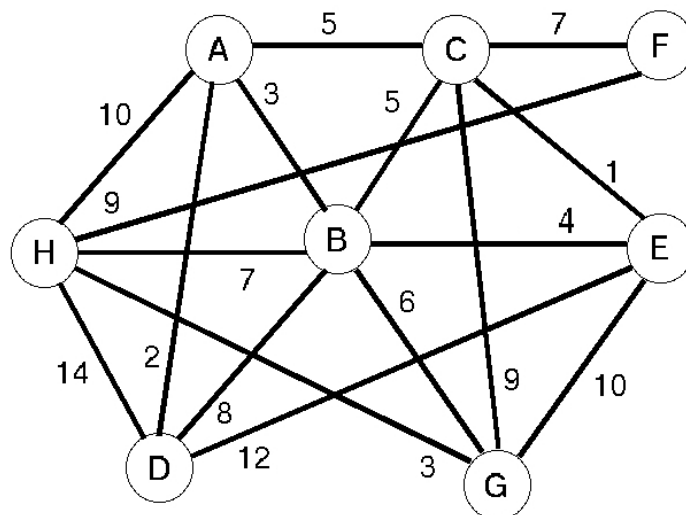


Prácticas de Matemática Discreta

Problemas de la sesión 7 (Caminos de peso mínimo)

1. Aplica el algoritmo de Dijkstra al siguiente grafo ponderado para calcular:

- un camino de peso mínimo del vértice D al vértice E ,
- un camino de peso mínimo del vértice D al vértice H ,
- un camino de peso mínimo del vértice D al vértice F .



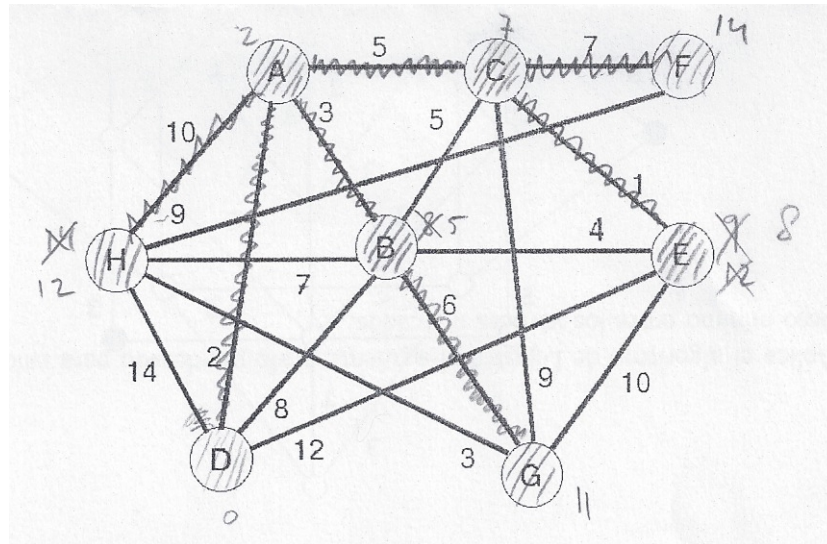
Escribe en una tabla los resultados que vas obteniendo en cada paso.

Solución:

Si aplicamos el algoritmo de Dijkstra obtenemos la tabla

A	B	C	D	E	F	G	H
2	8	∞	0	12	∞	∞	14
2	5	7	0	12	∞	∞	12
2	5	7	0	9	∞	11	12
2	5	7	0	8	14	11	12
2	5	7	0	8	14	11	12
2	5	7	0	8	14	11	12
2	5	7	0	8	14	11	12
2	5	7	0	8	14	11	12

y el árbol



La etiqueta PERMANENTE de un vértice u representa el peso de un camino más corto entre el vértice inicial (D) y u . Además, un camino más corto es el **único** camino simple sobre el árbol que une D con u .

Por tanto:

Un camino más corto entre D y E es $D - A - C - E$ y su peso es 8.

Un camino más corto entre D y H es $D - A - H$ y su peso es 12.

Un camino más corto entre D y F es $D - A - C - F$ y su peso es 14.

- Se considera el grafo ponderado G con doce vértices y dieciocho aristas cuya aplicación de incidencia f está definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \{v_1, v_2\}, & f(e_2) &= \{v_1, v_3\}, & f(e_3) &= \{v_1, v_4\}, & f(e_4) &= \{v_1, v_5\}, & f(e_5) &= \{v_5, v_6\}, \\ f(e_6) &= \{v_4, v_6\}, & f(e_7) &= \{v_4, v_7\}, & f(e_8) &= \{v_4, v_8\}, & f(e_9) &= \{v_3, v_7\}, & f(e_{10}) &= \{v_3, v_8\}, \\ f(e_{11}) &= \{v_2, v_8\}, & f(e_{12}) &= \{v_8, v_9\}, & f(e_{13}) &= \{v_7, v_{10}\}, & f(e_{14}) &= \{v_7, v_{11}\}, \\ f(e_{15}) &= \{v_6, v_{11}\}, & f(e_{16}) &= \{v_{11}, v_{12}\}, & f(e_{17}) &= \{v_{10}, v_{12}\}, & f(e_{18}) &= \{v_9, v_{12}\} \end{aligned}$$

y cuyo vector de pesos es el siguiente:

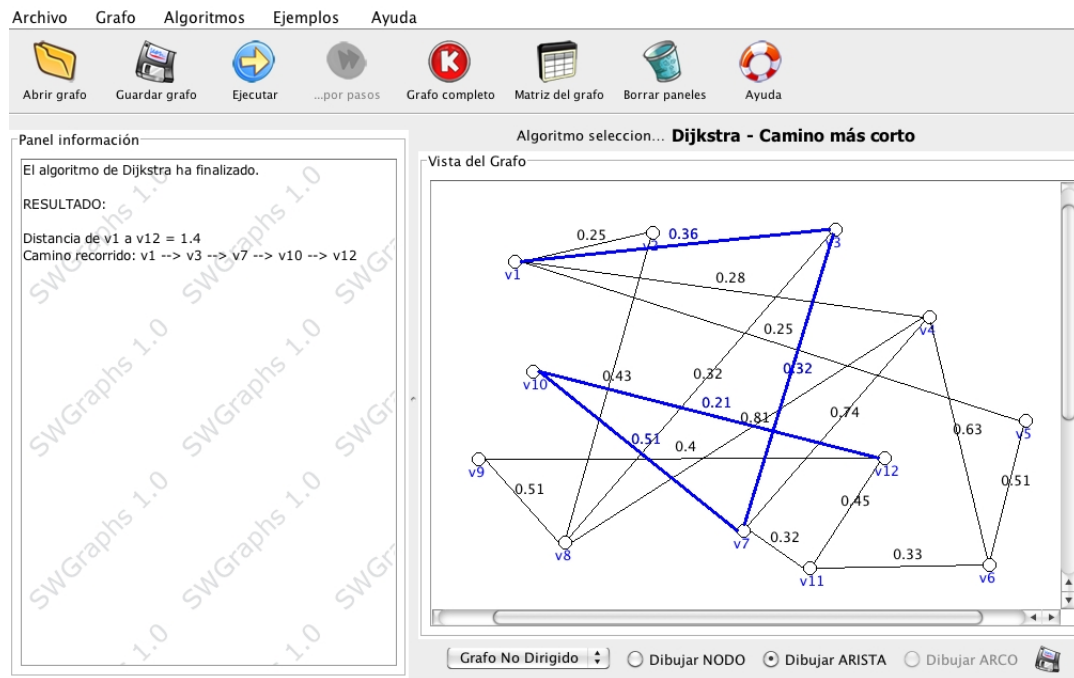
$$v = (0.25, 0.36, 0.28, 0.25, 0.51, 0.63, 0.74, 0.81, 0.32, 0.32, 0.43, 0.51, 0.51, 0.32, 0.33, 0.45, 0.21, 0.4).$$

(en la posición i de este vector está el peso de la arista e_i del grafo)

Obtén un camino de peso mínimo entre los vértices 1 y 12.

Solución:

Dibujando el grafo en SWGRaphs y aplicando el algoritmo de Dijkstra se obtiene:



Por tanto, un camino más corto es $v1 \rightarrow v3 \rightarrow v7 \rightarrow v10 \rightarrow v12$, y su peso es 1.4.

4. Considera el mapa de España del ejemplo de SWGRaphs que aparece al abrir los menús Ejemplos-Dijkstra-mapa de España. Los vértices del grafo que aparece son ciudades y las aristas representan las carreteras que enlazan dichas ciudades. Se indica también la longitud de cada tramo de carretera en kilómetros.
 - (a) Determina el camino más corto para viajar desde Valencia a Santander.
 - (b) Un conductor quiere viajar de Valencia a Santander pero no quiere pasar por la carretera que enlaza Vinaroz y Alcañiz porque este tramo tiene demasiadas curvas. Determina cuál será el camino más corto de Valencia a Santander teniendo en cuenta esta restricción.
 - (c) Un autobús cubre la ruta Barcelona-Madrid-Huelva con parada sólo en Madrid. ¿Cuál debe ser su recorrido para que sea lo más corto posible?

Solution:

- (a) Aplicando el algoritmo de Dijkstra con SWGRaphs (tomando Valencia como vértice inicial y Santander como vértice final) se obtiene:



Por tanto, un camino más corto es: VALENCIA → Sagunt → Castello → Vinaros → Alcaniz → Zaragoza → Tudela → Logrono → Vitoria → Bilbao → Santander

- (b) Eliminando la arista Vinaroz-Alcañiz y aplicando el algoritmo de Dijkstra se obtiene el camino más corto: VALENCIA → Sagunt → Teruel → Calamocha → Daroca → Zaragoza → Tudela → Logrono → Vitoria → Bilbao → Santander.

- (c) Aplicando el algoritmo de Dijkstra tomando Barcelona como vértice inicial y Madrid como vértice final se obtiene una ruta más corta entre Barcelona y Madrid: Barcelona → Tarragona → Vinaros → Castello → Sagunt → VALENCIA → Motilla → Tarancon → Aranjuez → MADRID.

Tomando ahora Madrid como vértice inicial y Huelva como vértice final, y aplicando Dijkstra, se obtiene una ruta más corta entre Madrid y Huelva: MADRID → Trujillo → Merida → Badajoz → Huelva.

Uniendo ambos caminos se obtiene una ruta más corta entre Barcelona y Huelva pasando por Madrid: Barcelona → Tarragona → Vinaros → Castello → Sagunt → VALENCIA → Motilla → Tarancon → Aranjuez → MADRID → Trujillo → Merida → Badajoz → Huelva.