Pràctica 1
Resolució de sistemes d'equacions lineals: mètodes directes

Índex

1 Operacions elementals per files

Recordem que hi ha tres tipus d'operacions elementals per files:

1. Intercanvi de files: una fila de la matriu es pot intercanviar amb una altra.
2. Multiplicació d'una fila: cada element d'una fila pot ser multiplicat per una constant no nul·la.
3. Suma d'una fila: una fila pot ser substituïda per la suma d'aquesta fila i un múltiple d'una altra fila.

Les comandes de Scilab que es poden fer servir per efectuar aquestes operacions elementals en una matriu A són les següents:

1. Intercanvi de files aplicat a les files i i j:

```
A ([i , j ],:) = A ([j , i ],:)
```

2. La fila que fa i es multiplica per p:

```
A (i ,:) = p*A (i ,:)
```

3. La fila que fa i es multiplica per la suma de la fila que fa i i p vegades la fila que fa j:

```
A (i ,:) = A (i ,:) + p *A (j ,:)
```

Exemple 1. Considerem la següent matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 9 \\ -4 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Efectuarem, fent servir Scilab, les següents operacions elementals:

1. intercanviem les files 1 i 3,
2. multipliquem per $1/2$ la segona fila,
3. sumem la primera fila a la segona.

La seqüència de comandes utilitzades i les eixides obtingudes són:

```
A (i ,:) = p*A (i ,:)

-->A=[0 -2 3 9;-4 6 0 -4;2 -5 5 17]
 A  =

    0.  - 2.    3.    9.
  - 4.    6.    0.  - 4.
    2.  - 5.    5.    17.

-->B=A;

-->B([1,3],:)=B([3,1],:)
 B  =

    2.  - 5.    5.    17.
  - 4.    6.    0.  - 4.
    0.  - 2.    3.    9.

-->C=B;

-->C(2,:)=(1/2)*C(2,:)
 C  =

    2.  - 5.    5.    17.
```

```
  - 2.    3.    0.  - 2.
    0.  - 2.    3.    9.

-->D=C;

-->D(2,:)=D(2,:)+D(1,:)
 D  =

    2.  - 5.    5.    17.
    0.  - 2.    5.    15.
    0.  - 2.    3.    9.
```

2 Forma escalonada reduïda d'una matriu

La funció **rref** proporcional la forma escalonada reduïda d'una matriu qualsevol. Vegem un exemple.

Exemple 2. Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rrrcr} & -2y & +3z & = & 9 \\ -4x & +6y & & = & -4 \\ 2x & -5y & +5z & = & 17 \end{array}\right\}$$

la matriu ampliada del qual és la de l'exemple 1. Calculem ara la forma escalonada reduïda d'aquesta matriu:

```
-->A=[0 -2 3 9;-4 6 0 -4;2 -5 5 17];

-->rref(A)
 ans  =

    1.    0.    0.    1.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    3.
```

Aleshores la solució única del sistema és:

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 3.$$

3 Resolució de sistemes lineals amb l'operador $\backslash$

3.1 Descripció de l'operador $\backslash$

Un procediment comunament utilitzat per resoldre un sistema d'equacions lineals A$\vec{x} = \vec{b}$ amb Scilab consisteix en introduir la matriu de coeficients A i el vector de termes independents $\vec{b}$ i, aleshores, en escriure A\B. Aquest operador funciona de la següent manera:

1. Si el sistema és compatible determinat aleshores A\b proporciona l'única solució del sistema.
2. Si el sistema és compatible indeterminat aleshores A\b proporciona una de les solucions (en tria una amb, com a molt, r components no nul·les, on r és el rang de A).
3. Si el sistema és incompatible aleshores Scilab calcula un vector, anomenat **aproximació per mínims quadrats**, de la solució, és a dir, un vector $\vec{x}'$ tal que el valor de la norma $\|A\vec{x}' - \vec{b}\|$ és el mínim possible. D'entre tots els possibles valor $\vec{x}'$ (notem que aquest vector no és necessàriament únic), Scilab en tria un amb, com a molt, r components no nul·les, on r és el rang de A.

Notem que, si el sistema és compatible, Scilab torna una de les solucions. Tanmateix, si el sistema no és compatible, Scilab torna un vector que **no és una solució**. Açò vol dir que hem de ser molt acurats amb l'operador \.

Exemple 3. Considerem el següent sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} & -2y & +3z & = & 9 \\ -4x & +6y & & = & -4 \\ 2x & -5y & +5z & = & 17 \end{array}\right\}$$

Farem servir l'operador \:

```
-->A=[0 -2 3; -4 6 0; 2 -5 5]; b=[9; -4; 17];

-->x=A\b
 x  =


    1.
    0.
    3.
```

Aquesta és l'única solució del sistema lineal perquè A és una matriu quadrada invertible (té rang màxim):

```
-->rank(A)
 ans  =


    3.
```

Exemple 4. Considerem el següent sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +2y & +2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

que és, evidentment, incompatible

```
-->A=[1 1 1; 1 1 1; 2 2 2]; b=[1; 2; 3];

-->x=A\b
warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00

 x  =

    1.5
    0.
    0.
```

Scilab dóna un resultat, però, tanmateix, no és una solució del sistema.

Exemple 5. Considerem el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & +2y & +2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

que té, evidentment, una quantitat infinita de solucions. that has, evidently, infinitely many solutions.

```
-->A=[1 1 1; 1 1 1; 2 2 2]; b=[1; 1; 2];

-->x=A\b
warning :
matrix close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00

 x  =

    1.
    0.
    0.
```

En aquest cas hem obtingut una solució particular del sistema. De fet,

```
-->A*x
 ans  =

    1.
    1.
    2.
```

3.2 Solució general d'un sistema fent servir \ i kernel

Si un sistema té una quantitat infinita de solucions, hem vist que l'operador \ proporciona només una de les solucions del sistema. No obstant això, és possible obtenir **totes** les solucions d'una manera fàcil calculant el **nucli** de la matriu de coeficients. Primer hem d'aclarir aquest concepte:

El **nucli** d'una matriu A és el conjunt de solucions del sistema homogeni la matriu de coeficients del qual és A, és a dir, $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$. Per exemple, el nucli de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

és el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El nucli d'una matriu es pot calcular fàcilment amb Scilab fent servir la funció **kernel**:

```
-->A=[1 2 -3; 2 4 -6; 5 10 -15];

-->kernel(A)
 ans  =

  - 0.1195229    0.9561829
    0.8440132  - 0.0439019
    0.5228345    0.2894597
```

El nucli de la matriu és el conjunt de combinacions lineal dels vectors columna de la matriu obtinguda, és a dir:

$$\operatorname{Ker}\mathsf{A} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -0{,}1195229 \\ 0{,}8440132 \\ 0{,}5228345 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0{,}9561829 \\ -0{,}0439019 \\ 0{,}2894597 \end{bmatrix} \text{ amb } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Açò també pot expressar-se dient que els vectors columna de la matriu formen un **sistema de generadors** del nucli).

Ara enunciarem un teorema que mostra com obtenir la solució general d'un sistema d'equacions lineals a partir de

- una solució particular, i
- el nucli de la matriu de coeficients.

Teorema. Siga A$\vec{x} = \vec{b}$ un sistema d'equacions lineals compatible i siga $\vec{x}_0$ una solució particular. Aleshores la solució general del sistema és:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

on $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ és un sistema de generadors del nucli de A.[1]

Exemple 6. Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Apliquem, amb Scilab, l'operador \ per estudiar la compatibilitat del sistema:

```
-->A=[1 0 2 3; 7 1 1 1 ; 8 1 3 4; 9 1 5 7]; b=[6; 10; 16; 22];

-->x=A\b
warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    2.2204D-18

 x  =

    1.2
    0.
    0.
    1.6

-->clean(A*x-b)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
    0.
```

De les eixides anteriors podem veure que el sistema és compatible i que el vector $\vec{x}_0 = (1{,}2, 0, 0, 1{,}6)$ n'és una solució particular. Ara calculem el nucli de la matriu de coeficients:

```
-->kernel(A)
 ans  =
```

[1]La demostració és molt fàcil: $\vec{x}$ és una solució del sistema $\Leftrightarrow$ A$\vec{x} = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ A$\vec{x}$ − A$\vec{x}_0 = \vec{b}$ − A$\vec{x}_0$ $\Leftrightarrow$ A$(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$ (perquè A$\vec{x}_0 = \vec{b}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{x} - \vec{x}_0$ pertany al nucli de A.

```
- 0.1490641  - 0.0418627
  0.8434185    0.5144634
  0.4510273  - 0.7061368
- 0.2509968    0.4847121
```

Açò vol dir que el sistema té una quantitat infinita de solucions i que la seua solució general és:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1{,}2\\0\\0\\1{,}6\end{bmatrix}}_{\vec{x}_0}+\lambda_1\begin{bmatrix}-0{,}1490641\\0{,}8434185\\0{,}4510273\\-0{,}2509968\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-0{,}0418627\\0{,}5144634\\-0{,}7061368\\0{,}4847121\end{bmatrix},\qquad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}.$$

Exemple 7. Considerem el sistema d'equacions lineals (amb la mateixa matriu de coeficients que abans)

$$\begin{bmatrix}1&0&2&3\\7&1&1&1\\8&1&3&4\\9&1&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\end{bmatrix}.$$

Com abans, fem servir \ per estudiar la compatibilitat del sistema:

```
-->b=[1; 2; 3; 5];

-->clean(A*x-b)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
  - 1.
```

D'aquests resultats veiem que l'operador \ torna un vector que **no n'és una solució**. Açò implica que **el sistema és incompatible**.

Exemple 8. Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Com abans, apliquem primerament l'operador \:

```
-->A=[1 2 3; -1 0 1; 0 3 1]; b=[1; 2; 3];

-->x=A\b
```

```
 x  =

  - 1.7
    0.9
    0.3

-->clean(A*x-b)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
```

Els resultats mostren que el sistema és compatible i que el vector $\vec{x}_0 = (-1{,}7, 0{,}9, 0{,}3)$ n'és una solució. Ara calculem el nucli de la matriu de coeficients:

```
-->kernel(A)
 ans  =

      []
```

Açò vol dir que el nucli és trivial, és a dir, $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$. Per consegüent l'única solució del sistema és $\vec{x}_0$, l'obtinguda fent servir $\backslash$.

4 Aplicació al càlcul de fluxos en xarxes

Quan investiguem el flux d'una quantitat a través d'una xarxa ens apareixen sistemes d'equacions lineals. Trobem aquestes xarxes en ciència, economia i enginyeria. Dos exemples d'aquest tipus són els patrons de flux de tràfic a través d'una ciutat i la distribució de productes dels fabricants als consumidors per mitjà d'una xarxa de distribuïdors i venedors.

Una xarxa consta d'un conjunt de punts, anomenats nodes (o vèrtexs), i arcs dirigits que connecten tots o part dels nodes. El flux està indicat per un nombre o una variable. Farem les següents suposicions:

- El flux total que entra a un node és igual al flux total que ix del node.
- El flux total que entra dins de la xarxa és igual al flux total que ix de la xarxa.

Exemple 9. Considerem una xarxa petita tancada de tubs a través dels qual flueix un líquid com es descriu al següent graf:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "x"'] \arrow[dr, "y"] & & B \arrow[ll, "20"'] \arrow[dl, "z"'] \\
& C \arrow[dl, "10"] \arrow[dr, "10"'] & \\
D \arrow[rr, "u"'] & & E \arrow[uu, "t"']
\end{tikzcd}
$$

Els arcs representen els tubs, les fletxes indiquen les direccions dels fluxos i les interseccions entre els tubs corresponen als nodes del graf. Els pesos dels arcs representen els nombres de litres de líquid que flueixen cada hora.

Cada intersecció dóna lloc a una equació lineal:

$$
\left.\begin{array}{lrcl}
\text{Intersecció } A: & x+y & = & 20 \\
\text{Intersecció } B: & z+20 & = & t \\
\text{Intersecció } C: & y+z & = & 20 \\
\text{Intersecció } D: & x+10 & = & u \\
\text{Intersecció } E: & u+10 & = & t
\end{array}\right\},
$$

La matriu ampliada del sistema d'equacions lineals és

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -10
\end{bmatrix}.
$$

Calculant, amb Scilab, la forma escalonada reduïda per files de la matriu anterior obtenim:

```
-->rref([1 1 0 0 0 20;0 0 1 -1 0 -20;0 1 1 0 0 20;
-->       1 0 0 0 -1 -10;0 0 0 -1 1 -10])
 ans  =

    1.    0.    0.    0.  - 1.  - 10.
    0.    1.    0.    0.    1.    30.
    0.    0.    1.    0.  - 1.  - 10.
    0.    0.    0.    1.  - 1.    10.
    0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

Per tant, les equacions paramètriques de la solució general del sistema són: $x = -10 + \lambda$, $y = 30 - \lambda$, $z = -10 + \lambda$, $t = 10 + \lambda$, $u = \lambda$, amb$\lambda \in \mathbb{R}$. Com que els valors de les incògnites són litres de líquid hem de tenir $x, y, z, t, u \geq 0$ i, per tant, $10 \leq \lambda \leq 30$. Concloem, aleshores, que hi ha una quantitat infinita de possibilitats per a la distribució de fluxos (un per a cada valor de λ en l'interval $[10, 30]$).