

# Gas en discontinuo y líquido en RCTA

Adrián Amat Bernabéu

Javier Hipólito Marsal

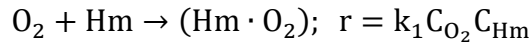
# ÍNDICE

ÍNDICE.....	2
1. <b>Enunciado</b> .....	3
1.1 Proyecto común.....	3
1.2 Proyecto individual.....	3
2. <b>Objetivo</b> .....	2
3. <b>Introducción</b> .....	4
4. <b>Tratamiento matemático</b> .....	5
4.1 Deducción de la ecuación de velocidad común a ambos proyectos.....	5
4.2 Cálculo del factor E de incremento de velocidad en absorciones con reacción química.....	7
4.3 Ecuación del pulmón como RDTA .....	9
5. <b>Resultados</b> .....	10
5.1 Proyecto común.....	10
5.2 Proyecto individual.....	14
5.2.1 Consumo total del O <sub>2</sub> .....	14
5.2.2 Estudio de las distintas variables que afectan a la velocidad de reacción.....	16
5.2.2.1 Efecto de la concentración de oxígeno inicial en los pulmones. Efecto de la profundidad.....	16
5.2.2.2 Efecto de la concentración de hemoglobina en sangre.....	17
5.2.2.3 Efecto del volumen de pulmón. Fumadores y no fumadores.....	19
5.2.3 Estudio de la capacidad adaptativa.....	21
5.2.3.1 Efecto de la concentración de oxígeno hasta concentración crítica.....	21
5.2.3.2 Efecto del área superficial de contacto en los pulmones.....	27
5.2.4 Pulsos pulmón.....	28
6 <b>Conclusiones</b> .....	35
7 <b>Anexo. Problema común clase</b> .....	36

# 1. Enunciado.

## 1.1 Proyecto común.

La reacción que tiene lugar en la membrana pulmonar para transportar el oxígeno a través de la corriente sanguínea, combinándose el oxígeno con la hemoglobina es la siguiente:



$$H_{O_2} = 0,937 \text{ atm} \cdot m^3/\text{mol}$$

$$k_{O_2,g} = 0,03 \text{ mol/s} \cdot m^3 \cdot atm$$

$$k_1 = 1,8 \cdot 10^3 m^3/\text{mol} \cdot s$$

$$D_{O_2,L} = 7,1 \cdot 10^{-10} m^2/s$$

$$D_{Hm,L} = 8,3 \cdot 10^{-12} m^2/s$$

$$\text{Concentración de hemoglobina en sangre} = 2,25 \text{ mol}/m^3$$

$$\text{Espesor total de la membrana} = 5 \cdot 10^{-7} m$$

En el pulmón:

$$\text{Volumen de sangre} = 1,07 \cdot 10^{-4} m^3$$

$$\text{Superficie de membrana} = 70 m^2$$

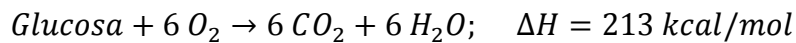
$$\text{Volumen pulmón expandido} = 6,5 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$p_{O_2} = 0,137 atm$$

Consumo oxígeno por el ser humano:

$$\text{Descansando: } 100 \text{ kcal/h}$$

$$\text{Corriendo fuerte: } 700 \text{ kcal/h}$$



## 1.2 Enunciado proyecto individual.

Este sistema se puede comparar a lo que sucede cuando aguantamos la respiración debajo del agua. Utilizando los datos de diseño de un pulmón calcula como varía la velocidad de absorción para calcular el tiempo que tenemos hasta que no seamos capaces de suministrar suficiente oxígeno a nuestro cuerpo (en condiciones de reposo y en condiciones de esfuerzo).

## 2. Objetivo.

Estudio de la velocidad de consumo del  $O_2$  en un pulmón humano y del tiempo que necesario para que se consuma. Este estudio se realizará en varios casos prácticos considerando que los pulmones son un reactor y el oxígeno es una alimentación del mismo.

### 3. Introducción.

Tanto en el proyecto individual como en el proyecto común se deberá de calcular cual

Se han de tener en cuenta los siguientes aspectos en un sistema de reacción fluido-fluido:

- a) La expresión de la ecuación de velocidad global. Las sustancias que se encuentran en las dos fases han de ponerse en contacto antes de que puedan reaccionar. Por esta razón en la expresión global de la velocidad de reacción ha de tenerse en cuenta la velocidad de transporte de materia (etapas físicas) y la velocidad de reacción química.
- b) La solubilidad en equilibrio. La solubilidad de los componentes reactantes limitará su desplazamiento de una fase a otra. Este factor influirá en la forma de la ecuación cinética (determinará si la reacción tiene lugar en una fase o en ambas).
- c) El método de contacto. En el proyecto común el contacto que se da en una columna empacada, mientras que en el individual se trata de un contacto en discontinuo (reactor discontinuo de tanque agitado).

En la ecuación cinética se supone que el reactante al cual se le llama A es soluble en el líquido B, pero no al contrario. Se tendrá por lo tanto en cuenta la teoría de la doble capa de Lewis y Whitman. En la figura 1 se presentan los casos que se pueden dar en función de las velocidades de transporte de materia.

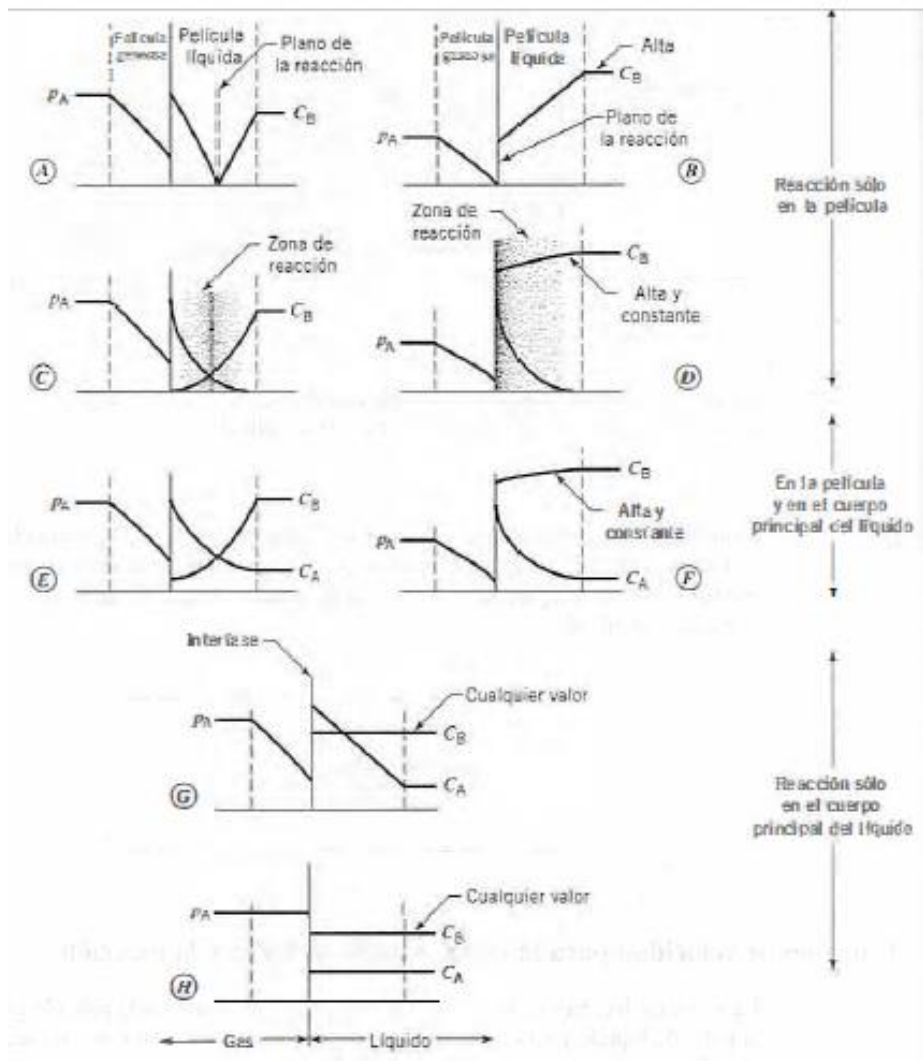
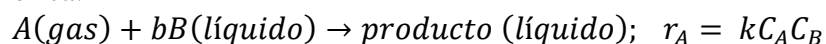


Figura 1. Comportamiento de la interfase para la reacción en fase líquida  
 $A(gas) + bB(líquido) \rightarrow \text{producto (líquido)}$

## 4. Tratamiento matemático.

### 4.1 Deducción de la ecuación de velocidad común a ambos proyectos.

La deducción de la ecuación de velocidad que a continuación se va a presentar, es común para ambos proyectos (proyecto común e individual). Considerando una reacción genérica:



La velocidad de la cual la fase gas A reacciona viene limitada por la velocidad de reacción de la siguiente forma:

$$-r_A = a k_f (P_A - P_{A,i}) = a k_c (C_{A,i} - C_A) E = \int k C_A C_B$$

O lo que es equivalente:

$$-r_A = \frac{P_A - P_{Ai}}{\frac{1}{a_{kf}}} = \frac{C_{Ai} - C_A}{\frac{1}{a_{kc}E}} = \frac{C_A}{\frac{1}{f_{ucB}}}$$

De ahí se puede eliminar el término:

$$-r_A = \frac{P_A - P_{Ai}}{\frac{1}{a_{kf}}} = \frac{C_{Ai} - \cancel{C_A}}{\frac{1}{a_{kc}E}} = \frac{\cancel{C_A}}{\frac{1}{f_{ucB}}}$$

Sabiendo la relación  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ , la ecuación queda de la siguiente forma:

$$-r_A = \frac{P_A - P_{Ai}}{\frac{1}{a_{kf}}} = \frac{C_{Ai}}{\frac{1}{a_{kc}E} + \frac{1}{f_{ucB}}}$$

Multiplicando en el numerador y en el denominador del miembro de la derecha de la ecuación se tiene:

$$-r_A = \frac{P_A - P_{Ai}}{\frac{1}{a_{kf}}} = \frac{C_{Ai}}{\frac{1}{a_{kc}E} + \frac{1}{f_{ucB}}} \cdot \frac{H}{H}$$

De nuevo, haciendo uso de la relación  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  y mediante la ley de Henry:

$$p_{Ai} = H_A \cdot C_{Ai}$$

$$-r_A = \frac{P_A - \cancel{H C_{Ai}} + \cancel{H C_{Ai}}}{\frac{1}{a_{kf}} + \frac{H}{a_{kc}E} + \frac{H}{f_{ucB}}}$$

Hay dos términos que desaparecen, con lo que la ecuación final queda de la siguiente manera:

$$-r_A = \frac{P_A}{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_c E} + \frac{H}{fk_c C_B}}$$

Esta es la ecuación general de velocidad que se emplea en reacciones fluido-fluido en las cuales tiene lugar una absorción con reacción química no catalizada. La ecuación tiene en cuenta las tres resistencias que van a limitar la velocidad de reacción

(resistencia en la película gas =  $\frac{1}{ak_g}$ ; resistencia en la película líquida =  $\frac{H}{ak_c E}$ ; y resistencia en la reacción química =  $\frac{H}{fk_c C_B}$ ).

## 4.2 Cálculo del factor E de incremento de velocidad en absorciones con reacción química.

Como se ha tenido en la ecuación de velocidad, la absorción de A es mayor cuando hay reacción química. El factor E es un término que siempre estará en los límites  $E_i < E < 1$ . Siendo  $E_i$  el factor de incremento para una reacción instantánea.

En el enunciado de los problemas, los coeficientes de transporte de materia de las fases gaseosa y líquida son datos del problema. Asimismo, la concentración del reactivo, la constantes de Henry, las difusividades y  $a$  y  $f$  también lo son. Para el cálculo del factor E de incremento de velocidad se puede hacer uso de la correlación de Van Krevelens y Hoftijzer:

$$E = \frac{\sqrt{M_H^2 \frac{E_i - E}{E_i - 1}}}{\tanh \sqrt{M_H^2 \frac{E_i - E}{E_i - 1}}}$$

Esta ecuación relaciona el factor E de incremento de velocidad con el módulo de Hatta y con el factor de velocidad para una reacción infinitamente rápida  $E_i$ . El módulo de Hatta a su vez se puede calcular como:

$$M_H^2 = \frac{D_{AL} k C_B}{k_{AL}^2}$$

Y el factor de velocidad para una reacción infinitamente rápida  $E_i$ :

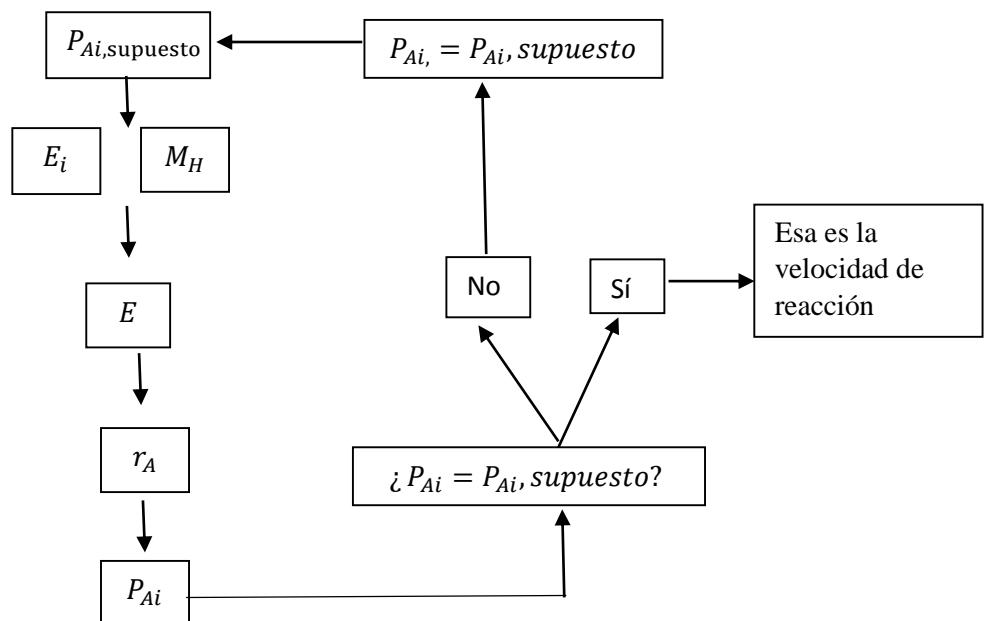
$$E_i = 1 + \frac{D_{BL} C_B}{b P_{A2} C_{Ai}}$$

La complejidad del cálculo de la velocidad de reacción se presenta aquí. Para realizar el cálculo del módulo de Hatta no hay ningún problema, pues todos los parámetros son conocidos. Sin embargo, para el cálculo de  $E_i$  se necesita conocer la concentración del reactivo A en la interfase (o la presión de A en la interfase relacionándolo con la constante de Henry).

Para resolver el problema lo que se hace es realizar un método de cálculo sucesivo. Para empezar con el cálculo se ha de suponer un valor inicial de  $P_{Ai}$  (por ejemplo, se puede suponer que  $P_{Ai, supuesto} = P_A$ ). Con este valor supuesto no hay problema en el cálculo de la velocidad de reacción, todo lo demás son datos conocidos. Una vez se tenga la velocidad de reacción se puede despejar  $P_{Ai}$  de la ecuación siguiente:

$$-r_A = k_{Ag} \cdot a \cdot (P_A - P_{Ai}) \rightarrow P_{Ai} = P_A + \frac{r_A}{k_{Ag} \cdot a}$$

Si el resultado de  $P_{Ai}$  es el mismo que el de  $P_{Ai, supuesto}$  paramos el cálculo. Sino, realizamos el mismo proceso tomando como valor de partida el  $P_{Ai}$ . Esto se ilustra a continuación:



Este cálculo iterativo se realizará programando un script con la herramienta de cálculo Matlab.



### 4.3 Ecuación del pulmón como RDTA.

Mediante las ecuaciones presentadas en los apartados anteriores se podría calcular la velocidad de reacción tanto en el proyecto individual como en el común. El pulmón tiene cierta capacidad para distribuir el oxígeno, se aproxima que se tiene una presión de oxígeno en el interior y se va consumiendo sin acumulación. Esta hipotética acumulación, que se desprecia en el presente trabajo, es la diferencia entre el oxígeno que puede suministrar el pulmón y el que se consume.

En nuestro caso individual se considera el pulmón como un reactor de tanque agitado en el cual se introducirá la máxima cantidad de oxígeno en el aire, con el pulmón totalmente lleno. Este oxígeno empezará a reaccionar y a consumirse hasta que llega un momento en el que se consume totalmente y la reacción ya no tiene lugar.

Realizando un balance a un reactor discontinuo de tanque agitado se tiene:

$$\text{Entrada} - \text{Salida} + \text{Generación} = \text{Acumulación}$$

$$0 - 0 + r_A V = \frac{dN_A}{dt}$$

$$\frac{1}{V} \frac{dN_A}{dt} = r_A$$

Integrando la ecuación:

$$\int_{N_{Ao}}^{N_{Aout}} \frac{dN_A}{r_A} = \int_0^t V dt$$

Lo dejamos en función de la conversión del reactivo A:

$$\int_{X_{Ao}}^{X_{Aout}} -N_{Ao} \frac{dX_A}{r_A} = \int_0^t V dt$$

El volumen y los moles iniciales de A son constantes que pueden salir fuera de la integral:

$$-N_{Ao} \int_{X_{Ao}}^{X_{Aout}} \frac{dX_A}{r_A} = V \int_0^t dt$$

La velocidad de reacción del reactante A es función de la presión de A, que a su vez depende de la conversión ( $r_A = f(P_A) = f(X_A)$ ).

$$-r_A = \frac{P_A}{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_LE} + \frac{H}{fkC_B}} = \frac{\frac{N_A}{N_{total}} \cdot P_{total}}{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_LE} + \frac{H}{fkC_B}} = \frac{\frac{N_{Ao}(1 - X_A)}{N_{total,o} - N_{Ao}X_A} \cdot P_{total}}{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_LE} + \frac{H}{fkC_B}}$$

Por lo tanto, el tiempo necesario para que se consuma el reactivo A totalmente viene dado por la expresión, en forma diferencial:

$$\frac{dt}{dX_A} = -\frac{N_{Ao}}{V} \cdot \frac{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_LE} + \frac{H}{fkC_B}}{\frac{N_{Ao}(1 - X_A)}{N_{total,o} - N_{Ao}X_A} \cdot P_{total}}$$

Se trata de una simulación, por lo tanto, el tiempo es la variable dependiente y la conversión es la variable independiente. Se resolverá numéricamente dándole a la ecuación el valor inicial de tiempo cero ( $t_o = 0$ ) y un intervalo de conversión desde que no hay reacción hasta que reacciona completamente ( $X_A = [0 \ 1]$ ).

## 5. Resultados.

Se comenta a continuación los resultados obtenidos en la parte individual y en la parte común del proyecto.

### 5.1 Proyecto común

En el enunciado del problema se pide el cálculo de la velocidad de reacción y la fracción volumétrica de pulmón no utilizado. Para realizar el cálculo de la velocidad de reacción se procedería a realizar el algoritmo de cálculo presentado en el apartado 4.2. y posteriormente al cálculo de la fracción volumétrica de pulmón no utilizado.

Los moles iniciales de oxígeno que habría en el pulmón se calcularían de la siguiente forma:

$$N_{O_2,o} = C_{O_2} \cdot V_{pulmón}$$

Y teniendo en cuenta la ley de los gases ideales se puede calcular la concentración:

$$C_{O_2} = \frac{p_{O_2}}{R \cdot T}$$

Por lo tanto, los moles y la concentración de oxígeno con el pulmón totalmente expandido son:

$$N_{O_2,o} = 0,035 \text{ mol } O_2 = 0,63 \text{ g } O_2$$

$$C_{O_2} = 0,0054 \frac{\text{mol } O_2}{L}$$

El cuerpo humano se mantiene a una temperatura constante de 37 °C. Esta será la temperatura que se tome. Por otra parte, la tasa de consumo de oxígeno vendrá dada por:

$$100 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ mol glucosa}}{213 \text{ kcal}} \cdot \frac{6 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol glucosa}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 7,82 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

$$700 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ mol glucosa}}{213 \text{ kcal}} \cdot \frac{6 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol glucosa}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 5,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Se han hecho los cálculos para un esfuerzo de una persona en reposo y para un esfuerzo físico intenso.

Si se considera que todo lo que llega al pulmón reacciona se tiene un decrecimiento de la velocidad de reacción, en valor absoluto, con una pendiente cada vez más suave debido a que la velocidad depende linealmente de la presión parcial de oxígeno y este se va consumiendo.

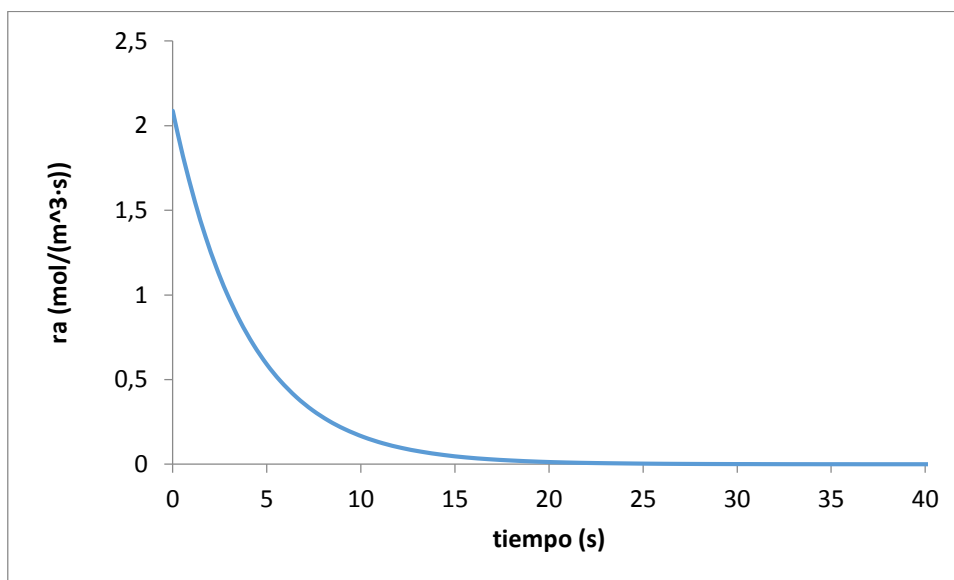


Figura 2. Descenso de la velocidad de suministro de oxígeno con el tiempo.

Sin embargo, el consumo de oxígeno, para un esfuerzo dado, es constante y la velocidad real de consumo de oxígeno tomará dicho valor constante siempre y cuando el pulmón sea capaz de subministrarle el oxígeno necesario al organismo para la degradación de la glucosa.

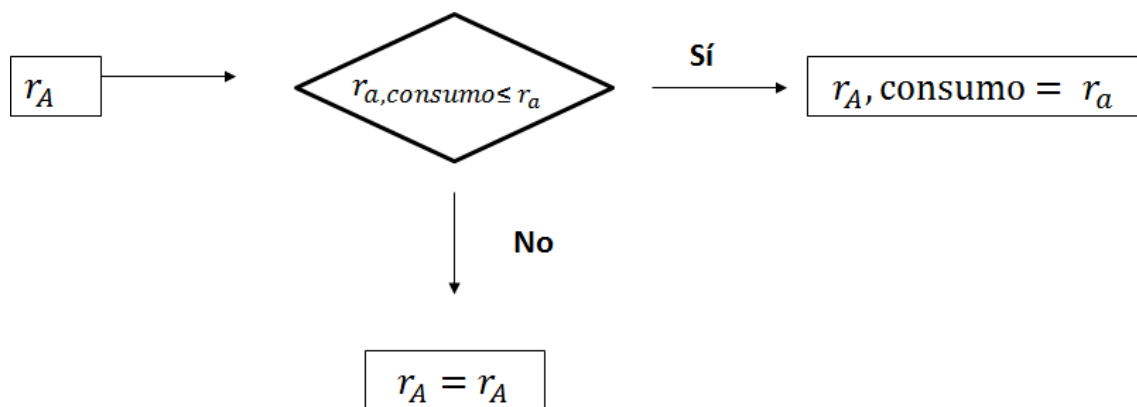
Se puede calcular con los datos de consumo de oxígeno anteriores la velocidad de reacción dividiendo entre el volumen pulmonar.

$$r_{a, \text{reposo}} = 7,82 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{0,00625} \frac{1}{\text{m}^3} = 0,120 \frac{\text{mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3}$$

$$r_{a,intenso} = 5,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{0,00625} \frac{1}{\text{m}^3} = 0,843 \frac{\text{mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3}$$

Entonces la velocidad de reacción toma valores iguales a la demanda requerida para la degradación de la glucosa o bien si el suministro es menor a la demanda se entra en estado de deuda de oxígeno donde la velocidad de consumo de oxígeno es la que le llega del pulmón y también participan otros nutrientes para la fisiología como el ácido láctico, en estos casos se dice que se está realizando un esfuerzo anaerobio y se presenta déficit de oxígeno. Este déficit explica porque después de hacer deporte todavía se mantiene frecuencias de respiración altas, aparte de por la inercia, se está compensando el déficit.

En forma de algoritmo lo que sucede con la velocidad de reacción es lo siguiente:



Sucede que con al principio llega mucho oxígeno a los pulmones y este oxígeno sobrante no se usa por lo que se consume a la velocidad de los requerimientos metabólicos de glucosa que está asociado al esfuerzo que se está realizando. Por lo tanto al principio la reacción es estable, por debajo del valor requerido de glucosa al organismo no le queda otra que usar el oxígeno que le llega aunque este sea insuficiente y por lo tanto en la figura se observa que solapa con la tasa de suministro pulmonar.

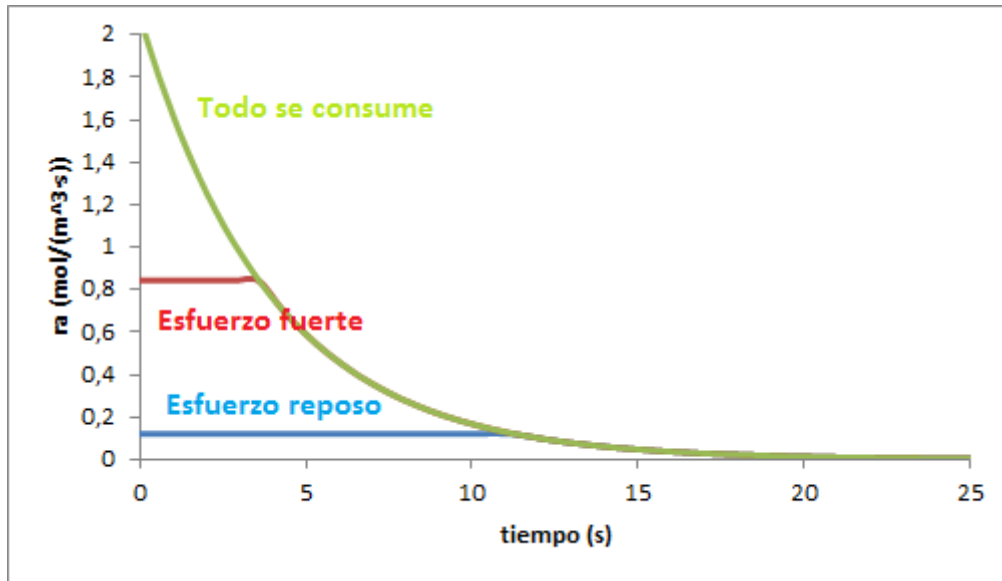


Figura 3. Consumo de oxígeno a distintos esfuerzos.

Finalmente se puede calcular que porcentaje del pulmón se usa. Los porcentajes usados son pequeños porque los órganos humanos están diseñados con un gran factor de seguridad que permiten vivir aún en condiciones adversas como puedan ser situaciones críticas, ausencia de un órgano o enfermedades,

Para el cálculo del porcentaje se ha comparado la velocidad de suministro de oxígeno que aporta el pulmón frente a la velocidad que requiere un esfuerzo. Si se supone que la presión parcial de oxígeno es constante, el oxígeno se consume pero se repone, y que el flujo molar es el mismo en ambas velocidades se tiene que el cociente de velocidades es proporcional al cociente de volúmenes.

$$\frac{r_{a,esfuerzo}}{r_{a,pulmón}} = \frac{V_{utilizado}}{V_{pulmón}}$$

Entonces para presión parcial igual a la inicial se tiene:

$$Reposo \rightarrow \frac{0,120}{2,09}$$

$$Esfuerzo fuerte \rightarrow \frac{0,843}{2,09}$$

Tabla 1. Volumen de pulmón utilizado a distintos esfuerzos.

	$V_{pulmón}$ utilizado
Reposo	5,77 %
Esfuerzo fuerte	40,4 %

Aún en condiciones de elevado esfuerzo, no se utiliza ni la mitad del volumen pulmonar. Nuestro cuerpo está diseñado con un gran margen de seguridad.

## 5.2 Proyecto individual.

En esta parte del proyecto se efectúa un estudio de la velocidad de consumo de oxígeno y del tiempo que este permanece en los pulmones antes de consumirse. Para realizar esta parte del proyecto se han de considerar los datos de partida presentado en el enunciado del problema.

Con estos datos de diseño de un pulmón, se calcula cuanto tiempo se podría aguantar debajo del agua hasta que no seamos capaces de suministrar suficiente oxígeno a nuestro cuerpo (en condiciones de reposos y en condiciones de esfuerzo). Esto se realizará para distintos casos teniendo en cuenta en cada uno de ellos condiciones que se han de cumplir.

### 5.2.1 Consumo total del $O_2$

Para empezar a estudiar el problema comenzamos por el caso más sencillo que se puede presentar. Suponiendo que llenamos el pulmón totalmente de aire y nos sumergimos en el agua. El  $O_2$  empezaría a consumirse y no se aportará nueva cantidad de oxígeno, como si se tratase de un reactor discontinuo de tanque agitado.

Atendiendo a la ecuación anteriormente presentada:

$$\frac{dt}{dX_A} = -\frac{N_{Ao}}{V} \cdot \frac{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_L E} + \frac{H}{fkC_B}}{\frac{N_{Ao}(1 - X_A)}{N_{total,o} - N_{Ao}X_A} \cdot P_{total}}$$

Se obtiene la siguiente gráfica que muestra la forma en la que se consume el oxígeno conforme pasa el tiempo.

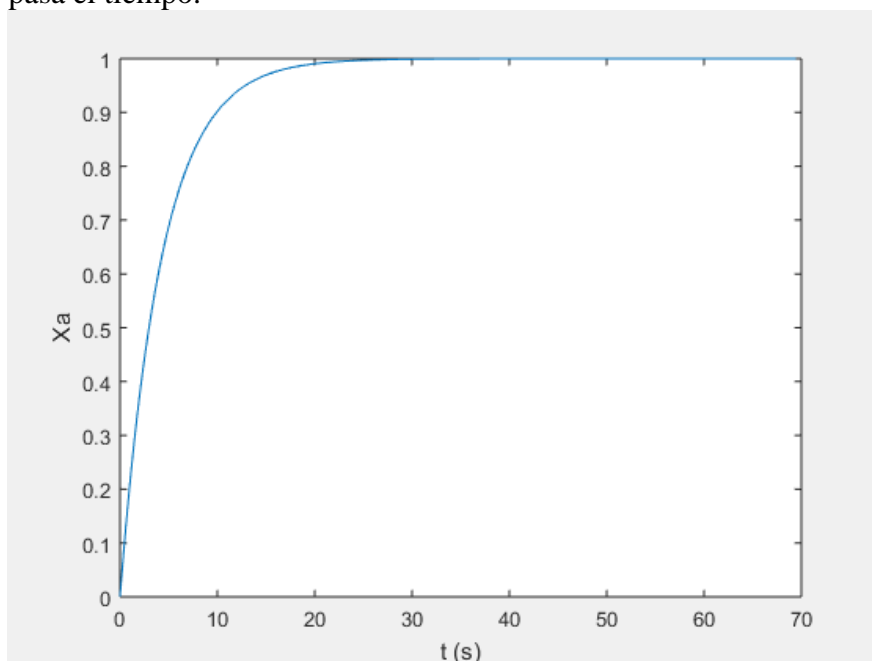


Figura 4. Representación del consumo de oxígeno en el pulmón respecto al tiempo.

Se observa como la concentración de oxígeno en los primeros segundos desciende muy rápidamente y una vez llegado a un alto grado de conversión, este tarda mucho tiempo en terminar de consumirse. Se comenta el fenómeno observado tras examinar que le ocurre a la velocidad de reacción.

La velocidad de reacción, por su parte, varía conforme se consume el oxígeno de la siguiente forma. Ver figura 5.

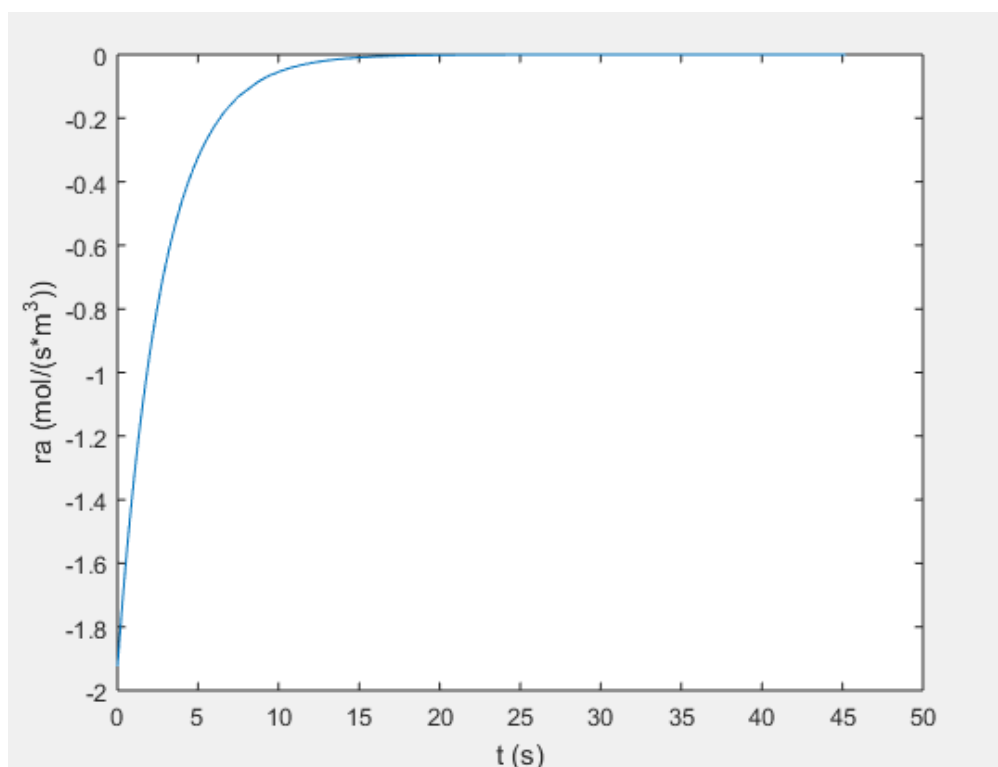


Figura 5. Variación de la velocidad de reacción con el tiempo.

Se observa una gráfica como la vista en la figura 4. En los primeros segundos se tiene una disminución de la velocidad de reacción muy pronunciada. Una vez se llegan a valores muy bajos de velocidad de reacción, se tarda mucho más tiempo en llegar a un valor nulo de velocidad de reacción. Ambas gráficas se puede explicar de la misma forma, al principio la presión parcial de oxígeno en los pulmones es relativamente alta (o de concentración de oxígeno), con lo que la velocidad de reacción es muy alta también y se consume muy rápidamente el oxígeno presente. Pero cuando se alcanza un valor muy pequeño, cercano a la conversión total de oxígeno, la velocidad de reacción también se hace muy pequeña y se tarda mucho tiempo en terminar de consumirse. Se muestran a continuación algunos datos de la conversión con respecto al tiempo y respecto a la velocidad de reacción.

Tabla 2. Variación de la conversión y de la velocidad de reacción con el tiempo.

$t(s)$	$X_{O_2}$	$r_{O_2}$
0,0	0,00	-1,92E+00
0,8	0,26	-1,43E+00
2,0	0,51	-9,51E-01
4,0	0,76	-4,69E-01
5,4	0,86	-2,77E-01
8,8	0,96	-8,46E-02
30,0	1,00	-4,28E-05
45,2	1,00	-1,92E-07

## 5.2.2 Estudio de las distintas variables que afectan a la velocidad de reacción.

Esta parte del proyecto consta del estudio de una serie de variables y de casos que afectan a la velocidad de reacción, los cuales se han dividido en tres apartados:

- Efecto de la concentración de oxígeno inicial en los pulmones. Efecto de la profundidad.
- Efecto de la concentración de hemoglobina en sangre.
- Efecto del volumen de pulmón. Fumadores y no fumadores.

### 5.2.2.1 Efecto de la concentración de oxígeno inicial en los pulmones. Efecto de la profundidad.

La concentración de oxígeno viene dada por la presión parcial de oxígeno respecto a la presión total. La presión parcial de oxígeno se puede ver variada con la profundidad a la que se esté sumergido. En el mundo del buceo no es recomendable pasar de los 30 metros de profundidad y se establece como máximo 40 metros de profundidad.

Se estudia en este apartado como varía la velocidad de reacción y el tiempo hasta conversión total de oxígeno cuando la presión parcial de oxígeno en los pulmones (o la profundidad) se ve variada.

La presión parcial de oxígeno viene dada por la ley de Dalton:

$$P_{O_2} = X_{O_2} \cdot P_{total}$$

Es evidente que al aumentar la profundidad, la presión total a la que estamos sometidos es mayor. La presión total vendrá dada por la presión atmosférica más la presión debida a la columna de agua que está por encima (a la profundidad).

$$P_{total} = P_{atm} + P_{columna} = P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h$$

Suponiendo el caso en el que un buceador que está a una determinada profundidad y aspira la última parte de su botella de buceo (que contiene aire), hasta llenar totalmente el pulmón del mismo, se estudia el tiempo que tardaría en consumirse el  $O_2$  completamente.



Se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3. Variación del tiempo y de la velocidad de reacción promedio para el consumo total de  $O_2$  en función de la profundidad.

$h \text{ (m)}$	$t \text{ (s)}$	$r_{O_2, \text{promedio}} \left( \frac{\text{mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3} \right)$	$P_{O_2} \text{ (atm)}$
0	45,2	-4,97E-01	0,137
3	45,9	-6,33E-01	0,177
5	46,3	-7,22E-01	0,203
10	47,0	-9,45E-01	0,270
20	47,8	-1,39E+00	0,402
30	48,2	-1,83E+00	0,535
40	12,1	-8,48E+00	0,668
50	11,9	-1,03E+01	0,800
60	11,8	-1,22E+01	0,933

Se observan dos efectos en la tabla de datos presentada. Por una parte, cuando se está a una profundidad menor o igual a 30 metros, el tiempo que tarda en consumirse el  $O_2$  presente en los pulmones aumenta. Esto es debido a que al estar a una mayor profundidad, la concentración de  $O_2$  (o la presión parcial de  $O_2$ ) es mayor y habrá que invertirse una mayor cantidad de tiempo para que se consuma totalmente. Por otra parte, al llegar a una profundidad de 40 m o más, el tiempo que tarda en consumirse el  $O_2$  desciende con grandes diferencias (diferencias de 30 segundos o más), incluso se tarda menos que a una profundidad de 0 m. La velocidad de reacción siempre aumenta con la concentración de  $O_2$ , y por lo tanto, cuanto más profundo se está más rápidamente se consume. Pero al llegar a una concentración tan alta, la velocidad de reacción aumenta en un valor muy alto (una diferencia de un orden de magnitud) con lo que la velocidad de consumo de  $O_2$  se dispara y el tiempo en alcanzar una conversión completa disminuye en un valor importante. De hecho, los datos calculados para una persona promedio (con los datos del enunciado) verifican lo que dice la IDSSC International Diving Safety Standards Commission (no sobrepasar los 30 m y como máximo 40 m). A profundidades mayores de la indicada se tiene muy poco tiempo para que el  $O_2$  se consuma.

#### 5.2.2.2 Efecto de la concentración de hemoglobina en sangre.

La hemoglobina es un pigmento rojo, proteína globular, que es capaz de captar el oxígeno celular de los pulmones y transportarlo hacia los tejidos. La siguiente figura se presenta un esquema simplificado de este hecho.

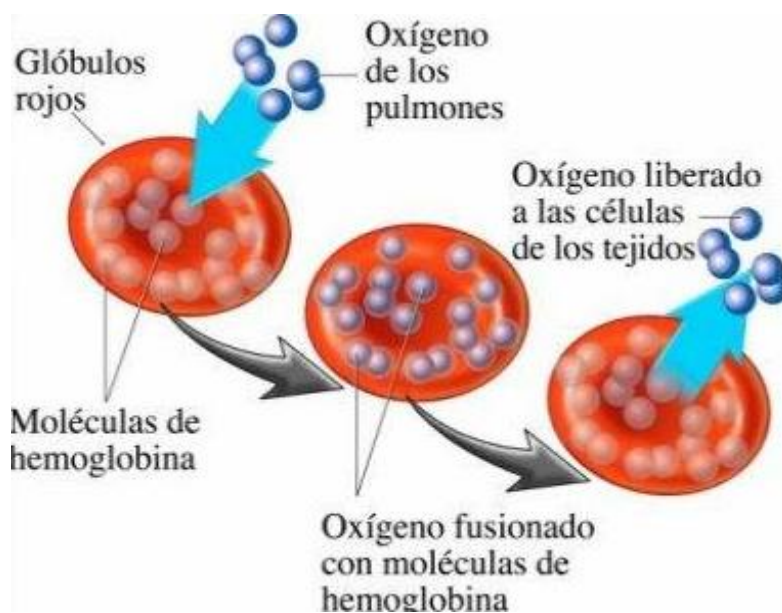


Figura 6. Esquema eritrocitos y hemoglobina.

La concentración de hemoglobina que una persona presenta en el corriente sanguíneo puede ser muy variable. Esta depende de cada persona en particular. Por ejemplo, las personas con anemia presentan una concentración de hemoglobina muy baja debido a una falta de hierro en el organismo. Sin embargo, una persona con eritrocitosis presenta una elevada concentración de eritrocitos, lo cual puede provocar coágulos e hipertensión. Otra variable a tener en cuenta es la altura a la que cada persona vive. Las personas que viven en regiones de alta montaña como los “sherpas” en el Himalaya presentan una concentración de hemoglobina superior a la que presentaría una persona que vive a nivel del mar.

Centrándonos en las enfermedades de la sangre comentadas, los resultados del estudio conducen a verificar hechos conocidos, cuando se tiene poca hemoglobina o anemia la capacidad de respiración disminuye, conduciendo a insuficiencia respiratoria. La concentración de hemoglobina es un parámetro presente en la velocidad de reacción. En concreto, aparece en una de las resistencias (en la resistencia química) como el denominador, por lo o que, su disminución afecta negativamente a la capacidad de consumo de oxígeno. Es decir, disminuir la concentración de hemoglobina va a provocar un aumento de la resistencia química, con lo que se hace más lenta la velocidad de reacción. Al haber una cantidad menor de hemoglobina, la reacción con el oxígeno se hace más lenta y la velocidad disminuye.

Este efecto es desde un punto de vista biológico adverso, ya que, la distribución de oxígeno en sangre se ve perjudica. Sin embargo, se podría considerar positivo en el caso que se está estudiando, ya que se trata de conservar la mayor cantidad de oxígeno posible bajo el agua y que este vaya a los órganos vitales. En el caso de la eritrocitosis el efecto es el contrario, la distribución de oxígeno al cuerpo está favorecida (por eso algunos deportistas se dopan con sustancias como el EPO aumentando el nivel de

glóbulos rojos en sangre y por lo tanto su capacidad de consumir oxígeno), sin embargo, en el problema del pulmón se podría tratar de un efecto no deseado pues se consumiría el oxígeno en un menor tiempo.

Analizando distintas concentraciones de hemoglobina se obtiene:

Tabla 4. Tiempos y velocidad de consumo de oxígeno en distintos estados.

Estado de salud	$C_b \left( \frac{mol}{m^3} \right)$	$t \text{ (s)}$	$r_{O_2} \left( \frac{mol}{m^3 \cdot s} \right)$
Anemia	1,00	33,6	-0,571
Normal	2,25	25,53	-0,699
Eritrocitosis	3,00	22,41	-0,758

### 5.2.2.3 Efecto del volumen de pulmón. Fumadores y no fumadores.

Una variable muy importante a tener en cuenta es el volumen de pulmón que se tiene. Cuanto mayor sea el volumen de pulmón, más cantidad de oxígeno se podrá almacenar y por lo tanto, más tiempo debería de tardar en consumirse. Los pulmones de las personas varían dependiendo del sexo y del estado físico. Se realiza una simulación para diferentes personas en función del volumen de pulmón. Se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 5. Resultados obtenidos para distintos volúmenes de pulmón.

Tipo de persona	$V \text{ (L)}$	$t \text{ (s)}$	$r_{O_2} \left( \frac{mol}{m^3 \cdot s} \right)$
atleta	7	48,70	-0,464
hombre	5	34,76	-0,637
mujer	4	27,80	-0,767
fumador	2,5	17,37	-1,203

Se observa que a un mayor volumen de los pulmones, más tiempo tarda en consumirse totalmente el oxígeno contenido en estos. Si se realiza una representación gráfica de cómo se consumen el oxígeno con el paso del tiempo se obtiene:

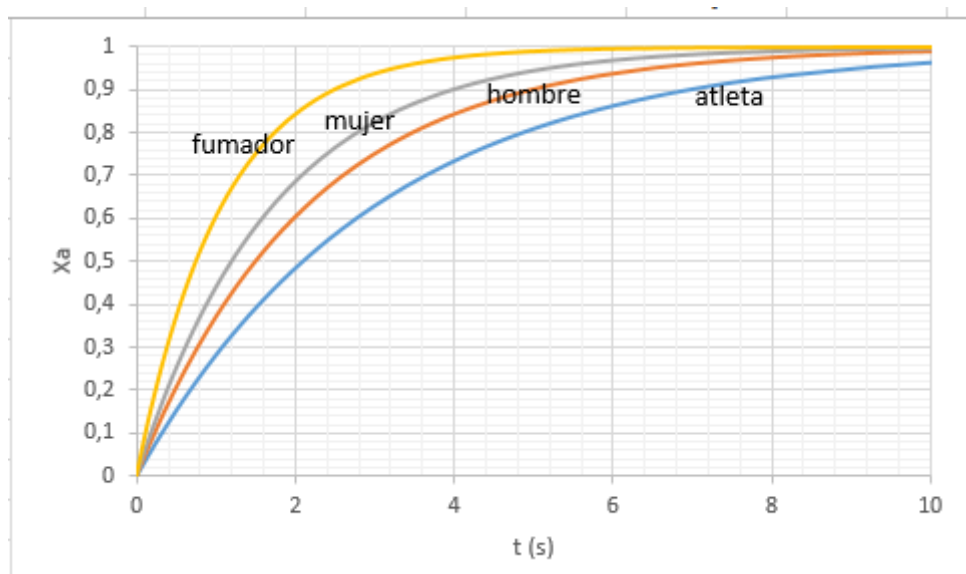


Figura 7. Consumo de oxígeno frente al tiempo para distintos volúmenes de pulmón.

Al aumentar el volumen de pulmón estamos haciendo que la velocidad de reacción disminuya, como se puede ver en la tabla presentada. La velocidad disminuye debido a que el área de contacto entre las partículas de oxígeno contenidas y el pulmón  $\left(\frac{m^2 \text{ superficie}}{m^3 \text{ pulmón}}\right)$  se ve disminuida cuanto mayor es el volumen de pulmón. Al verse disminuida, las resistencias se ven aumentadas (resistencia debido a la película líquida y película gas), con lo que la velocidad de reacción disminuye. Cuando la velocidad de reacción disminuye, también disminuye el tiempo necesario para consumirse el oxígeno presente en el pulmón.

Se observa en la siguiente tabla como se ven modificadas las distintas resistencias con el aumento del volumen. Se le llama a la resistencia debido a la película gaseosa  $R_1$ , a la película debido a la película líquida  $R_2$  y a la película debido a la reacción química  $R_3$ .

Tabla 6. Resultado de las diferentes resistencias que limitan la velocidad de reacción.

Tipo de persona	$V \text{ (L)}$	$a \left(\frac{m^2}{m^3}\right)$	$R_1$	$R_2$	$f \left(\frac{m^3}{m^3}\right)$	$R_3$
atleta	7	10000	0,0033	0,0582	0.0153	0,0151
hombre	5	14000	0,0024	0,0416	0.0214	0,0108
mujer	4	17500	0,0019	0,0333	0.0267	0,0086
fumador	2,5	28000	0,0012	0,0208	0.0428	0,0054

En todos los casos, la resistencia que limita la velocidad de reacción es la resistencia debido a la película líquida (pues es donde mayor valor se tiene). Lo mismo que para la resistencia en las películas líquida y gas ocurre con la resistencia a la reacción química, se ve incrementada con el aumento de volumen, pues la relación entre volumen de

sangre y volumen de pulmón se ve disminuida. Y al verse disminuida esta relación, la resistencia a la reacción química aumenta. Lo que está ocurriendo es que el pulmón al expandirse tiene una superficie de contacto mucho menor, con lo que, se hace más difícil el transporte de materia, hay una oposición mayor. Lo mismo pasa con la reacción química, hay una superficie de contacto menor para reaccionar. En conjunto provoca que la velocidad de reacción disminuya y con ello se tenga un mayor tiempo para la conversión total del oxígeno contenido en el pulmón.

### 5.2.3 Capacidad adaptativa.

El ser humano ante ciertas situaciones, como pueden ser: falta de oxígeno en el medio, ahogamiento o situaciones de un alto estrés, presenta ciertas herramientas adaptativas que le permiten ajustarse a las condiciones expuestas. Estas capacidades de adaptación se pueden analizar en el proyecto en dos casos, los cuales, se van a presentar a continuación. En cada caso se tendrá en cuenta que ocurriría si no se tuviera la capacidad de adaptación y la forma en la que se responde cuando sí se tiene.

#### 5.2.3.1 Efecto de la concentración de oxígeno hasta concentración crítica.

Hasta ahora, se ha supuesto que la concentración de oxígeno descendía hasta alcanzar una conversión completa. Sin embargo, a concentraciones no tan bajas de oxígeno ya se tendrían efectos sobre las funciones vitales del ser humano. Se puede considerar la siguiente clasificación respecto a la concentración de oxígeno:

Tabla 7. Efecto de la concentración sobre el ser humano.

<b>Volumen de oxígeno</b>	<b>Efectos sobre el ser humano</b>
23,5%	Enriquecimiento de oxígeno. peligro de incendio
21,0%	Concentración de oxígeno en el aire
19,5%	Concentración inocua mínima
16,0%	Desorientación, juicio y respiración afectados
14,0%	Juicio defectuoso, fatiga rápida
8,0%	Fallo mental, pérdida del sentido
6,0%	Dificultad para respirar

Observamos a qué tiempos se tendría una concentración de oxígeno que provocaría las consecuencias descritas en la tabla. Consideramos como concentración crítica la concentración inferior a 6 %. Si se realizan los cálculos correspondientes para el consumo del oxígeno a una concentración dada se observa lo siguiente.

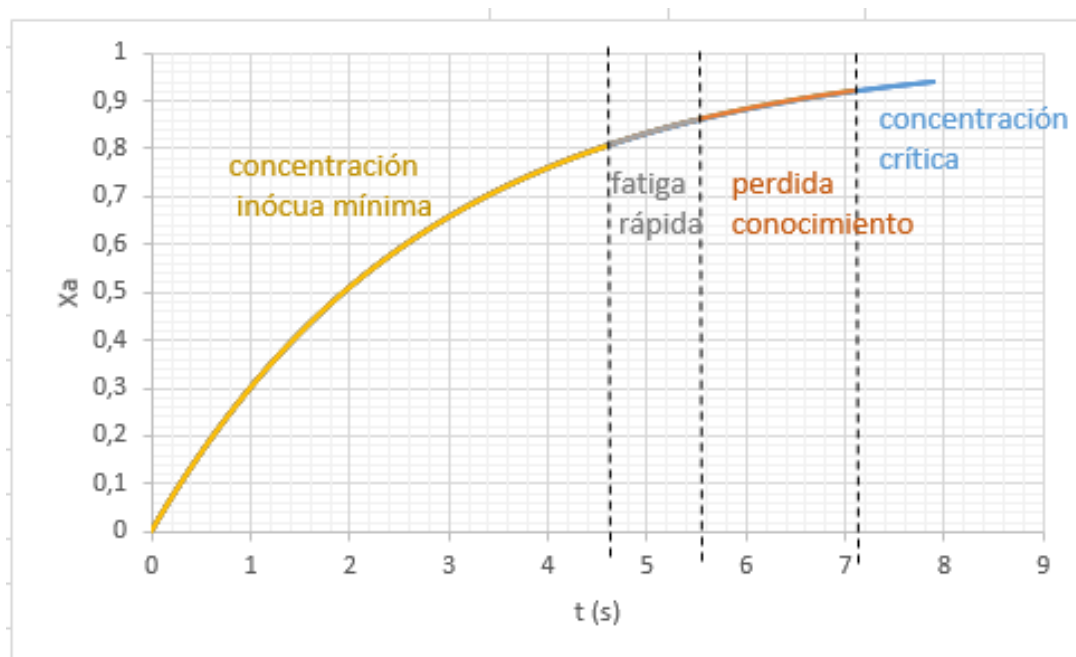


Figura 8. Representación de la conversión del oxígeno contenido en el pulmón frente al tiempo dividido en tramos según los efectos que este tendría sobre el ser humano.

Es evidente que los tiempos obtenidos son muy bajos y no se adecuan a la realidad. Por esta razón, se puede suponer que la concentración crítica de oxígeno en el pulmón ha de presentar una forma de adaptación ante esta situación de peligro.

Los datos exactos de cuando empieza y acaba cada intervalo se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 8. Resultados que se obtienen sin tener en cuenta la capacidad adaptativa.

Concentración	Conversión	$t \text{ (s)}$	$r_A \left( \frac{\text{mol}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right)$
Concentración inocua mínima	0,81	4,58	-1,331
Juicio defectuoso, fatiga rápida	0,86	5,51	-1,296
Fallo mental, pérdida del conocimiento	0,92	7,07	-1,257
Concentración crítica	0,94	7,88	-1,244

Para tener en cuenta la capacidad adaptativa de los pulmones ante la situación de peligro presentada, es decir, ante una concentración crítica de oxígeno en los pulmones, se tendrá en cuenta que el transporte de oxígeno desde el pulmón a la sangre se verá dificultado. En nuestro caso, se considera que la resistencia en la fase gas no será un valor constante, sino que variará. Además, se asume que la resistencia a través de la

película gaseosa es la que limita la velocidad de reacción (como se ha podido comprobar en otros apartados). Esta resistencia al presentar un peso mayor que el resto de resistencias, será la que incrementará su valor a lo largo del proceso en mayor medida. Para tener en cuenta la resistencia a la película gaseosa, se considera que la constante de transferencia de materia de esta película no es constante. Ésta tiene introducida muchísimas variables que afectarán a la velocidad de consumo de oxígeno en el pulmón, las cuales se han de valorar, ya que, aproximarán más el resultado que se obtenga a la realidad.

A continuación, se explica la forma en la cual se tiene en cuenta la constante de transporte:

El transporte de oxígeno realmente no se da en la totalidad del pulmón sino, en diversos terminales del árbol bronquial llamados alveolos. Suponemos que el traspaso se da en los pequeños poros que presentan los alveolos. La constante de transporte de materia en la fase gas es función del módulo de Sherwood  $S_h$ , del diámetro y de la difusividad:

$$k_{O_2,g} = \frac{S_h \cdot D_{O_2}}{D}$$

El módulo de Sherwood puede relacionar con el módulo de Schmidt  $S_h$ , con el parámetro  $j_D$  y con el número de Reynolds  $Re$  según:

$$S_h = Sc^{1/3} \cdot j_D \cdot Re$$

Este parámetro  $j_D$  se calcula a su vez en función de la turbulencia, del número de Reynolds:

$$j_D = \frac{0,725}{Re^{0,41} - 0,15}$$

Donde el número de Reynolds se define:

$$Re = \frac{v_{gas} \cdot \rho_{gas} \cdot D}{\mu}$$

Llegados a este punto se han de recoger los cálculos rápidos presentados en la parte común del proyecto. Las tasas de consumo dependiendo de si se realizaba ejercicio o no eran de:

En reposo	Ejercitándose
$7,82 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{s}}$	$5,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{s}}$

La cantidad de oxígeno que ha de transportarse en sangre es un requisito que se ha de cumplir. Esta cantidad se ha de suministrar a las distintas partes del organismo para realizar los procesos metabólicos y para poder sobrevivir.

Por otra parte, se considera que cuando se está en una situación normal, el diámetro de contacto será de 0,015 m en los alveolos encargados del transporte de oxígeno a la sangre. Este puede variar dependiendo del tipo de persona que se considere.

$$v_{gas} = \frac{Q_{gas}}{S} = \frac{\frac{n_{O_2} \cdot R \cdot T}{P_{O_2}}}{\pi \cdot R^2}$$

Teniendo en cuenta la forma de cálculo de la constante de transporte de materia, se obtienen los siguientes resultados:

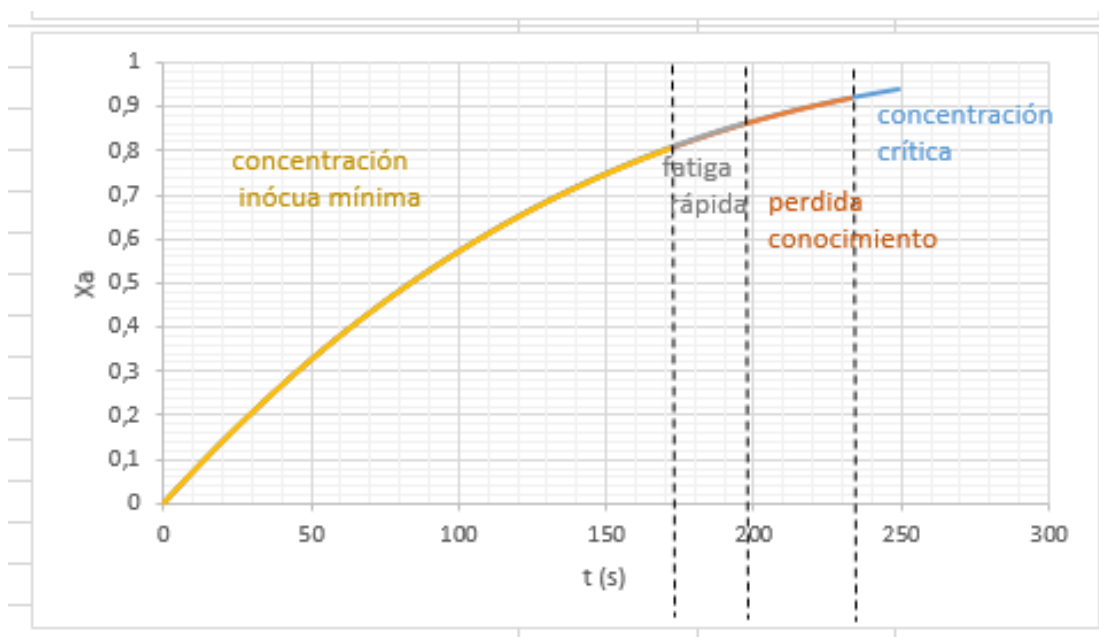


Figura 9. Representación de la conversión del oxígeno frente al tiempo dividido en tramos según los efectos que este tendría sobre el ser humano teniendo en cuenta el mecanismo de adaptación y en una situación de reposo.

Se observa la misma forma de la representación que se ha realizado anteriormente, sin embargo, los tiempos que se consiguen son muchísimo mayores. De hecho si se comparan ambas curvas (figura 6) se observa el gran peso que tiene la resistencia de la película gaseosa sobre la velocidad de reacción y en última instancia sobre el tiempo de conversión completa. Conforme se va consumiendo el oxígeno la resistencia se ve incrementada, con lo que el tiempo que se tarda en llegar a la concentración crítica se ve muy incrementado.



Tabla 9. Comparación de las resistencias considerando el mecanismo de adaptación en condiciones de reposo y esfuerzo y sin considerar el mecanismo de adaptación.

	$R_1 \left( \frac{Pa \cdot m_{react}^3}{mol} \right)$	$R_2 (P_{CO_2} \cdot m^2 \cdot s)$	$R_3 \left( \frac{P_{CO_2} m^3}{mol} \right)$
Sin mecanismo	0,014	0,054	0,014
Reposo	1,317	0,057	0,014
Esfuerzo	0,435	0,057	0,014

Se observa el incremento que sufre la resistencia  $R_1$ , la cual limita la difusión a través de película gaseosa. Cuando se tiene un mecanismo de adaptación, este incremento de resistencia provoca que el paso de oxígeno a la sangre se vea limitado, lo cual reduce considerablemente el tiempo de conversión crítica. Se observa, además, que cuando se hace un gran esfuerzo esta resistencia se ve algo disminuida. Esto es algo normal, pues se necesita una tasa de oxígeno mayor a las células. Al necesitar una tasa mayor, la resistencia se hace menor, lo cual provocará que el tiempo de conversión sea menor con respecto a estar en condiciones de reposo.

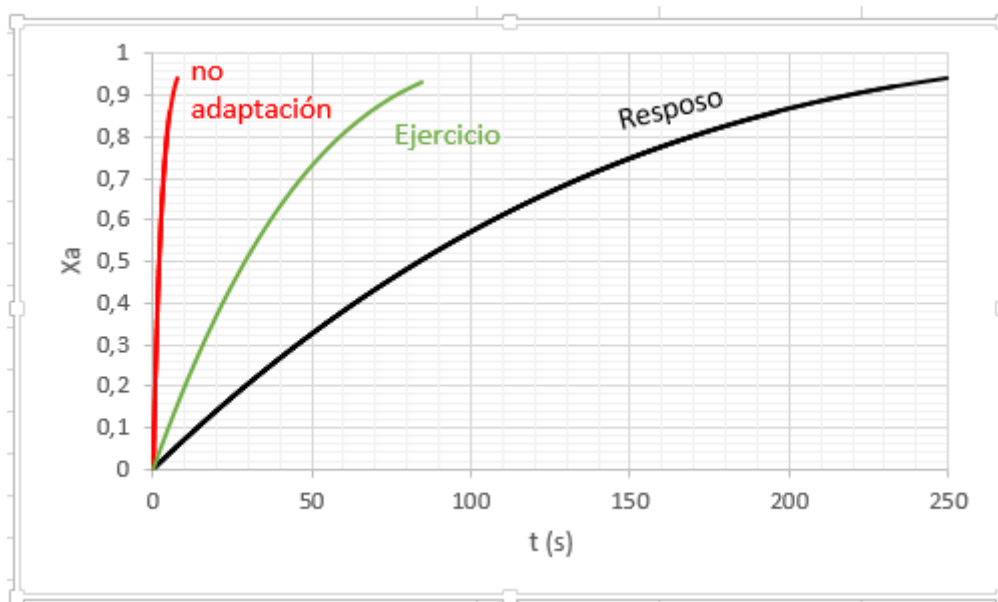


Figura 10. Comparación de los tiempos de conversión crítica considerando el mecanismo de adaptación y sin considerarlo.

Los tiempos que se obtienen de los tres casos expuestos son los siguientes:

Tabla 10. Tiempos para una alcanzar una conversión crítica para tres casos.

Concentración	Conversión	REPOSO	EJERCICIO	no adaptativa
		$t$ (s)	$t$ (s)	$t$ (s)
Concentración inocua mínima	0,81	171,3	59,6	4,6
Juicio defectuoso, fatiga rápida	0,86	196,3	68,5	5,5
Fallo mental, pérdida del conocimiento	0,92	232,9	81,7	7,1
Concentración crítica	0,94	249,3	87,6	7,9

Por otra parte, es interesante la forma en la que varía la velocidad de reacción en los casos expuestos. Esta velocidad de reacción aumenta cuanto menor es la resistencia que se opone, por lo que las mayores velocidades de reacción se dan si no consideramos los mecanismos de adaptación. Por otra parte la velocidad de reacción aumenta cuando se está realizando ejercicio físico, como se ha comentado, pues se necesita de una mayor tasa de oxígeno. Por último, se observa que la velocidad de reacción es mayor cuando la concentración de oxígeno es alta, es decir, al principio de la reacción. Una vez el cuerpo humano se encuentra en una situación de estrés, activa los mecanismos adaptativos y reduce la velocidad de reacción.

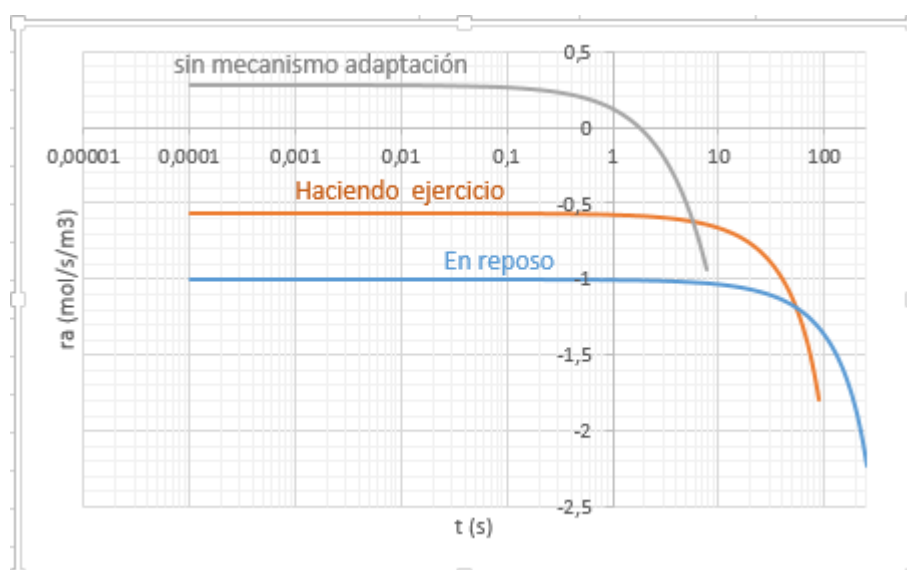


Figura 11. Comparación de las velocidades de reacción en los distintos casos expuestos.

En conclusión, los mecanismos de adaptación del ser humano ante situaciones límite se activan, provocando que la velocidad de reacción disminuya de manera considerable. La velocidad se reducirá más cuanto menor sea la tasa de consumo necesaria y cuanto menor cantidad de oxígeno se presente en los pulmones. Esta reducción se realiza mediante el aumento de resistencia en la película gaseosa.

### 5.2.3.2 Efecto del área superficial de contacto en los pulmones.

Otro mecanismo de adaptación se observa en este caso. Es obvio que cuanto mayor área superficial de membrana se disponga, mejor será el área de intercambio y de transporte para que tenga lugar la reacción de unión entre el oxígeno y la hemoglobina. Si se realizan cálculos para distintas áreas de membrana superficiales se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 11. Datos obtenidos para personas con distinta área de membrana pulmonar sin tener en cuenta la adaptación.

Tipo de persona	Área membrana ( $m^2$ )	$t$ (s)	$r_A \left( \frac{mol}{s \cdot m^3} \right)$
atleta	100	34,3	-0,645
hombre	70	45,2	-0,497
mujer	60	51,2	-0,442
fumador	40	72,3	-0,310

Los resultados obtenidos no se adecúan con la realidad. Es imposible que un fumador pueda aguantar más tiempo bajo el agua que una persona deportista. Si solo se tiene en cuenta el área de intercambio, en un deportista o un atleta está es mayor, ya que, tiene una mayor capacidad para transportar el oxígeno y que se enlace con la hemoglobina. Ahora bien, se han de tener en cuenta que ante situaciones como la presentada, el cuerpo humano responde a mecanismos de adaptación. Teniendo en cuenta esto, se realizan los cálculos correspondientes teniendo en cuenta que la película gaseosa va a limitar el transporte de materia (tal y como se ha visto en el caso anterior):

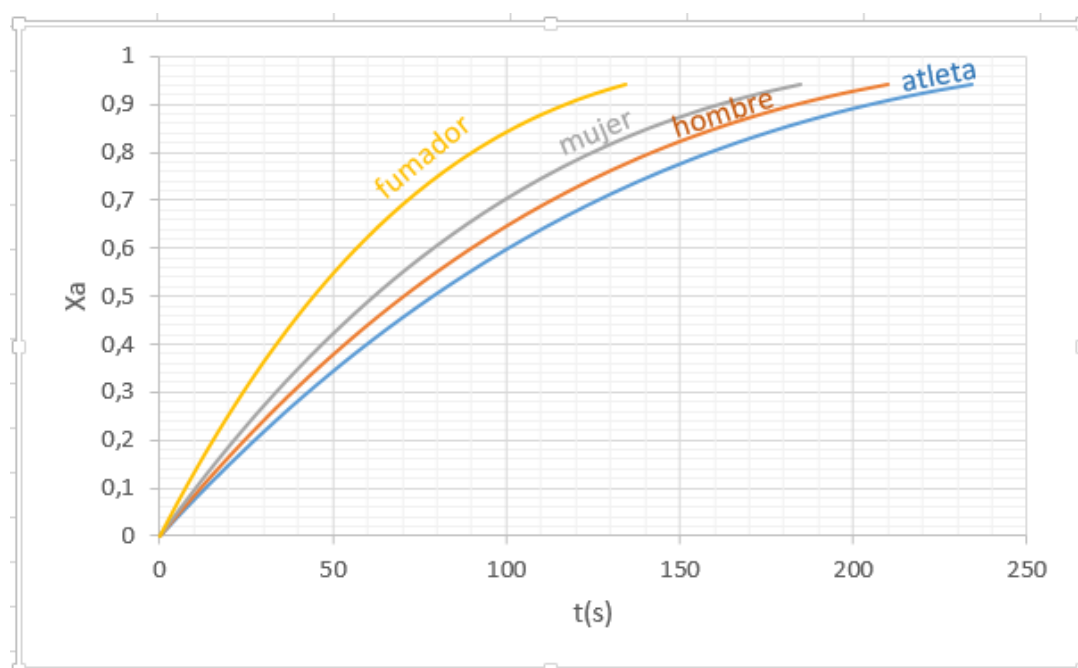


Figura 12. Representación del tiempo que se tarda en alcanzar la conversión crítica en función del área de membrana pulmonar en reposo teniendo en cuenta la adaptación.

Teniendo en cuenta la adaptación a una situación crítica los tiempos mejoran notablemente y además, la situación se invierte con respecto el caso anterior. Al considerar el mecanismo de adaptación el atleta es el que más tiempo aguanta bajo el agua, mientras que el fumador el que menos, lo cual sería lo que ocurriría en la realidad, ya que, al fumar se están inhalando sustancias que ensuciando los pulmones y que reducen el área superficial de membrana, provocando que la capacidad adaptativa sea menor y que los tiempo de consumo de oxígeno sean menores. Si se realizará los cálculos para una tasa de consumo mayor, los tiempos descienden, pero se mantiene el mismo orden de velocidad de oxígeno.

Tabla 12. Resultados de tiempo, velocidad de reacción y resistencias.

Tipo de persona	Área	REPOSO					EJERCICIO				
		$t(s)$	$r_A$	R1	R2	R3	$t(s)$	$r_A$	R1	R2	R3
atleta	100	233,9	-0,074	1,244	0,038	0,014	81,3	-0,208	0,412	0,038	0,014
hombre	70	209,8	-0,082	1,103	0,054	0,014	74,3	-0,221	0,364	0,054	0,014
mujer	60	184,6	-0,092	0,960	0,063	0,014	66,5	-0,241	0,004	0,063	0,014
fumador	40	134,1	-0,122	0,005	0,095	0,014	52,1	-0,287	0,218	0,095	0,014

Se observa en la tabla 7, además del aumento del tiempo cuando se está en reposo, el efecto que tienen estas resistencias la velocidad de reacción y con esto en el tiempo. La resistencia que está limitando la reacción química es el transporte de materia en la fase gas. La personas que más resistencia oponen a una situación límite son los atletas (su mecanismo de adaptación es mayor). Al presentar una mayor resistencia, las velocidades de reacción son menores y los tiempos de conversión hasta el punto crítico son mayores. La resistencia química  $R_3$  no se ve variada en ningún caso, ya que no depende del transporte de materia.

#### 5.2.4 Pulsos pulmón.

El pulmón no tiene un volumen constante a lo largo del proceso de respiración, existe una fase de inspiración en la que los pulmones se expanden y otra de expiración en el que se contraen. A falta de un modelo exacto de un pulmón estándar que reproduzca como varía el volumen del pulmón en función del tiempo, se propone un modelo arbitrario, el cual es una aproximación al comportamiento que presentaría un pulmón real. Por su finalidad didáctica merece la pena su desarrollo como objeto de estudio.

Para empezar, nos preguntamos: ¿Cómo varía el volumen del pulmón en función del tiempo? Parece evidente que debe modelarse con una función periódica. Para reproducir este comportamiento se hace uso de la función seno. Primero de todo, se establece un volumen máximo de pulmón y un volumen mínimo de pulmón, y además, se establece

un periodo entre pulsos máximos. Una vez se tiene esto, queda definida la variación de volumen de pulmón con el tiempo.

Recurriendo a la bibliografía, según los apuntes de semiología de la Universidad Católica de Chile, facultad de medicina, una correcta respiración debe tener una frecuencia de entre 12 y 20 respiraciones por minuto. Las anomalías son la taquipnea para frecuencias superiores a 20 y bradipnea para menores a 12. También se expone en dichos apuntes que la relación inspiración/expiración es 5/6 por lo que la expiración es algo más prolongada. Tomadas estas consideraciones, la aproximación de una función seno sigue pareciendo adecuada.

Comentando dos curiosidades acerca del tema. Por una parte, los bebés tienen frecuencias respiratorias mayores, por lo que se salen de lo establecido. Por otra parte, existen anomalías que cambian la amplitud y la frecuencia de la respiración que son de tal importancia que están establecidas y se utilizan en diagnóstico médico. Según estudios, debajo del agua se podría tener un régimen de variación de volumen de pulmón involuntario (un volumen condicionado por la inmersión), de ahí que muchos deportistas trabajen en sumergidos en agua. La fenomenología del reflejo de inmersión marino implica una respuesta fisiológica compleja, influyen muchas variables y todavía está en estudio. El estudio de este fenómeno es interesante para el desarrollo de la ingeniería química y los métodos de control. No obstante, vamos a suponer que el pulmón varía como lo haría en estado normal.

Se escoge una frecuencia intermedia, se establece un valor de volumen de pulmón en reposo que será la ordenada en el origen, y una amplitud, que dará los valores máximos y mínimos de volumen de pulmón cuando los valores del seno tomen valores 0 y 1 (lo que sucede en un periodo de tiempo).

$$V_{\text{reposo}} = 7 \text{ L}$$

$$A = 3 \text{ L}$$

$$f = 15 \text{ respiraciones/minuto}$$

$$T = 4 \text{ s}$$

$$\omega = 1,57 \text{ rad/s}$$

La columna de la derecha corresponde a datos calculados mediante:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$V(t) = A \sin(\omega t) + V_{\text{reposo}}$$

$$V(t) = 3 \sin(\omega t) + 7; \text{ en L}$$

Resultando el comportamiento oscilante de la figura siguiente.

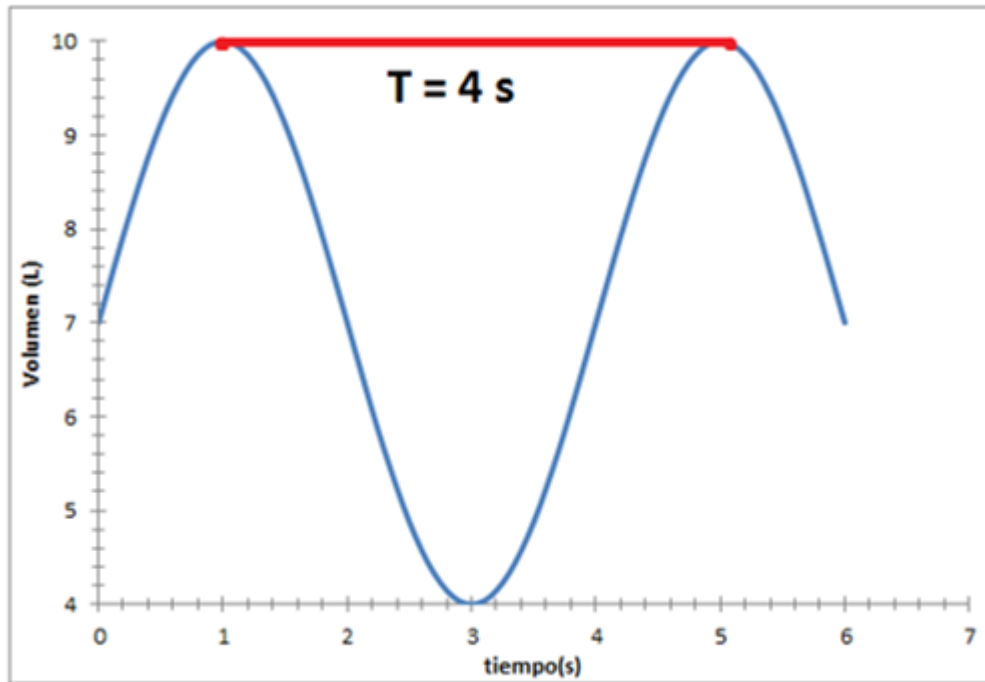


Figura 13. Variación del volumen del pulmón.

Finalmente tras realizar los cálculos se obtiene la conversión frente al tiempo del proceso. El efecto de los pulsos produce que la pendiente suba y baje en los periodos, presentando fluctuaciones. Por lo tanto, no tiene un comportamiento monótono como lo tendría un pulmón a volumen constante. La razón es que una variación del volumen del pulmón afecta tanto a la fracción volumétrica de sangre en pulmón

(representada por  $f \left[ \frac{m^3 \text{ sangre}}{m^3 \text{ pulmón}} \right]$ ), como al área efectiva por volumen de pulmón

(representada por  $a \left[ \frac{m^2}{m^3 \text{ pulmón}} \right]$ ). Que estos parámetros presenten un valor alto es

bueno, ya que mejoran el transporte de materia. Desde un punto de vista matemático, estos términos aparecen en la ecuación de velocidad presentada dentro de las resistencias, en el denominador del denominador de la ecuación cinética, y por lo tanto, si estos tienen un valor elevado aumentan la velocidad de consumo de oxígeno, pues disminuyen las resistencias, y como consecuencia, la velocidad de reacción aumenta. Por tanto, cuando el pulmón está expandido, al estar dividiendo el volumen en los parámetros, la tasa de consumo de oxígeno es menor, ya que, los parámetros son menores y las resistencias mayores.

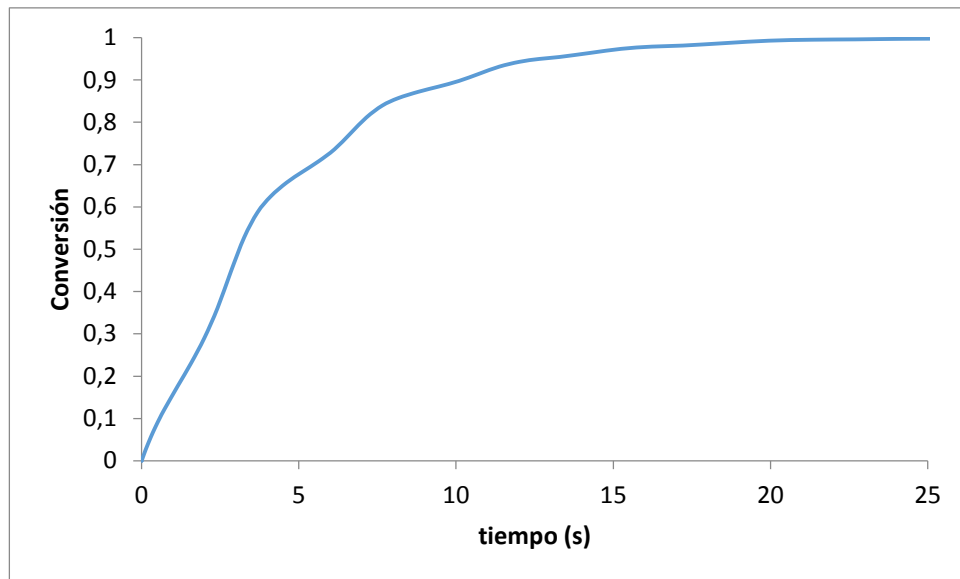


Figura 14. Consumo de oxígeno en un pulmón a pulsos sinusoidales.

Sin embargo cuando se consulta la bibliografía médica aparecen modelos donde la variación del volumen pulmonar con la respiración está representada por funciones triangulares periódicas. Estas funciones son distintas en función del estado de salud. A modo de ejemplo, la polipnea corresponde a respiraciones rápidas y poco profundas asociada a estados febriles, la acidótica es rápida y profunda y está asociada a comas diabéticos, y por último, la respiración de Cheyne-Stokes alterna periodos de apnea, ausencia de respiración, y subidas y bajadas de intensidad, provoca insuficiencia cardiaca y lesiones nerviosas.

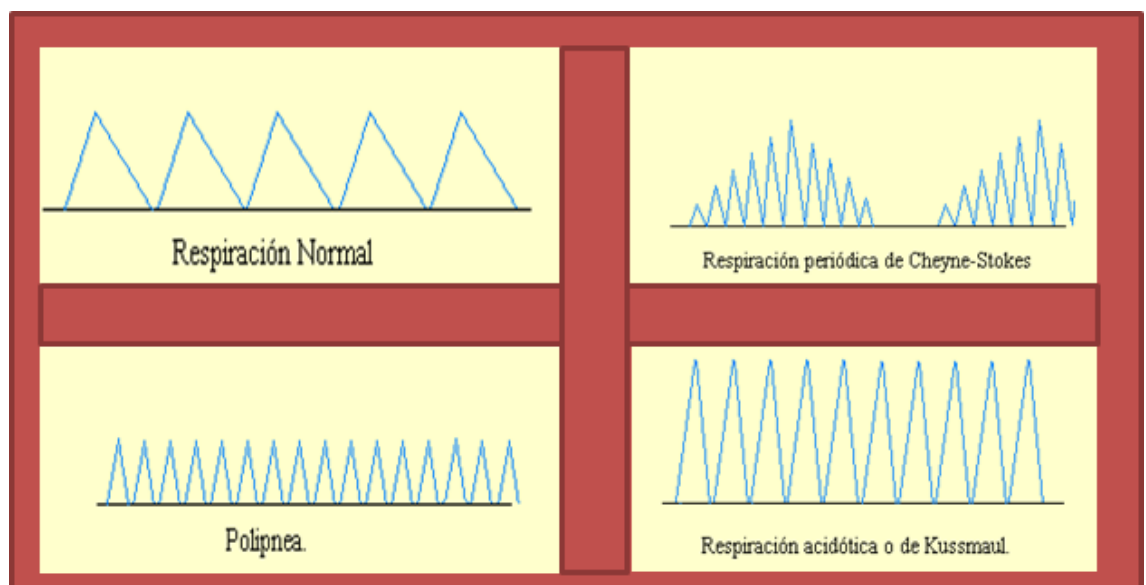


Figura 15. Regímenes de respiración

Para el modelo vamos a suponer que el régimen es de respiración normal. Las funciones periódicas triangulares se representan mediante series de Fourier, pero no es la única posibilidad, se puede optar por trabajar con condicionales ya que, se dispone de la herramienta matlab.

Se establece un volumen mínimo de pulmón y un volumen máximo. El periodo entre pulsos es conocido, por lo que no es un problema. Para afinar más el cálculo se ha dividido cada periodo en dos tramos que no son simétricos, en dos semiperiodos  $t_1$  y  $t_2$ , porque la inspiración corresponde a 4/9 partes y la espiración al resto. Esta es la razón de que se hayan dibujado segmentos verticales, para que se note la asimetría.

$$V_{\text{mínimo}} = 4 \text{ L}$$

$$V_{\text{máximo}} = 10 \text{ L}$$

$$f = 15 \text{ respiraciones/minuto}$$

$$T = 4 \text{ s}$$

$$t_1 = \frac{4}{9} T = 1,778 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{5}{9} T = 2,222 \text{ s}$$

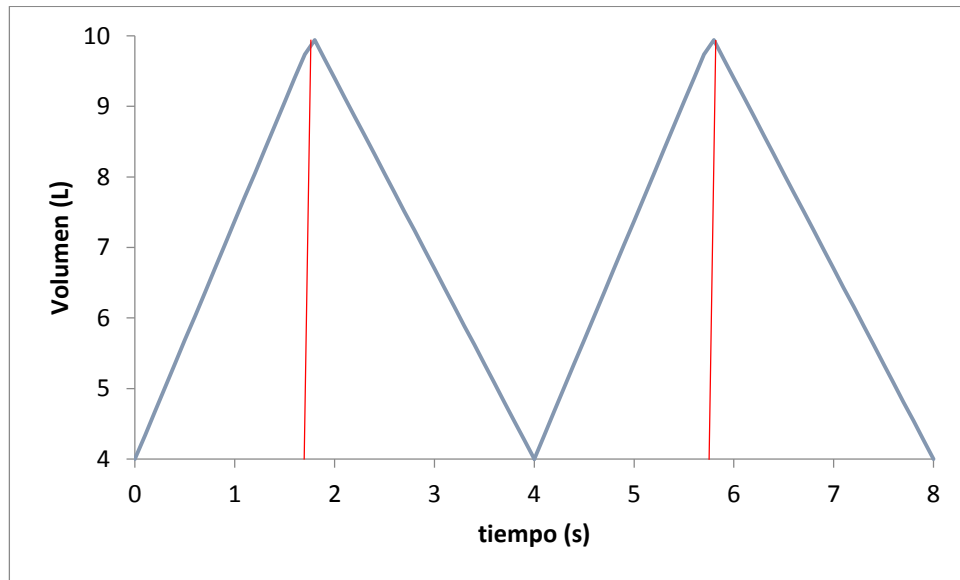


Figura 16. Variación del volumen del pulmón, pulsos triangulares.

El modelo matemático a aplicar es el siguiente:

$$V_{\text{pulmón}} = \begin{cases} m_1 t_{\text{pulso}} + V_{\text{min}} & t_{\text{pulso}} \leq t_1 \quad (a) \\ m_2 (t_{\text{pulso}} - t_1) + V_{\text{máx}} & \text{otro caso} \quad (b) \end{cases}$$

Se ha introducido una variable  $t_{\text{pulso}}$  que tiene un dominio  $[0,4]$ . Como los valores de tiempo tienen asociado un valor de  $t_{\text{pulso}}$  se tiene una representación periódica del



sistema. A continuación, se explica cómo llevar a cabo esta transición en el modelo matemático.

La ecuación (a) representa a los tramos crecientes hasta llegar al máximo. Este periodo crece linealmente con una pendiente  $m_1$  partiendo de un volumen mínimo de pulmón. La ecuación (b) representa los tramos decrecientes, se parte de un volumen máximo y se decrece linealmente con una pendiente  $m_2$  hasta llegar al volumen mínimo. Se resta el semiperiodo 1 porque se puede considerar como una función “retardada”. Con esto se busca que para  $t_{pulso} = t_1$  se tenga la ordenada en el origen correspondiente al volumen máximo.

$$m_1 = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{t_1 - 0} = \frac{10 - 4}{1,777 - 0} = 3,375 \frac{L}{s}$$

$$m_2 = \frac{V_{\min} - V_{\max}}{T - t_1} = \frac{4 - 10}{4 - 1,777} = -2,700 \frac{L}{s}$$

Para obtener  $t_{pulso}$  se utiliza el resto, dado un divisor igual al periodo y los distintos valores de tiempo como dividendo, tratándose de divisiones enteras, se tiene que para tiempos inferiores al periodo se dará un resto de igual valor al tiempo. Y para tiempos superiores al periodo, el resto es igual al tiempo menos el tiempo del periodo multiplicado  $k$  veces, una vez rebasado el periodo. Matemáticamente se expresa:

$$t_{pulso} = t_{mod T} = t - T \left[ \frac{t}{T} \right]_{truncamiento}$$

La función truncamiento toma la parte real del número y desprecia la decimal. Por lo tanto su dominio sólo está comprendido por números naturales.

Recapitulando, se tiene que el dominio de  $t_{pulso}$  está comprendido en el intervalo  $[0, T]$  y a su vez es función del tiempo. Como el volumen del pulmón es función de  $t_{pulso}$  se tienen valores del volumen de pulmón que se repiten a una distancia temporal igual al periodo.

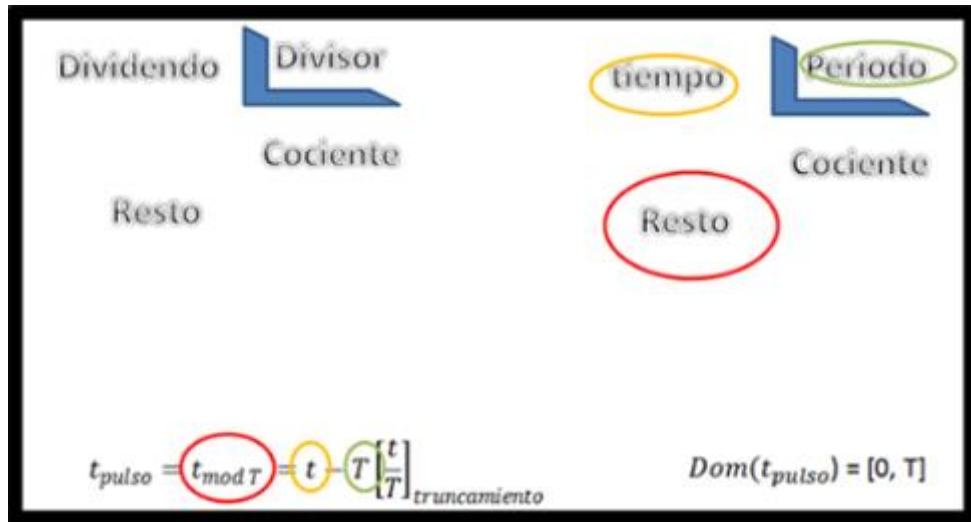
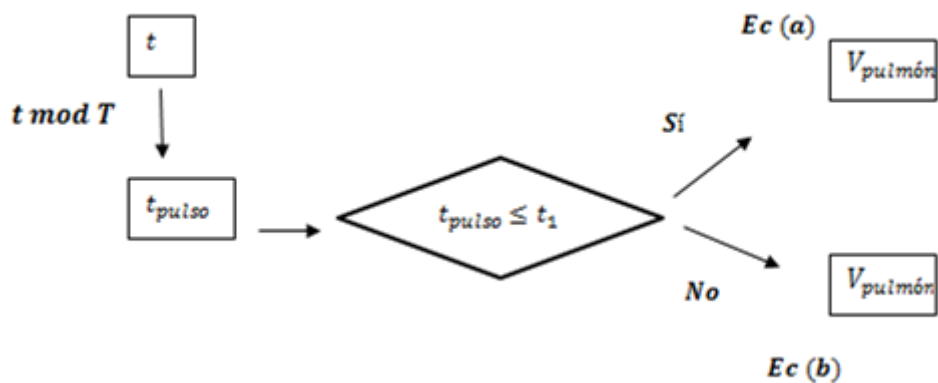


Figura 17. Esquema de conceptos para el cálculo del tiempo de pulso.

El algoritmo de cálculo del volumen del pulmón es el siguiente:



Tras el proceso de cálculo se obtienen los siguientes resultados:

Es evidente que los dos pulsos analizados difieren en la forma tomada. Si comparando ambos pulsos se tiene que inicialmente los modelos difieren (ver Figura 15). Partiendo de cada modelo, las velocidades son elevadas y las pendientes diferentes. Sin embargo, para una misma conversión prevista y conforme la velocidad de consumo de oxígeno

disminuye, es decir, para los últimos tramos de conversión, las velocidades son pequeñas y no se producen fluctuaciones significativas entorno a un valor promedio de ambas funciones. Por lo tanto, se concluye que independientemente del modelo, de los dos estudiados, el tiempo a conversión completa es el mismo.

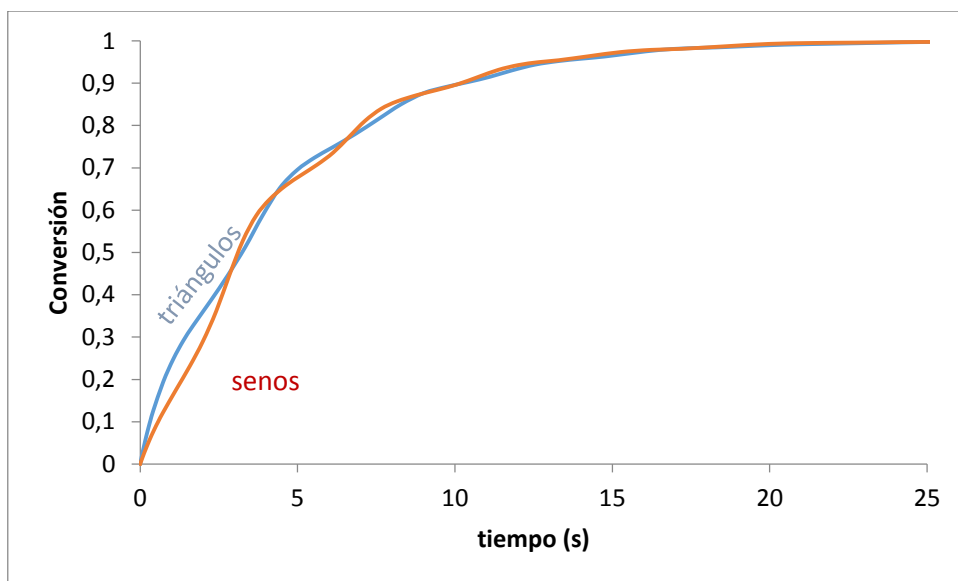


Figura 18. Comparación de ambos pulsos

## 6. Conclusiones.

Del proyecto realizado se pueden extraer una serie de conclusiones:

- La velocidad de reacción marca la velocidad de consumo del oxígeno presente en los pulmones. Esta velocidad depende de muchas variables y se han de tener en cuenta dentro del cálculo.
- Todas las variables analizadas son importantes, ya que si se quiere calcular con precisión cuanto tiempo sobreviviría una persona debajo del agua se tiene que tener en cuenta tanto la situación del escenario (profundidad), como el estado físico de la persona.
- A efectos de consumo de oxígeno una persona deportista con un pulmón grande es equivalente a una persona con eritrocitosis.
- La capacidad adaptativa de cada persona marcará el tiempo que tarda en consumirse el oxígeno en gran medida. De todas las variables analizadas es con la que mayores tiempos de consumo de oxígeno se obtienen. Es evidente que el ser humano presenta unos mecanismos muy avanzados ante situaciones de peligro.
- Realmente, la tasa de consumo necesaria y la velocidad de reacción con la que el oxígeno se enlaza con la hemoglobina, no se ve afectada para circular por los vasos sanguíneos, ya que se tratan de reacciones consecutivas.

1ª Reacción:  $O_2 + Hm \xrightleftharpoons{\quad} (Hm \cdot O_2)$

2ª Reacción:  $Glucosa + 6 O_2 \rightarrow 6 CO_2 + H_2O$

Sí que es cierto que cuando se necesite de un mayor aporte de oxígeno y por lo tanto, de una mayor velocidad de reacción, alguna de las variaciones vistas se deberán de llevar a cabo, como por ejemplo, aumentar el volumen de aire en el pulmón mediante una respiración profunda, mayor frecuencia de respiración, aumento de la hemoglobina, aumento del pulso, etc...

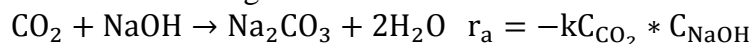
- Realizar el diseño de un pulmón conlleva asumir una gran cantidad de variables, las cuales son muy difícil de modelar. Una forma de modelizar la variación que se produce en el pulmón podría ser la expuesta, mediante funciones asintóticas o triangulares. Ambas dan buenos resultados y describen de manera aproximada a la realidad lo que ocurre.

## 7. Anexo. Problema común clase.

### Enunciado proyecto común grupal.

En los últimos años se está considerando la posibilidad de establecer una colonia permanente en la luna. Uno de los problemas con los que se enfrentaría una instalación de este tipo sería la eliminación del Dióxido de Carbono del aire. El  $CO_2$  no es tóxico a bajas concentraciones (0.04 %) pero a partir de una concentración superior a 10 % puede producir pérdida de conocimiento e incluso la muerte.

A alta presión,  $CO_2$  es adsorbido en una disolución de NaOH en una columna empacitada. La reacción es la siguiente:



Encontrar la velocidad de absorción, la resistencia controlantes y lo que ocurre en la película líquida en un punto de la columna donde  $P_{CO_2} = 10^5 Pa$  y  $C_{NaOH} = 500 mol/m^3$ .

$$k = 10 m^3/(mol \cdot s)$$

$$k_{CO_2}^g = 10^{-7} m^3/(s \cdot m^2 \cdot Pa)$$

$$k_{CO_2}^L = 10^{-4} m^3/(m_{sup}^2 \cdot s)$$

$$a = 200 m_{sup}^2/m_{reactor}^3$$

$$f_L = 0,1 m_L^3/m_{reactor}^3$$

$$D_{CO_2}^L = 1,8 \cdot 10^{-9} m^2/s$$

$$D_{NaOH}^L = 3,06 \cdot 10^{-9} m^2/s$$

$$H_{CO_2} = 25\,000 P_{CO_2} \cdot m^3/mol$$

Atendiendo a la ecuación presentada y resolviendo mediante un método iterativo según se ha explicado en el apartado 4.2 se obtiene el siguiente valor de velocidad de reacción:

$$-r_A = \frac{P_A}{\frac{1}{ak_g} + \frac{H}{ak_LE} + \frac{H}{fkC_B}} = 3,2709 \cdot 10^{-4} \frac{mol}{s \cdot m^3}$$

Además, se obtienen los siguientes valores de resistencias:

$\frac{1}{ak_g} \left( \frac{Pa \cdot m_{react}^3}{mol} \right)$	$\frac{H}{ak_LE} (P_{CO_2} \cdot m^2 \cdot s)$	$\frac{H}{fkC_B} \left( \frac{P_{CO_2} m^3}{mol} \right)$
$5,0 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^4$	50

La resistencia que limita la velocidad de reacción es la difusión a través de la película gas, ya que, es la que más oposición presenta de las tres resistencias y por lo tanto, será la que controle el proceso.

Ahora bien, se plantea además en el proyecto común cual debería de ser la capacidad de la instalación para 100 personas. Suponiendo que una persona produce  $2,3 \cdot 10^{-4} \frac{mol\ CO_2}{s}$  y que en la instalación hay 100 personas, la cantidad de  $CO_2$  que se produce cada segundo es de  $2,3 \cdot 10^{-2} \frac{mol\ CO_2}{s}$ . Un exceso de  $CO_2$  equivaldría al doble de la cantidad producida (lo cual produciría pérdida de conocimiento e incluso la muerte). Esto es  $2,3 \cdot 10^{-2} \frac{mol\ CO_2}{s} \cdot 2 = 4,6 \cdot 10^{-2} \frac{mol\ CO_2}{s}$  y redondeando, hay que eliminar  $5 \cdot 10^{-2} \frac{mol\ CO_2}{s}$ .

$$V_{reactor} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \frac{mol\ CO_2}{s}}{3,2709 \cdot 10^{-4} \frac{mol}{s \cdot m^3}} = 152,8618 m^3 reactor$$

Se requeriría un volumen de  $152,8618 m^3$  para eliminar  $CO_2$  a la velocidad dada. Aunque claro está que siempre que se realizara una instalación de este tipo sería conveniente tener un volumen de reactor en exceso, para asegurarnos de que se cumplen las exigencias.