Model 6 DOF USV

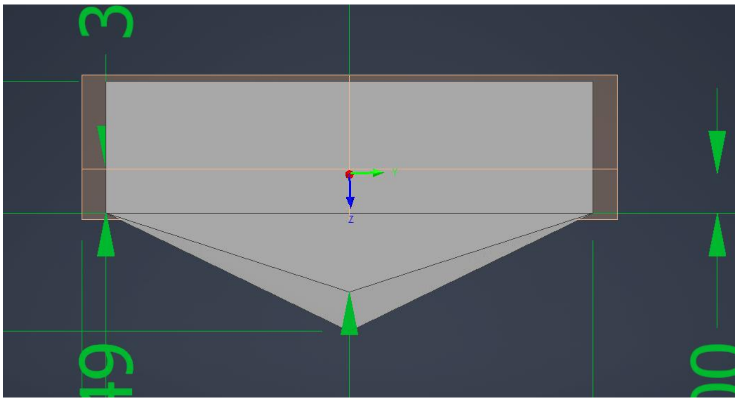
**Disclaimer: Catatan berikut dibuat berdasarkan referensi Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control Second Edition by Thor I. Fossen dengan campuran dari model LSS-01 USV yang sebelumnya telah ada serta dari perhitungan dalam .*

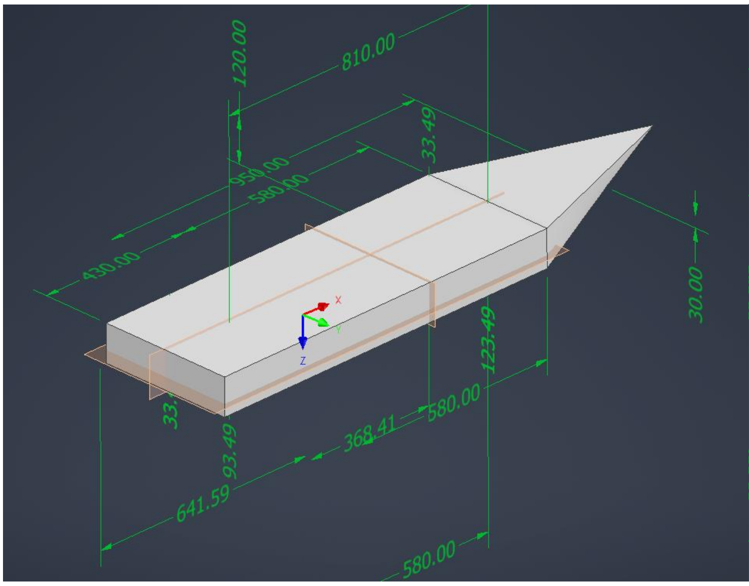
Centroid LSS-01

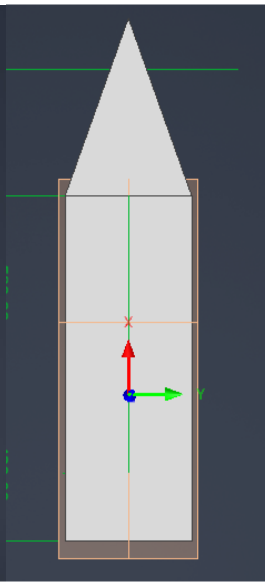
Hasil pengukuran massa USV LSS diperoleh nilai $11.8\,kg$. Bentuk USV LSS-01 disederhanakan bentuknya sehingga terbentuk atas 4 Bagian, yaitu:

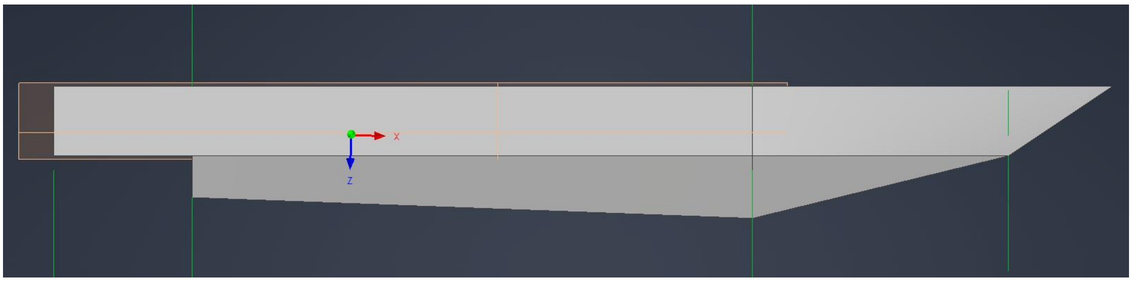
- Kotak
- Prisma segitiga yang tingginya sejajar sumbu z
- Prisma segitiga yang tingginya sejajar sumbu x
- Limas segitiga

Gambar USV yang telah disederhanakan dan diukur panjangnya masing-masing bagian adalah sebagai berikut:









Dengan sumbu (axis XYZ) dalam gambar menunjukkan titik CO. Titik CO ditempatkan di sekitar titik Pixhawk karena pengukuran state dari USV dilakukan oleh Pixhawk dan perhitungan dinamika nantinya akan direpresentasikan terhadap titik tersebut.

Perhitungan CG akan dihitung terhadap CO (sehingga batas – batas integralnya terhadap titik CO) yang dinyatakan dengan $r_{bg} = [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]^T$. Di mana r_{bg} merupakan vektor. Arah vektor positif sumbu xyz ditunjukkan seperti pada sumbu dalam gambar.

Perhitungan untuk masing – masing bagian dilakukan dengan persamaan

$$\bar{x}_i = \frac{\int_V x \, dV_i}{V_i}$$

$$\bar{y}_i = \frac{\int_V y \, dV_i}{V_i}$$

$$\bar{z}_i = \frac{\int_V z \, dV_i}{V_i}$$

Kemudian untuk menghitung centroid dari gabungan bagian – bagian tersebut dilakukan dengan persamaan

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \bar{x}_i V_i}{\sum_{i=1}^{4} V_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \bar{y}_i V_i}{\sum_{i=1}^{4} V_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \bar{z}_i V_i}{\sum_{i=1}^{4} V_i}$$

Dari proses perhitungan tersebut, diperoleh nilai r_{bg} dalam centimeter sebagai berikut:

$$r_{bg} = \begin{bmatrix} 21.1590 \\ 0 \\ -0.3489 \end{bmatrix}$$

Apabila dinyatakan dalam meter menjadi

$$r_{bg} = \begin{bmatrix} 0.2116 \\ 0 \\ -0.0035 \end{bmatrix}$$

Matriks M_{RB}

Matriks M_{RB} merupakan matriks Inertia dari badan USV (Rigid Body). Perhitungan awalnya dilakukan pada titik CG. M_{RB} terhadap CG dinotasikan sebagai M_{RB}^{CG} yang dinyatakan dengan matriks

$$M_{RB}^{CG} = \begin{bmatrix} mI_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_g \end{bmatrix}$$

Di mana I_g merupakan **Inertia Dyadic** yang terdiri atas Moment of Inertia (I_{ii}) dan Product of Inetia (I_{ij}). Inertia Dyadic dapat dituliskan sebagai matriks

$$I_g^{CG} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -\ I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Masing – masing Moment of Inertia dapat dituliskan sebagai

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2)\rho_m \, dV$$

$$I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2)\rho_m \, dV$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2)\rho_m \, dV$$

Masing – masing Product of Inertia dapat dituliskan sebagai

$$I_{xy_i} = \int_{V_i} xy\rho_m \, dV_i = \int_{V_i} yx\rho_m \, dV_i = I_{yx_i}$$

$$I_{xz_i} = \int_{V_i} xz\rho_m \, dV_i = \int_{V_i} zx\rho_m \, dV_i = I_{zx_i}$$

$$I_{yz_i} = \int_{V_i} yz\rho_m \, dV_i = \int_{V} zy\rho_m \, dV_i = I_{zy_i}$$

Pada kapal dengan sifat kesimetrisan Port-Starboard Symmetric (Simetris Sisi kiri dan kanan), maka matriks Inertia Dyadic tersebut akan berbentuk:

$$I_g^{CG} = \begin{bmatrix} I_{xx_{tot}} & 0 & -I_{xz_{tot}} \\ 0 & I_{yy_{tot}} & 0 \\ -I_{zx_{tot}} & 0 & I_{zz_{tot}} \end{bmatrix}$$

Perhitungan I_{xy}, dkk yang menggunakan integral digunakan untuk menghitung inersia untuk masing – masing bagian, sehingga untuk mentotalkan semua bagian dilakukan dengan

$$I_{xx_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} I_{xx_i} \qquad I_{xy_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} I_{xy_i}$$

$$I_{yy_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} I_{yy_i} \qquad I_{xz_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} I_{xz_i}$$

$$I_{zz_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} I_{zz_i} \qquad I_{yz_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} I_{yz_i}$$

Sehingga terbentuk matriks M_{RB}^{CG} dengan nilai sebagai berikut:

$$M_{RB}^{CG} = \begin{bmatrix} 11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1293 & 0 & -0.0104 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4694 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0104 & 0 & 1.5583 \end{bmatrix}$$

Tetapi matriks tersebut harus ditransformasikan dari CG ke CO dengan menggunakan matriks transformasi $H(r_{bg})$ dengan persamaan

$$H(r_{bg}) = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & S^T(r_{bg}) \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix}$$

$S(r_{bg})$ merupakan skew-symmetric matrix terhadap vektor r_{bg} yang dapat dinyatakan dengan:

$$S(r_{bg}) = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{z} & \bar{y} \\ \bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ -\bar{y} & \bar{x} & 0 \end{bmatrix}$$

Transformasi dari M_{RB}^{CG} ke titik CO menghasilkan M_{RB} yang dapat dihitung dengan persamaan:

$$M_{RB} = H^T(r_{bg}) M_{RB}^{CG} H(r_{bg})$$

Sehingga bisa diperoleh hasil

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} 11.8 & 0 & 0 & 0 & -0.0412 & 0 \\ 0 & 11.8 & 0 & 0.0412 & 0 & 2.4968 \\ 0 & 0 & 11.8 & 0 & -2.4968 & 0 \\ 0 & 0.0412 & 0 & 0.1294 & 0 & -0.0017 \\ -0.0412 & 0 & -2.4968 & 0 & 1.9979 & 0 \\ 0 & 2.4968 & 0 & -0.0017 & 0 & 2.0866 \end{bmatrix}$$

Matriks C_{RB}

Perhitungan C_{RB} serupa dengan perhitungan yang dilakukan pada M_{RB} di mana akan dinyatakan terhadap titik CG terlebih dahulu kemudian ditransformasikan ke titik CO. C_{RB} yang dinyatakan dalam CG dapat dituliskan sebagai C_{RB}^{CG} dengan persamaan sebagai berikut:

$$C_{RB}^{CG} = \begin{bmatrix} mS(\nu_2) & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & -S\left(I_g^{CG}\nu_2\right) \end{bmatrix}$$

ν_2 merupakan kecepatan vektor kecepatan angular $\nu_2 = [p \quad q \quad r]^T$. Kemudian untuk transformasinya dilakukan dengan cara yang sama dengan yang dilakukan pada M_{RB}, yaitu:

$$C_{RB} = H^T\left(r_{bg}\right)C_{RB}^{CG}H\left(r_{bg}\right)$$

Untuk mempermudah penulisan, C_{RB} akan dibagi menjadi 4 bagian, yaitu:

$$C_{RB} \coloneqq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -11.8r & 11.8q \\ 11.8r & 0 & -11.8p \\ -11.8q & 11.8p & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} -0.04117r & -2.497q & -2.497r \\ 0 & 2.497p - 0.04117r & 0 \\ 0.04117p & 0.04117q & 2.497p \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 0.04117r & 0 & -0.04117p \\ 2.497q & 0.04117r - 2.497p & -0.04117q \\ 2.497r & 0 & -2.497p \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1.558r - 0.001657p & -1.469q \\ 0.001657p - 1.558r & 0 & -0.399p - 0.001657r \\ 1.469q & 0.399p + 0.001657r & 0 \end{bmatrix}$$

Yang menarik adalah $C_{21} = -C_{12}^T$ dan C_{22} merupakan skew-symmetric matrix.

Matriks M_A