apresentado a seguir:

$$\text{Min } z = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} c_{jk} x_{jk} - \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{i=m+1}^n w_{i-m} \alpha_{ijk} x_{jk} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{ijk} x_{jk} \geq d_i, i = 1, \dots, m & (2) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{ijk} x_{jk} \leq E_{i-m}, i = m+1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{jk} \leq e_k, k = 1, \dots, K \quad (4)$$

$$x_{jk} \geq 0 \text{ e inteiro } j = 1, \dots, N_k, k = 1, \dots, K \quad (5)$$

No modelo (1)-(5) a função objetivo (1) minimiza o custo total dos objetos a serem cortados, sendo o parâmetro  $w$  o custo associado aos objetos retalhos para priorizar seu uso. As restrições (2), (4) e (5) são referentes à demanda, estoque e integralidade das variáveis. A restrição (3) limita a

quantidade de retalhos que podem ser geradas durante o processo de corte.

Para resolver este problema, os autores utilizaram a técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory (1963) sendo que os possíveis retalhos também são considerados durante este processo. Para resolver a geração de colunas, os autores utilizaram programação dinâmica. Para obter uma solução inteira para a solução contínua do problema, uma adaptação de um procedimento heurístico proposto pelos autores foi utilizada.

Neste trabalho utilizamos o mesmo modelo matemático proposto por Cui e Yang (2010). Entretanto, a geração de colunas é resolvida utilizando o método *Branch & Bound* e os padrões com retalhos foram utilizados com frequência unitária durante o processo de corte. Para obter uma solução inteira a partir da solução contínua do problema, utilizamos a Heurística Residual de Arredondamento Guloso - versão 1 (Poldi e Arenales, 2009).

#### 4. Gerador para o PCESA

Para avaliar o desempenho da técnica proposta para resolver o PCESA, utilizamos um gerador de exemplos similar ao proposto por Cherri (2009). Neste gerador, vários períodos de tempo são considerados. Em cada período, uma nova demanda para itens regulares (itens demandados em todos os períodos) e não regulares (itens com saídas esporádicas) são gerados aleatoriamente.

Para cada problema, dois tipos de objetos padronizados são considerados,  $L_1 = 1000$  e  $L_2 = 1100$ . Para gerar a demanda em cada período, criamos inicialmente o vetor  $v^{inicial}$  com 50 tipos de itens gerados aleatoriamente no intervalo  $[v_1L, v_2L]$ , em que  $L$  é a média dos comprimentos dos objetos padronizados. Para os testes, os valores de  $v_1$  e  $v_2$  foram definidos para 2 classes de itens: *itens pequenos*:  $v_1 = 0.01$ ,  $v_2 = 0.25$  e *itens mistos*:  $v_1 = 0.01$ ,  $v_2 = 0.4$ . Para essas classes, os 10 primeiros itens são considerados itens regulares com demandas geradas aleatoriamente no intervalo  $[200, 500]$  em cada período. Para os itens não regulares, selecionamos aleatoriamente em cada período  $m$  tipos de itens do vetor  $v^{inicial}$  entre os elementos 11 a 50 com demanda gerada no intervalo  $[50, 100]$ .

Os comprimentos para os retalhos foram definidos por 300, 400 e 500. A quantidade de retalhos permitida durante o processo de corte foi restrita a  $E = 0$  e  $E = 2$ . Quando  $E = 0$ , nenhum retalho pode ser considerado durante o processo de geração de colunas, entretanto, o último padrão de corte gerado é sempre analisado e se alguma sobra com comprimento superior a 300 for encontrada, esta será considerada um retalho. Esta análise no padrão final foi realizada, pois, geralmente o último padrão de corte apresenta sobra mais elevada devido a baixa demanda de itens que deve ser atendida. Para  $E = 2$  também permitimos que um retalho com comprimento superior a 300 seja alocado no padrão de corte final, entretanto, as quantidades máximas de retalhos devem ser respeitadas. O custo de um retalho em estoque é multiplicado por  $w = 0.9$  a cada período.

#### 5. Testes computacionais

Para avaliar o desempenho do procedimento descrito na Seção 3, simulações considerando 5 períodos (5 problemas para serem resolvidos) foram geradas a partir dos dados descritos na Seção 4. As soluções consideram  $E = 0$  e  $E = 2$ .

Nas tabelas 1 e 2 a seguir, mostramos alguns valores médios de interesse para análise das soluções do procedimento desenvolvido. Os valores apresentados são referentes a média dos 5 períodos.

Tabela 1: Soluções – Itens Pequenos

	E = 0	E = 2
<i>Perda</i>	83,40	43,40
<i>Retalho em estoque</i>	1	1
<i>Comprimento cortado</i>	680600	680640
<i>Tempo (em segundos)</i>	0,001	0,001

Tabela 2: Soluções – Itens Mistos

	E = 0	E = 2
<i>Perda</i>	105,20	65,20
<i>Retalho em estoque</i>	2	0
<i>Comprimento cortado</i>	1010840	1010660
<i>Tempo (em segundos)</i>	0,001	0,002

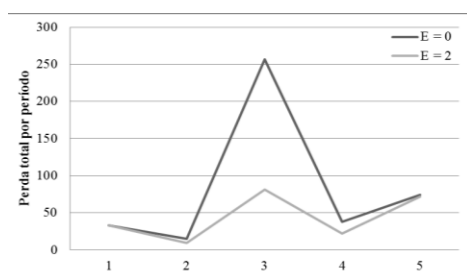


Figura 1: Perda Total por período (itens pequenos)

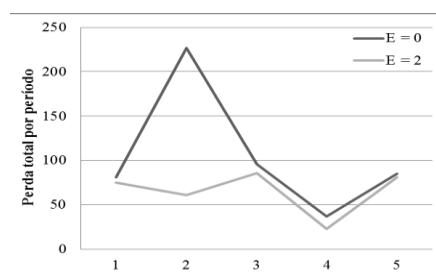


Figura 2: Perda Total por período (itens mistos)

Como podemos observar nas tabelas 1 e 2, a perda gerada é menor quando retalhos pode ser gerados (caso  $E = 2$ ). Na Tabela 1 podemos observar que a quantidade de retalhos em estoque após os 5 períodos (para  $E = 0$  e  $E = 2$ ) é de uma unidade. Nestes dois casos, o retalho foi gerado no último período, ou seja, todos os retalhos gerados durante todo o processo de corte foi utilizado.

Pelas Figuras 1 e 2, observamos que em todos os períodos a perda gerada foi igual ou maior quando  $E = 0$  em todos os períodos. Quando retalhos são considerados para períodos futuros, a solução dos problemas pode ser melhor, pois o estoque de objetos (padronizados + retalhos) fica com uma maior diversidade durante os períodos. De modo geral, para as duas classes de problemas, se considerarmos as perdas geradas, os resultados mostram claramente que é melhor manter retalhos em estoque e aguardar por futuras demandas.

## 6. Conclusões

Neste trabalho, abordamos o problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis (PCESA). Para resolver este problema, utilizamos um modelo matemático da literatura e propomos algumas alterações. Para avaliar o desempenho do procedimento desenvolvido, simulamos demandas considerando períodos de tempo. Em cada período um problema de corte é resolvido considerando uma nova demanda e um estoque de objetos padronizados e retalhos que é atualizado a cada período. Os resultados obtidos mostraram, em termos da perda gerada, que quando retalhos são considerados para atender demandas futuras, a solução obtida é melhor que a solução que não considera retalho para estoque.

Como continuidade deste trabalho, outros testes computacionais serão realizados. Além disso, pretende-se utilizar o software CPLEX para resolver a geração dos padrões de corte.

## Referências

- [1] A. Abuabara, R. Morabito, Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, 169 (2009) 149-165.
- [2] A. R. Brown, "Optimum packing and depletion: the computer in space and resource usage problem". New York: Macdonald - London and American Elsevier Inc, 1971.107p, (1971).
- [3] A. C. Cherri, Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis. Tese de doutorado, UCMC – USP, São Carlos, 2009.
- [4] A. C. Cherri, M. N. Arenales, H. H. Yanasse, The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, 196 (2009a) 897-908.
- [5] Y. Cui, Y. Yang, A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover. *European Journal of Operational Research*, 204 (2010) 245-250.
- [6] P. C. Gilmore, R. E. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. *Operations Research*, 11 (1963) 863-888.
- [7] M. Gradisar, J. Jesenko, C. Resinovic, Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operational Research*, 10 (1997) 945-953.
- [8] K. C. Poldi, M. N. Arenales, Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers and Operations Research*, 36 (2009) 2074-2081.
- [9] G. Scheithauer, A note on handling residual length. *Optimization*, 22 (1991) 461-466.