

4. Serie

Einführung in nichtlineare Optimierung

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe: Bedeutung der Schrittweite)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2.$$

Setze den Startpunkt $x_0 := 2.5$, die Schrittweite $\alpha_k := (1/2)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und die Suchrichtung $d_k := d := -1$. Es sei $(x_k)_k$ die durch das Abstiegsverfahren erzeugte Folge.

- a) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_k)_k$ nicht gegen das Minimum von f konvergiert.
- b) Die Suchrichtung sei nun gegeben als $d_k := -f'(x_k)$. Zeigen Sie, dass weiterhin die Folge $(x_k)_k$ nicht gegen das Minimum von f konvergiert.
- c) Zeigen Sie, dass die Suchrichtungen $(d_k)_k$ sowohl für $d_k := -1$ als auch $d_k := -f'(x_k)$ Abstiegsrichtungen sind.

Hinweis: Bei Aufgabe b) kann die Rechnung aus a) hilfreich sein.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe: Skalierungsproblem)

Sei die Rosenbrock-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$$

gegeben. Wir definieren weiter für $\alpha > 0$ die skalierte Rosenbrock-Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x_1, x_2) = f(\alpha x_1, x_2/\alpha).$$

Implementieren Sie das Gradientenverfahren mit der Armijo-Schrittweitensteuerung. Berechnen Sie dafür den Gradienten approximativ, z.B. wie in Serie 2 Aufgabe 3.

Testen Sie Ihre Implementierung zuerst an der Rosenbrock-Funktion. Was passiert, wenn Sie $\alpha > 0$ klein wählen? Kann Konvergenz zum Minimum weiter erreicht werden?

Hinweis: Diese Aufgabe beinhaltet neben der Programmierung auch Interpretation und ggf. Gedanken zur Verbesserung des implementierten Algorithmus. Sie ist deswegen für zwei Wochen gedacht.

Aufgabe 3 (Schriftliche Aufgabe)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4.$$

Setze $x_0 := 3/2$. Berechnen Sie für das Gradientenverfahren mit

- a) der Armijo-Schrittweite mit $\nu := 1/4$
- b) der exakten Schrittweite

die nächste Iterierte. Leiten Sie die Formeln für die Armijo-Regel angewendet auf das konkrete Beispiel her. Bestimmen Sie aber den konkreten Wert für die Schrittweite α bei der Armijo-Regel mit einem Taschenrechner oder anderem Tool und nicht per Hand. Vergleichen Sie weiter beide Schrittweitensteuerungen an diesem Beispiel. Welche Vor- und Nachteile haben beide Verfahren im Vergleich?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis: 11.05.2023 bis 16:15 Uhr zu Beginn der Vorlesung oder im OLAT.