8 Octava Práctica: Series Numéricas y Series de Potencias

8.1 Series Numéricas

8.1.1 Introducción

Una importante aplicación de las sucesiones es la representación de sumas infinitas, concepto que se formaliza a través de la definición de serie numérica.

Dada la sucesión de números reales $\{a_n\}$ se puede construir la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales asociada, cuyo término general viene definido por

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

La serie numérica de término general a_n se suele denotar mediante la expresión formal

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n \geq 1} a_n$$

y se define como el valor del límite de la sucesión de sumas parciales cuando ésta es convergente. En otro caso, si esta sucesión diverge, la serie también lo hará y tendremos una clasificación de divergencia en series análoga a la de sucesiones, en función del carácter de la sucesión de sumas parciales. Abordamos a continuación el cálculo, exacto y aproximado, de la suma de algunas series convergentes.

8.1.2 Sumas finitas

D5W dispone de la secuencia Calculus:Sum para calcular sumatorios finitos e infinitos. Por ejemplo, si nuestro propósito es sumar los valores de $a(k)$ para k natural entre 1 y n (suma finita),

$$\sum_{k=1}^{n} a(k) = a(1) + a(2) + \cdots + a(n)$$

podemos plantearle el problema a D5W introduciendo $a(k)$ en la línea de edición y usando la secuencia Calculus:Sum. En el cuadro de diálogo que aparece, elegimos como Variable `k` y en Sum Definite. Por último, los extremos del sumatorio deben ser `1` y `n`, respectivamente. Al pulsar OK tendrás en la pantalla

$$\sum_{\mathtt{k=1}}^{\mathtt{n}} \mathtt{a(k)}$$

que, al editar, se convierte en la línea de edición en `Σ (a(k),k,1,n)` , sintaxis que puedes utilizar[1] en cualquier momento para introducir un sumatorio.

[1]En lugar del símbolo `Σ` (sigma) puedes escribir, equivalentemente, `SUM`.

La secuencia Calculus:Sum puede servirnos para hallar el término general de ciertas sumas, por ejemplo, la suma de los n primeros naturales,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Para ello, deberás editar `k` en la línea de edición y utilizar Calculus:Sum eligiendo como extremos `1` y `n`. Al pulsar OK aparecerá en pantalla el sumatorio indicado que D5W simplifica en la fórmula conocida,

$$\frac{\mathtt{n(n+1)}}{2}\ .$$

Es importante que tengas claro dónde colocar `k` y dónde `n`. Aquí k juega el papel de "variable muda", que desaparece al efectuar el sumatorio. La suma, lógicamente, depende de su extremo superior, n en este caso, y no de k.

De forma similar podemos hallar la suma de los n primeros números pares, comenzando por 2. En este caso aplicamos Calculus:Sum sobre `2k` —cualquier número par se escribe así—, `k` como variable y `1` y `n` como extremos. Al simplificar obtendrás $\mathtt{n(n+1)} = n^2 + n$ que, como puedes comprobar, es la respuesta correcta:

$$2 = 1^2 + 1 \quad , \quad 2 + 4 = 6 = 2^2 + 2 \quad , \quad 2 + 4 + 6 = 12 = 3^2 + 3\ , \ \ldots$$

8.1.3 Sumas Infinitas

Con D5W es posible plantear el cálculo de una suma infinita o serie numérica haciendo uso de la secuencia Calculus:Sum. Cuando el programa devuelve como resultado un valor real, la serie correspondiente converge y suma el valor obtenido. Cuando el resultado sea infinito, sabrás que la serie diverge. Sin embargo, no siempre D5W es capaz de sumar directamente una serie. Veamos algunas series que podemos sumar de esta forma en modo exacto y cómo aproximar su valor en otros casos.

Sumas exactas de series numéricas. Uno de los casos más sencillos y frecuentemente utilizados en Informática es el de las *series geométricas y aritmético-geométricas* y, en general, las series cuyo término general es producto de un polinomio de grado k y una geométrica:

$$\sum_{n \geq p} q_k(n) \cdot r^n$$

que convergen si y sólo si $|r| < 1$. Por ejemplo, podemos calcular la suma exacta de la serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(n+2)(3n-2)^3}{3^n} = \sum_{n \geq 2} \frac{27n^4 - 72n^2 + 64n - 16}{3^n}$$

Para ello, basta introducir la expresión

$$\texttt{SUM((n + 2)(3n - 2)\^{}3/3\^{}(n + 1),n,2, + inf)}$$

y al simplificar obtendremos el valor `112` que corresponde a la suma exacta de la serie propuesta.

Te proponemos, como ejercicio, calcular la suma de las siguientes series:

$$\sum \frac{n}{3^n} \quad , \quad \sum \frac{n^2+1}{4^n} \quad , \quad \sum \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \quad , \quad \sum \frac{(-1)^n \cdot n}{3^n} \quad , \quad \sum \frac{(-1)^n \cdot n \cdot 3^n}{5^{n-1}}$$

Otro tipo de series que D5W sabe sumar casi siempre, son las *telescópicas o reducibles a ellas*, por lo general, del tipo racional, $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$. D5W es capaz de sumar, sin ayuda adicional, muchas series cuyo término general es cociente de dos polinomios. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{6} \\ \sum_{n\geq 1} \frac{n-3}{n\,(n+2)\,(n+4)} &= \frac{-5}{96} \end{aligned}$$

Recuerda que para transformar series racionales en telescópicas es necesario la descomposición en fracciones simples de la expresión racional. En algunos casos, D5W es capaz de efectuar la descomposición directamente, en otros, es necesario utilizar Expand para ayudarle.

También suma otras más generales como

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right) = \log(2)$$

aunque algunas veces necesitará ayuda en forma de simplificación previa.

Por último te proponemos sumar la serie $\sum \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Primero editamos el término general de la serie. Cuando le pedimos a D5W que efectúe el sumatorio, nos da como resultado infinito. En efecto, se trata de una serie telescópica divergente ya que

$$\log(\frac{n+1}{n}) = \log(n+1) - \log(n)$$

cuya sucesión de sumas parciales,

$$s_n = (\log(2)-\log(1)) + (\log(3)-\log(2)) + \cdots + (\log(n+1)-\log(n)) = \log(n+1)$$

diverge a $+\infty$.

Sumas aproximadas de series numéricas. Para la mayoría de las series convergentes el cálculo de la suma exacta no es posible o resulta demasiado complicado. Cuando esto sucede, siempre podemos plantearnos el cálculo aproximado de la suma, s, mediante una suma parcial N-ésima, s_N.

Así, el error cometido en estas aproximaciones vendrá dado por

$$E_N = |s - s_N| = \left| \sum_{n \geq N+1} a_n \right|$$

Para las series que satisfacen las condiciones del criterio de Leibniz sabemos que

$$E_N = |s - s_N| \leq |a_{N+1}| .$$

Dispondremos así, en algunos casos, de una cota del error cometido al sustituir la suma total por la suma parcial s_n. De esta manera, será posible determinar la suma s con la precisión deseada sin sumarla en forma exacta. Como ejemplo, para determinar la suma de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1}$$

podemos usar la cota de error asociada al teorema de Leibniz. En consecuencia,

$$E_N = |s - s_N| \leq \frac{1}{(N+1)^2 + 1}$$

de modo que si aproximamos con la suma de los 100 primeros términos

$$s \approx s_{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} \approx 0.3639359773$$

tendremos para el error

$$E_{100} = |s - s_{100}| \leq \frac{1}{(100+1)^2 + 1} = \frac{1}{10202} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

lo que nos asegura que los primeros tres decimales de s_{100} coinciden con los de s.

Para obtener al menos 5 decimales correctos necesitamos asegurar que se cumple

$$\frac{1}{(N+1)^2 + 1} < 10^{-6}$$

o equivalentemente, resolviendo la desigualdad con la ayuda de D5W, que $N \geq 999$.

Así pues, la suma de 1000 términos nos proporcionara los primeros cinco decimales de la suma[1]

$$s \approx s_{1000} = \sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \approx \mathbf{0.36398}49730$$

En los casos en que no es posible usar el teorema de Leibniz necesitamos obtener nosotros la cota de error. Cuando no disponemos de una cota para el error, podemos igualmente aproximar la suma de la serie por una de sus sumas parciales. Sin embargo, en estos casos no tendremos garantías de que los valores obtenidos sean correctos puesto que la convergencia puede ser muy lenta. Por ejemplo sumando *mil millones de términos* de la serie

$$\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\log(n)} - \frac{1}{\log(n+1)} \right)$$

seguimos sin conocer el primer decimal de la suma: $s_{1000000000} = 1.39444...$ mientras que $s = \frac{1}{\log(2)} = 1.44269...$

Podremos, eso sí, ir comparando valores de distintas sumas parciales y considerar válidos aquellos decimales que no varíen de unas a otras.

8.2 Series de Potencias

8.2.1 Introducción

En Análisis Numérico suelen utilizarse los polinomios, funciones relativamente sencillas, para aproximar otras cuyo estudio resulta más complejo. Dada una función f, se trata de encontrar un polinomio de grado menor o igual a n que aproxime la función con una cierta precisión. Los *polinomios de Taylor* son un tipo de polinomios usados frecuentemente para aproximar funciones.

El teorema de Taylor permite escribir, supuesta una función f derivable hasta el orden $(n+1)$ en un intervalo $I =]a-h, a+h[$, la expresión, para $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

siendo

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

el *polinomio de Taylor* de f en a, de orden n y donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

[1] En concreto, $s = 0.3639854...$

es el *Resto de Lagrange* correspondiente, en el que s representa cierto punto entre a y x. Cuando $a = 0$, hablaremos del desarrollo de McLaurin de f.

Cuando f es infinitamente derivable en I, se define la *serie de Taylor* para f en a como

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

cuya suma parcial n-ésima es el polinomio de Taylor. En consecuencia, esta serie converge a $f(x)$ si y solo si

$$\lim_n R_n(x) = 0.$$

Entonces es evidente que

$$\lim_n P_n(x) = f(x)$$

y podemos escribir (para $x \in I$)

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

En general, una expresión del tipo

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$$

se conoce como *serie de potencias* centrada en a. Aplicando a la serie el criterio de la raíz n-ésima de Cauchy, para estudiar su convergencia, se deduce que converge (absolutamente) si $|x-a| < R$ y diverge cuando $|x-a| > R$, siendo R el radio de convergencia de la serie

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

En ocasiones R se obtiene a partir del criterio de d'Alembert

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

y coincide con el anterior cuando ambos límites existen. El intervalo $]a-R,\ a+R[$ se denomina *intervalo de convergencia* de la serie de potencias. En sus extremos la serie puede converger o diverger.

Las propiedades de una función f definida mediante una serie de potencias en su intervalo de convergencia, son semejantes a las de un polinomio. En particular, f poseerá una derivada cuya representación en serie de potencias se puede hallar derivando término a término la serie inicial. Análogamente, se pueden calcular integrales definidas de f integrando su serie de potencias término a término. Concretamente, si

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$$

con radio de convergencia R, f es derivable en $]a-R,\ a+R[$ y

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x-a)^{n-1} \qquad , \qquad x \in \,]a-R,\ a+R[\,.$$

Además, si $x \in \,]a-R,\ a+R[$,

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n+1)} (x-a)^{n+1}$$

8.2.2 Aproximación de funciones mediante polinomios de Taylor

Utilizaremos ahora las opciones de D5W para obtener polinomios de Taylor de algunas funciones, analizando y acotando, si es posible, los errores cometidos al aproximar una función mediante el polinomio y valores numéricos de una función que aproximaremos por las estimaciones que proporcionan los polinomios al sustituir el valor de x (cercano al centro del desarrollo) por números concretos. Las opciones gráficas permitirán observar el carácter local de las aproximaciones.

Como ejemplo, dado que la exponencial es infinitamente derivable, el teorema de Taylor permite escribir,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^{\alpha x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

para cierto α entre 0 y 1 y el resto $e^{\alpha x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tiende a 0 (cuando n tiende a $+\infty$). De ahí, es posible escribir la función exponencial como suma de la serie

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

conocida como serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$ en el punto $a = 0$. Observa que la serie tiene la forma $\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ donde los coeficientes vienen dados por $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Para hallar el polinomio de Taylor centrado en 0 (McLaurin) de grado 5 para la función exponencial tan solo tienes que editar la función exponencial, sombrearla y aplicar la secuencia Calculus:Taylor series. Aparecerá un cuadro de diálogo que te permite elegir el nombre de la variable x, el centro del desarrollo (0, en este caso) y el grado del poliniomio (5, por defecto). Al simplificar obtendrás

$$\frac{\mathrm{x}^5}{120}+\frac{\mathrm{x}^4}{24}+\frac{\mathrm{x}^3}{6}+\frac{\mathrm{x}^2}{2}+\mathrm{x}+1$$

que puedes representar gráficamente, junto con la función exponencial. Observa que ambas funciones se solapan en un intervalo centrado en 0. Esto es consecuencia de la igualdad anterior, ya que

$$e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Observa cómo, en ocasiones, mejora la aproximación de una función mediante polinomios de Taylor a medida que aumenta el grado del polinomio. Para ello, puedes generar un vector con 7 componentes, de modo que la k-ésima contenga el polinomio de Taylor de orden k de la función e^x. Edita la línea

```
VECTOR(TAYLOR(ê^x,x,0,n),n,1,7)
```

y simplifícalo para calcularlo. D5W te devuelve un vector cuyas componentes son los polinomios de McLaurin de la función exponencial de grados 1 a 7. Representa gráficamente la función exponencial y los polinomios que has obtenido. Observa cómo a medida que aparecen las gráficas de los sucesivos polinomios de McLaurin, las aproximaciones se van acercando cada vez más a la función e^x, en entornos del 0 cada vez mayores.

Para aproximar el número e bastaría con sustituir x por 1 en el polinomio de McLaurin correspondiente. Concretamente, si sustituyes x por 1 en el polinomio de McLaurin de grado 5 calculado anteriormente, obtendrás como aproximación del número e

```
2.7166666666
```

Como sabemos, del resumen teórico, el error cometido cuando se aproxima una función por su correspondiente polinomio de Taylor de grado n viene determinado por el resto de Lagrange. En nuestro caso, si $x=1$, resulta ser

$$R_5(1)=\frac{f^{vi)}(\alpha)}{6!}$$

con $\alpha\in\,]0,1[$. Tratemos, pues, de acotar, la expresión anterior en valor absoluto. Como la sexta derivada de la función exponencial es la propia e^x y, puesto que

$$0<\alpha<1\Rightarrow 1<e^\alpha<e<3$$

deducimos que

$$|R_5(1)|\leq\frac{3}{6!}$$

que garantiza , al menos, dos decimales exactos ya que

$$|R_5(1)| \leq 0.004166666 < 5 \cdot 10^{-3}$$

resultado compatible con el error real que puedes hallar comparando con la estimación que proporciona D5W para el número e (≈ 2.718281828).

También puedes calcular las aproximaciones sucesivas del número e que proporcionan, por ejemplo, los 7 primeros polinomios de McLaurin. Para ello sólo tienes que sustituir de nuevo, x por 1, en el vector que contiene los 7 primeros polinomios de McLaurin que ya has hallado anteriormente. Al aproximar, obtendrás

```
[2,2.5,2.666666666,2.708333333,2.716666666,
                                    2.718055555,2.718253968]
```

Observa que a medida que aumenta el grado del polinomio utilizado, mejora la precisión. La aproximación con el polinomio de grado 7 garantiza 4 decimales exactos.

Con el fin de automatizar este proceso, definimos la siguiente función-Derive

```
VTN(u,x,a,b,m) := LIM(VECTOR(TAYLOR(u,x,a,n),n,1,m),x,b)
```

que genera un vector cuya componente k-ésima contiene la aproximación a $u(b)$ que proporciona el polinomio de Taylor de grado k , centrado en a, para $u(x)$. Así, por ejemplo, para hallar el vector que proporcionaba las aproximaciones sucesivas del número e, deberías aproximar (compruébalo)

```
VTN(ê^x,x,0,1,7)
```

y para aproximar $e^{-1/2}$ mediante los 10 primeros polinomios de McLaurin ($a = 0$) de la función exponencial, tendrás que aproximar

```
VTN(ê^x,x,0,-1/2,10)
```

D5W te devuelve el vector

```
[0.5,0.625,0.6041666666,0.6067708333,0.6065104166,0.6065321180,
            0.6065305679,0.6065306648,0.6065306594,0.6065306597]
```

Compara estas aproximaciones con el valor que devuelve D5W para $e^{-1/2}$ (≈ 0.6065306597).

En este caso, a partir de la serie de Taylor de la función exponencial, sustituyendo x por $-1/2$, se tiene

$$e^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1} \cdot (n-1)!}$$

Observa que $e^{-1/2}$ es el valor exacto de una serie convergente por Leibniz, por lo que se conoce una cota del error cometido al aproximar la suma exacta por la suma parcial N-ésima

$$E_N = |s - s_N| \leq |a_{N+1}| = \frac{1}{2^N \cdot N!}$$

de ahí que el error cometido en la última aproximación (tomando 11 sumandos al sustituir en el polinomio de McLaurin de grado 10) sea

$$E_{11} = |s - s_{11}| \leq |a_{12}| = \frac{1}{2^{11} \cdot (11)!} < 10^{-10}$$

que garantiza, al menos, 9 decimales exactos en la aproximación anterior.