Sommersemester 2023 Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Prof. Thomas Slawig, Niko Schmidt Institut für Informatik

2. Serie
Einführung in nichtlineare Optimierung

Programmieraufgaben können in einer Programmiersprache Ihrer Wahl bearbeitet werden, wenn keine Programmiersprache vorgegeben ist.
Die Programmieraufgaben auf diesem Zettel sollen das Verständnis für den Gradienten verbessern.

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und den Gradienten von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2} + y.$$

Geben Sie weiter die Richtungsableitungen in die Richtungen $a := (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ *und* $b := (3/5, 4/5)^T$ *an.*

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *eine stetig differenzierbare Funktion. Programmieren Sie eine Funktion, die als Parameter den Punkt* $x \in \mathbb{R}^n$, *den Funktionswert* $f(x)$, *die Ableitung* $f'(x)$ *und einen Punkt* $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *nimmt. Approximieren Sie* $f(\tilde{x})$ *mit der in der Vorlesung diskutierten Tangentialnäherung. Vergleichen Sie die Approximation mit der Funktionsauswertung* $f(\tilde{x})$ *für verschiedene Funktionen* f *und Punkte* $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *mit verschiedenen Abständen* $\|x - \tilde{x}\|_2$.

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe)
Programmieren Sie eine Funktion, die eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und einen Punkt* $x \in \mathbb{R}^n$ *als Parameter entgegen nimmt und den Gradienten berechnet. Vergleichen Sie mit der analytischen Berechnung der Ableitung.*

Aufgabe 4 (Schriftliche Aufgabe)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ *nicht stetig ist.*

Aufgabe 5 (Schriftliche Aufgabe)
Setze $\Omega := [0, 3]^3$. *Formulieren Sie folgendes Problem als Optimierungsproblem in Standardform:*

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Omega} & (x_1 - x_2 + x_3)^2 \mathrm{e}^{x_1 + x_2 - x_3} \\ \text{mit } & x_1^2 + x_2 = 7, \\ & \mathrm{e}^{x_1} + 1 \geq 3 \end{aligned}$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis: 27.04.2023 bis 16:15 Uhr zu Beginn der Vorlesung oder im *OLAT*.