Prácticas de Matemática Discreta.
Teoría de Grafos
2011/12
UNIDAD 1

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

24 de abril de 2012

Índice

Índice de figuras

1. Introducción

Actualmente, la Teoría de Grafos es una de las ramas más populares de las Matemáticas y la Informática. Una de las razones importantes de su interés es su aplicabilidad a la resolución de problemas complejos de la sociedad moderna en campos tan diversos como economía, marketing, transmisión de información, planes de transporte, análisis de redes, etc.

Muchos de estos problemas se pueden modelar mediante grafos o redes. La Teoría de Grafos se aplica la mayoría de las veces de forma más sencilla que utilizando otras técnicas, tanto como herramienta en la formulación de problemas y en la definición de estructuras como en el desarrollo de métodos de resolución para estos problemas. La formulación de problemas usando la expresividad de la Teoría de Grafos proporciona una visión global de los mismos y, por tanto, facilita su comprensión. De esta forma, se puede abordar la búsqueda de la solución óptima al problema con mayores garantías de éxito.

Un grafo es esencialmente cualquier cosa que se pueda representar mediante un conjunto de puntos, vértices, y un conjunto de lineas, arcos o aristas, que unan algunos de esos puntos. Las líneas que unen los vértices pueden tener dirección, o funcionar en ambos sentidos, en el primer caso les llamaremos arcos, en el segundo aristas.

En algunos casos se puede asociar una cantidad a las aristas del grafo, lo que abre un conjunto nuevo de perspectivas de aplicación de la teoría de Grafos a nuevos tipos de problemas, algebraicos, optimización lineal, flujos, etc.

En cualquier caso, los grafos se convierten en una poderosa herramienta a la hora de formular, modelizar y resolver un amplio abanico de problemas discretos.

1.1. Grafos: vértices y aristas

Informalmente, un grafo es un conjunto de vértices y otro de aristas que unen estos vértices. Según que las aristas sean orientadas o no lo sean, distinguiremos dos tipos de grafos: dirigidos y no dirigidos.

1.1.1. Grafos no dirigidos

Definición 1.1 (Grafo (no dirigido)) *Un* grafo $G = (V(G), A(G), \psi)$[1] *es un triple ordenado de*

(a) Un conjunto finito y no vacío, $V(G)$*,*

(b) un conjunto finito, $A(G)$*, y*

(c) una función de incidencia ψ*.*

[1]Hemos optado por representar al conjunto de aristas por A , otros autores utilizan al letra E, del inglés «edge».

Los elementos de $V(G)$ se llaman vértices, nodos o puntos, y los elementos de $A(G)$ se llaman aristas o arcos. Cada arista del conjunto $A(G)$ une dos vértices de $V(G)$ de acuerdo con la función de incidencia ψ; en otras palabras, la función ψ asocia a cada arista un par no ordenado *de vértices (que pueden coincidir):*

$$\forall a \in A(G),\ \ \psi(a) = \{u, v\} \subset V(G)$$

Nótese que el conjunto de vértices no es nunca vacío; en cambio, el de aristas puede serlo.

Cuando no haya confusión posible, abreviaremos escribiendo V y A en lugar de $V(G)$ y $A(G)$. Del mismo modo, cuando las aristas del grafo queden perfectamente determinadas, se puede prescindir de la función de incidencia, al quedar esta implícitamente incluida en la estructura del grafo. En ese caso se representa el grafo por $G = (V(G), A(G))$ o, más sencillamente, $G = (V, A)$.

La manera más sencilla de representar un grafo es mediante lo que se llama representación diagramática de un grafo: los vértices se representan mediante puntos y las aristas mediante líneas, como se puede ver en la figura 1.1. Para dicho grafo los conjuntos de vértices y de aristas y la función de incidencia son:

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A(G) = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\psi(a) = \{1, 2\}, \quad \psi(b) = \{1, 3\}, \quad \psi(c) = \{1, 4\}, \quad \psi(d) = \{2, 3\}, \quad \psi(e) = \{2, 4\}$$

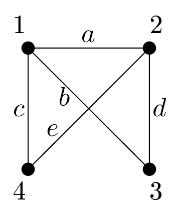


Figura 1.1: Representación de un grafo.

Un mismo grafo puede representarse de distintas maneras, veamos los siguientes ejemplos.

1.1.2. Grafos dirigidos

Definición 1.2 (Grafo dirigido) *Un* grafo dirigido $G = (V(G), A(G), \psi)$ *es un triple ordenado de*

(a) Un conjunto finito y no vacío, $V(G)$,

(b) un conjunto finito, $A(G)$, y

(c) una función de incidencia ψ.

Los elementos de $V(G)$ se llaman vértices, nodos o puntos, y los elementos de $A(G)$ se llaman aristas o arcos. Cada arista del conjunto $A(G)$ une un vértice inicial *de $V(G)$ con otro vértice* final *de acuerdo con la función de incidencia ψ; en otras palabras, la función ψ asocia a cada arista un par* ordenado *de vértices (que pueden coincidir):*

$$\forall a \in A(G),\ \psi(a) = (u, v) \in V(G) \times V(G)$$

En un grafo no dirigido, si la función de incidencia asocia la arista a con el par de vértices $\{u, v\}$, estos dos vértices son los *extremos* de la arista a. En cambio, en un grafo dirigido, si $\psi(a) = (u, v)$, u es el *extremo inicial* (o *cola*) de a y v es su *extremo final* (o *cabeza*).

En los grafos dirigidos, las aristas se representan mediante flechas que indican el sentido de su orientación.

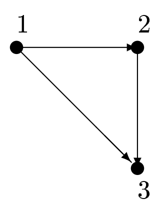


Figura 1.2: Grafo dirigido.

En particular, las definiciones que introduzcamos se refieren a este tipo de grafos.

1.2. Incidencia y adyacencia. Tipos de grafos y elementos especiales en un grafo

Definiciones 1.3 *Un* bucle *o* lazo *es una arista cuyos vértices extremos coinciden.*

Dos aristas a y b son paralelas si tienen los mismos extremos (es decir, si $\psi(a) = \psi(b)$).

Un vértice diremos que es es un vértice aislado *si no es extremo de ninguna arista.*

En el grafo de la figura 1.1 no hay bucles, aristas paralelas ni vértices aislados. En cambio, en el grafo de la figura 1.3 si que encontramos aristas y vértices con estas características: las aristas d y f son palalelas, g es un bucle y el vértice 5 es aislado.

Definición 1.4 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Dos vértices u y v de G son adyacentes si son vértices extremos de una misma arista a de A. En ese caso, diremos que la arista a es incidente con los vértices u y v.*

Cada arista $a \in A$ tiene asociados un par de vértices u y v, que escribiremos como $\{u, v\}$ o $\{v, u\}$. Esto significa que:

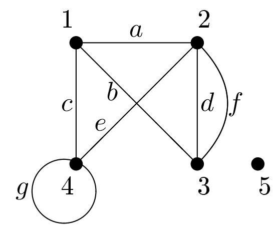


Figura 1.3: Representación de un grafo.

1. a es una arista entre u y v
2. a es incidente en los vértices u y v
3. u y v son adyacentes
4. u i v son los extremos de a.

En el grafo de la figura 1.3, los vértices 1 y 4 son adyacentes ya que la arista c los une. También se dice que esta arista es incidente en los vértices 1 y 4.

Definición 1.5 (Función de adyacencia) *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Representaremos por $\Gamma(v)$ el conjunto de todos aquellos vértices del grafo adyacentes a v:*

$$\Gamma(v) = \{u \in V/v \textit{ es adyacente a } u\}$$

La aplicación Γ que asocia a cada vértice v el conjunto $\Gamma(v)$ se conoce como función de adyacencia *del grafo G.*

De forma análoga definiremos el conjunto $\Gamma^2(v)$ (como el conjunto de los vértices que son adyacentes a los vértices adyacentes a v, y, en general, los conjuntos $\Gamma^3(v)$, $\Gamma^4(v)$, ..

$$\Gamma^2(v) = \Gamma(\Gamma(v))$$
$$\dots$$
$$\Gamma^{n+1}(v) = \Gamma(\Gamma^n(v))$$

Por ejemplo, para el grafo de la figura 1.3:

$$\Gamma(4) = \{1, 2, 4\}$$
$$\Gamma^2(4) = \Gamma(\{1, 2, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$$

En cambio, $\Gamma(5) = \varnothing$, ya que ningún vértice es adyacente a 5.

Definición 1.6 (Grafo simple) *Un grafo no dirigido $G = (V, A)$ es* simple *si no tiene aristas múltiples (paralelas).*

El grafo de la figura 1.1 es simple.

Definición 1.7 *Llamaremos* multigrafo *a un grafo $G = (V, A)$ que no es simple. Es decir se trata de un grafo con aristas paralelas y/o bucles.*

Cuando el grafo $G = (V, A)$ es simple, como no hay dos aristas con los mismos extremos, cada aristas queda determinada de forma única por sus vértices extremos. Así, el grafo de la figura 1.1 lo podemos representar como

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$$

1.3. Incidencia. Adyacencia

En el caso de grafos dirigidos, el sentido de las aristas nos obliga a matizar los conceptos de incidencia y adyacencia,

Definición 1.8 *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, y sea $e =< u, v >\in E$, con $u, v \in V$. Entonces diremos que u es adyacente hacia v, o que v es adyacente desde u. De la misma forma, diremos que el arco e es incidente desde el vértice u hacia el vértice v.*

Veamos los siguientes ejemplos:

Para grafos dirigidos: Cada arco $e\, \epsilon E$ se asocia con un par ordenado de vértices $< v, w >$ y decimos que:

1. e es una arista dirigida desde v hasta w
2. el vértice v es adyacente hacia el vértice w
3. el vértice w es adyacente desde el vértice v
4. el arco e es incidente desde v
5. el arco e es incidente hacia el vértice w

En el grafo de la figura 1.2, la arista <1,3> es incidente desde 1 e incidente hacia el vértice 3. También podemos decir que el vértice 3 es adyacente desde el vértice 1.

Definición 1.9 *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Definiremos el conjunto de vértices adyacentes a uno dado, y que representaremos por $\Gamma(v)$, como el conjunto de todos aquellos vértices del grafo adyacentes a v:*

$$\Gamma(v) = \{u \in V, / < v, u >\in E\}$$

De forma análoga definiremos

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^2(v) & = & \Gamma(\Gamma(v)) \\ & & \cdots \\ \Gamma^{n+1}(v) & = & \Gamma(\Gamma^n(v)) \end{array}$$

De igual forma definiremos el conjunto de vértices adyacentes hacia un vértice v, y que representaremos por $\Gamma^{-1}(v)$, como

$$\Gamma^{-1}(v) = \{u \in V / < u, v > \in E\}$$

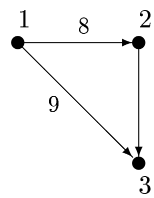


Figura 1.4: Grafo antisimétrico.

Definición 1.10 *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Diremos que G es un* grafo simétrico *si $\forall(u, v) \in E$, entonces también existe $(v, u) \in E$.*

Diremos que G es un grafo antisimétrico *si $\forall(u, v) \in E$, entonces $(u, v) \notin E$.*

El grafo dirigido de la figura 1.2 no es simétrico, ya que $< 1, 3 > \in E$ y sin embargo $< 3, 1 > \notin E$, y tampoco es antisimétrico. Para que lo fuera deberían eliminarse las aristas $< 1, 2 >$ ó $< 2, 1 >$ y $< 2, 3 >$ ó $< 3, 2 >$. El grafo resultante (figura 1.5) sí que es antisimétrico.

Definición 1.11 *Un grafo $G = (V, A)$ es* vacío *si el conjunto de aristas A es vacío.*

Es decir, el grafo vacío es el que no tiene aristas.

Definición 1.12 *Llamaremos grafo trivial a aquel que solamente contiene un vértice y ninguna arista.*

Definición 1.13 *Sea G=(V,A) un grafo. Diremos que G es un* grafo ponderado *si cada arista lleva asociado un número real. A este número real se le llama peso, coste o capacidad de la arista.*

Por ejemplo, el grafo de la figura 1.5 es un grafo ponderado.

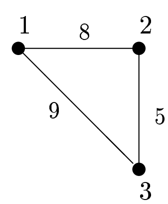


Figura 1.5: Grafo ponderado.

1.4. Grado de un vértice

Definición 1.14 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Llamaremos grado de un vértice v, y lo representaremos por $d(v)$, al número de aristas incidentes en ese vértice.*

Nótese que un bucle incide dos veces en el mismo vértice.

Por ejemplo, para el grafo de la figura 1.1 tenemos que el grado del vértice 1 es tres, ya que hay tres aristas que inciden en él; y el grado del vértice 4 es dos.

Si tratamos con grafos dirigidos, tendremos que distinguir entre los arcos que llegan y los que salen de cada vértice, es decir,distinguir entre los arcos incidentes desde y hacia ese vértice, por ello :

Definición 1.15 *Sea $G = (V, H)$ un grafo dirigido. Llamaremos grado de entrada de un vértice v, y lo representaremos por $g_e(v)$, al número de aristas incidentes hacia el vértice v. Es decir, al número de aristas que tienen a v como vértice final.*

Llamaremos grado de salida de v, y los representaremos por $g_s(v)$, al número de aristas incidentes desde el vértice v. Es decir, al número de aristas que tienen a v como vértice inicial.

Por ejemplo, para el grafo de la figura 1.1 tenemos que el grado del vértice 1 es tres, ya que hay tres aristas que inciden en él; y el grado del vértice 4 es dos.

Cuando tenemos grafos dirigidos, como el de la figura 1.5, hay que especificar para cada vértice su grado de entrada y de salida. Por ejemplo, el grado de entrada del vértice 3 en este grafo (figura 1.5) es dos, ya que hay dos aristas que inciden hacia el vértice 3; y su grado de salida es cero ya que no hay ninguna arista que incida en algún vértice desde el vértice 3.

Teorema 1.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, con n vértices y e aristas. Entonces, la suma de los grados de entrada es igual a la suma de los grados de salida e igual al número de aristas del grafo.*

$$\sum_{v\in V} g_e(v) = \sum_{v\in V} g_s(v) = e$$

Teorema 1.2 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, con $|V| = n$, $|A| = e$. Entonces, la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de aristas.*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\,e \tag{1}$$

Demostración: La demostración es sencilla teniendo en cuenta que cuando se suman los grados de los vértices, cada arista contribuye a aumentar en uno el grado de cada uno de los vértices en los que la arista es incidente. □

Este teorema se conoce tambien como el teorema de las manos estrechadas, ya que si consideramos que los vértices representan a las personas que asisten a una reunión, y cada arista significa que las dos personas representadas por los vérices se han saludado estrechando sus manos, podemos resumirlo indicando que «el número de manos estrechadas es par».

Corolario 1.1 *Sea G=(V,A) un grafo no dirigido. Entonces, el número de vértices de grado impar es par.*

Demostración: El sumatorio del grado de todos los vértices del grafo es par, ya que es igual al doble del número de aristas. Si definimos los conjuntos

$$\begin{array}{rcl} V_1 & = & \{\ v \in V/\ d(v) \text{ es impar}\} \\ V_2 & = & \{\ v \in V/\ d(v) \text{ es par}\} \end{array}$$

Se tiene que

$$2\,e \ = \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{PAR}} = \sum_{v \in V_1} d(v) + \underbrace{\sum_{v \in V_2} d(v)}_{\text{PAR}}$$

Luego, necesariamente $\sum_{v \in V_1} d(v)$ es par, siendo cada uno de los sumandos impar, por tanto el número de sumandos ha de ser par. Esto significa que el número de vértices de grado impar será par.□

Definición 1.16 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Diremos que G es* regular *si todos los vértices tienen el mismo grado. Si todos los vértices del grafo son de grado k, o lo que es lo mismo, si cada vértice es incidente con exactamente k aristas, diremos que el grafo es k-regular.*

$$G = (V, A) \textit{ es k-regular} \longleftrightarrow \forall v \in V,\ d(v) = k$$

Por ejemplo, el grafo de la figura 1.6 es un grafo 3-regular ya que todos sus vértices tienen grado 3.

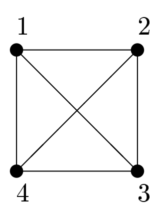


Figura 1.6: Grafo k-regular.

Definición 1.17 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Llamaremos* grado mínimo *de G al menor de los grados de todos sus vértices.*

$$\delta = \min\{d(v)/v \in V\}$$

Definición 1.18 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Llamaremos* grado máximo *de G al mayor de los grados de todos sus vértices.*

$$\Delta = \max\{d(v)/v \in V\}$$

Para cualquier grafo no dirigido $G = (V, A)$ se cumple que:

$$\forall v \in V, \quad \delta \leq d(v) \leq \Delta$$

y si además G es k-regular, entonces

$$\delta = \Delta = k$$

Para el grafo de la figura 1.1 el grado mínimo es dos y el grado máximo es tres. En el grafo de la figura 1.6 el grado máximo y mínimo coinciden y son iguales a 3 (evidentemente, un grafo es regular si y sólo si sus grados máximo y mínimo coinciden).

Definición 1.19 *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que G es* completo *si cualquier par de vértices distintos son adyacentes. Es decir entre cualquier par de vértices distintos siempre existe una arista que los une.*

Al grafo completo simple y sin bucles de n vértices lo denotamos por K_n.

El grafo de la figura 1.6 es K_4. Obsérvese que el grafo completo K_n es $(n-1)$-regular.

1.5. Ejercicios prácticos

Hasta ahora hemos visto dos formas de representar un grafo, la primera a partir de los conjuntos de vértices y aristas, y la segunda de forma gráfica, representado los vértices mediante puntos ó circulos, y las aristas mediante líneas que las unen en el caso de grafos no dirigidos y mediante flechas en el caso de grafos dirigidos. En el ejercicio siguiente debes construir los grafos de las dos formas.

Ejercicio 1.1 *Considera las dos últimas cifras de tu DNI, súmalas, si el número resultante tiene más de dos cifras vuelve a sumarlas, hasta que el número resultante tenga una sola cifra n, entre 5 y 9. Considera el grafo cuyo conjunto de vértices tiene n elementos.*

(a) Construye el grafo vacío correspondiente.

(b) Construye el grafo completo no dirigido correspondiente, comprueba si es regular.

(c) Construye un grafo no dirigido de manera que haya un vértice de grado 1, y otro de grado $n-1$. Analiza sus propiedades.

(d) Comprueba que los grafos anteriores verifican el teorema de las manos estrechadas.

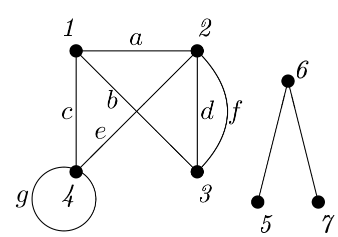
Ejercicio 1.2 *Llamemos $G = (V(G), A(G), \psi)$ al grafo de la figura 1.3.*

(a) Escribe explícitamente los conjuntos $V(G)$ y $A(G)$, la función de incidencia y la de adyacencia

(b) Determina el grado de cada uno de los vértices de este grafo

(c) Para cada vértice v determina los conjuntos $\Gamma(v)$, $\Gamma^2(v)$, $\Gamma^3(v)$ y $\Gamma^4(v)$.

Haz lo mismo con el grafo representado en el siguiente dibujo.



1.6. Ejercicios complementarios

Para completar esta sesión se recomienda resolver los problemas 1, 4 y 5 de la lista de clase y los ejercicios 18.3, 18.4, 18.5, 18.6 i 18.9 del libro de Fuster.