APROVEITAMENTO DE SOBRAS PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE

Adriana Cherri
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP
17033-360, Bauru, SP
e-mail: adriana@fc.unesp.br

Andréa Vianna
Departamento de Computação, Faculdade de Ciências, UNESP
17033-360, Bauru, SP
e-mail: vianna@fc.unesp.br

Resumo

Nos problemas de corte de estoque a qualidade dos padrões de corte depende diretamente dos tamanhos e quantidades dos itens a serem produzidos. Desta forma, podemos considerar que se a demanda de itens gerar sobras indesejáveis (nem tão grandes para serem aproveitáveis, nem tão pequenas para serem perdas aceitáveis), então convém gerar retalhos (não computáveis como perda) que serão utilizados para produzir itens de demandas futuras. Para resolver este problema, características desejáveis para uma boa solução são definidas e alterações em métodos heurísticos clássicos são realizadas, de modo que os padrões de corte com sobras indesejáveis são alterados. Geralmente, para estes problemas, os métodos e procedimentos heurísticos desenvolvidos mantêm como o principal objetivo a minimização das perdas. Embora seja uma pesquisa recente, neste trabalho, apresentamos uma breve definição dos problemas de corte unidimensional e bidimensional com sobras aproveitáveis e alguns métodos de solução e resultados existentes na literatura.
Palavras-chave: Problema de corte de estoque unidimensional e bidimensional, Aproveitamento de sobras, Otimização Combinatória.

Abstract

In the cutting sock problems the cutting patterns quality depends directly of the sizes and amounts of the items that will be produced. This way, we consider that if the present demand to generate undesirable waste (not large enough to be used, nor too small to be acceptable waste), then it is better to generate retails (not computed as waste) that will be used to produce items to meet future demands. To solve this problem, some desirable characteristics for a good solution are defined and alterations in classical heuristic methods are presented, such that the cutting patterns with undesirable waste are altered. Generally, for this problems, methods and heuristic procedures developed preserve as main objective the minimization of the waste. Although this is a recent search, in this work we present a brief definition of the one-dimensional and two-dimensional cutting stock problems with usable leftovers and some solution methods and results that exist in the literature.
Key-words: One-dimensional and two-dimensional cutting stock problems, usable leftovers, Combinatorial Optimization.

1. Introdução

O problema de corte de estoque consiste em cortar um conjunto de peças disponíveis em estoque para a produção de um conjunto de itens em quantidades e tamanhos especificados, otimizando uma determinada função objetivo. Exemplos de funções objetivos incluem minimizar a perda, minimizar o custo de cortar objetos, minimizar o número total de objetos a serem cortados, maximizar o lucro, minimizar os custos de produção, entre outros.

Problemas de corte podem aparecer em diversos processos industriais, em que os objetos correspondem a barras de aço, bobinas de papel e alumínio, placas metálicas e de madeira, placas de circuito impresso, chapas de vidro e fibra de vidro, peças de couro, etc. Nessas indústrias, a redução dos custos de produção e a melhoria da eficiência estão, frequentemente, associadas à utilização de estratégias adequadas de cortes.

A importância econômica e operacional de tais problemas, bem como a dificuldade de resolução e os trabalhos de Kantorovich (1960) e Gilmore e Gomory, (1961, 1963), despertaram grande interesse na comunidade de pesquisadores da pesquisa operacional por problemas de corte. Centenas de artigos podem ser encontrados na literatura, conforme indicam os artigos de revisão e edições especiais: Hinxman (1980), Dyckhoff *et al*. (1985), Dyckhoff (1990), Dyckhoff e Wäscher (1990), Dyckhoff e Finke (1992), Dowsland e Dowsland (1992), Sweeney e Paternoster (1992), Bischoff e Wäscher (1995), Dyckhoff *et al*. (1997), Arenales *et al*. (1999), Wang e Wäscher (2002), Hifi (2002), Oliveira e Wäscher (2007) e Wäscher *et al*. (2007). Referências adicionais podem ser encontradas em ESICUP (2009).

São várias as situações em que surgem os problemas de corte de estoque, cada um deles com suas especificidades, restrições e objetivos definidos pelas exigências práticas impostas em cada ambiente em que estes problemas aparecem.

Um problema que vem sendo recentemente estudado consiste em aproveitar sobras de padrões de corte desde que estas não sejam pequenas. O problema de aproveitamento de sobras foi citado por Brown (1971), entretanto, só mais tarde começaram a aparecer os primeiros trabalhos que abordam este tema.

Dyckhoff (1981) propôs um modelo matemático para o problema de corte, o qual não utiliza geração de colunas para a formação dos padrões de corte e aponta a possibilidade deste modelo ser adaptado e utilizado para tratar o aproveitamento de sobras. A vantagem do modelo proposto é a possibilidade de controlar sobras que surgem durante o processo de corte atribuindo custos a elas. O problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis também foi estudado por Arbibi *et al*. (2002) em uma indústria automobilística. Nesta indústria, os itens cortados eram utilizados para a fabricação de correias e apresentavam a mesma altura e comprimentos diferentes. Desta forma, os retalhos gerados durante o processo de corte poderiam ser costurados e utilizados na confecção de determinados itens. Com esta possibilidade de reuso, uma considerável quantidade de material poderia ser economizada. Entretanto, este caso não é considerado nesta tese, ou seja, um retalho somente pode ser cortado para a produção de itens.

Embora o estudo sobre problemas de corte com aproveitamento de sobras seja recente, alguns trabalhos foram publicados para problemas unidimensionais. Para considerar o aproveitamento de sobras, Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory (1963). Roodman (1986) com o objetivo de minimizar as perdas considerou um problema com vários tipos de objetos em estoque. Após o processo de corte, as sobras eram estocadas para serem utilizadas posteriormente. Similar a este problema, Sinuany-Stern e Weiner (1994) estudaram o problema de corte unidimensional, com dois objetivos: minimizar a sobra (objetivo considerado mais importante) e acumular a máxima quantidade de sobras no último objeto a ser cortado. A sobra acumulada, desde que fosse maior que o comprimento do menor item demandado, seria utilizada para atender futuras demandas.

Com o objetivo de criar um plano de corte unidimensional para diminuir a perda ou então concentrá-las em um único objeto, Gradisar *et al*. (1997) apresentaram um procedimento heurístico (denominado COLA) para otimizar o corte de rolos em uma indústria de tecidos. Gradisar *et al*. (1999a) propuseram uma modificação no algoritmo COLA (denominado CUT) e em 1999b Gradisar *et al*. desenvolveram uma abordagem que combina programação linear e procedimento heurístico para resolver o problema de corte com sobras aproveitáveis. O propósito desta combinação é a habilidade para atender a demanda dos itens na quantidade solicitada e acumular sobras para que estas possam ser utilizadas no futuro. Chu e Antonio (2007) abordaram o problema de corte com sobras aproveitáveis em uma indústria especializada no corte de metais. Para resolver este problema, consideraram um problema típico de corte unidimensional com algumas restrições técnicas que surgem na indústria de corte de metal.

Gradisar e Trkman (2005) desenvolveram um algoritmo para encontrar a solução para problemas gerais de corte de estoque quando todos os objetos possuem comprimentos diferentes, partindo da solução obtida pelo algoritmo CUT e refazendo padrões que não satisfaziam alguns critérios. Trkman e Gradisar (2007) destacaram a importância de adaptar adequadamente métodos que consideram o aproveitamento de sobras para que não haja acúmulo de retalhos no estoque e propuseram um método de solução que considera esta restrição.

Kos e Duhovnik (2002) também incluíram em seus estudos a possibilidade de utilizar retalhos no atendimento de demandas subseqüentes desde que estes tivessem comprimentos superiores ao estimado pelo tomador de decisões com base no tipo e planejamento da produção. Para resolver este problema, os autores utilizaram um algoritmo genético híbrido que minimiza a sobra de material, entretanto, se a sobra possui comprimento suficientemente grande, retorna ao estoque para uso no futuro.

Abuabara e Morabito (2008, 2009) modificaram o modelo matemático proposto por Gradisar *et al*. (1997) reduzindo o número de restrições e variáveis do modelo. O problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis também foi estudado por Cherri *et al*. (2009a) em que heurísticas bem conhecidas da literatura (construtivas e residuais) foram modificadas, de modo que as sobras geradas em cada padrão de corte deveriam ser pequenas para serem descartadas como perdas ou suficientemente grandes para serem estocadas como retalhos os quais seriam utilizados no atendimento de futuras demandas. Koch *et al*. (2009) também consideram o aproveitamento de sobras em um estudo desenvolvido na indústria de madeira. Uma ferramenta de suporte de decisão foi desenvolvida baseada em um modelo de programação linear inteiro.

Além de trabalhos publicados na literatura, o aproveitamento de sobras para problemas de corte unidimensionais também é considerado em alguns softwares comerciais, muito deles com versões livres limitadas disponíveis na internet (1D Nesting Optimizer, Ace Cutting Optimiser, 1D Stock Cutter, Bar Cut Optimizer & Manager, Corte Certo 1D, Cut Logic 1D, Cutting Line, Cutting Optimize, Pipe Cutting Suíte, Plus 1D, Real Cut 1D). Usualmente a minimização da perda é o principal objetivo a ser considerado pelos softwares, entretanto várias restrições adicionais podem ser inseridas.

Neste trabalho, apresentamos o estudo desenvolvido por Cherri *et al*. (2009a) sobre o aproveitamento de sobras para o caso unidimensional e um estudo que vem sendo desenvolvido mais recentemente, que é o aproveitamento de sobras para os problemas de corte bidimensionais (Cherri *et al*., 2009b). A literatura para problemas de corte de estoque bidimensionais é vasta (Herz (1972), Christofides e Whitlock (1977), Wang (1983), Beasley (1985), Riehme(1996), Morabito (1992), Arenales e Morabito (1995), Christofides e Hadjiconstantinou (1995), Morabito e Arenales (1994),(1996), Hifi (1997), Vianna (2000), Lodi *et al*. (2002), Hifi (2004), entre outros), entretanto, não encontramos trabalhos que tratam o aproveitamento de sobras de material para o caso bidimensional, apesar de ser uma prática comum em indústrias de pequeno porte. Uma relação de softwares comerciais que consideram este problema pode ser encontrada em Macedo *et al*. (2008).

Na seção 2 deste trabalho, apresentamos a definição do problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis nos casos unidimensional e bidimensional. Na Seção 3 apresentamos os métodos e procedimentos heurísticos desenvolvidos por Cherri *et al*. (2009a) e Cherri *et al*. (2009b) que resolvem problemas de corte com sobras aproveitáveis. Na Seção 4 apresentamos alguns resultados computacionais obtidos para problemas unidimensionais e bidimensionais. A Seção 6 destina-se as conclusões e proposta para pesquisas futuras.

2. Definição dos problemas de corte com sobras aproveitáveis

Nesta Seção apresentamos o problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis nos casos unidimensional e bidimensional. Em ambos os casos considera-se o aproveitamento de sobras, porém, o principal objetivo é a minimização das perdas.

2.1. Problema de corte unidimensional com sobras aproveitáveis

Durante o processo de corte de peças, sobras inevitáveis ocorrem e, eventualmente, são descartadas. Porém, algumas indústrias apresentam a possibilidade de utilizar estas sobras para cortes futuros, desde que tenham tamanhos significativos.

Muitos dos métodos de solução para os problemas de corte buscam minimizar sobras, (objetivos alternativos podem ser definidos, mas sobras baixas devem ser perseguidas) sendo que, nesses métodos, considera-se como sobra todo pedaço cortado que não seja um item demandado. Embora sobras baixas seja ainda um objetivo perseguido, a possibilidade de aproveitá-las para atender demandas futuras introduz uma nova condição na avaliação de uma solução.

Planejar padrões de corte que concentrem as sobras em poucos padrões parece ser uma boa alternativa a ser perseguida, pois aumenta as chances delas serem suficientemente grandes para voltarem ao estoque e serem melhor utilizadas no futuro.

Para Cherri *et al*. (2009a), o problema de corte de estoque unidimensional com sobras de material aproveitáveis é definido como:

> *Um conjunto de peças (itens) deve ser produzido a partir do corte de unidades grandes (objetos), os quais podem ser de tamanhos padronizados (objetos que são comprados de fornecedores) ou não padronizados (objetos que são retalhos de cortes anteriores). São dados os tamanhos e as quantidades dos itens demandados e dos objetos disponíveis no estoque. As demandas devem ser atendidas, cortando-se os objetos disponíveis, de modo que as sobras sejam 'pequenas' (chamadas de* ***perdas****) ou 'suficientemente' grandes' (chamadas de* ***retalhos****) para retornarem ao estoque, porém em número reduzido.*

Um comprimento *suficientemente grande* ou, de outra forma, um comprimento mínimo aceitável para um retalho é uma decisão que pode ser tomada pelo usuário. Algumas possíveis escolhas incluem: o comprimento do menor item demandado, a média dos comprimentos dos itens demandados, o comprimento do maior item, ou qualquer valor arbitrário definido pelo usuário.

Diferentemente dos problemas clássicos de corte, para os quais funções objetivos são bem definidas, no problema de corte com sobras de material aproveitáveis objetiva-se sobras *pequenas* (como nos problemas clássicos), e/ou *suficientemente grande*, porém em um número reduzido, pois uma quantidade excessiva de retalhos pode tornar a solução operacionalmente inviável. Duas soluções com a mesma sobra podem ser diferenciadas. Para uma melhor compreensão do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis, considere o exemplo apresentado na Figura 1, no qual estabelece-se que toda sobra de tamanho superior ou igual a 4 metros é considerada retalho.

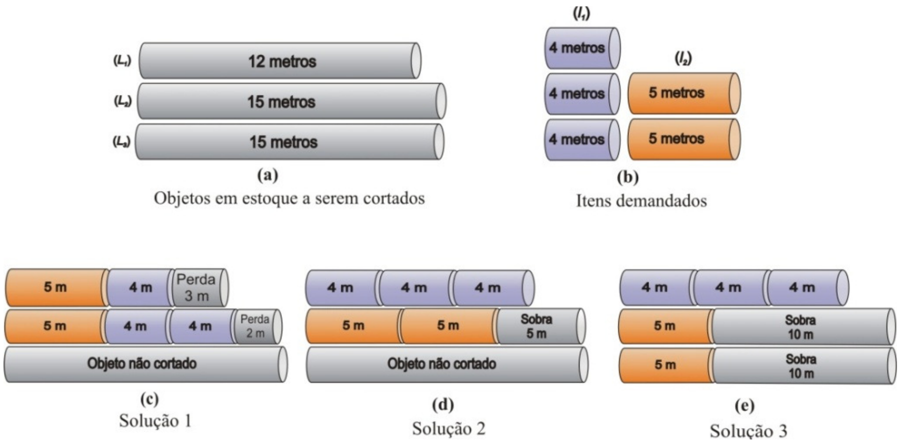

Figura 1: Dados de um problema de corte unidimensional e soluções alternativas

Para o problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis, a Solução 2 (Figura 1-d) é melhor que a Solução 1 (Figura 1-c), pois concentra as sobras em um único objeto e, como é superior a 4 metros, é um retalho que poderá ser utilizado para atender demandas futuras (a Solução 1 tem perda de 5 metros enquanto que a Solução 2 tem perda zero e um retalho de 5 metros). Para o problema de corte com sobras aproveitáveis pode-se dizer que a Solução 1 é uma solução *indesejável*, enquanto a Solução 2 é *ideal*. A Solução 3 também pode ser considerada *indesejável*, pois embora não gere perdas, apresenta um número maior de retalhos, o qual também deve ser reduzido.

Para resolver este problema, Cherri *et al*. (2009a) definiram alguns critérios e parâmetros para análise das soluções, assim como uma definição para classificar o procedimento heurístico com melhor desempenho.

2.2. Problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis

Os métodos existentes na literatura para resolver o problema de corte bidimensional têm como principal objetivo minimizar a sobra resultante nos objetos cortados. Entretanto, assim como nos problemas de corte unidimensionais, os padrões de corte podem ser planejados de modo a admitir que sobras grandes o suficiente sejam utilizadas no futuro.

Para Cherri *et al*. (2009b), o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis é definido de modo similar ao caso unidimensional.

> *Um conjunto de tipos de peças retangulares (itens) de dimensão (l_i, w_i), em que l_i é o comprimento e w_i é a largura da peça i, $i = 1, ..., m$, deve ser produzido a partir do corte de placas retangulares (objetos) de dimensões (L_k,W_k), em que L_k é o comprimento e W_k é a largura da peça k em estoque, $k = 1, ...,K$, as quais podem ser de tamanhos padronizados (placas que são comprados de fornecedores) ou não padronizados (placas que são retalhos de cortes anteriores). São dadas as demandas dos itens e as quantidades disponíveis das placas. As demandas devem ser atendidas, cortando-se as placas disponíveis, de modo que as sobras sejam 'pequenas' (chamadas de* ***perda****) ou 'suficientemente grandes' (chamadas de* ***retalhos****) para retornarem ao estoque, porém em número reduzido.*

No caso bidimensional, a classificação da sobra como *perda* ou *retalho* também podem ser fornecidos pelo usuário com base em suas experiências. Entretanto, estes termos podem ser definidos de acordo com alguns critérios, os quais são tratados separadamente para objetos padronizados e não padronizados. Esta separação foi realizada pelo fato da sobra ser analisada por parâmetros e critérios diferentes em cada classe de objetos (padronizados e não padronizados).

Para uma melhor compreensão do problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis, considere o exemplo da Figura 2, no qual considera-se que toda sobra com dimensões superiores a (15×10) é um retalho que pode ser utilizado no atendimento de demandas futuras e as dimensões dos itens demandados são $(\ell_1 \times w_1) = (15 \times 25)$, $(\ell_2 \times w_2) = (21 \times 14)$, $(\ell_3 \times w_3) = (12 \times 13)$ e $(\ell_4 \times w_4) = (24 \times 21)$.

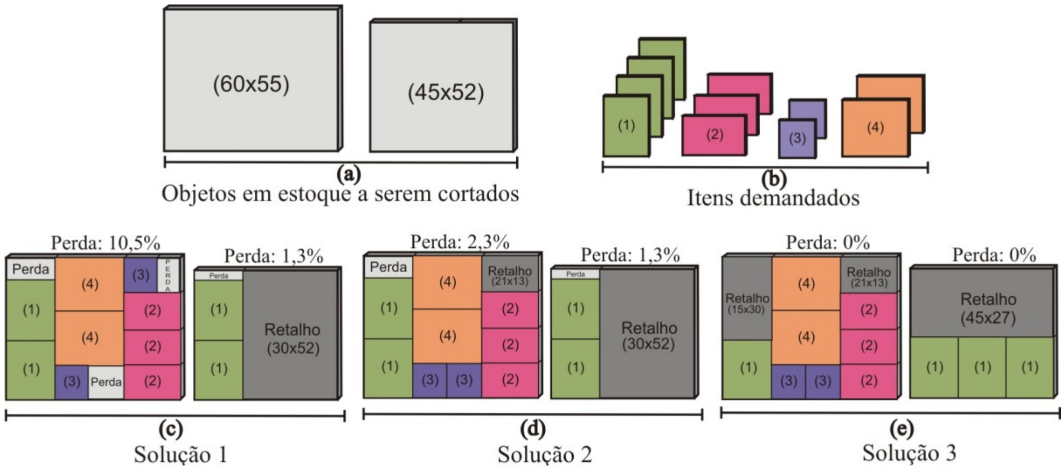

Figura2: Dados de um problema de corte bidimensional e soluções alternativas.

No exemplo da Figura 2, observa-se que os três possíveis padrões de corte são equivalentes se avaliarmos a função objetivo *sobra total* (soma das áreas das sobras nos objetos cortados). Entretanto, a Solução 2 (Figura 2-d) deve ser preferível à Solução 1 (Figura 2-c) uma vez que se trata de um rearranjo de itens dentro de um padrão de corte. Com relação a Solução 3 (Figura 2-e), obtida por desfazer parcialmente a Solução 2, observamos que a perda foi reduzida, porém, o número de retalhos aumentou, ou seja, esta solução adia o desperdício com a demanda atual, na expectativa de que demandas futuras possam ser mais bem adequadas aos retalhos gerados, reduzindo a perda total num horizonte de planejamento, além do período atual.

Considerando os problemas descritos, apresentamos as alterações realizadas por Cherri *et al*. (2009a) e Cherri *et al*. (2009b) em alguns procedimentos heurísticos existentes na literatura que resolvem problemas clássicos de corte de estoque. O objetivo dos autores com as alterações realizadas é gerar soluções para os problemas de corte (unidimensional e bidimensional) quando sobras podem retornar ao estoque.

3. Métodos de solução para os problemas de corte com sobras aproveitáveis

Nos problemas de corte com sobras aproveitáveis, uma perda é considerada *não tão pequena* desde que ela seja maior que uma *perda pequena*, porém, não grande o suficiente para ser um retalho. A Figura 3 ilustra esta classificação:

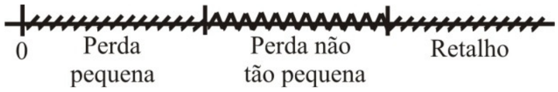

Figura 3: Classificação das sobras.

A partir desta classificação, métodos e procedimentos heurísticos foram desenvolvidos para resolver o problema de corte de estoque unidimensional e bidimensional com sobras de material aproveitáveis. Estas sobras (denominadas *retalhos*) não são contabilizadas como perdas e retornam ao estoque para atender futuras demandas. Tais procedimentos foram obtidos realizando modificações em procedimentos heurísticos clássicos bem conhecidos na literatura para o problema de corte de estoque.

Para o caso unidimensional, os procedimentos heurísticos construtivos FFD e Guloso foram alterados para resolver o problema de aproveitamento de sobras Os procedimentos residuais alterados foram FFD, Guloso e Residuais de Arredondamento Guloso (RAG) nas versões 1, 2 e 3 (Poldi e Arenales, 2009). No caso bidimensional, alterações foram realizadas na abordagem Grafo E/OU (Morabito, 1989) e nos procedimentos heurísticos construtivo Guloso e RAG - versão 2.

3.1 Procedimentos heurísticos para problemas unidimensionais com sobras aproveitáveis

Procedimento FFD$_A$

O procedimento FFD$_A$ consiste em aplicar o procedimento FFD (alocação de itens em ordem decrescente) para obter um padrão de corte para cada objeto disponível no estoque e, logo após, a sobra é analisada. Se a sobra for aceitável, isto é, pequena ou grande o suficiente para ser considerada retalho, o padrão é aceito. Senão um item do padrão (o maior) é retirado. Assim, para o espaço gerado é resolvido um problema da mochila, cuja capacidade é a sobra no padrão de corte adicionada ao tamanho do item retirado. Depois de resolvido o problema da mochila, a sobra gerada é analisada e se não for aceitável, outro item do padrão inicial (segundo maior) é retirado. Novamente para o espaço gerado é resolvido o problema da mochila. Caso tenha sido retirado um item de cada comprimento dentre todos que compõem o padrão, volta-se retirar o primeiro maior. Este procedimento é repetido até que a sobra seja aceitável, isto é, pequena para ser descartada ou um retalho seja gerado, ou o padrão inicial tenha sido anulado. Neste último caso, o padrão de corte é definido pelo problema da mochila.

Procedimento Guloso$_A$

O procedimento Guloso consiste em resolver um problema da mochila para cada objeto disponível no estoque para obter um padrão de corte e, logo após, a sobra é analisada. Se a sobra for aceitável (pequena perda ou retalho), então o padrão é aceito, senão um item do padrão de corte (o maior) é retirado e a sobra é novamente analisada. Se a sobra gerada ainda não for aceitável, então outro item (segundo maior) é retirado do padrão de corte. Este processo é repetido até que sobra seja aceitável ou o padrão anulado. Se o padrão for anulado, escolhe-se entre os padrões originais, aquele que apresentar a menor perda (esta é uma situação atípica que pode ocorrer, por exemplo, quando o estoque é formado apenas por retalhos).

Heurísticas Residuais

Heurísticas residuais também foram alteradas para resolver o problema de corte com sobras aproveitáveis. Estas heurísticas consistem em obter uma solução contínua a partir da relaxação do problema linear proposto por Gilmore e Gomory em 1963:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_k} c_{jk} x_{jk} \qquad (1)$$

$$\text{sujeito a:}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{ijk} x_{jk} = d_i, \qquad i = 1,\dots,m \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{jk} \le e_k, \qquad k = 1,\dots,K \qquad (3)$$

$$x_{jk} \ge 0 \text{ e inteiro} \qquad j = 1,\dots,N_k,\ k = 1,\dots,K. \qquad (4)$$

em que

N_k: número de padrões de corte para o objeto do tipo k;

c_{jk}: custo do objeto do tipo k para o padrão de corte j, $j = 1,\dots, N_k$, $k = 1,\dots, K$ (para minimização da perda, $c_{jk} = L_k - \sum_{i=1}^{m} \ell_i \alpha_{ijk}$);

a_{ijk}: número de itens do tipo i no padrão de corte j para o objeto do tipo k, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K$;
d_i: demanda do item do tipo i, $i = 1, ..., m;$
e_k: estoque do objeto do tipo k, $k = 1, ..., K.$

Variável de decisão:
x_{jk}: número de objetos do tipo k cortados no padrão j, $j= 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K.$

Utilizando o modelo (1-4) e alguma técnica de arredondamento obtém-se uma solução inteira. Entretanto, com esta estratégia, algumas demandas podem não ser atendidas devido ao arredondamento das soluções gerando um problema residual, que é resolvido por procedimentos heurísticos. Para o problema de aproveitamento de sobras, Cherri *et al*. (2009) alteraram as heurísticas Residuais FFD e Gulosa.

Heurísticas Residuais FFD_A e $Gulosa_A$

As heurísticas residuais FFD_A e $Gulosa_A$ consistem em obter uma solução inteira aproximada para (1)-(4) determinada por um truncamento trivial dado pelo inteiro inferior ao fracionário obtido. Com esta técnica, ao final do processo de corte, itens podem ter suas demandas não atendidas e, desta forma, os procedimentos heurísticos FFD_A e $Gulosa_A$ são utilizados para resolver este problema residual.

Outros procedimentos heurísticos residuais alterados para resolver o aproveitamento de sobras foram propostos por Poldi e Arenales (2009). As Heurísticas Residuais de Arredondamento Guloso (RAG - versões 1, 2 e 3) originaram as heurísticas RAG_A - versões 1, 2 e 3 as quais são descritas a seguir.

Heurísticas RAG_A - versões 1, 2 e 3

Inicialmente uma solução inteira aproximada é obtida utilizando uma das versões da heurística RAG, que não necessita do problema residual. Em seguida a sobra em cada padrão é analisada. Se a sobra estiver em limites aceitáveis (calculados previamente), o padrão de corte é aceito e armazenado; caso contrário é rejeitado e em seguida desfeito (demanda e estoque são atualizados). Depois de analisados todos os padrões de corte gerados, aplica-se a heurística FFD_A na demanda residual formada pelos padrões de corte rejeitados. Para este procedimento heurístico, o limiar para a perda aceitável é obtido pela perda percentual da solução inteira aproximada da heurística RAG (nas heurísticas construtivas, esse limitante é fornecido pelo usuário, para objetos padronizados e não padronizados).

3.1 Métodos e procedimentos heurísticos para problemas bidimensionais com sobras aproveitáveis

No caso do problema de corte de estoque bidimensional com sobras aproveitáveis, a geração do padrão de corte é feita utilizando a abordagem em Grafo E/OU. Essa abordagem foi proposta inicialmente por Morabito (1989) e, estendida para casos especiais em Vianna (2000).

Assim como no caso unidimensional, as perdas indesejáveis nos padrões gerados pelo Grafo E/OU devem ser eliminadas. Entretanto, a quantidade de retalhos que retorna ao estoque deve ser reduzida, caso contrário, os padrões de corte poderiam ser gerados sem perdas, porém com uma grande quantidade de retalhos, tornando a solução operacionalmente inviável. Desta forma, os retalhos foram classificados em dois grupos: *retalho natural* e retalho *artificial*. O *retalho natural* é gerado sem que alterações sejam realizadas no padrão de corte, enquanto que o *retalho artificial* é gerado a partir de alterações realizadas nos padrões de corte.

Considerando esta classificação para os retalhos, no máximo um *retalho artificial* pode ser gerado em cada padrão de corte. Porém, se o padrão de corte já possui pelo menos um *retalho natural*, então nenhum *retalho artificial* pode ser gerado, mesmo que as sobras resultantes não sejam aceitáveis, ou seja, com a imposição destas restrições, é possível que nem toda sobra indesejável seja eliminada.

Esta classificação para o retalho é considerada apenas para os objetos padronizados e não padronizados grandes (objetos com área superior a 50% da área do menor objeto padronizado) do estoque. Para os objetos não padronizados pequenos, as sobras nos padrões de corte são classificada apenas como *retalho natural* ou *perda aceitável*, isto é, os padrões gerados para estes objetos são aceitos sem que qualquer tipo de alteração seja realizada.

Para evitar perdas elevadas em um padrão que não possui *retalhos naturais*, a perda indesejável com maior área é selecionada e alterações são realizadas no Grafo E/OU no nó final que contém a perda selecionada, obtendo assim o algoritmo Grafo E/OU$_A$.

Assim, para a resolução do problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis, aplica-se a heurística Gulosa$_A$, descrita na seção anterior, obtendo a heurística Gulosa$_A^{2D}$. Nessa heurística, para considerar o aproveitamento de sobras, os padrões de corte são definidos pelo algoritmo Grafo E/OU$_A$. Além de considerar o aproveitamento de sobras, a heurística Gulosa$_A^{2D}$ também prioriza o uso dos objetos não padronizados disponíveis no estoque.

Além da heurística Gulosa$_A^{2D}$, o procedimento heurístico residual de arredondamento guloso (RAG$_A$-versão 2) também foi desenvolvido para considerar o aproveitamento de sobras em problemas de corte bidimensionais (RAG$_A^{2D}$). A heurística RAG$_A^{2D}$ é a mesma da heurística RAG$_A$, apenas alterando-se a geração de colunas, que são associadas a padrões de corte bidimensionais guilhotinados, obtidos pela abordagem grafo E/OU$_A$.

Na heurística RAG$_A^{2D}$, diferente do que ocorre no caso unidimensional, o problema residual formado pelos padrões de corte rejeitados é resolvido pela heurística Gulosa$_A^{2D}$ que também prioriza o corte de objetos não padronizados.

4. Resultados Computacionais

Para verificar o desempenho dos procedimentos heurísticos, vários testes computacionais foram realizados, os quais compreendem exemplos práticos, da literatura e exemplos gerados aleatoriamente. Em todos os testes realizados, os procedimentos heurísticos que consideram o aproveitamento de sobras obtiveram um desempenho superior que suas versões clássicas. A análise e classificação de todos os procedimentos heurísticos foram realizadas considerando critérios e definições estabelecidos *a priori*. Todos os procedimentos heurísticos desenvolvidos resolvem problemas com altas dimensões em tempos computacionais muito baixos.

De modo geral, a Tabela 1 mostra o desempenho das heurísticas que resolve o problema de corte com sobras aproveitáveis no caso unidimensional.

Tabela 1: Classificação das heurísticas

	Construtivas				**Residuais**									
	FFD	*FFD$_R$*	*Gulosa*	*Gulosa$_R$*	*FFD*	*FFD$_R$*	*Gulosa*	*Gulosa$_R$*	*RAG 1*	*RAG$_R$ 1*	*RAG 2*	*RAG$_R$ 2*	*RAG 3*	*RAG$_R$ 3*
Ideal										**X**		**X**		**X**
Aceitável		X	X		X	X	X	X	X		X		X	
Indesejável	X			X										

Detalhes de todos os testes computacionais realizados para problemas de corte unidimensionais com sobras aproveitáveis estão em Cherri *et al.* (2009a).

Para analisar o desempenho dos procedimentos heurísticos desenvolvidos para resolver o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis, foram utilizados dados reais de uma indústria de esquadrias metálicas de pequeno porte.

Foram analisados 12 problemas, cada qual considerado como um período. Desta forma, a cada período resolve-se um problema de corte de estoque, sendo que as informações de estoque (objetos padronizados restantes e retalhos que foram gerados) para o problema no período atual são transferidas do período anterior. A cada período, uma nova demanda de itens deve ser atendida, que apesar de ser conhecida a priori é tratada como desconhecida no período anterior (a antecipação da produção de itens não é permitida).

Tabela 2: Resultado para 12 períodos

	Construtivas		Residuais	
	Gulosa	*Gulosa* $^{2D}_{A}$	*RAG*	*RAG* $^{2D}_{A}$
Perda Percentual	5,5%	**5,8%**	4,8%	4,9%
Retalho Percentual	**79,1%**	1,6%	7,4%	0,7%
Número Retalho	**13**	2	5	2
Área Padronizado	**98%**	93%	96%	92%
Tempo (s)	1,26	1,74	3,1	**4,78**

Detalhes de todos os testes computacionais realizados para problemas de corte bidimensionais com sobras aproveitáveis estão em Cherri *et al*. (2009b) e Cherri (2009).

Observando os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2, pode-se observar que as heurísticas residuais apresentam desempenho superior as heurísticas construtivas. Além disso, pode-se comprovar que os procedimentos que tratam sobras aproveitáveis apresentam um desempenho superior as suas respectivas versões clássicas.

5. Conclusões e Propostas Futuras

Neste trabalho apresentamos o problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis estudado por Cherri *et al*. (2009a) e Cherri *et al*. (2009b). O estudo apresentado foi orientado para problemas de corte unidimensionais e bidimensionais, sendo que, para ambos os problemas, as abordagens são orientadas para a minimização das perdas. Desta forma, métodos e procedimentos heurísticos da literatura que têm como objetivo a minimização das perdas foram alterados para incluírem a possibilidade de geração de retalhos (sobras grandes), as quais não são contabilizadas como perdas.

A partir dos testes computacionais realizados, observamos que as heurísticas Residuais de Arredondamento Guloso (RAG) que consideram o aproveitamento de sobras além de apresentarem o mesmo comportamento para problemas unidimensionais e bidimensionais geram soluções superiores aos demais procedimentos heurísticos (clássicos e de aproveitamento).

Como proposta, podemos considerar o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis. Uma possível alteração no grafo E/OU seria determinar o limitante inferior considerando padrões de corte em 2-estágios. Além disso, heurísticas residuais da literatura para a obtenção de uma solução inteira também podem ser investigadas e implementadas.

Referências bibliograficas

Abuabara, A. , Morabito, R. (2008), Modelos de programação inteira mista para o planejamento do corte unidimensional de tubos metálicos na indústria aeronáutica agrícola. *Gestão e Produção*, 15: 605-617.

Abuabara, A. , Morabito, R. (2009), Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, 149: 149-165.

Arbib C., Marinelli, F.,Rossi, F., Di Iorio, F. (2002), Cutting and reuse: The application from automobile component manufacturing. *Operations Research*, 50: 923-934.

Arenales, M. N., Morabito, R. (1995), An AND/OR - graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*, 84, 599-617.

Arenales, M. N., Morabito, R., Yanasse H. (1999) (editores), Cutting and packing problems. *Pesquisa Operacional*, 19:107-299.

Beasley, J. (1985), Algorithms for unconstrained two-dimensional gilhotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, 36, 297-306.

Bischoff, E., Wäscher, G. (1995) (editores), Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.84, n.3, special issue.
Brown, A. R., Optimum packing and depletion. London: Macdonald and New York: American Elsevier, 1971.107p.

Cherri, A. C., Arenales, M. N., Yanasse, H. H. (2009a), *The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach*. European Journal of Operations Research, 196: 897-908.

Cherri, A., C., Vianna, A., C., G., Arenales, M., N., (2009b), Heurísticas para o problema de corte bidimensional com sobras aproveitáveis XL SBPO, Porto Seguro.

Cherri, A., C. (2009), Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis. Tese de doutorado. ICMC – USP – São Carlos.

Christofides, N. e Whitlock, N. C. (1977), An algorithm for two-dimensional cutting problem. *Operations Research,* 25, 31-44.

Chu, C., Antonio, J. (1999), Approximation algorithms to solvereal-life multicriteria cutting stock problems}. Operations Research, 47: 495-508.

Dowsland, K., Herbert, E.; Kendall, G., Burke, E. (2006), Using tree search bounds to enhance a genetic algorithm approach to two rectangle packing problems. *European Journal of Operational Research*, 168, 390-402.

Dyckhoff, H. (1981), A new linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, 29: 1092-1104.

Dyckhoff, H., Kruse, H. J., Abel, D., Gal, T. (1985), Trim loss and related problems. *The International Journal of Management Science*, 13: 59-72.

Dyckhoff, H., **Wäscher, G.** (editores), Cutting and packing. European Journal of Operational Research, v.44, n.2, special issue, (1990).

Dyckhoff, H. (1990), A typology of cutting and packing problems. *European Journal Operational Research*, 44: 145-159.
Dyckhoff, H. e Finke, U. (1992), Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography. Heidelberg: Springer.
Dyckhoff, H., Scheithauer, G., Terno, J. (1997), *Cutting and Packing. In Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, edited by M. Amico, F. Maffioli and S. Martello. New York: Wiley, 393-414.
ESICUP – Euro Special Interest Group on Cutting and Packing. (http://www.apdio.pt/esicup/) (accessed in 2009).

Gradisar, M., Jesenko, J., Resinovic, C. (1997), Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operational Research*, 10: 945-953.

Gradisar, M., Kljajic, M., Resinovic, C., Jesenko, J. (1999a), A sequential heuristic procedure for one-dimentional cutting. *European Journal of Operational Research*, 114: 557-568.

Gradisar, M., Resinovic, C.,Kljajic, M. (1999b), A hybrid approach for optimization of one-dimentional cutting. *European Journal of Operational Research*, 119: 719-728.

Gradisar, M., Trkman, P. (2005), A combined approach to the solution to the general one-dimentional cutting stock problem. *Computers and Operations Research*, 32: 1793-1807.

Gilmore, P. C., Gomory, R. E. (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, 9: 848-859.

Gilmore, P. C., Gomory, R. E. (1963), A linear programming approach to the cutting stock problem – Part II. *Operations Research*, 11: 863-888.
Gilmore, P. C., Gomory, R. E. (1965), Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, 13, 94-120.
Herz, J. (1972), Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. IBM Journal of Research and Development, 16, 462-469.

Hifi, M. (1997), An improvement of Viswanathan and Bagchi's exact algorithm for constrained two-dimensional cutting stock. *Computers and Operations Research.* 24, 727-736.

Hifi, M. (2004), Dynamic Programming and Hill-climbing Techniques for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems. *Journal of Combinatorial Optimization.* 8, 65-84.

Hinxman, A. (1980), The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, 5: 8-18.

Kantorovich, L.V. (1960), Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*, 6: 366-422.

Koch, S., König, S., Wäscher, G., Linear programming for a cutting problem in the wood processing industry - a case study. Working Paper n° 14, FEMM, (2008).

Kos, L., Duhovnik, J. (2002), Cutting optimization with variable-sized stock and inventory status data}. International Journal of Production Research, 40: 2289-2301.

Lodi, A., Martello, S., Monaci, M. (2002), Two-dimensional packing problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, 141, 241-252.

Macedo, R., Silva, E., Alves C., Alvelos, F., Carvalho, J. V., Arbib, C., Marinelli, F., Pezzella, F., Di Giovanni, L., Gambella, L. (2008), 2D Cutting Stock Optimization Software Survey, submitted to OR/MS Today, (2008).

Morabito, R. (1989), Corte de Estoque Bidimensional. Dissertação de Mestrado. ICMC – USP, São Carlos.

Morabito, R. (1992), *Uma Abordagem em Grafo E/OU para o Problema do Empacotamento: Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres*. Tese de Doutorado. EESC – USP, São Carlos.

Morabito, R., Arenales, M.; Arcaro, V. (1992), An AND/OR-Graph Approach for Two-Dimensional Cutting Problems. *European Journal of Operational Research*. 58, 263-271.

Morabito, R., Arenales, M. N. (1994), An AND/OR - graph approach to the container loading problem. International Transactions in Operational Research, 1, 59-73.

Morabito, R., Arenales, M. N. (1996), Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR - graph approach. *European Journal of Operational Research*, 94, 548-560.

Oliveira, J., Ferreira, J. An improved version of wang's Algorithm for twodimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research,* 44, 256-266. 1990.

Oliveira, J. F., Wäscher, G. (2007) (editores) Special Issue on Cutting and Packing. European Journal of Operational Research, 183.

Roodam, G. M. (1986), Near-optimal solutions to one-dimensional cutting stock problem. *Computers and Operations Research*, 13: 713-719.

Scheithauer, G. (1991), A note on handling residual length. *Optimization*, 22: 461-466.

Poldi, K. C., Arenales, M. N. (2009), Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers and Operations Research*, 36: 2074-2081.

Trkamn, P., Gradisar, M. (2007), One-dimensional cutting stock optimization in consecutive time periods. *European journal of Operational Research*, 179: 291-301.

Sinuany-Stern, Z., Weiner I. (1994), The One Dimensional Cutting Stock Problem Using Two Objectives. *Journal of Operations Research Society*, 45: 231-236.

Vianna, A. C. G. (2000), *Problema de Corte e Empacotamento: uma Abordagem em Grafo E/OU*. Teses de Doutorado. ICMC – USP, São Carlos.

Wang, P.Y. (1983), Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems. Operations Research 31, 573-586.

Wäscher, G., Gau, T. (1996), Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study. *OR Spektrum*, 18: 131-144.