

Jméno:

Místnost:

Souřadnice:

0007

list

1

učo

485641

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

19486

Řešení

$$\neg \{ \neg \{ G \wedge \neg [ (\neg D \Rightarrow \neg \{ \neg F \wedge F \} \Leftrightarrow \neg E \wedge \neg (F \vee \neg F)) ] \} \vee \neg B \} \Rightarrow \{ \neg [ H \Leftrightarrow (\neg F \vee A) ] \Rightarrow \neg [ (\neg E \Leftrightarrow \neg \{ \neg F \vee \neg C \}) \wedge \neg (\neg D \vee \neg \{ \neg H \wedge \neg F \}) ] \} \}$$

Keďže je zadanie vyslovené formou ekvivalencie, je potrebné dokazovať dva smery implikácie.

### 1.) Z ľavej strany k pravej:

Formula je vyhodnotená ako pravdivá práve vtedy, ak sú všetky premenné z P pravda a všetky premenné z N nepravda. Predpokladám, že celá formula je pravdivá. Výroková formula vyjadrená pomocou implikácie  $A \Rightarrow B$  musí vždy nadobúdať pravdivostnú hodnotu 0 - nepravda, keďže je vyjadrená formou negácie implikácie. Rozdelíme si celú formulu na dve časti:

$$A = \neg \{ G \wedge \neg [ (\neg D \Rightarrow \neg \{ \neg F \wedge F \} \Leftrightarrow \neg E \wedge \neg (F \vee \neg F)) ] \} \vee \neg B \} = 1 \quad B = \neg [ H \Leftrightarrow (\neg F \vee A) ] \Rightarrow \neg [ (\neg E \Leftrightarrow \neg \{ \neg F \vee \neg C \}) \wedge \neg (\neg D \vee \neg \{ \neg H \wedge \neg F \}) ] = 0$$

Keďže časť formuly  $A = \neg \{ \neg F \wedge F \} \Leftrightarrow \neg E \wedge \neg (F \vee \neg F)$  je pre ľubovoľné hodnoty F a E vždy kontradikcia, môžeme celú formulu A zapísať formou:  $\neg \{ G \wedge \neg [ (\neg D \Rightarrow 0) \vee \neg B ] \} = 1$  Následne môžeme na danú formulu použiť De Morganové pravidlá  $A: \neg G \vee [ (\neg D \Rightarrow 0) \vee \neg B ] = 1$

Na formulu B aplikujem taktiež De Morganové pravidlá a urobím ekvivalentné úpravy danej formuly.

$$B = \neg [ H \Leftrightarrow (\neg F \vee A) ] \Rightarrow \neg [ (\neg E \Leftrightarrow \neg \{ \neg F \vee \neg C \}) \wedge \neg (\neg D \vee \neg \{ \neg H \wedge \neg F \}) ] \Leftrightarrow \neg [ H \Leftrightarrow (\neg F \vee A) ] \Rightarrow \neg [ (\neg E \Leftrightarrow \{ F \wedge C \}) \wedge ( D \wedge \{ \neg H \wedge \neg F \}) ] = 0$$

Z toho vyplýva, že  $\neg [ H \Leftrightarrow (\neg F \vee A) ]$  musí byť = 1,  $\neg [ (\neg E \Leftrightarrow \{ F \wedge C \}) \wedge ( D \wedge \{ \neg H \wedge \neg F \}) ]$  musí byť = 0

$\neg [ (\neg E \Leftrightarrow \{ F \wedge C \}) \wedge ( D \wedge \{ \neg H \wedge \neg F \}) ] = 0$  sa dá zjednodušiť pomocou De Morganových pravidiel:

$$\neg [ (\neg E \Leftrightarrow \{ F \wedge C \}) \wedge ( D \wedge \{ \neg H \wedge \neg F \}) ] \Leftrightarrow \neg ( \neg E \Leftrightarrow \{ F \wedge C \} ) \vee \neg ( D \wedge \{ \neg H \wedge \neg F \} ) \Leftrightarrow [ (E \wedge \{ F \wedge C \}) \vee ( \neg E \wedge \neg \{ F \wedge C \} ) ] \vee ( \neg D \vee \{ H \vee F \} ) = 0$$

Z upravenej formuly vidím, že  $H$  a  $F =$  vždy 0, taktiež  $D = 1$ , inak by celá formula bola pravdivá.

Z formuly  $[ (E \wedge \{ 0 \wedge C \}) \vee ( \neg E \wedge \neg \{ 0 \wedge C \} ) ] = 0$  vidím, že C môže mať ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu a  $E = 1$

Keďže už poznám pravdivostné hodnoty H, F, D, E, môžeme ich dosadiť do prvej časti výroku B:

$$\neg [ H \Leftrightarrow (\neg F \vee A) ] = 1 \text{ po dosadení hodnôt } H, F \quad \neg [ 0 \Leftrightarrow (1 \vee A) ] = 1 \text{ vidím, že } A \text{ môže mať ľubovoľnú pravd. hodnotu.}$$

Zistené pravdivostné hodnoty z formuly B môžeme dosadiť do formuly A a dopočítať zvyšné hodnoty.

$$\neg G \vee [ (\neg D \Rightarrow 0) \vee \neg B ] = 1 \Leftrightarrow \neg G \vee [ (0 \Rightarrow 0) \vee \neg B ] = 1 \quad \text{Formula A bude pre ľubovoľné hodnoty G, B vždy pravda.}$$

Týmto som zistil, že  $P = \{D, E\}$ ,  $N = \{F, H\}$  a pravdivostné hodnoty A, B, C, G môžu byť ľubovoľné.

### 2.) Z pravej strany k ľavej:

Ak sú všetky premenné z P pravda a zároveň všetky premenné z N nepravda, tak je formula vyhodnotená ako pravdivá. Toto tvrdenie môžeme dokázať priamim dôkazom, pričom predpoklad sú množiny

$$P = \{D, E\}, N = \{F, H\}$$

$$\begin{aligned} & \neg \{ \neg \{ G \wedge \neg [ (0 \Rightarrow \neg \{ 1 \wedge 0 \} \Leftrightarrow [ 0 \wedge \neg (0 \vee 1) ]) ] \} \vee \neg B \} \Rightarrow \{ \neg [ 0 \Leftrightarrow (1 \vee A) ] \Rightarrow \neg [ (0 \Leftrightarrow \neg \{ 1 \vee \neg C \}) \wedge \neg (0 \vee \neg \{ 1 \wedge 1 \}) ] \} \} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg \{ \neg \{ G \wedge \neg [ (0 \Rightarrow \neg \{ 0 \Leftrightarrow 0 \} ) \vee \neg B ] \} \Rightarrow \{ \neg [ 0 \Leftrightarrow 1 ] \Rightarrow \neg [ (0 \Leftrightarrow \neg \{ 1 \}) \wedge \neg (0 \vee \neg \{ 1 \}) ] \} \} \} \Leftrightarrow \neg \{ \neg \{ G \wedge \neg [ (0 \Rightarrow \neg \{ 1 \}) \vee \neg B ] \} \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow \neg \{ (1 \wedge \neg (0)) \} \} \} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg \{ \neg \{ G \wedge \neg [ 1 \vee \neg B ] \} \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow \neg \{ 1 \} \} \} \Leftrightarrow \neg \{ \neg \{ 0 \} \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow 0 \} \} \Leftrightarrow \neg \{ 1 \Rightarrow 0 \} = 1 \end{aligned}$$

$$\phi = 1 \quad \text{Q.E.D.}$$