PROBLEMAS DE CORTE COM SOBRAS APROVEITÁVEIS

ADRIANA CRISTINA CHERRI - adriana@fc.unesp.br
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU-FC

ANDREA CARLA GONCALVES VIANNA - vianna@fc.unesp.br
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP - BAURU-FC

Resumo: *NO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM SOBRAS APROVEITÁVEIS (PCESA), UM CONJUNTO DE ITENS É OBTIDO A PARTIR DO CORTE DE OBJETOS DISPONÍVEIS EM ESTOQUE. DE MODO GERAL, AS SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA SÃO GERADAS DE MODO QUE AS SOBRAS RESULTANTES DOO PROCESSO DE CORTE SEJAM SOBRAS ACEITÁVEIS (PERDA PEQUENA OU RETALHO). OS RETALHOS SÃO SOBRAS DE PADRÕES DE CORTE COM COMPRIMENTO GRANDE O SUFICIENTE PARA PRODUZIR ITENS DE DEMANDAS FUTURAS. PARA PROBLEMAS DE CORTE UNIDIMENSIONAIS, ALGUNS TRABALHOS PODEM SER ENCONTRADOS NA LITERATURA, SENDO QUE DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO SÃO PROPOSTAS. NESTE TRABALHO, APRESENTAMOS ALGUNS ESTUDOS QUE REALIZAMOS PARA RESOLVER O PCESA NO CASO UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL. OS MÉTODOS E PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS DESENVOLVIDOS MANTÊM COMO O PRINCIPAL OBJETIVO A MINIMIZAÇÃO DAS PERDAS COM A POSSIBILIDADE DE RETALHOS RETORNAREM PARA O ESTOQUE. ALGUNS RESULTADOS COMPUTACIONAIS TAMBÉM SÃO APRESENTADOS.*

Palavras-chaves: *PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL; APROVEITAMENTO DE SOBRAS; OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA.*

Área: *6 - PESQUISA OPERACIONAL*
Sub-Área: *6.1 - PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA*

CUTTING PROBLEM WITH USABLE LEFTOVERS

Abstract: *IN THE CUTTING STOCK PROBLEMS WITH USABLE LEFTOVERS (CSPUL) A SET OF ITEMS IS OBTAINED BY CUTTING OBJECTS AVAILABLE IN STOCK. IN GENERAL, THE SOLUTIONS FOR THE PROBLEMS ARE GENERATED SO THAT THE LEFTOVERS RESULTING FROM THE CUTTING STOCK PRROCESS ARE ACCEPTABLE LEFTOVERS (SMALL WASTE OR RETAIL). THE RETAILS ARE LEFTOVERS OF THE CUTTING PATTERNS WITH LENGTH LARGE ENOUGH TO PRODUCE ITEMS TO MEET FUTURE DEMANDS. FOR ONE-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM, SOME PAPERS CAN BE FOUND IN THE LITERATURE WITH DIFFERENT SOLUTION STRATEGY TO SOLVE THESE PROBLEMS. IN THIS WORK WE PRESENT SOME STUDIES THAT WE REALIZE TO SOLVE THE CSPUL IN THE ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL CASES. THE METHODS AND HEURISTICS PROCEDURES DEVELOPED HAVE WITH MAIN OBJECTIVE THE MINIMIZATION OF THE WASTES WITH THE POSSIBILITY OF RETAILS RETURN TO STOCK. SOME COMPUTATIONAL RESULTS ARE ALSO PRESENTED.*

Keyword: *ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEMS; USABLE LEFTOVERS; COMBINATORIAL OPTIMIZATION.*

1 Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em cortar um conjunto de peças disponíveis em estoque para a produção de um conjunto de itens em quantidades e tamanhos especificados, otimizando uma determinada função objetivo. Exemplos de funções objetivos incluem minimizar a perda, minimizar o custo de cortar objetos, minimizar o número total de objetos a serem cortados, maximizar o lucro, minimizar os custos de produção, entre outros. Estes problemas aparecem em diversos processos industriais, em que os objetos correspondem a barras de aço, bobinas de papel e alumínio, placas metálicas e de madeira, placas de circuito impresso, chapas de vidro e fibra de vidro, peças de couro, etc.

A importância econômica e operacional de tais problemas, bem como a dificuldade de resolução e os trabalhos de Kantorovich (1960) e Gilmore e Gomory, (1961, 1963), despertaram grande interesse na comunidade de pesquisadores da pesquisa operacional por problemas de corte. Centenas de artigos podem ser encontrados na literatura, conforme indicam os artigos de revisão e edições especiais: Hinxman (1980), Dyckhoff *et al*. (1985), Dyckhoff (1990), Dyckhoff e Wäscher (1990), Dyckhoff e Finke (1992), Bischoff e Wäscher (1995), Arenales *et al*. (1999), Oliveira e Wäscher (2007) e Wäscher *et al*. (2007). Referências adicionais são encontradas em ESICUP (2011).

São várias as situações em que surgem os problemas de corte de estoque, cada um deles com suas especificidades, restrições e objetivos definidos pelas exigências práticas impostas em cada ambiente em que estes problemas aparecem. Um problema que vem sendo recentemente estudado consiste em aproveitar sobras de padrões de corte desde que estas não sejam pequenas. O problema de aproveitamento de sobra de peças cortadas, embora citado por Brown (1971), passou a ser considerado de maneira explicita em estudos de PCE mais recentemente e apenas para problemas unidimensionais. Roodman (1986) com o objetivo de minimizar as perdas considerou um problema com vários tipos de objetos em estoque. Após o processo de corte, as sobras eram estocadas para serem utilizadas posteriormente.

Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory (1963) incluindo itens extras aos demandados e sem haver demandas para serem atendidas. Sinuany-Stern e Weiner (1994) estudaram o problema de corte unidimensional, com dois objetivos: minimizar a sobra e acumular a máxima quantidade de sobras no último objeto a ser cortado. A sobra acumulada, desde que fosse maior que o comprimento do menor item demandado, seria utilizada para atender futuras demandas.

Com o objetivo de criar um plano de corte unidimensional para diminuir a perda ou então concentrá-las em um único objeto, Gradisar *et al*. (1997) apresentaram um procedimento heurístico (denominado COLA) para otimizar o corte de rolos em uma indústria de tecidos. Gradisar *et al*. (1999) desenvolveram uma abordagem que combina programação linear e procedimento heurístico para resolver o PCESA. O propósito desta combinação é a habilidade para atender a demanda dos itens na quantidade solicitada e acumular sobras para que estas possam ser utilizadas no futuro. Kos e Duhovnik (2002) também incluíram em seus estudos a possibilidade de utilizar retalhos no atendimento de demandas subsequentes desde que estes tivessem comprimentos superiores ao estimado pelo tomador de decisões com base no tipo e planejamento da produção. Para resolver este problema, os autores utilizaram um algoritmo genético híbrido que minimiza a sobra de material, entretanto, se a sobra possui comprimento suficientemente grande, retorna ao estoque para uso no futuro.

Abuabara e Morabito (2009) modificaram o modelo matemático proposto por Gradisar *et al*. (1997) reduzindo o número de restrições e variáveis do modelo. O PCESA também foi estudado por Cherri *et al*. (2009) em que heurísticas da literatura foram modificadas, de modo que as sobras geradas em cada padrão de corte deveriam ser pequenas para serem descartadas como perdas ou suficientemente grandes para serem estocadas como retalhos os quais seriam utilizados no atendimento de futuras demandas. Koch *et al*. (2009) também consideram o aproveitamento de sobras em um estudo desenvolvido na indústria de madeira. Uma ferramenta de suporte de decisão foi desenvolvida baseada em um modelo de programação linear inteiro. Cui e Yang (2010) modificaram o problema proposto por Scheithauer (1991) incluindo limitações no estoque de objetos e na quantidade de retalhos que podem ser geradas em um padrão de corte. Além destes, outros trabalhos envolvendo aproveitamento de sobras podem ser encontrados na literatura.

Neste trabalho, apresentamos o estudo desenvolvido por Cherri *et al*. (2009) sobre o aproveitamento de sobras para o caso unidimensional e um estudo mais recente, que é o aproveitamento de sobras para os problemas de corte bidimensionais (Cherri, 2009). A literatura para problemas de corte de estoque bidimensionais é vasta (Herz (1972), Christofides e Whitlock (1977), Wang (1983), Beasley (1985), Morabito (1992), Arenales e Morabito (1995), Morabito e Arenales (1994,1996), Hifi (1997), Vianna (2000), Lodi *et al*. (2002), Hifi (2004), entre outros), entretanto, não encontramos trabalhos que tratam o aproveitamento de sobras de material para o caso bidimensional, apesar de ser uma prática comum em indústrias de pequeno porte.

Na seção 2 deste trabalho, apresentamos a definição do problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis nos casos unidimensional e bidimensional. Na Seção 3 apresentamos os métodos e procedimentos heurísticos desenvolvidos por Cherri *et al*. (2009) e Cherri *et al*. (2009) que resolvem problemas de corte com sobras aproveitáveis. Na Seção 4 apresentamos alguns resultados computacionais obtidos para problemas unidimensionais e bidimensionais. A Seção 5 destina-se as conclusões e proposta para pesquisas futuras.

2. Definição dos problemas de corte com sobras aproveitáveis

Nesta Seção apresentamos o PCESA nos casos unidimensional e bidimensional. Em ambos os casos considera-se a possibilidade de retalhos retornarem para o estoque, porém, o principal objetivo é a minimização das perdas.

2.1. Problema de corte unidimensional com sobras aproveitáveis

Durante o processo de corte de peças, sobras inevitáveis ocorrem e, eventualmente, são descartadas. Porém, algumas indústrias apresentam a possibilidade de utilizar estas sobras para cortes futuros, desde que tenham tamanhos significativos.

Muitos dos métodos de solução para os problemas de corte buscam minimizar sobras, sendo que, nesses métodos, considera-se como sobra todo pedaço cortado que não seja um item demandado. Embora sobras baixas seja um objetivo desejado, a possibilidade de aproveitá-las para atender demandas futuras introduz uma nova condição na avaliação de uma solução, pois, os padrões de corte podem ser planejados de modo que as sobras geradas fiquem concentradas, tornando-se um retalho que retorna ao estoque para atender demandas futuras.

Para Cherri *et al*. (2009), o problema de corte de estoque unidimensional com sobras de material aproveitáveis é definido como:

> *Um conjunto de peças (itens) deve ser produzido a partir do corte de unidades grandes (objetos), os quais podem ser de tamanhos padronizados (objetos que são comprados de fornecedores) ou não padronizados (objetos que são retalhos de cortes anteriores). São dados os tamanhos e as quantidades dos itens demandados e dos objetos disponíveis no estoque. As demandas devem ser atendidas, cortando-se os objetos disponíveis, de modo que as sobras sejam 'pequenas' (chamadas de* ***perdas****) ou 'suficientemente' grandes' (chamadas de* ***retalhos****) para retornarem ao estoque, porém em número reduzido.*

Um comprimento *suficientemente grande* ou, de outra forma, um comprimento mínimo aceitável para um retalho é uma decisão que pode ser tomada pelo usuário. Algumas possíveis escolhas incluem: o comprimento do menor item demandado, a média dos comprimentos dos itens demandados, o comprimento do maior item, ou qualquer valor arbitrário definido pelo usuário.

Diferentemente dos problemas clássicos de corte, para os quais funções objetivos são bem definidas, no problema de corte com sobras de material aproveitáveis objetiva-se sobras *pequenas* (como nos problemas clássicos) e/ou *suficientemente grande*, porém em um número reduzido, pois uma quantidade excessiva de retalhos pode tornar a solução operacionalmente inviável. Duas soluções com a mesma sobra podem ser diferenciadas. Para uma melhor compreensão do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis, considere o exemplo apresentado na Figura 1, no qual estabelece-se que toda sobra de tamanho superior ou igual a 4 metros é considerada retalho.

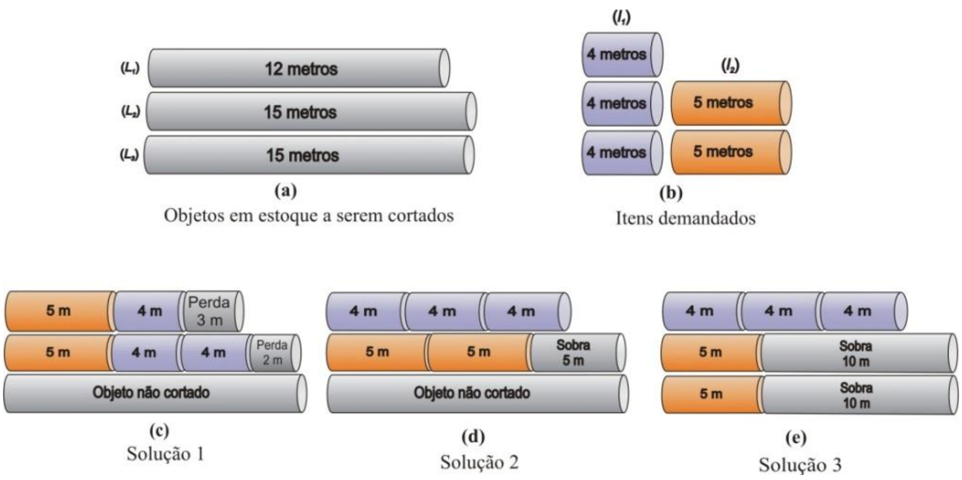

Figura 1: Dados de um problema de corte unidimensional e soluções alternativas

Para o problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis, a Solução 2 (Figura 1-d) é melhor que a Solução 1 (Figura 1-c), pois concentra as sobras em um único objeto e, como é superior a 4 metros, é um retalho que poderá ser utilizado para atender demandas futuras (a Solução 1 tem perda de 5 metros enquanto que a Solução 2 tem perda zero e um retalho de 5 metros). Para o PCESA pode-se dizer que a Solução 1 é uma solução *indesejável*, enquanto a Solução 2 é *desejável*. A Solução 3 também pode ser considerada *indesejável*, pois embora não gere perdas, apresenta um número maior de retalhos, o qual também deve ser reduzido.

Para resolver este problema, Cherri *et al*. (2009) definiram alguns critérios e parâmetros para análise das soluções, assim como uma definição para classificar o procedimento heurístico com melhor desempenho. As soluções para o PCESA foram classificadas como (ideal, aceitável e indesejável).

2.2. Problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis

Os métodos existentes na literatura para resolver o problema de corte bidimensional têm como principal objetivo minimizar a sobra resultante nos objetos cortados. Entretanto, assim como nos problemas de corte unidimensionais, os padrões de corte podem ser planejados de modo a admitir que sobras grandes o suficiente sejam utilizadas no futuro.

Para Cherri *et al*. (2009), o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis é definido de modo similar ao caso unidimensional.

> *Um conjunto de tipos de peças retangulares (itens) de dimensão (l_i, w_i), em que l_i é o comprimento e w_i é a largura da peça i, i = 1, ..., m , deve ser produzido a partir do corte de placas retangulares de dimensões (L_k,W_k), em que L_k é o comprimento e W_k é a largura da peça k em estoque, k = 1, ...,K, as quais podem ser de tamanhos padronizados ou não padronizados. São dadas as demandas dos itens e as quantidades disponíveis das placas. As demandas devem ser atendidas, cortando-se as placas disponíveis, de modo que as sobras sejam ‘pequenas’ (chamadas de* ***perda****) ou ‘suficientemente grandes’ (chamadas de* ***retalhos****) para retornarem ao estoque, porém em número reduzido.*

No caso bidimensional, a classificação da sobra como *perda* ou *retalho* também pode ser fornecida pelo usuário com base em suas experiências. Entretanto, estes termos podem ser definidos de acordo com alguns critérios, os quais são tratados separadamente para objetos padronizados e não padronizados. Esta separação foi realizada pelo fato da sobra ser analisada por parâmetros e critérios diferentes em cada classe de objetos (padronizados e não padronizados).

Para uma melhor compreensão do problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis, considere o exemplo da Figura 2, no qual toda sobra com dimensões superiores a (15 × 10) é um retalho e as dimensões dos itens demandados são ($\ell_1 \times w_1$) = (15 × 25), ($\ell_2 \times w_2$) = (21 × 14), ($\ell_3 \times w_3$) = (12 × 13) e ($\ell_4 \times w_4$) = (24 × 21).

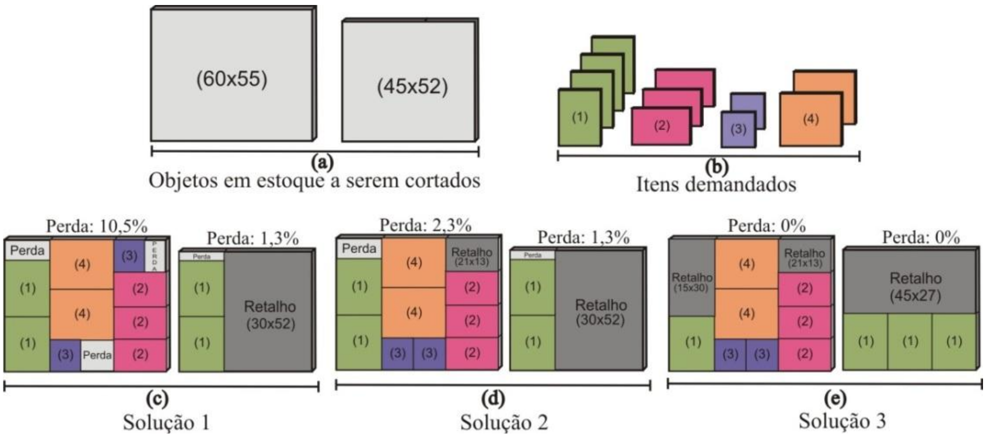

Figura 2: Dados de um problema de corte bidimensional e soluções alternativas.

No exemplo da Figura 2, observa-se que os três possíveis padrões de corte são equivalentes se avaliarmos a função objetivo *sobra total* (soma das áreas das sobras nos objetos cortados). Entretanto, a Solução 2 (Figura 2-d) deve ser preferível à Solução 1 (Figura 2-c) uma vez que se trata de um rearranjo de itens dentro de um padrão de corte. Com relação a Solução 3 (Figura 2-e), obtida por desfazer parcialmente a Solução 2, observamos que a perda foi reduzida, porém, o número de retalhos aumentou, ou seja, esta solução adia o desperdício com a demanda atual, na expectativa de que demandas futuras possam ser mais bem adequadas aos retalhos gerados, reduzindo a perda total num horizonte de planejamento, além do período atual.

Considerando os problemas descritos, apresentamos alguns procedimentos propostos por Cherri *et al* (2009) e Cherri (2009) para resolver o PCESA. O objetivo dos autores com as alterações realizadas é gerar soluções com perda mínima para os problemas de corte (unidimensional e bidimensional) quando retalhos podem retornar ao estoque.

3. Métodos de solução para os problemas de corte com sobras aproveitáveis

Nos problemas de corte com sobras aproveitáveis, uma perda é considerada *intermediária* desde que ela seja maior que uma *perda pequena*, porém, não grande o suficiente para ser um *retalho*. A Figura 3 ilustra esta classificação:

Figura 3: Classificação das sobras.

A partir desta classificação, métodos e procedimentos heurísticos foram desenvolvidos para resolver o PCESA. No texto, utilizamos sobra aceitável toda sobra classificada como *perda pequena* ou *retalho*. Quando classificada como *retalho* a sobra não é contabilizada como perda e retorna ao estoque para atender futuras demandas. Os procedimentos utilizados foram obtidos realizando modificações em procedimentos heurísticos clássicos bem conhecidos na literatura para o problema de corte de estoque.

Para problemas unidimensionais, os procedimentos heurísticos construtivos FFD (*First Fit Decreasing*) e Guloso e os procedimentos residuais FFD, Guloso e Residual de Arredondamento Guloso (RAG) versões 1, 2 e 3 (Poldi e Arenales, 2009) foram alterados para resolver o PCESA. No caso bidimensional, alterações foram realizadas na abordagem Grafo E/OU (Morabito, 1989), no procedimento heurístico construtivo Guloso e no residual RAG - versão 2.

3.1 Procedimentos para resolver problemas unidimensionais com sobras aproveitáveis

Procedimento FFD$_A$

O procedimento FFD$_A$ consiste em aplicar o procedimento FFD (alocação de itens em ordem decrescente) para obter um padrão de corte para cada objeto disponível no estoque e, logo após, a sobra é analisada. Se a sobra for aceitável, o padrão é aceito, caso contrário, um item do padrão de corte (o maior) é retirado. Assim, para o espaço gerado é resolvido um *problema da mochila*, cuja capacidade é a sobra no padrão de corte adicionada ao tamanho do item retirado. Depois de resolvido o *problema da mochila*, a sobra gerada é analisada e se não for aceitável, outro item do padrão inicial (segundo maior) é retirado. Novamente para o espaço gerado é resolvido o *problema da mochila*. Caso tenha sido retirado um item de cada comprimento dentre todos que compõem o padrão, volta-se retirar o primeiro maior. Este procedimento é repetido até que a sobra seja aceitável ou o padrão inicial tenha sido anulado. Neste último caso, o padrão de corte é definido pelo *problema da mochila*.

Procedimento Guloso$_A$

O procedimento Guloso consiste em obter cada padrão de corte a partir da resolução do *problema da mochila* para cada objeto disponível no estoque. Em cada padrão de corte, se a sobra for aceitável, o padrão é aceito e armazenado, senão um item do padrão de corte (o maior) é retirado e a sobra é novamente analisada. Se a sobra gerada ainda não for aceitável, então outro item (segundo maior) é retirado do padrão de corte. Este processo é repetido até que sobra seja aceitável (neste caso, seja um retalho) ou o padrão anulado. Se o padrão for anulado, escolhe-se entre os padrões originais, aquele que apresentar a menor perda (esta é uma situação atípica que pode ocorrer, por exemplo, quando o estoque é formado apenas por retalhos).

Heurísticas Residuais

Heurísticas residuais também foram alteradas para resolver o problema de corte com sobras aproveitáveis. Estas heurísticas consistem em obter uma solução contínua a partir da relaxação do problema linear proposto por Gilmore e Gomory (1961):

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_k} c_{jk} x_{jk} \qquad (1)$$

sujeito a :

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{ijk} x_{jk} = d_i, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{jk} \le e_k, \qquad k = 1,\ldots,K \qquad (3)$$

$$x_{jk} \ge 0 \text{ e inteiro} \qquad j = 1,\ldots,N_k,\ k = 1,\ldots,K. \qquad (4)$$

No modelo (1)-(4) a função objetivo (1) consiste em minimizar a perda de material. As restrições (2), (3) e (4) são referentes a demandada dos itens, estoque de objetos e integralidade das variáveis, respectivamente.

Como a condição de integralidade sobre as variáveis x_{jk} dificulta computacionalmente a resolução dos problemas de corte na medida em que m cresce, Gilmore e Gomory (1961) propuseram relaxar a condição de integralidade sobre estas variáveis e resolver o problema resultante utilizando um procedimento de *geração de colunas*. A partir da solução ótima do problema relaxado, que geralmente não é inteira, determina-se uma solução inteira para o problema de corte de estoque original utilizando procedimentos heurísticos.

Um procedimento trivial para obter uma solução inteira aproximada para o problema consiste em realizar um arredondamento na solução contínua obtida, que é dado pelo inteiro inferior ao fracionário obtido. Com este arredondamento, algumas demandas de itens podem deixar de ser atendidas, gerando um problema residual. Desta forma, resolve-se a relaxação linear do problema residual resultante e obtém-se uma solução inteira aproximada e, assim sucessivamente, até que a demanda residual se anule ou a solução inteira aproximada do problema residual seja nula. Neste último caso, aplica-se algum método (heurístico ou exato) que resolve o problema residual final com poucos itens. Para o problema de aproveitamento de sobras, Cherri *et al*. (2009) utilizaram as heurísticas FFD_A e $Gulosa_A$ apresentadas a seguir.

Heurísticas Residuais FFD_A e $Gulosa_A$

As heurísticas residuais FFD_A e $Gulosa_A$ consistem em obter uma solução inteira aproximada para (1)-(4) determinada por um truncamento dado pelo inteiro inferior ao fracionário obtido. Com esta técnica, ao final do processo de corte, itens podem ter suas demandas não atendidas e, desta forma, os procedimentos heurísticos FFD_A e $Gulosa_A$ são utilizados para resolver este problema residual.

Além destes, os procedimentos residuais (RAG - versões 1, 2 e 3) propostos por Poldi e Arenales (2009) também foram alterados e originaram as heurísticas RAG_A - versões 1, 2 e 3 descritas a seguir.

Heurísticas RAG_A - versões 1, 2 e 3

Inicialmente uma solução inteira aproximada para o modelo (1)-(4) é obtida utilizando uma das versões da heurística RAG (Poldi e Arenales, 2009). Em seguida a sobra em cada padrão é analisada. Se a sobra estiver em limites aceitáveis (calculados previamente), o padrão de corte é aceito e armazenado; caso contrário é rejeitado e em seguida desfeito (demanda e estoque são atualizados). Depois de analisados todos os padrões de corte gerados, aplica-se a heurística FFD_A na demanda residual formada pelos padrões de corte rejeitados. Para este procedimento heurístico, o limiar para a perda aceitável é obtido pela perda percentual da solução inteira aproximada da heurística RAG (nas heurísticas construtivas, esse limitante é fornecido pelo usuário, para objetos padronizados e não padronizados).

3.2 Procedimentos para resolver problemas bidimensionais com sobras aproveitáveis

No caso do problema de corte de estoque bidimensional com sobras aproveitáveis, a geração do padrão de corte utiliza a abordagem em Grafo E/OU. Essa abordagem foi proposta inicialmente por Morabito (1989) e, estendida para casos especiais em Vianna (2000).

Assim como no caso unidimensional, as perdas indesejáveis nos padrões gerados pelo Grafo E/OU devem ser eliminadas. Entretanto, a quantidade de retalhos que retorna ao estoque deve ser reduzida, caso contrário, os padrões de corte poderiam ser gerados sem perdas, porém com uma grande quantidade de retalhos, tornando a solução operacionalmente inviável. Desta forma, os retalhos foram classificados em dois grupos: *retalho natural* e retalho *artificial*. O *retalho natural* é gerado sem que alterações sejam realizadas no padrão de corte, enquanto que o *retalho artificial* é gerado a partir de alterações realizadas nos padrões de corte.

Considerando esta classificação para os retalhos, no máximo um *retalho artificial* pode ser gerado em cada padrão de corte. Porém, se o padrão de corte já possui pelo menos um *retalho natural*, então nenhum *retalho artificial* pode ser gerado, mesmo que as sobras resultantes não sejam aceitáveis, ou seja, com a imposição destas restrições, é possível que nem toda sobra indesejável seja eliminada. Esta classificação para o retalho é considerada apenas para os objetos padronizados e não padronizados grandes (objetos com área superior a

50% da área do menor objeto padronizado) do estoque. Para os objetos não padronizados pequenos (retalhos), as sobras nos padrões de corte são classificadas apenas como *retalho natural* ou *perda aceitável*, isto é, os padrões gerados para estes objetos são aceitos sem que qualquer tipo de alteração seja realizada.

Para evitar perdas elevadas em um padrão que não possui *retalhos naturais*, a perda indesejável com maior área é selecionada e alterações são realizadas na solução obtida pelo Grafo E/OU, obtendo o algoritmo Grafo E/OU$_A$.

Assim, para a resolução do problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis, aplica-se a heurística Gulosa (Cherri *et al.* (2009)), obtendo a heurística Gulosa$_A^{2D}$. Nessa heurística, para considerar o aproveitamento de sobras, os padrões de corte são definidos pelo Grafo E/OU$_A$. Além de considerar o aproveitamento de sobras, a heurística Gulosa$_A^{2D}$ também prioriza o uso dos retalhos disponíveis no estoque.

Além da heurística Gulosa$_A^{2D}$, o procedimento heurístico RAG$_A$-versão 2 também foi desenvolvido para considerar o aproveitamento de sobras em problemas de corte bidimensionais (RAG$_A^{2D}$). A heurística RAG$_A^{2D}$ segue a estrutura da heurística RAG$_A$, apenas alterando-se a geração de colunas, que são associadas a padrões de corte bidimensionais guilhotinados, obtidos pela abordagem grafo E/OU$_A$. Na heurística RAG$_A^{2D}$, diferente do que ocorre no caso unidimensional, o problema residual formado pelos padrões de corte rejeitados é resolvido pela heurística Gulosa$_A^{2D}$ que também prioriza o corte de objetos não padronizados.

4. Resultados Computacionais

Para verificar o desempenho dos procedimentos heurísticos, vários testes computacionais foram realizados, os quais compreendem exemplos práticos, da literatura e exemplos gerados aleatoriamente. Em todos os testes realizados, os procedimentos heurísticos que consideram o aproveitamento de sobras obtiveram um desempenho superior que suas versões clássicas. A análise e classificação de todos os procedimentos heurísticos foram realizadas considerando critérios e definições estabelecidos *a priori*. Todos os procedimentos heurísticos desenvolvidos resolvem problemas com altas dimensões em tempos computacionais muito baixos.

A Tabela 1 mostra o desempenho das heurísticas que resolve o problema de corte com sobras aproveitáveis no caso unidimensional. Esta solução foi obtida a partir de exemplos gerados aleatoriamente, entretanto, testes também foram realizados com problemas reais e exemplos da literatura. Detalhes de todos os testes computacionais realizados para problemas de corte unidimensionais com sobras aproveitáveis estão em Cherri *et al*. (2009).

Tabela 1: Classificação das heurísticas

	Construtivas				**Residuais**									
	FFD	*FFD$_R$*	*Gulosa*	*Gulosa$_R$*	*FFD*	*FFD$_R$*	*Gulosa*	*Gulosa$_R$*	*RAG1*	*RAG$_R$1*	*RAG2*	*RAG$_R$2*	*RAG3*	*RAG$_R$3*
Ideal										X		X		X
Aceitável		X	X		X	X	X	X	X		X		X	
Indesejável	X			X										

Na Tabela 1 observa-se que as heurísticas RAG_A (1, 2 e 3) apresentam um desempenho superior às demais heurísticas, pois, de acordo com Cherri *et al.* (2009) estes procedimentos apresentaram uma perda muito pequena e uma quantidade de retalhos em estoque reduzida. Estes resultados foram obtidos a partir de 320 exemplos gerados aleatoriamente.

Para analisar o desempenho dos procedimentos heurísticos desenvolvidos para resolver o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis, foram utilizados dados reais de uma indústria de esquadrias metálicas de pequeno porte.

Foram analisados 12 problemas, cada qual considerado como um período. A cada período resolve-se um problema de corte de estoque, sendo que as informações de estoque (objetos padronizados restantes e retalhos que foram gerados) para o problema no período atual são transferidas do período anterior. A cada período, uma nova demanda de itens deve ser atendida, que apesar de ser conhecida a priori é tratada como desconhecida no período anterior (a antecipação da produção de itens não é permitida).

Tabela 2: Resultado para 12 períodos

	Construtivas		**Residuais**	
	Gulosa	*Gulosa* $^{2D}_{A}$	*RAG*	*RAG* $^{2D}_{A}$
Perda Percentual	5,5%	5,8%	4,8%	4,9%
Retalho Percentual	79,1%	1,6%	7,4%	0,7%
Número Retalho	13	2	5	2
Área Padronizado	98%	93%	96%	92%
Tempo (s)	1,26	1,74	3,1	4,78

Detalhes de todos os testes computacionais realizados para problemas de corte bidimensionais com sobras aproveitáveis estão em Cherri (2009).

Na Tabela 2 observa-se que embora a porcentagem de perda seja um pouco maior para as heurísticas que consideram o aproveitamento de sobras, a quantidade de retalhos em estoque é muito baixa se comparada com sua versão clássica e, desta forma, as heurísticas de aproveitamento para o caso bidimensional apresentaram soluções mais satisfatórias.

Observando os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2, pode-se observar que as heurísticas residuais apresentam desempenho superior as heurísticas construtivas. Além disso, pode-se comprovar que os procedimentos que tratam sobras aproveitáveis apresentam um desempenho superior as suas respectivas versões clássicas, ou seja, é vantajoso manter retalhos em estoque e aguardar por demandas futuras.

5. Conclusões e Propostas Futuras

Neste trabalho apresentamos o problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis estudado por Cherri *et al*. (2009) e Cherri (2009). O estudo apresentado foi orientado para problemas de corte unidimensionais e bidimensionais, sendo que, para ambos os problemas, as abordagens são orientadas para a minimização das perdas. Desta forma, métodos e procedimentos heurísticos da literatura que têm como objetivo a minimização das perdas foram alterados para incluírem a possibilidade de geração de retalhos (sobras grandes), as quais não são contabilizadas como perdas.

A partir dos testes computacionais realizados, observamos que as heurísticas Residuais de Arredondamento Guloso (RAG) que consideram o aproveitamento de sobras além de apresentarem o mesmo comportamento para problemas unidimensionais e bidimensionais geram soluções superiores aos demais procedimentos heurísticos (clássicos e de aproveitamento).

Como proposta de trabalho futuro, podemos considerar o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis. Uma possível alteração no grafo E/OU seria determinar o limitante inferior considerando padrões de corte em 2-estágios. Além disso, heurísticas residuais da literatura para a obtenção de uma solução inteira também podem ser investigadas e implementadas para problemas unidimensionais e bidimensionais.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPESP e CNPq.

Referências bibliograficas

Abuabara, A., Morabito, R., Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, n.149, p.149-165, 2009.

Arenales, M. N., Morabito, R., An AND/OR - graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*, n.84, p.599-617, 1995.

Arenales, M. N., Morabito, R., Yanasse H. (editores), Cutting and packing problems. *Pesquisa Operacional*, n.19, p.107-299, 1999.

Beasley, J., Algorithms for unconstrained two-dimensional gilhotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, n.36, p.297-306, 1985.

Bischoff, E., Wäscher, G. (editores), Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.84, n.3, special issue, 1995.

Brown, A. R., *Optimum packing and depletion*. London: Macdonald and New York: American Elsevier, 1971.

Cherri, A. C., Arenales, M. N., Yanasse, H. H., *The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach*. European Journal of Operations Research, n.196, p.897-908, 2009.

Cherri, A., C., *Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis*. Tese de doutorado. ICMC – USP – São Carlos, 2009.

Christofides, N. e Whitlock, N. C., An algorithm for two-dimensional cutting problem. *Operations Research*, n.25, p.31-44, 1977.

Dyckhoff, H., Kruse, H. J., Abel, D., Gal, T., Trim loss and related problems. *The International Journal of Management Science*, n.13, p.59-72, 1985.

Dyckhoff, H., Wäscher, G. (editores), Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.44, n.2, special issue, 1990.

Dyckhoff, H., A typology of cutting and packing problems. *European Journal Operational Research*, n.44, p.145-159, 1990.

Dyckhoff, H. e Finke, U., *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Heidelberg: Springer, 1992.

ESICUP – Euro Special Interest Group on Cutting and Packing. (http://www.apdio.pt/esicup/) (accessed in 2011).

Gradisar, M., Jesenko, J., Resinovic, C., Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operational Research*, n.10, p.945-953, 1997.

Gradisar, M., Resinovic, C.,Kljajic, M., A hybrid approach for optimization of one-dimentional cutting. *European Journal of Operational Research*, n.119, p.719-728, 1999.

Gilmore, P. C., Gomory, R. E., A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, n.9, p.848-859, 1961.

Gilmore, P. C., Gomory, R. E., A linear programming approach to the cutting stock problem – Part II. *Operations Research*, n.11, p.863-888, 1963.

Herz, J., Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. IBM Journal of Research and Development, n.16, p.462-469, 1972.

Hifi, M., An improvement of Viswanathan and Bagchi's exact algorithm for constrained two-dimensional cutting stock. *Computers and Operations Research.* n.24, p.727-736, 1997.

Hifi, M., Dynamic Programming and Hill-climbing Techniques for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems. *Journal of Combinatorial Optimization*. n.8, p.65-84, 2004.

Hinxman, A., The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, n.5, p.8-18, 1980.

Kantorovich, L.V., Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*, n.6, p.366-422, 1960.

Koch, S., König, S., Wäscher, G., *Linear programming for a cutting problem in the wood processing industry - a case study*. International Transactions in Operational Research, n.16: p.715-726, 2009.

Kos, L., Duhovnik, J., Cutting optimization with variable-sized stock and inventory status data. International Journal of Production Research, n.40, p.2289-2301, 2002.

Lodi, A., Martello, S., Monaci, M., Two-dimensional packing problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, n.141, p.241-252, 2002.

Morabito, R., *Corte de Estoque Bidimensional*. Dissertação de Mestrado. ICMC – USP, São Carlos, 1989.

Morabito, R., *Uma Abordagem em Grafo E/OU para o Problema do Empacotamento: Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres*. Tese de Doutorado. EESC – USP, São Carlos, 1992.

Morabito, R., Arenales, M. N., An AND/OR - graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, n.1, p.59-73, 1994.

Morabito, R., Arenales, M. N., Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR - graph approach. *European Journal of Operational Research*, n.94, p.548-560, 1996.

Oliveira, J. F., Wäscher, G. (editores) Special Issue on Cutting and Packing. *European Journal of Operational Research*, 183, 2007.

Poldi, K. C., Arenales, M. N., Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers and Operations Research*, n.36, p.2074-2081, 2009.

Scheithauer, G., A note on handling residual length. *Optimization*, n.22, p.461-466, 1991.

Sinuany-Stern, Z., Weiner I., The One Dimensional Cutting Stock Problem Using Two Objectives. *Journal of Operations Research Society*, n.45, p.231-236, 1994.

Vianna, A. C. G., *Problema de Corte e Empacotamento: uma Abordagem em Grafo E/OU*. Teses de Doutorado. ICMC – USP, São Carlos, 2000.

Wang, P.Y., Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems. *Operations Research*, n.31, p.573-586, 1983.

Wäscher, G., Hauβner, H., Schumann, H., An improved typology cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, n.183, p.1109-1130, 2007.