Problema de programação de corte unidimensional com objetivo de minimizar atrasos e utilização de matéria-prima

Felipe Kesrouani Lemos
Departamento de Engenharia de Produção, FEB, UNESP
17033-360, Bauru, SP
E-mail: felipeklemos@gmail.com

Adriana Cristina Cherri
Departamento de Matemática, FC, UNESP
17033-360, Bauru, SP
E-mail: adriana@fc.unesp.br

Silvio Alexandre de Araujo
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: saraujo@ibilce.unesp.br

Resumo: O presente trabalho pesquisa refere-se ao problema de programar a produção de uma operação de corte de itens unidimensionais, abordando sua otimização com os objetivos de minimizar atrasos e uso de matérias-primas simultaneamente, binômio comum em problemas reais. Embora sejam dois problemas clássicos na literatura, abordagens conjuntas ainda são escassas. Para resolver esse problema, foi proposta uma modelagem inteira linear mista com variáveis disjuntivas. Para os testes, gerou-se uma massa de 55 instâncias com pacote de otimização (CPLEX), observando que o problema é de difícil solução, mesmo para poucos itens.

Palavras-chave*:* otimização, corte e empacotamento, *scheduling*, programação linear inteira mista.

Eixo Temático: Otimização

1 Introdução

O presente trabalho refere-se ao problema de programar a produção de uma operação de corte de itens unidimensionais com datas de entrega estabelecidas. Seja I um conjunto de n itens a serem programados em uma operação de corte ou empacotamento (i = 1, 2, ..., n) com tempo de processamento individuais p_i, data de entrega d_i, penalidade por unidade de tempo de término em atraso TC_i e comprimento l_i. Seja J um conjunto (j = 1, 2, ..., m) de tipos de objetos (*bins*) de comprimento L_j e custo unitário θ_j, nos quais os n itens mencionados serão alocados para sofrerem uma operação industrial formando um lote.

O objetivo do problema consiste em agrupar os n itens em lotes a serem processados de acordo com a capacidade destes *bins*, que serão programados de forma a minimizar a soma das penalidades por atrasos dos itens, além do custo do uso de matéria-prima.

Estas decisões não só são dificultadas pelos múltiplos objetivos conflitantes, mas também porque este problema de programação herda as restrições de empacotamento quanto temporais dos problemas de *scheduling*. Ao elaborar uma solução para a programação desta operação, o decisor deve respeitar: (i) a não-sobreposição geométrica entre itens, ou seja, seus comprimentos não podem ocupar espaços em comum nos objetos; (ii) a pertinência do item ao objeto, ou seja, o item deve estar completamente posicionado no interior deste; (iii) a não-sobreposição temporal entre padrões de corte, ou seja, o início da operação de um padrão deve distar do início de seu antecessor, pelo menos, do tempo de processo deste último.

Os problemas de programação da produção (*scheduling*) são vastamente conhecidos na literatura. Trata-se do processo de tomada de decisão associado à alocação de recursos a tarefas no tempo, com o intento de otimizar um ou mais objetivos [1]. Outra área amplamente explorada na literatura são os chamados problemas de corte e empacotamento. Este campo estuda a alocação de um conjunto de itens menores em objetos maiores obedecendo os limites dos objetos, com o intuito de otimizar seu aproveitamento [2]. O interesse nesta área, segundo [3], pode ser atribuído à (i) aplicabilidade, (ii) diversidade de problemas reais e (iii) sua complexidade.

Em que pese a relevância de ambos temas e seu interesse tanto por pesquisadores quanto pela indústria, poucas são as abordagens conjuntas para o problema conjunto. Casos interessantes retratados na literatura são a indústria papeleira [3], a indústria moveleira [4] e a indústria aeronáutica [5]. Importante observar que, ainda que tais trabalhos retratam sistemas de produção cujo problema de corte sob a ótica da preocupação multi-período, seus focos não estão na programação das tarefas (*scheduling*). Os dois primeiros voltam-se ao dimensionamento de lotes, enquanto o último apenas ao sequenciamento das tarefas.

2 Revisão da Literatura

A estrutura básica de problemas de corte e empacotamento, segundo [2], compreende um conjunto de pequenos itens demandados (*outputs*) que devem ser agrupados em subgrupos (padrões de corte) a serem alocados em um conjunto de grandes objetos (*inputs*), obedecendo as restrições geométricas de não sobreposição e posicionamento completo nestes últimos, de forma a otimizar uma função-objetivo.

Já os problemas de programação (*scheduling*) são definidos por [1] como o processo de tomada de decisão, usado sistematicamente em manufatura e serviços, que lida com a alocação de recursos a tarefas em um dado período, almejando otimizar um ou mais objetivos.

A literatura a respeito de corte e empacotamento é bastante extensa e inúmeros métodos foram desenvolvidos para diferentes tipos de problemas, como visto até agora. Embora os modelos satisfaçam as restrições de demanda e possibilitem a minimização do desperdício de material para diferentes situações, os padrões de corte gerados interagem em outros níveis de decisão da indústria, como é o caso da programação.

Uma das abordagens conjuntas encontradas na literatura preocupa-se com o problema de estoque gerado e seu armazenamento, em classes de problemas denominadas por [6] de MOSP (*minimization of open stack problem*) e MORP (*minimization of order spread problem*). Segundo [7], uma pilha é chamada de “aberta” se a manufatura da ordem em questão foi começada, porém não finalizada – o que só ocorre quando após o processamento do último item desta.

Outro problema relacionado ao contexto de entregas que já foi abordado conjuntamente ao problema de corte de estoque é o de dimensionamento de lotes (PDL). Segundo [8], o PDL é um problema de programação voltado para a definição das quantidades a serem produzidas em cada período em um dado horizonte de planejamento. Modelos de programação linear para o problema acoplado de dimensionamento de lotes com o de corte unidimensional são propostos em [3] na indústria papeleira; e de corte bidimensional em [4] na indústria moveleira. É proposto em [8] um método de geração de colunas para o problema acoplado em ambas dimensões.

Datas de entrega (*due dates*) são consideradas como restrições em [9], sendo o objetivo ainda minimizar o uso de materiais (ocupação). Para refletir a flexibilidade de permitir eventuais atrasos, insere-se um parâmetro adicional que é o número máximo de itens que podem desrespeitar a data de entrega em cada período (devidamente penalizados na função objetivo).

Embora sem explicitar a modelagem matemática, em [10] é proposta uma heurística que considera o atendimento a prazos como restrição em um processo de corte de objetos irregular (corte do tipo *nesting*).

O problema de *scheduling* com formação de lotes pode ser encontrado amplamente na literatura, entretanto não retrata as restrições de dimensionalidade e geometria dos itens. Uma revisão é proposta em [11]. Entretanto, como mencionado, neste caso considera-se produções com lotes limitados pelo número de unidades (b) em cada batelada. Este caso não pode ser adaptado para problemas de corte, exceto quando os itens são idênticos entre si.

Por fim, o problema de corte de itens ordenado (em que existe precedência) é abordado por [12], sem considerar atendimento de datas.

3 Formulação matemática

Seja um conjunto de n itens retangulares a serem programados em uma operação de corte ($i = 1, ..., n$) com tempo de processamento p_i, data de entrega d_i, penalidade por término em atraso TC_i e comprimento l_i. Sua programação implica na formação de lotes a serem cortados em *bins* com comprimento L_j e custo θ_j. O objetivo do problema é programá-los de forma a minimizar a soma das penalidades por atrasos e uso de matéria-prima, ponderados por seus respectivos pesos/custos.

O instante de início do processamento do *bin* j é dado por s_j. O tempo de processamento deste *bin* é dado pela variável t_j. Note que t_j é uma variável, pois o tempo de processamento depende de quais itens são empacotados em determinado *bin*. O atraso de um determinado item i é representado pela variável T_i.

Utilizamos o conjunto de variáveis binárias X_{ik}, com valor 1 se o item i está à esquerda do item k (sua coordenada x dista pelo menos de l_i da coordenada x de k) no mesmo *bin*. Já S_{jl}, tem valor 1 se o *bin* j está programado anteriormente a l e 0, caso contrário. Já B_{ij} é uma variável binária que vale 1 quando o item i está alocado no *bin* j e 0, caso contrário. Por fim, Z_j é uma variável binária que toma o valor 1 quando o *bin* j é utilizado e 0, caso contrário.

Levando em conta tais parâmetros e variáveis, o seguinte modelo matemático (1)-(10) é proposto para o problema.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} TC_i T_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_j Z_j \tag{1}$$

$$s.a. \quad t_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} p_i \qquad j \in J \tag{2}$$

$$s_j + t_j \leq s_l + M_1(1 - S_{jl}) \qquad j < l \in J \tag{3}$$

$$s_l + t_l \leq s_j + M_1 S_{jl} \qquad j < l \in J \tag{4}$$

$$T_i \geq s_j + t_j - d_i - M_2(1 - B_{ij}) \qquad i \in I, j \in J \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} B_{ij} = 1 \qquad i \in I \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i B_{ij} \leq L_j Z_j \qquad j \in J \tag{7}$$

$$s_j, T_i, t_j \in \mathbb{R}^+ \qquad i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

$$X_{ik}, S_{jl}, B_{ij}, Z_j \in \{0,1\} \qquad i \neq j = 1, \dots, n \tag{9}$$

No modelo (1)-(10), a função objetivo (1) orienta a otimização na direção de minimizar duas penalidades ponderadas: (i) a soma dos atrasos das ordens soma dos atrasos das ordens (T_i) ponderados por suas respectivas penalidades (TC_i); e (ii) a soma do número de *bins* utilizados ponderados pela penalidade unitária de uso de cada um deles (θ_j). A igualdade (2) define o tempo de processamento de um *bin* j. As restrições (3) e (4) garantem a não-sobreposição temporal da programação dos *bins*. A restrição (5) garante a coerência do atraso do item i com o instante de término de processamento do *bin* em que este foi alocado. A restrição (6) aloca cada item em um e apenas um bin. As restrições (7) determinam que a soma dos comprimentos dos itens alocados a um *bin* utilizado não exceda seu comprimento. O domínio das variáveis de decisão é feito em (9) e (10).

4 Resultados e Análise

O modelo foi implementado em linguagem OPL utilizando o software CPLEX 12.6.2. Uma massa de dados para testes, com 55 instâncias, foi gerada com as seguintes características: número de itens de 5 a 15; custos de atraso por unidade de tempo dos itens (TC_i) gerados uniformemente entre 1 e 10; tempos de processamento dos itens (p_i) gerados uniformemente entre 1 e 10; comprimentos do itens (l_i) gerados uniformemente entre 1 e 10; datas de entrega dos itens (d_i) geradas uniformemente entre 60% e 80% da soma dos tempos de processamento da instância; custos dos *bins* gerados uniformemente entre 10 e 50 vezes o custo médio de atraso por unidade de tempo dos itens da instância; e comprimentos médios dos *bins* gerados uniformemente entre 30% e 50% da soma dos comprimentos dos itens da instância. Para cada quantidade de itens, foram geradas 5 repetições.

A massa de dados foi rodada em um computador com processador i7 de 2ª geração, com 12 Gb de memória RAM. O tempo limite imposto de rodada foi de 60 segundos por instância.

A Tabela 1 ilustra os *gaps* obtidos e evidencia a dificuldade progressiva do problema, mesmo para instâncias de pequeno porte. Os ótimos foram obtidos em todas as instâncias apenas até 10 itens. Foram obtidos alguns ótimos apenas para instâncias até 14 itens dentro do limite de processamento de 60 segundos. Ademais, com 15 itens, os *gaps* médios obtidos pelo otimizador foram sempre superiores a 35%, com média de 41,7%.

Tabela 1: Resultados obtidos

Número de itens	*Gap* Médio	Ótimos	Tempo médio para ótimo (quando obtido
5	0%	5	0,203
6	0%	5	0,177
7	0%	5	0,287
8	0%	5	3,583
9	0%	5	2,731
10	0%	5	7,007
11	9,4%	3	8,970
12	27,0%	1	12,136
13	32,6%	1	15,241
14	28,3%	1	24,396
15	41,7%	0	-

5 Conclusões

O problema apresentado possui relevância prática – dado seu potencial de aplicação em situações reais – e teórica – dado que une dois campos clássicos da literatura, cuja união pouco foi explorada.

Foi proposta uma formulação matemática, utilizando variáveis disjuntivas tanto para as restrições de não-sobreposição temporal (programação) quanto física (empacotamento). Os resultados obtidos evidenciam que trata-se de um problema de difícil solução.

Desta forma, propõe-se como continuidade do estudo a comparação com novas formas de modelagem e métodos heurísticos de solução.

Referências

[1] M. Pinedo, “Scheduling: Theory, algorithms and systems”. Prentice Hall, New Jersey, 2008.

[2] G. Wäscher, H. Haußner, H. Schumann, An improved typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research, vol. 183, pp. 1109-1130, (2007).

[3] S. C. Poltronieri, “Otimização do processo de corte integrado à produção de bobinas – modelo e métodos de solução”, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2006.

[4] M. C. N. Gramani, “Otimização do processo de cortagem acoplado ao planejamento da produção”, Tese de Doutorado, FEEC – UNICAMP, 2001.

[5] F. K. Lemos, M. C. Santoro, Sequenciamento de ordens com operações em lotes bidimensionais não-guilhotinados considerado atendimento de datas e ocupação da matéria-prima. Anais do XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2010.

[6] H. H. Yanasse, On a pattern sequencing problem to minimize the maximum number of open stacks. European Journal of Operational Research, Amsterdan, vol. 100, pp. 454-463, (1997).

[7] G. C. F. Pileggi, R. Morabito, M. N. Arenales, Heurísticas para os problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte bidimensionais. Pesquisa Operacional, vol. 27, pp. 549-568, (2007).

[8] Poldi, K.C.; Araujo, S.A. de: Mathematical models and a heuristic method for the multiperiod one-dimensional cutting stock problem. Annals of Operations Research. (2016) (ACEITO).

[9] H. Reinertsen, T. W. M. Vossen, The one-dimensional cutting stock problem with due dates. European Journal of Operational Research, vol. 201, pp.701-711, (2010).

[10] G. Chryssolouris, N. Papakostas, D. Mourtzis, A decision-making approach for nesting scheduling: A textile case. International Journal of Production Research, vol. 38:17, pp.4555-4564, (2000).

[11] C. N. Potts, M. Y. Kovalyov, Scheduling with Batching: A Review. European Journal of Operational Research, vol. 120, pp. 228-249, (2000).

[12] C. T. Ragsdale, C. W. Zobel, The ordered Cutting Stock Problem. Decision Sciences, vol. 35:1, pp. 83-100, (2004).