Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessió 2: Successions gràfiques i tipus de grafs

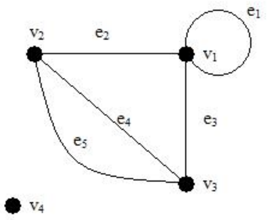
1. **Graus (II)**
2. Successions gràfiques
3. Tipus de grafs

Grau d'un vèrtex

Recorda:

Definició

El **grau** d'un vèrtex v, denotat per $\deg(v)$, és el nombre d'arestes que incideixen en ell (comptant-les dues vegades quan són bucles).



En este graf:

- $\deg(v_1) = 4$
- $\deg(v_2) = 3$
- $\deg(v_3) = 3$
- $\deg(v_4) = 0.$

Fórmula dels graus

Propiedad

Si $G = (V, A, f)$ és un graf, aleshores:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot \text{nombre d'arestes},$$

és a dir, en qualsevol graf, **la suma dels graus de tots els vèrtexs és igual al doble del nombre d'arestes**.

Conseqüències immediates:

- La suma dels graus dels vèrtexs d'un graf és un nombre parell.

- Tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

Successions gràfiques

Definició

Una successió finita d'enters no negatius es diu que és una **successió gràfica** si existeix un graf (no dirigit) simple i sense bucles tal que la successió és exactament la llista dels graus dels seus vèrtexs.

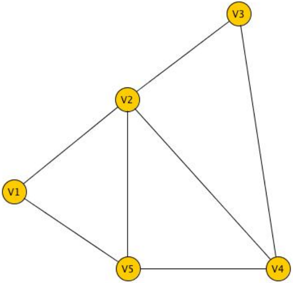
Exemple

Són successions gràfiques les següents successions?

1. $(4,3,3,2,2)$
2. $(3,3,3,2,2)$
3. $(6,3,3,2,2)$

Successions gràfiques

1. $(4, 3, 3, 2, 2)$ Sí:



2. $(3, 3, 3, 2, 2)$ No. La suma dels valors no és un nombre parell.
3. $(6, 3, 3, 2, 2)$ No. No podem tindre un vèrtex de grau 6 si només tenim 5 vèrtexs (no es permeten bucles ni arestes múltiples!).

Successions gràfiques

Teorema de Hakimi

Una successió decreixent de enters no negatius

$$(s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

és una successió gràfica si i només si

$$(t_1 - 1, t_2 - 1, \ldots, t_s - 1, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

també és una successió gràfica.

Successions gràfiques

Algorisme per determinar si una successió decreixent d'enters no negatius és o no una successió gràfica:

Algorisme de Hakimi

1. Comenceu amb una successió decreixent d'enters no negatius

$$(s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

   i un graf nul (sense arestes) amb tants vèrtexs com nombres hi ha en la successió.

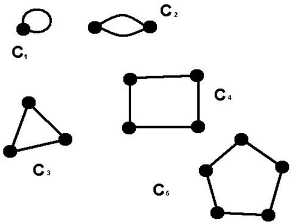
2. Elimina el major valor de la successió (a l'esquerra), s, i resta 1 als s valors següents de la successió. Si la successió obtinguda té algun enter negatiu, aleshores la successió inicial no és gràfica. En cas contrari, aneu al pas següent.

3. Connecteu amb arestes el vèrtex associat amb s amb els vèrtexs associats amb $t_1, t_2, \ldots, t_s$.

4. Si la llista obtinguda només té zeros, FI (hem obtingut el graf desitjat). En cas contrari, si **no és** decreixent aleshores reordeneu-la (**aneu en compte en no barrejar els noms dels vèrtexs!**) i torneu al pas 2.

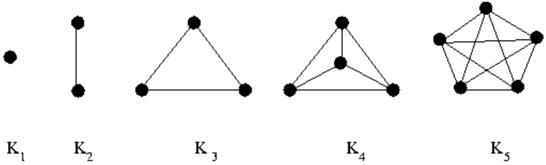
Tipus de grafs

- Recorda: un **graf** es **simple** si no té arestes múltiples.
- Un **graf** és **nul** si no té arestes.
- El **graf trivial** és el que consta d'un únic vèrtex aïllat.
- Un **graf** es **regular** si tots els seus vèrtexs tenen el mateix grau. Si este grau comú és k aleshores es diu que el graf és ***k*-regular**. Per exemple, els següents grafs són 2-regulars:



Tipus de grafs

- Un **graf** és **complet** si cada vèrtex és adjacent a tots els altres (és a dir, qualsevol parell de vèrtex estan units per una aresta).
- Denotarem per $\mathbf{K_n}$ al graf complet, simple i sense bucles de n vèrtexs:



Estos grafs també es coneixen com a *grafs complets de Kuratowsky*.

Tipus de grafs

- Un **graf** $G = (V, A, f)$ és **bipartit** si el conjunt de vèrtexs V es pot dividir en dos subconjunts V_1 i V_2 que no tenen elements en comú, de manera que cada aresta del graf uneix un vèrtex de V_1 amb un altre de V_2.
- Anomenarem **bipartit complet $\mathbf{K_{n,m}}$** al graf simple i bipartit en el qual V_1 té n vèrtexs, V_2 té m vèrtexs, i cada vèrtex de V_1 és adjacent a tots els vèrtexs de V_2.