 ISSN 2237-7166

Modelo matemático para o problema de corte com sobras aproveitáveis

Everton Fernandes da Silva, **Andréa Carla Gonçalves Vianna**
Depto de Computação, FC, UNESP
17033-360, Bauru, SP
E-mail: evertaum@fc.unesp.br vianna@fc.unesp.br

Adriana Cristina Cherri
Depto de Matemática, FC, UNESP
17033-360, Bauru, SP
E-mail: adriana@fc.unesp.br

Carla Taviane Lucke da Silva
IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: carlalucke@gmail.com

Marcos Arenales
ICMC, USP
13566-590, São Carlos, SP
E-mail: arenales@icmc.usp.br

***Resumo**: Neste trabalho apresentamos um estudo sobre o problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis (PCESA). Geralmente, os PCESA têm como objetivo principal perda mínima com a possibilidade de alguns retalhos retornarem ao estoque para atender futuras demandas. Um modelo matemático é apresentado para resolver o PCESA de modo que cortes parciais são realizados nos objetos disponíveis em estoque. Com estes cortes, retalhos podem ser gerados e utilizados para atender futuras demandas de itens. Testes computacionais foram realizados com problemas gerados aleatoriamente e mostraram um bom desempenho da estratégia desenvolvida. Todo o estudo apresentado neste trabalho foi orientado para problemas unidimensionais, entretanto, o modelo também está sendo utilizado para resolver problemas de corte bidimensionais.*

1. Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste no corte de um conjunto de objetos disponíveis em estoque para atender as demandas de produção de peças menores, em quantidades especificadas, otimizando uma determinada função objetivo. Estes problemas aparecem em diversos processos industriais, em que os objetos correspondem a barras de aço, bobinas de papel alumínio, placas de madeira, chapas de vidro e fibra de vidro, peças de couro etc.

Um problema pouco estudado e comumente encontrado na prática industrial consiste em determinar uma política de aproveitamento das sobras de objetos cortados. Estas sobras, desde que não sejam demasiadamente pequenas, podem retornar ao estoque como retalhos para atender demandas futuras e, portanto, não são consideradas perdas, entretanto, sua quantidade deve ser limitada. Além disso, os retalhos disponíveis em estoque devem ser utilizados prioritariamente, pois, além do espaço físico ocupado por estes objetos, dependendo do material cortado, muitos deles acabam como sucatas se não forem utilizados em um determinado período de tempo, como é o caso de bobinas de aço.

Esse problema é frequentemente denominado de Problema de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis (PCESA). O problema de aproveitamento de sobras foi citado por Brown

ISSN 2237-7166

[2], entretanto, só mais tarde começaram a aparecer os primeiros trabalhos que abordam este tema. Roodman [8] com o objetivo de minimizar as perdas considerou um problema com vários tipos de objetos em estoque, sendo que, após o processo de corte, as sobras eram estocadas para serem utilizadas posteriormente.

Para considerar o aproveitamento de sobras, Scheithauer [9] modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory [6] incluindo itens extras aos demandados e sem haver demandas para serem atendidas. Gradisar *et al*. [7], com o objetivo de criar um plano de corte unidimensional para diminuir a perda ou então concentrá-las em um único objeto, apresentaram um procedimento heurístico para otimizar o corte de rolos em uma indústria de tecidos.

Abuabara e Morabito [1] escreveram modelos matemáticos para o problema proposto por Gradisar *et al*. [7]. O PCESA também foi estudado por Cherri *et al*. [3] em que heurísticas bem conhecidas da literatura foram modificadas, de modo que as sobras geradas em cada padrão de corte deveriam ser pequenas para serem descartadas como perdas ou suficientemente grandes para serem estocadas como retalhos, os quais seriam utilizados no atendimento de futuras demandas.

Cui e Yang [5] apresentaram uma extensão do modelo proposto por Scheithauer [9]. No modelo matemático de Cui e Yang [5] a quantidade de retalhos gerada durante o processo de corte é limitada e os seus possíveis comprimentos são previamente definidos. Os possíveis retalhos (definidos previamente) também são considerados durante o processo de corte, porém, sem demandas para serem atendidas. Cherri et al. [4] realizaram alterações no problema proposto por Cherri *et al.* [3] priorizando o corte de retalhos disponíveis em estoque. Para verificar o desempenho da estratégia desenvolvida, um gerador de exemplos foi proposto de modo que sucessivos problemas são resolvidos em um horizonte de tempo.

Neste trabalho, para resolver o PCESA, propomos um modelo matemático baseado no modelo de Gilmore e Gomory [6]. No modelo proposto, os padrões de corte com ou sem retalho são considerados para um mesmo tipo de objeto e a quantidade total de retalhos gerados é limitada.

2. Definição do problema estudado

Os problemas de otimização combinatória são muito comuns na prática e o avanço tecnológico das últimas décadas propiciou o crescente desenvolvimento de aplicações nessa área. O PCESA, apesar de ser recente, apresenta aplicações importantes na prática industrial, como no corte de bobinas de papel, aço, esquadria metálicas, entre outros.

O problema estudado consiste no corte de um conjunto de objetos disponíveis em estoque para atender as demandas de um conjunto de itens de modo a minimizar o desperdício. Os objetos disponíveis em estoque são adquiridos no mercado (objetos padronizados), ou são retalhos (objetos não padronizados) de processos de cortes anteriores. Novos retalhos são permitidos e não são computados como perdas, entretanto, sua quantidade deve ser limitada.

Observações:

- ✓ Um objeto padronizado pode ser completamente cortado, ou parcialmente cortado para gerar dois novos objetos: um objeto reduzido que será cortado em itens, e uma sobra para ser mantida no estoque para futuras demandas.
- ✓ Toda sobra possui seu comprimento definido previamente.
- ✓ O número total permitido para geração de novas sobras é limitado.

Dados:

S: número de tipos de objetos padronizados. Denotamos objetos tipo $s \in \{1, \ldots, S\}$;
L: número de tipos de retalhos. Denotamos $s \in \{S + 1, \ldots, S + L\}$;
L_s: comprimento do objeto tipo s, $s = 1, ..., S + L$;
e_s: número de objetos tipo s disponíveis em estoque, $s = 1, ..., S + L$;
m: número de tipos de itens demandados;

ISSN 2237-7166

l_i: comprimento do item tipo i, $i = 1, ..., m$;
d_i: demanda do item tipo i, $i = 1, ..., m$;
J_s: conjunto de padrões de corte para o objeto tipo s, $s = 1, ..., S + L$;
$J_s(k)$: conjunto de padrões de corte para objetos padronizados tipo s com retalho tipo k, $k = 1,..., L$, $s = 1, ..., S$;
a_{ijs}: número de itens tipo i no padrão de corte j para o objeto tipo s, $i = 1, ..., m$;
c_{js}: custo de cortar o objeto s de acordo com o padrão $j \in \{J_s, s = 1, ..., S + L\} \cup \{J_s(k), k = 1, ..., L, s = 1, ..., S\}$;
U: número máximo permitido para novos retalhos;

Variáveis:

x_{js}: número de objetos tipo s cortados no padrão j, $j \in \{J_s, s = 1, ..., S + L\} \cup \{J_s(k), k = 1,...,L, s = 1,...,S\}$;

Modelo matemático

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{s=1}^{S}\sum_{j\in J_s} c_{js}x_{js} + \alpha'\sum_{s=1}^{S}\sum_{k=1}^{L}\sum_{j\in J_s(k)} c_{js}x_{js} + \alpha''\sum_{s=S+1}^{S+L}\sum_{j\in J_s} c_{js}x_{js} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{s=1}^{S}\sum_{j\in J_s} a_{ijs}x_{js} + \sum_{s=1}^{S}\sum_{k=1}^{L}\sum_{j\in J_s(k)} a_{ijs}x_{js} + \sum_{s=S+1}^{S+L}\sum_{j\in J_s} a_{ijs}x_{js} \geq d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j\in J_s} x_{js} + \sum_{k=1}^{L}\sum_{j\in J_s(k)} x_{js} \leq e_s, \quad s = 1, \dots, S \quad (3)$$

$$\sum_{j\in J_s} x_{js} \leq e_s, \; s = S+1, \dots, S+L \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^{S}\sum_{k=1}^{L}\sum_{j\in J_s(k)} x_{js} - \sum_{s=S+1}^{S+L}\sum_{j\in J_s} x_{js} \leq U - \sum_{s=S+1}^{S+L} e_s \quad (5)$$

$$x_{js} \geq 0 \text{ e inteiro}, \; j \in \{J_s, s = 1, \dots, S+L\} \cup \{J_s(k), k = 1, \dots, L, s = 1, \dots, S\} \quad (6)$$

No modelo (1)-(6) a função objetivo (1) consiste em minimizar os custos de corte dos objetos. Os fatores $\alpha' \geq 1$ e $\alpha'' \leq 1$ na função objetivo (1) podem ser usados para dizer que um novo retalho deve ser criado somente se ele for realmente atrativo, ou um retalho antigo deve ser cortado independente se ele produz mais perda do que outros objetos cortados. A restrição (2) garante que toda a demanda de itens seja atendida. As restrições (3) e (4) são referentes ao estoque de objetos padronizados e retalhos. A restrição (5) limita a quantidade de novos retalhos gerados durante o processo de corte.

Devido às condições de integralidade, o modelo (1) – (6) é difícil de ser resolvido na otimalidade. Desta forma, estas condições foram relaxadas e o modelo (1)-(6) foi resolvido utilizando uma estratégia bastante conhecida na literatura que consiste em utilizar a técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory [6].

O modelo (1)-(6) proposto difere do modelo proposto por Cui e Yang [5]. No modelo de Cui e Yang [5] a principal decisão consiste em determinar quais itens devem ser alocados em quais objetos disponíveis em estoque (modelo matemático orientado ao item). No modelo (1)-(6) a principal decisão a ser tomada consiste em determinar as frequências que cada padrão de corte deve ser cortado (modelo matemático orientado ao padrão).

O procedimento proposto foi implementado na linguagem de programação C++, utilizando algumas bibliotecas do software CPLEX.

 ISSN 2237-7166

3. Testes computacionais

Para avaliar o desempenho da estratégia proposta, testes computacionais foram realizados com problemas gerados aletoriamente. Cada exemplo a seguir mostra a perda média de 10 problemas quando variamos a quantidade de retalhos que podem ser geradas durante o processo de corte. Para cada exemplo, é utilizado um tipo de objeto padronizado L = 1000. Os itens são gerados no intervalo $[v_1L, v_2L]$, em que $v_1 = 0.35$ e $v_2 = 0.55$. Inicialmente, um vetor v^{ref} com 50 tipos de itens é gerado e, a partir desse vetor, itens são selecionados. Cada problema possui m + 10 tipos de itens, sendo que, os 10 primeiros tipos de itens são selecionados de v^{ref} (chamados de itens regulares, por terem saídas frequentes e aparecerem em todos os problemas) possuem demanda gerada no intervalo [1,5] e os m tipos de itens restantes (chamados de itens não regulares, por terem saídas esporádicas) possuem demandas geradas no intervalo [5,10]. Os comprimentos para os retalhos foram definidos por 200, 300 e 400, ou seja, no objeto padronizado, cortes parciais podem ser realizados considerando estes comprimentos desde que a perda gerada neste objeto seja menor. As soluções consideram a quantidade de retalhos permitida U = 0, 1, ..., 8.

Nos gráficos a seguir, mostramos as porcentagens das perdas obtidas em 2 exemplos (10 períodos cada) conforme o valor de U varia no seu intervalo. Para cada exemplo, os testes foram realizados obtendo soluções contínuas e, portanto, o estoque de objetos padronizados e retalhos gerados num período não são atualizados para o período seguinte.

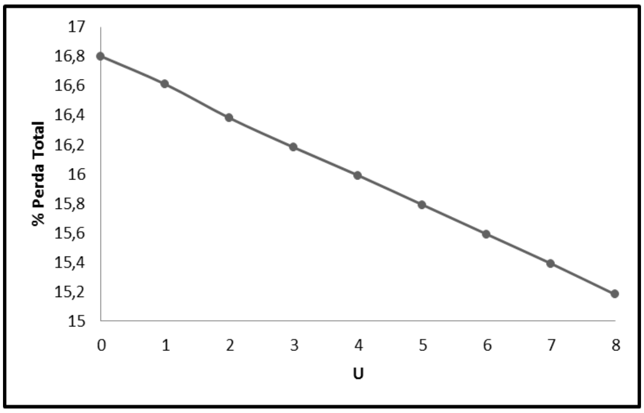

Figura 1: Perda total (Exemplo 1)

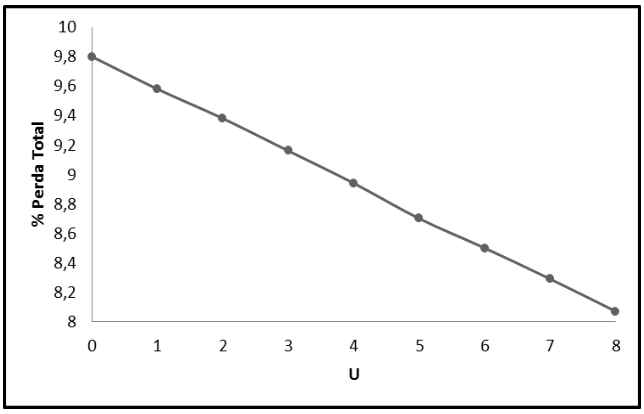

Figura 2: Perda total (Exemplo 2)

Como podemos observar nas figuras 1 e 2, a perda gerada é menor quando retalhos podem ser gerados. Nos dois exemplos, é possível observar que quanto maior o número de retalhos permitidos (valor de U), menor é o valor de porcentagem da perda total.

Quando retalhos são considerados para períodos futuros, a solução dos problemas pode ser melhor, pois o estoque de objetos (padronizados + retalhos) fica com uma maior diversidade

 ISSN 2237-7166

durante os períodos. De modo geral, para os dois exemplos de problemas, se considerarmos as perdas geradas, os resultados mostram claramente que é melhor manter retalhos em estoque e aguardar por futuras demandas.

Também é possível observar um comportamento semelhante em todos os exemplos executados se acrescentarmos um objeto padronizado no estoque. Nos exemplos 3 e 4 consideramos que o estoque de objetos padronizados possui objetos de tamanho L_1 =1000 e objetos de tamanho L_2 =900.

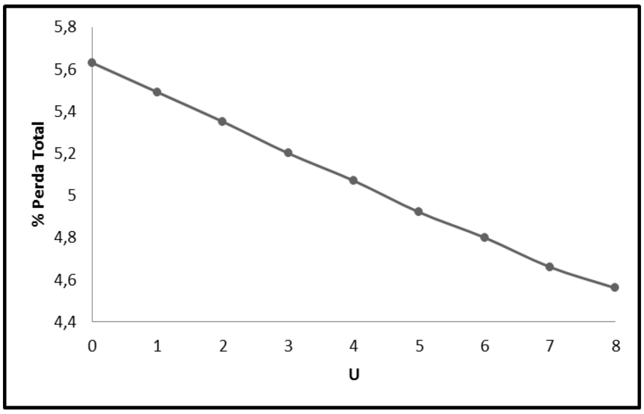

Figura 3: Perda total (Exemplo 3)

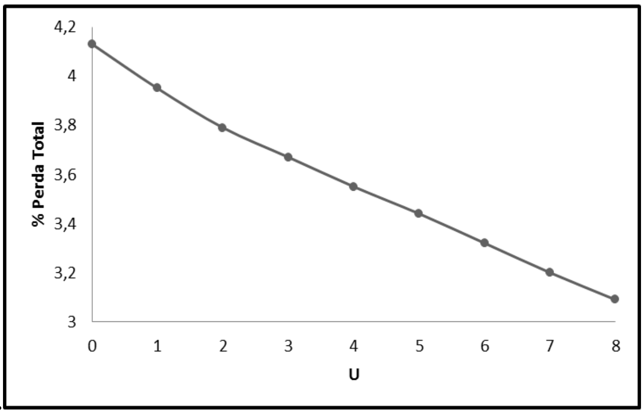

Figura 4: Perda total (Exemplo 4)

Como esperado, as perdas diminuíram, pois, a quantidade de objetos em estoque aumentou, Entretanto, as soluções apresentam o mesmo comportamento que nos exemplos anteriores, ou seja, quanto maior o valor de U, menor é o valor das perdas geradas.

Nestes exemplos, os retalhos gerados em um problema não são considerados como objetos a serem cortados nos exemplos posteriores pelo fato de as soluções obtidas ainda serem contínuas. Faz parte da continuidade deste trabalho, investigar procedimentos heurísticos que gerem uma solução inteira para os problemas sem alterar a característica das soluções que os mesmos apresentam.

4. Conclusões

Neste trabalho, abordamos o problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis (PCESA). Para resolver este problema, propomos um modelo matemático que foi resolvido utilizando o software CPLEX. Para considerar o aproveitamento de sobras, cortes parciais foram realizados nos objetos disponíveis em estoque de modo a gerar retalhos. Para

 ISSN 2237-7166

avaliar o desempenho do procedimento proposto, um gerador aleatório de exemplos foi desenvolvido.

Os resultados obtidos mostraram, em termos de porcentagem de perda gerada, que quanto maior o número de retalhos permitidos, menor é a perda. Em todos os testes, foi possível observar um comportamento uniforme das soluções, que até o momento são contínuas.

Como continuidade deste trabalho, pretende-se investigar procedimentos heurísticos que não alterem o comportamento observado nas soluções contínuas.

Referências

[1] A. Abuabara, R. Morabito, “Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts”. Annals of Operations Research, vol. 169, pp. 149-165, (2009).

[2] A. R. Brown, “Optimum packing and depletion: the computer in space and resource usage problem”. New York: Macdonald - London and American Elsevier Inc, pp. 107, (1971).

[3] A. C. Cherri, M. N. Arenales, H. H. Yanasse, “The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach”. European Journal of Operational Research, vol. 196, pp. 897-908, (2009).

[4] A. C. Cherri, M. N. Arenales, H. H. Yanasse, “The usable leftover one-dimensional cutting stock problem – a priority-in-use heuristic”. International Transactions in Operational Research, vol. 20, pp. 189-199 (2013).

[5] Y. Cui, Y. Yang, “A heuristic for the one dimensional cutting stock problem with usable leftover”. European Journal of Operational Research, vol. 204, pp. 245-250, (2010).

[6] P. C. Gilmore, R. E. Gomory, “A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II”. Operations Research, vol. 11, pp. 863-888, (1963).

[7] M. Gradisar, J. Jesenko, C. Resinovic, “Optimization of roll cutting in clothing industry”. Computers & Operational Research, vol. 10, pp. 945-953, (1997).

[8] G. M. Roodman, “Near-optimal solutions to one-dimensional cutting stock problem”. Computers and Operations Research, vol. 13, pp. 713-719, (1986).

[9] G. Scheithauer, “A note on handling residual length”. Optimization, vol. 22, pp. 461-466, (1991).