3 Práctica Tercera: Resolución de ecuaciones

3.1 Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones

D5W es capaz de resolver gran número de ecuaciones en forma exacta, es decir, proporcionando soluciones racionales e irracionales obtenidas de forma analítica por métodos directos como, por ejemplo, las soluciones de una ecuación de segundo grado. No obstante, en multitud de ocasiones no se conoce la manera de hallar todas las soluciones de una ecuación y es preciso recurrir a métodos numéricos de aproximación. En esta práctica te introduciremos en el uso de D5W para obtener esas soluciones exactas o aproximadas.

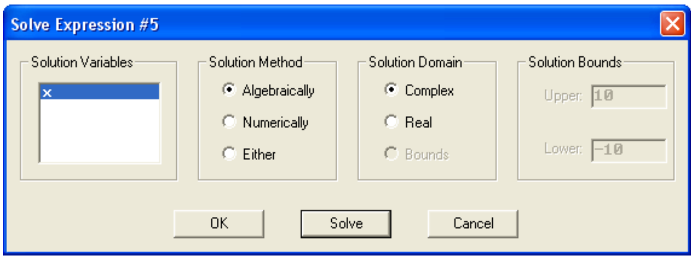
Función Solve. Como primer ejemplo, podemos plantear la obtención de los puntos en los que la función racional, definida en la práctica segunda,

$$\mathtt{f}(\mathtt{x}) := \frac{3\mathtt{x}^3 - \mathtt{x}^2 - 6\mathtt{x} + 3}{\mathtt{x}^2 + \mathtt{x} - 1}$$

poseía tres raíces reales (represéntala gráficamente). Para obtenerlas de manera exacta necesitas introducir[1] la ecuación correspondiente

$$\mathtt{f}(\mathtt{x}) = 0$$

y usar la secuencia Solve:Expression (o), que buscará sus soluciones. El cuadro de diálogo que aparecerá muestra diferentes opciones. Si seleccionamos Algebraically (en Solution Method) buscaremos las soluciones[2] en modo exacto.



Pulsando Solve en la ventana de álgebra aparecerán las tres soluciones buscadas separadas por el conector lógico $\vee$ cuyos valores aproximados son (sombrea las raíces y pulsa)

$$\mathtt{x} = 0.5268596144 \vee \mathtt{x} = -1.477850365 \vee \mathtt{x} = 1.284324084.$$

aproximaciones que obviamente mejoran las estimaciones halladas gráficamente.

Observa que las raíces del polinomio $x^2 + x - 1$ son las asíntotas verticales de la función $f(x)$, o lo que es lo mismo, los puntos en los que la función racional $y = f(x)$

[1] Bastaría, en realidad, igualar a cero el numerador de $f(x)$ para encontrar sus raíces.

[2] En Solution Variables se indica la incógnita respecto de la cual resuelves —x en nuestro caso— que D5W ha detectado automáticamente. Si en este cuadro no hay variables, o hay más de una, revisa si la ecuación iluminada es la que quieres resolver.

tiende a infinito. Para obtener estos puntos, de manera exacta, editamos y sombreamos la expresión $x^2 + x - 1$, y aplicamos, de nuevo, la secuencia Solve:Expression (o), que buscará sus soluciones. Si seleccionamos, como antes, en el cuadro de diálogo, Algebraically (en Solution Method), buscaremos las soluciones en modo exacto. Pulsando Solve en la ventana de álgebra aparecerán las dos soluciones buscadas separadas por el conector lógico $\vee$

$$\mathtt{x} = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \quad \vee \quad \mathtt{x} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

Represéntalas gráficamente junto con la función $f(x)$.

Las inecuaciones se plantean en D5W exactamente igual que las ecuaciones pero utilizando el signo ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) correspondiente. Por ejemplo, para averiguar en qué regiones el gráfico de $y = f(x)$ se halla por debajo de la recta $y = 3x$, basta utilizar la secuencia Solve:Expression escribiendo

$$\mathtt{f(x)} < \mathtt{3x}$$

y el programa te proporciona la solución

$$-\frac{\sqrt{57}}{8} - \frac{3}{8} < \mathtt{x} < \frac{\sqrt{57}}{8} - \frac{3}{8} \ \vee \ \mathtt{x} < -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \ \vee \ \mathtt{x} > \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

que, aproximada, será

$$\mathtt{x} < -1.6180339 \ \vee \ -1.3187293 < \mathtt{x} < 0.56872930 \ \vee \ \mathtt{x} > 0.61803398\ .$$

Así pues, $f(x)$ se halla por debajo de $3x$ entre los puntos de intersección entre ambas, $x = -\frac{\sqrt{57}}{8} - \frac{3}{8}$ y $x = \frac{\sqrt{57}}{8} - \frac{3}{8}$, a la izquierda de su asíntota $x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ y a la derecha de su asíntota $x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$. Podemos comprobarlo a través de un gráfico adecuado[3].

Aproximación de soluciones. Si escribimos la ecuación

$$x^5 - x + 1$$

y, una vez iluminada, aplicamos Solve:Expression. El programa devuelve la línea

$$x^5 - x = -1$$

que es la misma ecuación pero escrita de otra forma y no nos proporciona las soluciones explícitas, ¡simplemente porque no las encuentra! Esto es natural al tratarse de una ecuación polinómica de quinto grado, para la que no existe fórmula general de resolución. Si nos basta con una solución aproximada, debemos realizar lo siguiente: iluminamos la ecuación (cualquiera de las dos), pulsamos Solve y en Solution Method seleccionamos Numerically, al pulsar Solve obtendremos la aproximación de las 5 soluciones, 4 de ellas complejas y una real.

[3]Superponiendo la gráfica de la recta $y = 3x$ sobre la de $y = f(x)$ y analizando el resultado.

Con otras ecuaciones la resolución numérica puede parecer menos efectiva. Por ejemplo, si iluminamos $f(x)$ y le pedimos las soluciones numéricamente, sólo nos proporciona la mayor de las soluciones,

$$x = 1.284324079$$

Para obtener las otras debemos modificar el intervalo para la búsqueda, es decir, indicarle por qué zona queremos que busque soluciones. Para ello podemos observar la gráfica de la función y observar que una solución es negativa y otra, positiva, es menor que 1. Así, iluminando $f(x)$ y pulsando Solve, Numerically, Bounds, en la lista Solution Bounds, indicamos cotas Upper : 0 y Lower : -2 para la primera solución y Upper : 1 y Lower : 0 para la segunda. Y las soluciones son correctas.

Como resumen de lo visto hasta aquí diremos que la secuencia Solve:Expression resuelve una ecuación en forma exacta si seleccionas Algebraically —aunque luego es posible aproximar su solución o soluciones— utilizando métodos algebraicos. Si seleccionas Numerically la resuelve mediante métodos aproximados —aun cuando sea capaz de hacerlo en forma exacta— aplicados en el intervalo que indiquen los valores de Solution Bounds. El uso de esta opción suele limitarse, lógicamente, a los casos en los que D5W no encuentra soluciones exactas o tarda mucho en hallarlas.

3.2 Derivación. Localización de máximos y mínimos

La recta tangente en el punto (x_0, y_0) a la gráfica de la función $f\,(x)$ satisface la ecuación

$$y - y_0 = f'\,(x_0)\,(x - x_0)$$

y puede obtenerse con D5W simplificando la expresión `TANGENT(f(x),x,x0)`.

La posición de la recta tangente nos permite, por ejemplo, localizar los puntos correspondientes a máximos y mínimos relativos de $f\,(x)$. Dado que en estos puntos la recta tangente es horizontal, todos ellos satisfacen la ecuación

$$f'\,(x) = 0$$

Como ejemplo, consideramos $f\,(x) = x^3 - 3x - 3$.

Los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ deben satisfacer la ecuación $f'\,(x) = 0$

$$f'\,(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\ -1\ ,\ 1\ \}$$

y por tanto deben estar situados en los puntos

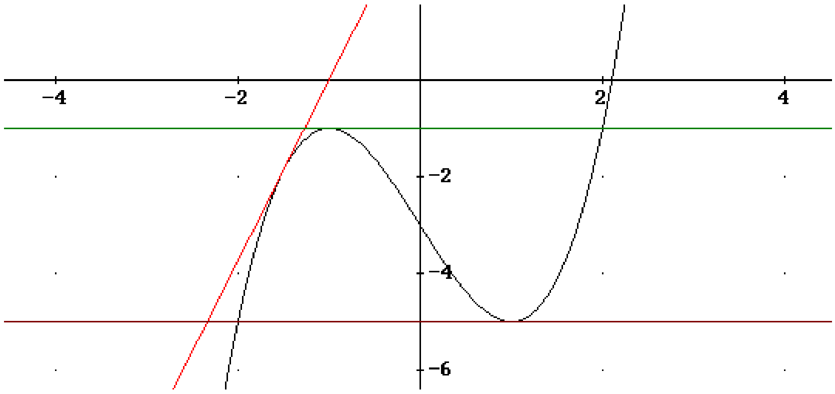
$$(-1, f\,(-1)) = (-1, -1) \quad \text{y} \quad (1, f\,(1)) = (1, -5)$$

Resulta sencillo comprobar que en $(-1, -1)$ hay un máximo y en $(1, -5)$ un mínimo.

Por otro lado, simplificando `TANGENT(x^3-3x-3,x,-3/2)`, obtenemos la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right)$

$$y = \frac{15}{4}\,(x + 1)$$

La gráfica siguiente muestra la función y las tres rectas tangentes que hemos citado



Recuerda, por tanto, que los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ deben satisfacer la ecuación $f'(x) = 0$, ya que en estos puntos la recta tangente es horizontal. En general, se pueden encontrar algunas propiedades geométricas de las funciones analizando su derivada. Recuerda los siguientes resultados teóricos:

Crecimiento y decrecimiento

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo $I \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en I

Si $f'(x) < 0$ en un intervalo $I \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en I

Cálculo de extremos relativos

Si f es derivable y alcanza un extremo relativo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Por tanto, los posibles extremos relativos de una función se hallan resolviendo la ecuación[4] $f'(x) = 0$. Una vez calculados estos valores, para determinar si se trata de un máximo o un mínimo, hay que tener en cuenta que en un mínimo relativo la curva es cóncava y en un máximo relativo la curva es convexa, es decir,

Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, tenemos un mínimo en x_0

Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, tenemos un máximo en x_0.

Como aplicación del cálculo de derivadas podemos determinar las coordenadas de puntos donde la función del apartado anterior,

$$f(x) := \frac{3x^3 - x^2 - 6x + 3}{x^2 + x - 1}$$

alcanza el máximo y el mínimo relativo que se apreciaba en la gráfica. Puesto que buscamos soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, para obtener la abscisa de estos puntos

[4]No siempre $f'(x) = 0$ implica la existencia de un extremo relativo

bastará con aplicar la secuencia Solve:Expression a la derivada que previamente podemos calcular aplicando la secuencia Calculus:Differentiate. De las dos[5] soluciones reales que obtengamos

$$\mathtt{x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \mathtt{x} \approx -2.2405875$$

resulta evidente que $x = -1$ es la que corresponde[6] al mínimo relativo y la otra al máximo relativo. El mínimo relativo se alcanza pues en el punto de coordenadas $(-1, f(-1)) = (-1, -5)$, ¿en qué punto de coordenadas se alcanza el máximo relativo?

Por último, puedes hallar los intervalos de crecimiento de esta función, aplicando la secuencia Solve:Expression a

$$\mathtt{f}'(\mathtt{x}) > 0$$

y obtendrás (después de aproximar la expresión)

$$\mathtt{x} < \mathtt{-2.2405875} \quad \vee \quad \mathtt{x} > \mathtt{-1}$$

Compruébalo observando la gráfica.

[5] $f'(x) = 0$ tiene cuatro soluciones pero las dos complejas no tienen interpretación gráfica.

[6] La prueba analítica de tal hecho es que $f'(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) > 0$.