

HEURISTICAS PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS

LETÍCIA LEITE PAVANELLO – leticia.pavanello@unesp.br
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU

ARTHUR MEDEIROS F. BARRETO – arthur.medeiros@unesp.br
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU

DOUGLAS NOGUEIRA DO NASCIMENTO – douglas.nogueira@unesp.br
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU

ADRIANA CRISTINA CHERRI – adriana.cherri@unesp.br
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU

Área: 6. PESQUISA OPERACIONAL

Sub-Área: 6.4 - MODELAGEM, ANÁLISE E SIMULAÇÃO

Resumo: ESTE ARTIGO ABORDA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM SOBRAS APROVEITÁVEIS. ESTE PROBLEMA CONSISTE EM PRODUIR UM CONJUNTO DE ITENS DEMANDADOS A PARTIR DO CORTE DE OBJETOS DISPONÍVEIS EM ESTOQUE, VISANDO OTIMIZAR UMA FUNÇÃO OBJETIVO E CONSIDERANDO A POSSIBILIDADE DE GERAR SOBRAS QUE RETORNAM AO ESTOQUE PARA SEREM UTILIZADA NOVAMENTE EM PROCESSOS DE CORTE FUTUROS, NÃO SENDO CONTABILIZADAS COMO PERDA. PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA, PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS DE ARREDONDAMENTO FORAM PROPOSTOS VISANDO A OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES INTEIRAS UTILIZANDO COMO BASE UM MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO NA LITERATURA. TESTES COMPUTACIONAIS FORAM REALIZADOS COM INSTÂNCIAS PRESENTES NA LITERATURA, E OS RESULTADOS DEMONSTRARAM QUE A EFICIÊNCIA DAS HEURÍSTICAS PROPOSTAS DEPENDE DA DIMENSÃO DOS ITENS, ENQUANTO QUE A INFLUÊNCIA DA DEMANDA SE DEMONSTROU INCONCLUSIVA.

Palavras-chaves: PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL; APROVEITAMENTO DE SOBRAS; HEURÍSTICAS.

HEURISTICS TO THE ONE-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM WITH USABLE LEFTOVERS

Abstract: *THIS PAPER ADRESSES THE ONE-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM WITH USABLE LEFTOVERS. THIS PROBLEM CONSISTS IN PRODUCING A SET OF DEMANDED ITENS BY CUTTING OBJECTS AVAILABLE IN STOCK, IN ORDER TO OPTIMIZE AN OBJECTIVE FUNCTION AND CONSIDERING THE POSSIBILITY OF GENERATE LEFTOVERS THAT RETURN TO STOCK TO BE USED AGAIN IN FUTURE CUTTING PROCESSES, NOT BEING CONSIDERED AS WASTE. TO SOLVE THIS PROBLEM, HEURISTIC PROCEDURES WERE PROPOSED TO OBTAIN INTEGER SOLUTIONS USING A MATHEMATICAL MODEL FROM THE LITERATURE. COMPUTACIONAL EXPERIMENTS WERE PERFORMED WITH INSTANCES FROM THE LITERATURE, AND THE RESULTS EVIDENCED THAT THE EFICIENT OF THE HEURISTICS DEPENDS ON THE SIZE OF THE ITEMS, BUT THE INFLUENCE OF THE DEMAND WAS INCONCLUSIVE.*

Keywords: *ONE-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM; USABLE LEFTOVERS; HEURISTICS.*

1. Introdução

Os problemas de corte de estoque (PCE) são problemas de otimização combinatória que consistem em cortar peças disponíveis em estoque para a produção de um conjunto de itens em quantidades e tamanhos especificados, otimizando uma determinada função objetivo. Uma solução para o PCE unidimensional consiste em um conjunto de padrões de corte e suas respectivas frequências, ou seja, quantas vezes cada padrão de corte deve ser utilizado. Um padrão de corte define quantos itens de cada tipo devem ser cortados a partir de um objeto disponível em estoque.

As principais pesquisas sobre os PCE surgiram na década de 1960, com os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963). Em 1961, os autores apresentaram um método pioneiro para a resolução de PCE, no qual utilizaram o método simplex com geração de colunas em um modelo de otimização linear que resolveu, pela primeira vez, um problema real de corte de estoque unidimensional. Em Gilmore e Gomory (1963), foi apresentado um novo método para o problema da mochila, que é um subproblema a ser resolvido durante a resolução do PCE, fornecendo as novas colunas (padrões de corte) para o problema.

Em algumas indústrias, as sobras geradas durante o processo corte, desde que planejadas previamente, podem retornar ao estoque para gerar padrões de corte futuros, não sendo computadas como perda. A possibilidade de utilização de sobras foi sugerida inicialmente por Brown (1971), entretanto, apenas anos depois foi abordada diretamente na literatura como uma variação do PCE. Esta variação é chamada de problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (PCESA).

Para considerar o aproveitamento de sobras, Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory (1961) incluindo itens extras sem demanda a ser atendida. Com o objetivo de criar um plano de corte unidimensional para diminuir a perda ou então concentrá-la em um único objeto, Gradišar et al. (1997) apresentaram um procedimento heurístico aplicado ao corte de rolos em uma indústria de tecidos. Abuabara e Morabito (2009) reescreveram o modelo proposto em Gradišar et al. (1997) como um modelo de programação inteira mista para resolver o problema de aproveitamento de sobras em uma indústria aeronáutica. O problema resolvido considerou diferentes tipos de objetos em estoque, em quantidades suficientes para atender a demanda, e possíveis sobras que foram geradas em cortes anteriores.

O PCESA também foi estudado por Cherri et al. (2009) que modificaram heurísticas da literatura, de modo que as sobras geradas em cada padrão de corte deveriam ser suficientemente pequenas para serem descartadas ou suficientemente grandes para serem estocadas. Em Cherri et al. (2013), algumas destas heurísticas passaram novamente por modificações para que, além de minimizar a perda, as sobras em estoque tivessem prioridade durante o processo de corte. Cherri et al. (2014) reuniram e revisaram trabalhos da literatura que consideram o PCESA. Neste survey, os autores apresentam as aplicações do PCESA, o modelo matemático, comentários dos resultados obtidos em cada trabalho e propostas para continuidades de estudos relacionados a esse tipo de problema.

Arenales et al. (2015) apresentaram um modelo matemático para representar o PCESA, no qual as sobras foram tratadas de forma explícita na modelagem. Neste modelo, as possíveis sobras têm comprimento previamente definido e podem ser geradas em quantidade limitada. Outro fator considerado é a prioridade de uso das sobras, sendo esta uma necessidade em algumas situações práticas como, por exemplo, no corte de bobinas de aço em que, após desembaladas, oxidam em um determinado período de tempo. Para resolver este problema, os autores relaxaram a condição de integralidade do modelo proposto e utilizaram o método simplex com geração de colunas de Gilmore e Gomory (1963). Nenhum procedimento heurístico foi proposto para obtenção de soluções inteiras.

Neste trabalho, procedimentos heurísticos de arredondamento são propostos para a obtenção de soluções inteiras para instâncias do PCESA aplicadas ao modelo proposto por Arenales et al. (2015). O objetivo é comparar a eficiência de diferentes estratégias de arredondamento de acordo com a variação na dimensão dos itens e na demanda.

A Seção 2 deste trabalho é composta por uma breve apresentação sobre o PCESA e o modelo matemático utilizado. Os procedimentos heurísticos propostos são detalhados na Seção 3. Na Seção 4, resultados de testes computacionais são apresentados, e a Seção 5 destina-se às conclusões e trabalhos futuros.

2. Modelo matemático para o PCESA

O PCESA consiste em produzir um conjunto de itens demandados a partir do corte de objetos padronizados (comprados pela empresa) e sobras (sobras de processos de cortes anteriores) disponíveis em estoque. As demandas devem ser atendidas de modo a minimizar as perdas geradas. Sobras com comprimentos pré-definidos podem ser geradas em quantidade

limitada não sendo contabilizadas como perda.

Os parâmetros e variáveis do modelo proposto por Arenales et al. (2015) são definidos por:

Parâmetros

- S : número de tipos de objetos padronizados. São denotados objetos do tipo s , $s \in \{1, \dots, S\}$.
- R : número de tipos de sobras em estoque. São denotados sobras do tipo $S + s$, $s \in \{1, \dots, R\}$.
- e_s : número de objetos/sobras tipo s disponíveis em estoque s , $s = 1, \dots, S + R$;
- L_s : comprimento do objeto/retalho tipo s , $s = 1, \dots, S + R$;
- m : número de tipos de itens demandados;
- d_i : demanda do item do tipo i , $i = 1, \dots, m$;
- J_s : conjunto de padrões de corte para o objeto do tipo s , $s = 1, \dots, S + R$;
- $J_s(k)$: conjunto de padrões de corte para objetos padronizados do tipo s com retalho do tipo $S + k$, $k=1, \dots, R$, $s = 1, \dots, S$;
- a_{ijs} : número de itens do tipo i no padrão de corte j para objeto do tipo s , $i = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, S + R$, $j \in J_s$;
- a_{ijsk} : número de itens do tipo i no padrão de corte j para o objeto s com retalho do tipo $S + k$, $i=1, \dots, m$, $k = 1, \dots, R$, $s = 1, \dots, S$, $j \in J_s(k)$;
- c_{js} : perda por cortar o objeto/retalho tipo s no padrão de corte j , $s = 1, \dots, S + R$, $j \in J_s$;
- c_{jsk} : perda por cortar o objeto s no padrão de corte j gerando um retalho do tipo $S + k$, $s = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, R$, $j \in J_s(k)$;
- U : número máximo de sobras.

Variáveis

- x_{js} : número de objetos do tipo s cortados de acordo com o padrão de corte j , $s = 1, \dots, S + R$, $j \in J_s$;

- x_{jsk} : número de objetos do tipo s cortados de acordo com o padrão de corte j e gerando um retalho do tipo $S+k$, $s = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, R$, $j \in J_s(k)$.

O modelo matemático proposto pelos autores é dado por:

$$\text{Min } f(x) = \sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} + \alpha' \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} c_{jsk} x_{jsk} + \alpha'' \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} a_{ijs} x_{js} + \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} a_{ijsk} x_{jsk} + \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} a_{ijs} x_{js} = d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J_s} x_{js} + \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} x_{jsk} \leq e_s, \quad s = 1, \dots, S \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J_s} x_{js} \leq e_s, \quad s = S+1, \dots, S+R \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} x_{jsk} - \sum_{s=S+1}^{S+R} \sum_{j \in J_s} x_{js} \leq U - \sum_{s=S+1}^{S+R} e_s \quad (5)$$

$$x_{js} \geq 0, s = 1, \dots, S+R, j \in J_s; x_{jsk} \geq 0, k = 1, \dots, R, s = 1, \dots, S, j \in J_s(k) \text{ e inteiro.} \quad (6)$$

No modelo (1)-(6), a função objetivo (1) minimiza a perda total ao cortar os objetos padronizados (gerando sobras ou não) e sobras disponíveis em estoque. A restrição (2) garante o atendimento da demanda. As restrições (3) e (4) garantem que a quantidade de objetos e sobras cortadas não seja maior que a quantidade disponível em estoque. A restrição (5) limita a quantidade de sobras que podem ser geradas. A restrição (6) é referente a não negatividade e integralidade das variáveis de decisão.

Para resolver este problema, os autores relaxaram as condições de integralidade do modelo e utilizaram a técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory (1963). Os possíveis comprimentos para as sobras (definidas previamente) também foram considerados durante este processo. Com a condição de integralidade relaxada, soluções contínuas foram obtidas e, desta forma, os autores mencionam o uso de heurísticas para obtenção de soluções inteiras.

3. Heurísticas de arredondamento

Os procedimentos apresentados nesta seção têm como objetivo gerar uma solução heurística inteira para o PCESA unidimensional a partir da solução ótima contínua obtida com a relaxação linear do modelo matemático (1) – (6). Vale ressaltar que a solução contínua foi obtida pelo método de geração de colunas e os padrões de corte unitários homogêneos (padrões com apenas uma unidade de um item em sua composição) foram utilizados na inicialização do método para garantir a factibilidade das soluções iniciais.

3.1 Heurística A

O primeiro passo do procedimento de arredondamento A consiste na ordenação dos padrões de corte gerados durante a resolução da relaxação linear do modelo (1) – (6). Após a obtenção da solução ótima contínua, ordenam-se os padrões de corte presentes nesta solução ótima seguindo os critérios de prioridade abaixo:

1. Padrões de corte que utilizam o objeto completamente, ou seja, não possuem perda ou geração de sobras, ordenados pela frequência de forma não crescente;
2. Padrões de corte com perda nula que geram sobras, ordenados pela frequência de forma não crescente;
3. Padrões com perda não nula, ordenados de modo não crescente pela perda.

Após a ordenação dos padrões, inicia-se o processo, baseado em Poldi e Arenales (2009), analisando o padrão 1, arredondando o valor de sua frequência (x_1) para o número inteiro superior ao fracionário obtido, testando em seguida a factibilidade do arredondamento. Se a demanda de algum item for excedida, a frequência é reduzida em uma unidade até que os excessos sejam eliminados. Caso contrário, a frequência é fixada e a demanda é atualizada. O procedimento é repetido para todos os padrões, até que o último padrão de corte da lista seja analisado.

Finalizada esta etapa, obtém-se uma solução inteira aproximada e um problema residual é gerado considerando os itens pendentes para que a demanda do problema original seja satisfeita. Resolve-se então a relaxação linear deste novo problema utilizando o modelo (1)-(6), obtendo uma solução contínua que deve ser arredondada de acordo com o processo de arredondamento descrito acima. Este procedimento é repetido até que a demanda residual seja nula.

Existe a possibilidade de, em algumas instâncias, as frequências de todos os padrões da solução ótima contínua serem valores fracionários entre 0 e 1, não sendo possível

arredondar pelo menos uma frequência para 1 sem exceder a demanda residual. Neste caso, utilizam-se todos os outros padrões gerados durante a resolução da relaxação linear (incluindo os padrões homogêneos iniciais) e que não entraram na solução ótima, aplicando a eles os mesmos critérios de ordenação e o mesmo procedimento descrito acima, considerando que a frequência para esses padrões é igual a 0.

3.2 Heurística B

A heurística B difere da heurística A apenas no critério de ordenação utilizado: ordenam-se os padrões de corte de modo não-crescente com base no parâmetro de prioridade Δ_{jk} , dado pelo somatório do número relativo de itens que são cortados no padrão de corte, considerando sua frequência, dividido pela demanda daquele item. Caso haja empate, utiliza-se primeiro o padrão com maior frequência.

$$\Delta_{jk} = \sum_{i=1}^m \frac{x_{jk} \cdot a_{ijk}}{d_i}$$

O objetivo da heurística B é priorizar os padrões de corte que atendam mais rapidamente um ou mais itens demandados.

3.3 Heurística C

A heurística C consiste em aproveitar a solução contínua encontrada pelo método de geração de colunas e arredondar as frequências das variáveis de decisão para os inteiros inferiores aos fracionários obtidos. Este procedimento gera uma demanda residual, que é atendida utilizando um método heurístico descrito em Wascher e Gau (1996). Este método heurístico aproveita os padrões de corte gerados durante a resolução da relaxação linear para resolver o modelo matemático considerando a integralidade das variáveis de decisão. Este processo pode ser demorado para algumas instâncias, o que implica na necessidade de restringir o tempo de obtenção da solução inteira.

4. Testes computacionais

Os testes computacionais foram executados em um computador com processador Intel Core i5-5200U @2.20 GHz com 8GB de memória RAM. As instâncias foram resolvidas utilizando o solver IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.9 em C++.

As três heurísticas foram comparadas entre si em relação à perda obtida. Foram testadas instâncias utilizadas em Arenales et al. (2015) que consideram apenas um tipo de objeto padronizado em estoque com comprimento igual a 1000 e disponibilidade suficiente para atender à demanda. Três tipos de sobras foram considerados, com comprimento 400, 500 e 600. Não foram consideradas sobras em estoque inicialmente e a quantidade máxima de possíveis sobras geradas variou nos valores $U = [0, 3, 6, 9, 12]$.

Foram considerados 15 tipos de itens, que foram classificados como médios (M) quando seu comprimento foi gerado no intervalo $[140, 400]$, ou como grandes (G) quando o comprimento foi gerado no intervalo $[300, 700]$. As demandas foram classificadas como Baixa (B), Média (M) ou Alta (A), geradas nos intervalos $[1, 10]$, $[10, 50]$ e $[50, 300]$, respectivamente. Para a obtenção da solução inteira pela heurística C, foi estipulado o limite de tempo de 100 segundos.

As Tabelas 1 a 6 apresentam a comparação entre as perdas obtidas pelas heurísticas propostas para as seis classes de instâncias que combinam os diferentes tamanhos de itens e demandas. Por exemplo, uma classe $[MB]$ significa um conjunto de 50 instâncias em que os itens são médios e a demanda é baixa. As instâncias de cada uma dessas classes foram testadas para cinco diferentes valores do parâmetro U , que corresponde ao número máximo de sobras geradas. Quando $U = 0$, tem-se o problema de corte de estoque na sua forma clássica, sem a presença de sobras.

TABELA 1 – Perda média das soluções inteiras da classe $[MB]$

	U = 0	U = 3	U = 6	U = 9	U = 12
Heurística A	1882	1912	1996	2112	2112
Heurística B	1860	1928	2004	2168	2168
Heurística C	1646	1282	1142	1114	1114
Solução contínua	134,863	124,758	120,082	118,431	118,431

TABELA 2 – Perda média das soluções inteiras da classe $[MM]$

	U = 0	U = 3	U = 6	U = 9	U = 12
Heurística A	3070	3986	4093	3965	4225
Heurística B	3230	3928	3877	3813	4015
Heurística C	1992	1665	1625	1585	1573
Solução contínua	634,1	614,23	598,495	586,69	576,04

TABELA 3 – Perda média das soluções inteiras da classe [MA]

	U = 0	U = 3	U = 6	U = 9	U = 12
Heurística A	7056	6933	7227	7413	7470
Heurística B	6980	7059	7219	7619	7648
Heurística C	7998	7731	7702	7678	7669
Solução contínua	3602,73	3593,09	3584,72	3575,84	3566,7

TABELA 4 – Perda média das soluções inteiras da classe [GB]

	U = 0	U = 3	U = 6	U = 9	U = 12
Heurística A	7258	6926	6720	6492	6390
Heurística B	7104	6872	6662	6436	6324
Heurística C	14614	13234	12286	11584	11006
Solução contínua	6961,67	6335,01	5891,67	5522,87	5243,54

TABELA 5 – Perda média das soluções inteiras da classe [GM]

	U = 0	U = 3	U = 6	U = 9	U = 12
Heurística A	39948	39548	39108	38524	37828
Heurística B	39794	39438	39000	38404	37718
Heurística C	79740	78211	76822	75464	74115
Solução contínua	39541,7	38830,3	38137	37455	36787

TABELA 6 – Perda média das soluções inteiras da classe [GB]

	U = 0	U = 3	U = 6	U = 9	U = 12
Heurística A	211287	210881	210301	209571	208815
Heurística B	211131	210727	210179	209427	208625
Heurística C	422535	420803	419211	417615	416050
Solução contínua	210968	210154	209353	208559	207775

A heurística C apresentou a menor solução inteira em 66,6% das comparações realizadas na classe de itens médios, contra 20% e 13% das heurísticas A e B, respectivamente. Na classe de itens grandes este resultado se inverte e a heurística B foi responsável por 100% dos melhores resultados obtidos.

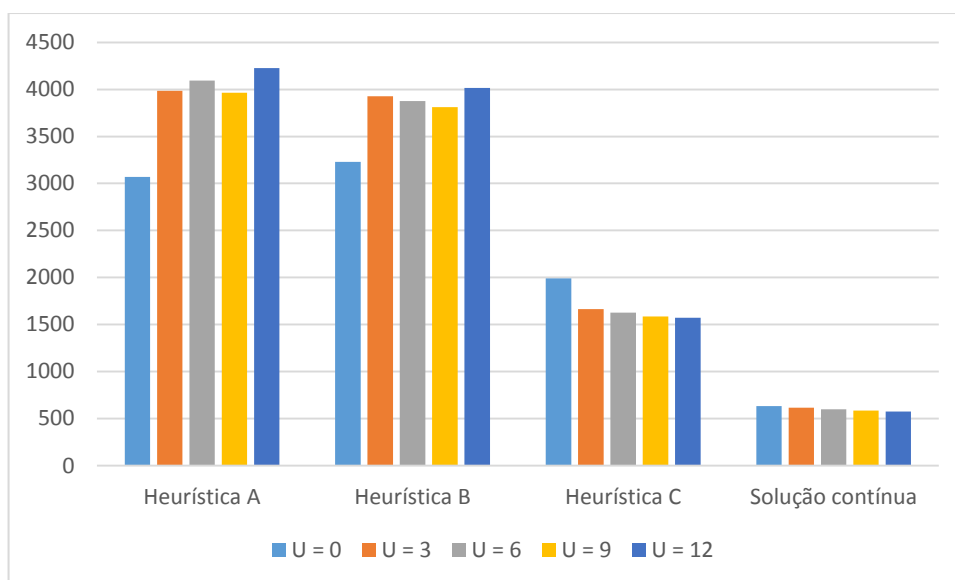
Os valores obtidos pelas heurísticas A e B para a perda das soluções inteiras foram próximos em todas as classes testadas. Isto leva a concluir que a diferença entre os critérios de ordenação presente em ambas as heurísticas pouco influencia no resultado final, uma vez que as duas heurísticas priorizam padrões de corte sem perda e que possuam ou não a geração de retalho.

O baixo desempenho da heurística C para a classe de itens grandes se justifica por dois fatores. Primeiro, a demanda residual resultante após o arredondamento de todas as frequências para o inteiro inferior é muito pequena. Isto faz com que os padrões a serem

escolhidos para atender a demanda residual tendam a ser padrões de corte unitários homogêneos para os itens grandes, uma vez que estes apresentam menos possibilidades de combinação quando comparados com itens de tamanho médio. Os padrões de corte unitários homogêneos apresentam maiores perdas quando comparados com os outros padrões de corte utilizados, podendo resultar na apresentação de aproximadamente o dobro da perda obtida pela heurística C em comparação com as outras heurísticas nas Tabelas 4, 5 e 6. Segundo, o limite de tempo utilizado para resolução da heurística C também pode contribuir para que soluções melhores não sejam obtidas.

O Gráfico 1 ilustra o comportamento das heurísticas com relação a perda média das soluções inteiras.

GRÁFICO 1 – Perda média das soluções inteiras da classe [MM]



A relação entre o aumento do limite de sobras que podem ser geradas (U) e a diminuição da perda, presente na solução contínua, é preservada na Heurística C. No entanto, este comportamento ocorre em apenas algumas classes das Heurísticas A e B. Isto ocorre pelo fato de que as heurísticas A e B priorizam padrões que não geram sobras, fazendo com que o aumento do valor de U não seja tão significativo quanto no procedimento C.

5. Conclusão

Neste artigo, três heurísticas foram propostas para a obtenção de soluções inteiras para instâncias do PCESA. Os resultados demonstraram que o aumento do número de sobras permitidas está intimamente ligado a redução da perda para as soluções contínuas, um conceito presente na literatura, como em Arenales et al. (2015).

Testes computacionais foram realizados com diferentes classes e demonstraram que a eficiência das heurísticas pode variar de acordo com o tamanho dos itens. Itens grandes naturalmente apresentam poucas combinações, o que pode prejudicar as heurísticas que dependam do uso de padrões homogêneos para solucionar a demanda residual.

Para estudos futuros recomenda-se o aprimoramento das heurísticas para lidar com situações com baixa demanda residual. Além disso, é sugerida a aplicação de testes em instâncias em que o tamanho dos itens seja heterogêneo, misturando itens médios e grandes.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP – Processo 2018/13972-4) pela credibilidade e apoio financeiro.

Referências

- ABUABARA, A; MORABITO, R. Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, v. 169, n. 1, p. 149, 2009.
- ARENALES, M. N.; CHERRI, A. C.; NASCIMENTO, D. N.; VIANNA, A. A new mathematical model for the cutting stock/leftover problem. *Pesquisa Operacional*, v. 35, n. 3, p. 509-522, 2015.
- BROWN, A. R. Optimum packing and depletion: the computer in space-and resource-usage problems. Macdonald, 1971.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. The one-dimensional cutting stock problem with usable Leftover – A heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, v. 196, n. 3, p. 897-908, 2009.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. The usable leftover one-dimensional cutting stock problem - a priority in use heuristic. *International Transactions in Operational Research*, v. 20, n. 2, p. 189-199, 2013.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H.; POLDI, K. C.; VIANNA, A. C. G. The one dimensional cutting stock problem with usable leftovers – A survey. *European Journal of Operational Research*, 236: 395-402, 2014.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations research*, v. 9, n. 6, p. 849-859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem – Part II. *Operations research*, v. 11, n. 6, p. 863-888, 1963.
- GRADIŠAR, M; JESENKO, J; RESINOVIČ, G. Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operations Research*, v. 24, n. 10, p. 945-953, 1997.
- POLDI, K. C. E ARENALES, M. N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers & Operations Research*, 36(6):2074–2081, 2009.
- SCHEITHAUER, G. A note on handling residual lengths. *Optimization*, v. 22, n. 3, p. 461-466, 1991.
- WÄSCHER, G; GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *Operations-Research-Spektrum*, v. 18, n. 3, p. 131-144, 1996.