

5. Serie

Einführung in nichtlineare Optimierung

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe und schriftliche Aufgabe)

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^p$$

für $p > 2$. Sei $(x_k)_k$ die durch das Newton-Verfahren erzeugte Folge von Iterierten mit $x_0 > 0$. Es gelte weiter $\alpha_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

- Es gelte $x_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $d_k = -\frac{1}{p-1}x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter sind die Newton-Richtungen gradientenbezogen.
- Es gilt $x_k > x_{k+1} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
- Die Folge $(\alpha_k)_k$ ist eine Folge effizienter Schrittweiten.
- Die Folge $(x_k)_k$ konvergiert linear aber nicht quadratisch zum Minimum von f .

Hinweis: Bei b) kann ein Induktionsbeweis helfen.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe: Skalierungsproblem Teil 2)

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

- Implementieren Sie das Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweite. Testen Sie dieses Verfahren mit der Rosenbrock-Funktion. Bestimmen Sie die notwendigen Ableitungen mit Finiten Differenzen.
- Installieren Sie die Python-Bibliothek JAX, <https://github.com/google/jax>. Diese Bibliothek nutzt automatisches Differenzieren zur Bestimmung des Gradienten. (Sollten Sie eine andere Programmiersprache verwenden, können Sie auch in dieser eine Bibliothek für das automatische Differenzieren verwenden.)
- Vergleichen Sie die beiden Abstiegsverfahren „Newton-Verfahren“ und „Gradientenverfahren“ mit den beiden Varianten für Ableitungen „Finite Differenzen“ und „automatisches Differenzieren“. Welche Verfahren sind bei welcher Skalierung der Rosenbrock-Funktion besonders geeignet, das Minimum zu bestimmen?

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe: Methode der kleinsten Quadrate)

Gegeben sind die Dateien `x_values.txt` und `y_values.txt`. Sie sollen $a, b \in \mathbb{R}$ so finden, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |ax_k + b - y_k|^2$$

minimiert wird. Hierbei sind die x_k in der Datei `x_values` und die y_k in der Datei `y_values`. Nutzen Sie das schon implementierte Gradientenverfahren, um a und b zu bestimmen. Beachten Sie, dass die Dateien `x_values.txt` und `y_values.txt` fehlerhafte Werte haben. Diese sind als `nan` gekennzeichnet. Sortieren Sie diese aus, bevor Sie die Ausgleichsgerade bestimmen. Visualisieren Sie die Daten x und y sowie die gefundene Ausgleichsgerade.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis: 19.05.2023 bis 8:00 Uhr im OLAT. (Am 18.05.2023 ist ein Feiertag.)