Heurísticas para o problema de corte de estoque com sobras de material reaproveitáveis

Adriana Cristina Cherri •
Marcos Nereu Arenales
Universidade de São Paulo – São Carlos – São Paulo – Brasil

Resumo

Neste trabalho, consideramos um problema de corte de estoque unidimensional em que as sobras dos padrões, desde que grandes o suficiente para serem reaproveitadas no futuro, não são contabilizadas como perda. Isto introduz uma dificuldade para se comparar soluções factíveis para o problema de corte: até que ponto a solução de perda mínima é a mais interessante, já que sobras podem ser reaproveitadas? Algumas características desejáveis para uma boa solução são definidas e alterações em métodos heurísticos clássicos são propostas, de modo que os padrões de corte com perdas indesejáveis (nem tão grandes, nem tão pequenas) sejam alterados.

Palavras-chave: problema de corte de estoque, sobras de material reaproveitáveis.

1. INTRODUÇÃO

Os problemas de corte de estoque consistem em cortar peças maiores (*objetos*) disponíveis em estoque, para produzir um conjunto de peças menores (*itens*), com a finalidade de atender uma demanda especificada e otimizar uma determinada função objetivo. Estes problemas são essenciais no planejamento da produção em muitas indústrias, tais como indústrias de papel, vidro, móveis, metalúrgica, plástica, têxtil, entre outras. Nessas indústrias, a redução dos custos de produção e a melhoria da eficiência estão freqüentemente associadas à utilização de estratégias adequadas de cortes, o que estimula pesquisas acadêmicas de modelos de otimização para o controle e planejamento de sistemas produtivos.

Um problema pouco estudado e freqüentemente encontrado na prática consiste em reaproveitar sobras de padrões (pedaços cortados, não demandados) desde que não sejam demasiadamente pequenos. Como perdas grandes são inaceitáveis quando se objetiva a minimização de perdas, considerar que algumas sobras são reaproveitáveis, torna o objetivo de minimizar as perdas não mais adequado para quantificar uma solução ruim.

Neste trabalho, algumas características para uma solução desejável (evitamos o termo "solução ótima" pois uma função objetivo que qualifica as soluções não é bem definida) são definidas e algumas modificações em métodos heurísticos clássicos são realizadas.

As modificações propostas foram realizadas em heurísticas apresentadas em Poldi e Arenales [10]. Em 2005, Poldi e Arenales [10] analisaram heurísticas da literatura e outras por eles desenvolvidas para o problema de corte de estoque unidimensional com o objetivo de minimização de perdas.

Na literatura, são poucos os trabalhos que consideram sobras de material reaproveitáveis. De nosso conhecimento, apenas Gradisar *et al.* [4, 5, 6 e 7] apresentam em seus trabalhos a possibilidade do reuso de material cortado.

• Endereço: Av. Décio Pacheco de Almeida Prado, 480 – Jardim Continental, CEP: 17212-110 – Jaú – SP – Brasil. E-mails: adriana@icmc.usp.br, arenales@icmc.usp.br

2. O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE – DEFINIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considerando vários tipos de objetos em estoque, o problema de corte de estoque pode ser formulado como:

> "Suponha que temos K tipos de objetos em estoque em quantidades limitadas. Por outro lado, temos um conjunto de m tipos de itens requeridos em quantidades variadas. O problema consiste em produzir os itens requeridos a partir do corte dos objetos em estoque otimizando uma determinada função objetivo".

A formulação matemática para este problema de corte de estoque é assim descrita:

$$minimizar \ f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_k} c_{jk}x_{jk} \qquad (1)$$

$$sujeito \ a: \begin{cases} \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{a}_{jk}x_{jk} = \mathbf{d} & (2) \\ \sum_{j=1}^{N_k} x_{jk} \le e_k, \quad k = 1,...,K & (3) \\ x_{jk} \ge 0, \ e \ inteiro \ \ j = 1,..., N_K, \quad k = 1,...,K. & (4) \end{cases}$$

em que

- e_k: quantidade disponível do objeto k, $k = 1, ..., K$;
- N_k: número de padrões de corte para um objeto do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- x_{jk}: número de objetos do tipo k cortados no padrão de corte j, $j = 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K$;
- d_i: quantidade demandada do item i, $i = 1, ..., m$;
- $\boldsymbol{a}_{jk}$: padrão de corte j para um objeto do tipo k em estoque, , $j = 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K$;
- c_{jk}: perda produzida pelo padrão de corte j para o objeto em estoque do tipo k, $j = 1, ... N_k$, $k = 1, ..., K$

A maneira como um determinado número de itens são cortados de um objeto em estoque é denominada de *padrão de corte*. Assim, o vetor que corresponde ao j-ésimo padrão de corte para o objeto do tipo k em estoque é dado por:

$$\boldsymbol{a}_{jk} = (\alpha_{1jk}, \alpha_{2jk}, ..., \alpha_{mjk})$$

em que α_{ikj} é o número de itens do tipo i presentes no padrão de corte j para o objeto do tipo k, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K$.

No caso apresentado (unidimensional), para cada objeto do tipo k em estoque, qualquer vetor associado a um padrão de corte deve ser tal que:

$$\begin{cases} \ell_1\alpha_{1k} + \ell_2\alpha_{2k} + ... + \ell_m\alpha_{mk} \le L_k \\ 0 \le \alpha_{ik} \le d_i, \ i = 1,..., m \ \textbf{ e } \alpha_{ik} \textbf{ inteiro.} \end{cases} \qquad (5)$$

em que

- l_i: comprimento do item i, $i = 1, ..., m$;
- L_k: comprimento dos objetos do tipo k em estoque, $k = 1, ...,K$.

Note que o padrão de corte deve ser limitado ($\alpha_{ik} \le d_i$) e a perda c_{jk} produzida pelo padrão de corte j para o objeto em estoque do tipo k é dada por:

$$c_{jk} = L_k - \sum_{i=1}^{m} \ell_i \alpha_{ijk} \ .$$

No modelo (1)-(4) definido, a função objetivo (1) consiste em minimizar a perda de material. As restrições de igualdade em (2) garantem que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual a quantidade de itens demandados. As restrições (3) garantem que o número de objetos do tipo k cortados não exceda a disponibilidade e_k, $k = 1, ...,K$. Por fim, as restrições (4) garantem que a repetição de cada objeto seja um número inteiro não-negativo.

3. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM SOBRAS DE MATERIAL REAPROVEITÁVEIS

Durante o processo de corte de peças, em várias empresas, perdas inevitáveis ocorrem e eventualmente são descartadas. Porém, algumas indústrias apresentam a possibilidade de reutilizar as perdas como matéria prima, desde que estas tenham tamanhos significativos. Por outro lado, os métodos de solução para os problemas de corte buscam minimizar perdas, (objetivos alternativos podem ser definidos, mas perdas baixas devem ser perseguidas) sendo que, nesses métodos, considera-se como perda todo pedaço cortado que não seja um item demandado.

Embora perdas baixas sejam ainda um objetivo perseguido, a possibilidade de reuso introduz uma mudança no critério de seleção de uma solução. Uma alternativa para resolver este problema, seria planejar padrões de corte que concentrassem as perdas em poucos padrões de modo que fossem grandes o suficiente para voltarem ao estoque e serem utilizadas novamente.

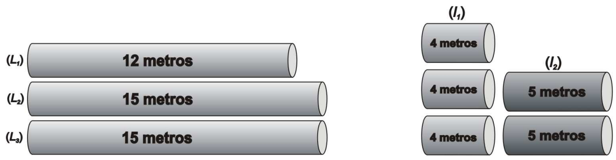
Desta forma, apresentamos o problema de corte de estoque unidimensional com sobras de material reaproveitáveis como:

> “Um conjunto de peças (*itens*) deve ser produzido a partir do corte de unidades grandes (*objetos*), os quais podem ser de tamanhos padronizados (objetos que são comprados pela empresa) ou reduzidos (objetos que são sobras de cortes anteriores). São dados a demanda dos itens e as quantidades disponíveis dos objetos. A demanda deve ser atendida, cortando-se os objetos disponíveis, de modo que as perdas sejam 'pequenas' ou 'suficientemente grandes' para retornar ao estoque”.

Definição 1: *Um pedaço cortado, que não seja um item, de comprimento suficientemente grande para ser reaproveitado é chamado **sobra**.*

Um comprimento suficientemente grande (mínimo aceitável para ***sobra***) pode ser definido por algum critério, como por exemplo: o comprimento do menor item demandado, a média dos comprimentos dos itens demandados, o comprimento do maior item, entre outros.

Diferentemente dos problemas clássicos de corte, para os quais funções objetivo são bem definidas (por exemplo, minimizar a perda total, número de objetos cortados, custos, entre outros.), no problema de corte com sobras de material reaproveitáveis objetivamos perdas 'pequenas' ou 'suficientemente grandes', sem que o outro objetivo (minimizar a perda) seja descartado. Duas soluções com a mesma perda total são, agora, diferenciadas. Para uma melhor compreensão do problema de corte de estoque com sobras reaproveitáveis de material, considere o seguinte exemplo, em que estabelecemos que todo comprimento de tamanho superior ou igual a 4 metros é considerado sobra.



(a) Objetos em estoque a serem cortados. **(b)** tens demandados.

(c) Solução 1. **(d)** Solução 2. **(e)** Solução 3.

Figura 1: Dados de um problema de corte de estoque e soluções alternativas

Do ponto de vista da função objetivo *perda total*, a Solução 1 (Fig **1 - c**) e a Solução 2 (Fig **1 - d**) apresentadas são equivalentes, pois têm a mesma perda total igual a 5 metros, porém, para o problema de corte com reaproveitamento, a Solução 2 **(**Fig **1 - d)** é preferível à Solução 1 **(**Fig **1 - c)**, pois concentra as perdas em um único objeto e, como é superior a 4 metros, torna-se uma sobra que poderá voltar ao estoque e ser utilizada para atender demandas futuras. Na Solução 1, como as perdas estão distribuídas nos padrões (inferiores a 4 metros), são descartadas. Para o problema de corte com sobras de material reaproveitáveis, a Solução 1 é uma solução *indesejável*, enquanto a Solução 2 é *ideal*. Outra Solução *indesejável* é dada na Figura **1 - e**, embora também não gere perdas.

Como uma função objetivo para diferenciar tais soluções não é facilmente descrita, qualificamos as soluções segundo a seguinte definição:

Definição 2: *Para o problema de corte de estoque com sobras de material reaproveitáveis, as soluções são definidas como:*

- *Solução ideal: todos os padrões têm perdas nulas, quase nulas ou, no máximo um padrão com sobra;*
- *Solução aceitável: alguns padrões apresentam perdas pequenas e alguns padrões apresentam sobras;*
- *Solução indesejável: vários padrões apresentam perdas que serão descartadas e/ou muitas sobras.*

Com a finalidade de gerar um conjunto de padrões de corte *ideais* ou, pelo menos, *aceitáveis*, introduzimos alterações em algumas heurísticas clássicas bem conhecidas na literatura para o problema de corte de estoque unidimensional.

4. HEURÍSTÍCAS PARA O PROBLEMA COM SOBRAS REAPROVEITÁVEIS

4.1 Heurística FFD_R[1]

A heurística FFD_R consiste em aplicar a Heurística FFD para obter um padrão de corte e, logo após, a perda/sobra é analisada. Se a perda/sobra estiver dentro de limites aceitáveis (definidos previamente), o padrão é aceito. Se perda/sobra estiver fora de limites aceitáveis, um item do padrão (o maior) é retirado. Assim, para a sobra gerada com a retirada do item é resolvido o problema da mochila com as restrições dadas em (5), cuja capacidade é a perda no padrão adicionada ao tamanho do item retirado. Depois de resolvida a mochila, a perda/sobra gerada é analisada e, se ainda não estiver dentro de limites aceitáveis, outro item

[1] Detalhes desta heurística é encontrado em Cherri [2].

do padrão inicial (segundo maior) é retirado. Novamente para a sobra gerada é resolvido o problema da mochila (5). Caso tenhamos retirado um item de cada comprimento dentre todos que compõem o padrão, voltamos a retirar o primeiro maior item. Este procedimento é repetido até que a perda/sobra esteja dentro de limites aceitáveis ou o padrão inicial tenha sido anulado.

Com este procedimento, em geral, os últimos padrões são compostos por itens maiores, mais difíceis de serem combinados com os demais. Isto faz com que estes padrões (que devem combinar itens grandes) tenham perdas grandes, isto é, *sobras*, algo não totalmente indesejável.

4.2 Heurística $Gulosa_R$[1]

A heurística $Gulosa_R$ consiste em aplicar a Heurística Gulosa para obter um padrão e então, analisar a perda/sobra. Se a perda/sobra estiver dentro de limites aceitáveis (definidos previamente), o padrão é aceito. Se a perda/sobra estiver fora de limites aceitáveis, um item do padrão (o maior) é retirado e a perda/sobra é analisada novamente. Se ela ainda não estiver em limites aceitáveis, outro item (segundo maior) é retirado. Este processo é repetido até que tenhamos uma sobra aceitável.

4.3 Heurística Residual FFD_R[1] e $Gulosa_R$[1]

Consiste em aplicar a Heurística Residual[2] e no final, se ainda restar demanda residual, aplica-se a heurística FFD_R ou $Gulosa_R$, respectivamente.

4.4 Heurística RAG_R[1]

Consiste em aplicar a heurística RAG[2] (Residual de Arredondamento Guloso) e após gerado todos os padrões de corte, a perda/sobra em cada padrão é analisada. Se a perda/sobra estiver em limitantes aceitáveis (calculados previamente) o padrão de corte analisado é aceito, caso contrário, é rejeitado e em seguida desfeito. Após analisados todos os padrões, aplica-se a heurística FFD_R na demanda residual formada pelos padrões rejeitados.

5. EXEMPLO

Nesta seção, apresentamos um pequeno exemplo do problema de corte de estoque com sobras de material reaproveitáveis. Além da solução obtida pelas Heurísticas de reaproveitamento FFD_R, Residual FFD_R, $Gulosa_R$, Residual $Gulosa_R$ e RAG_R apresentamos também a solução obtida pelas Heurísticas clássicas FFD, Residual FFD, Gulosa , Residual Gulosa e RAG, visto que as alterações foram realizadas em seus algoritmos.

Suponha que temos um estoque com K = 4 tipos de objetos (os objetos 1 e 2 padronizado e os objetos 3 e 4 retalhos) e uma demanda com m = 5 tipos de itens. A perda aceitável para este exemplo é de 0,1% para os objetos padronizados (objetos que são comprados pela empresa) e de 0,2% para os objetos retalhos (objetos que são sobras de outros processos de corte) as sobras devem ter comprimento superior a 100 cm para retornarem ao estoque. Os custos de estocar objetos não são considerados neste exemplo.

Tabela 1: *Dados do exemplo – Objetos*

Item	Tamanho (cm)	Demanda
1	1000	50
2	1100	50
3	325	5
4	206	2

Tabela 2: *Dados do exemplo – Itens*

Item	Tamanho (cm)	Demanda
1	54	90
2	86	35
3	23	48
4	97	42
5	82	45

[2] Detalhes desta heurística é encontrado em Poldi e Arenales [10].

Na Tabela 3 a seguir, temos que:

• D1: Número de objetos padronizados cortados;
• D2: Número de objetos retalhos cortados;
• D3: Perda total;
• D4: Sobra total;
• D5: Quantidade de padrões de corte com sobra;
• D6: Quantidade de padrões de corte com perda;
• D7: Tempo total .

Tabela 3: *Solução do Exemplo 3*

	Heurísticas Construtivas				Heurísticas Residuais					
	FFD	FFD_R	Gulosa	$Gulosa_R$	FFD	FFD_R	Gulosa	$Gulosa_R$	RAG	RAG_R
D1	15	15	16	16	15	15	15	15	14	15
D2	7	7	4	5	3	2	2	4	5	7
D3	222	0	96	0	33	0	93	0	49	0
D4	977	799	228	987	485	312	0	624	0	1699
D5	1	2	1	3	1	1	0	3	0	3
D6	7	0	4	0	3	0	2	0	2	0
D7	0,016s	0,031s	0,031s	0,032s	0,078s	0,078s	0,078s	0,078s	0,172s	0,172s

6. CONCLUSÕES

Para resolver o problema de corte de estoque com sobras reaproveitáveis, alteramos métodos heurísticos clássicos bem conhecidos na literatura para o problema de corte de estoque os quais têm a minimização das perdas como objetivo e, incluímos a possibilidade de sobras para estoque. Com relação à identificação das melhores soluções, podemos notar pela Tabela 3 que as heurísticas para o problema de reaproveitamento, em especial a Heurística Residual FFD_R (não gera perda e concentra a sobra em um único padrão), apresentam soluções superiores às heurísticas clássicas para o problema de corte de estoque, pois estamos interessados em minimizar as perdas e ter sobras reaproveitáveis. Entretanto, em uma análise mais geral, com vários exemplos, existe uma grande dificuldade em apontar o melhor resultado, pois as soluções possuem características diferentes em termos de perda, estoque de sobras, entre outras

7. REFERÊNCIAS

[1] M. N. Arenales, R. Morrabito, H. H. Yanasse, O Problema de Corte e Empacotamento, Livro-texto de Mini curso. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 26, 2004, São João del Rei - MG.

[2] A. C. Cherri, O Problema de corte de estoque com reaproveitamento das sobras de material, Dissertação de mestrado, ICMC – USP, 2006 .

[3] M. Gradisar, J. Jesenko, C. Resinovic, *Optimization of roll cutting in clothing industry*. Computers & Operational Research, 10, 1997, pages 945-953.

[4] M. Gradisar, M. Kljajic, C. Resinovic, J. Jesenko, *A sequential heuristic procedure for one-dimentional cutting*. European Journal of Operational Research, 114, 1999, pages 557-568.

[5] M. Gradisar, C. Resinovic, M. Kljajic, *A hybrid approach for optimization of one-dimentional cutting*. European Journal of Operational Research, 119, 1999, pages 719-728.

[6] M. Gradisar, P. Trkman, *A combined approach to the solution to the general one-dimentional cutting stock problem*. Computers Operations Research, 32, 2005, pages 1793-1807.

[7] C. P. Gilmore, R.E. Gomory, *A linear programming approach to the cutting stock problem*. Operations Research, 9, 1961, pages 848-859.

[8] C. P. Gilmore, R.E. Gomory, *A linear programming approach to the cutting stock problem - Part I"*. Operations Research, 11, 1963, 863-888.

[9] A. Hinxman, *The trim-loss and assortment problems: a survey*. European Journal of Operational Research, 5, 1980, pages 8-18.

[10] K. C. Poldi, M. N. Arenales, *Dealing with small demand in integer cutting stock problems with limited different stock lengths*. Notas do ICMC - Série Computação, 85, ICMC – USP, 2005.

[11] G. Wäscher, T. Gau, *Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study*. OR Spektrum, 18, 1996, pages 131-144.

Os autores agradecem o apoio da FAPESP e CNPq.