5 Prácticas Quinta y Sexta: Sucesiones de Números Reales

Tratamos aquí diversos aspectos sobre sucesiones de números reales y sus aplicaciones mediante las utilidades de D5W: representación gráfica, cálculo de límites y resolución de ecuaciones en diferencias. Destacan por su utilidad las sucesiones recurrentes que permiten modelar problemas definidos mediante procesos inductivos.

5.1 Generalidades. Representación gráfica

En ocasiones, obtener algunos elementos de una sucesión $\{a_n\}$ es suficiente para intuir su comportamiento y disponer de una representación gráfica puede ayudarnos a descubrir la monotonía, acotación, convergencia, etc.

Dado que una sucesión de números reales es una función real con dominio el conjunto de los naturales, comenzamos declarando la variable `n` como entero positivo. Recuerda que para ello es necesario utilizar la secuencia Declare:Variable Domain. Aparece un cuadro de diálogo que te pide el nombre de la variable. Escribimos `n` y, para declararla como natural, seleccionamos Integer y Positive. En pantalla aparece

$$\mathtt{n} :\in \mathtt{Integer}(0,\infty),$$

que también puede ser introducida directamente.

Para estudiar el comportamiento de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

introducimos en la línea de edición

$$\mathtt{a(n)} := (\mathtt{n}+1)/(\mathtt{n\hat{}2}+1)$$

y aparecerá en la ventana de álgebra la definición correspondiente.

Para generar un gráfico con estos valores, necesitamos representar el conjunto de puntos de la forma $[n, a(n)]$. Este conjunto se contruye seleccionando `a(n)` y usando la secuencia Calculus:Table. Aparecerá un cuadro de diálogo que te permite elegir el nombre de la variable y los valores inicial y final, así como el tamaño del paso. Tendrás así en pantalla

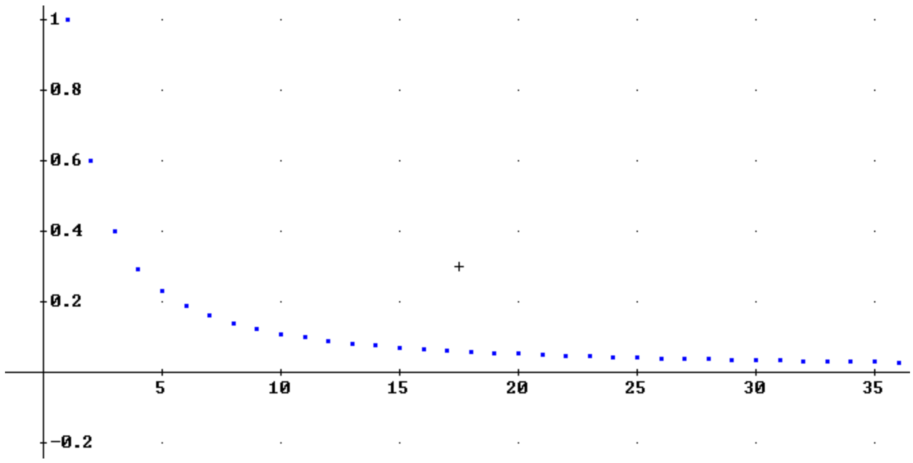
```
TABLE(a(n),n,1,50,1)
```

y, al simplificar obtendrás la matriz[1]

[1] Alternativamente podrías haber obtenido esta matriz aproximando `VECTOR([n,a(n)],n,1,50,1)`.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 \\
2 & 0.6 \\
3 & 0.4 \\
4 & 0.294117647 \\
5 & 0.2307692307 \\
\vdots & \vdots \\
46 & 0.02220122815 \\
47 & 0.02171945701 \\
48 & 0.02125813449 \\
49 & 0.02081598667 \\
50 & 0.02039184326
\end{bmatrix}
$$

que, representada con una escala adecuada,



te sugiere, por ejemplo, que se trata de una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0. Aunque la gráfica por sí misma no prueba nada.

5.2 Criterios para el cálculo de límites

Como norma general, podemos usar la secuencia Calculus:Limit para determinar el límite[1] de las sucesiones convergentes definidas en forma explícita cuando tengamos garantías de que D5W nos va a proporcionar el resultado correcto.

D5W aplica correctamente el proceso de cálculo de límites en muchas ocasiones. Así, sin más que aplicar la secuencia Calculus:Limit a

$$\frac{6n^2+1}{3-2n^2} \quad , \quad \left(\frac{2n+1}{3n-\sqrt{n}}\right)^{n+2}, \quad \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$$

[1] Cuando n tiende a $+\infty$, obviamente

obtendremos el valor correcto de los límites. Respectivamente -3, 0, 1, como puedes comprobar.

El programa también reconoce indeterminaciones del tipo 1^∞ y aplica la fórmula de Euler para resolverlas. Por ejemplo, para calcular el límite de la sucesión (del tipo 1^∞)

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$$

basta aplicar la secuencia Calculus:Limit para obtener e^2.

5.3 Sucesiones recurrentes

D5W dispone de dos herramientas que nos van a permitir trabajar con sucesiones recurrentes: la función `ITERATE/S`[1] y la cláusula `IF`[2].

Por ejemplo, la expresión

$$\begin{cases} a_1 & = \sqrt{2} \\ a_{n+1} & = \sqrt{2a_n}\ , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

determina de forma recurrente la sucesión cuyos términos son

$$\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{2\sqrt{2}} \quad , \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \quad , \ldots$$

Así, utilizando la función `ITERATE` deberemos escribir

$$\texttt{a(n)} := \texttt{ITERATE(SQRT(2x),x,SQRT(2),n} - \texttt{1)}$$

Con la definición anterior, calcular términos de la sucesión es inmediato. Por ejemplo, trabajando con una precisión de 20 dígitos (utiliza la secuencia Declare:Simplification Settings para cambiarle el número de dígitos), obtienes

$$\begin{aligned} a(10) &\approx 1.9986466550053015047 \\ a(20) &\approx 1.9999986779271097905 \\ a(30) &\approx 1.9999999987089127668 \end{aligned}$$

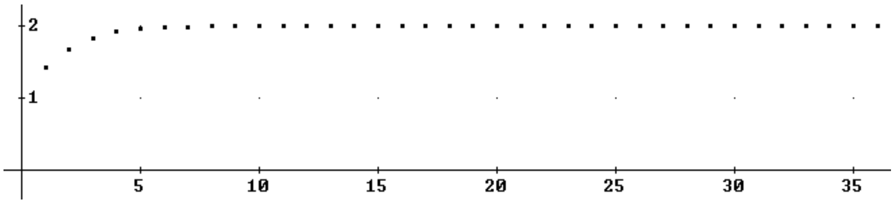
Para representar gráficamente la sucesión procedemos como en la forma explícita: aproximamos la expresión

`TABLE(a(n),n,1,50)`

y representamos la matriz obtenida.

[1] `ITERATE(u,x,x0,n)` devuelve el elemento $n+1$ de la sucesión $\{x_0, u(x_0), u(u(x_0)), \ldots\}$ e `ITERATES` opera igual pero devuelve el vector con los $n+1$ primeros términos de la sucesión, en la forma $[x_0, u(x_0), u(u(x_0)), \ldots]$. Consulta la ayuda de D5W para más detalles.

[2] `IF(r,t,f,u)` analiza la expresión `r` y devuelve `t` cuando es cierta, `f` cuando es falsa y `u` cuando no sabe decidir. Consulta la ayuda de D5W para más detalles.



Si intentas hallar el límite de la sucesión recurrente con la secuencia Calculus:Limit, tanto en modo exacto como en modo aproximado, no obtendrás respuesta. Esto sucede porque D5W no es capaz de calcular límites de sucesiones definidas mediante la función ITERATE o el comando IF.

Para obtener el valor del límite, supuesto que $\alpha = \lim_n a_n$ existe, aplicamos límites en la fórmula de recurrencia. Tendremos así que α debe de satisfacer la ecuación

$$\alpha = \sqrt{2\alpha}$$

y podemos resolver ésta usando la secuencia Solve:Expression. D5W te devolverá

$$\alpha = 0 \ \vee \ \alpha = 2$$

de donde podemos concluir que el valor del límite es 2; puesto que no puede ser 0.

Alternativamente, utilizando la cláusula IF podemos definir la sucesión mediante

$$\mathtt{a(n) := IF(n = 1,\sqrt{2},\sqrt{2a(n-1)})}$$

Analicemos ahora el caso de

$$\begin{cases} a_1 & = & -1 \\ a_2 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & \frac{2a_n + a_{n+1}}{3}\ , \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Se trata de una sucesión recurrente en la que cada término depende de los dos precedentes. Para definir su término general usaremos cláusulas IF anidadas, en la forma

$$\mathtt{a(n) := IF(n = 1, -1, IF(n = 2, 1,(2a(n-2) + a(n-1))/3))}$$

Si con esta definición generamos una tabla con los 20 primeros términos de la sucesión podremos intuir que se trata de una sucesión convergente a 0.2. La demostración de que es así no es evidente, de modo que la dejamos para el apartado siguiente en el que obtendremos una forma explícita para $a(n)$.

Como comentario, podemos destacar, que la definición de la sucesión recurrente usando IF puede resultar más clara que la equivalente usando ITERATE, pero es bastante menos efectiva. Usar IF hace que cada vez que calculamos un término se recalculen todos los valores anteriores de la sucesión. Puedes comprobar que, en el último ejemplo que hemos tratado, la definición usando IF necesita más de 10 minutos para obtener $a(40)$ mientras que si usamos ITERATES, $a(40)$ se obtiene en menos de un segundo.

5.4 Ecuaciones en diferencias lineales

Una ecuación en diferencias lineal de *primer orden* es de la forma

$$a_{n+1} = s_n \cdot a_n + t_n$$

con s_n y t_n sucesiones conocidas, y puede resolverse para a_n de forma directa.

Para resolver la ecuación en diferencias anterior, basta escribir

$$\texttt{LIN1\_DIFFERENCE(sn,tn,n,n1,A)}$$

con los argumentos apropiados y simplificar. En esta función los argumentos $n1$ y A se utilizan para introducir la condición inicial

$$a_{n1} = A$$

Por ejemplo, la solución de la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} a_1 & = & 2 \\ a_{n+1} & = & a_n + \frac{2n+3}{3} \ , \ n \geq 1 \end{cases}$$

se obtiene introduciendo[1] la expresión

$$\texttt{LIN1\_DIFFERENCE(1,(2n + 3)/3,n,1,2)}$$

y simplificando. El programa[2] responde $\frac{\mathtt{n^2+2n+3}}{3}$ que es la solución del problema. Esto es $a(n) = \frac{n^2+2n+3}{3}$.

Por lo que respecta a las ecuaciones en diferencias lineales de *segundo orden con coeficientes constantes*, del tipo

$$a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = t_n$$

sujeta a dos condiciones iniciales

$$a_{n1} = A \quad , \quad a_{n2} = B$$

su solución está definida en el mismo fichero. Se resuelven simplificando

$$\texttt{LIN2\_CCF\_BV(p,q,tn,n,n1,A,n2,B)}$$

con los argumentos apropiados. Por ejemplo, la solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} a_{n+2} - 5 \cdot a_{n+1} + 6 \cdot a_n = n^2 \\ a_1 = 3, \ a_2 = 5 \end{cases}$$

[1] Ahora $s_n = 1$, $t_n = \frac{2n+3}{3}$, $n_1 = 1$ y $a_{n_1} = 2$

[2] Es posible que encuentres algunos casos para los que esta función no simplifique la solución. Esto sucede debido a que no siempre va a ser posible obtener una expresión explícita para evaluar el sumatorio que aparece en la fórmula de la solución.

se obtiene introduciendo la expresión

```
LIN2_CCF_BV(−5,6,n^2,n,1,3,2,5)
```

y simplificando. El programa responde

$$\frac{3^{n-1}}{2} - 2^{n} + \frac{n^2 + 3n + 5}{2}$$

en donde puedes reconocer, puesto que conoces la forma de las soluciones, dos soluciones de la ecuación homogénea y una solución particular de la completa

$$a_n^1 = 3^n \quad , \quad a_n^2 = 2^n \quad ; \quad u_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{2}.$$

Como ejemplo adicional obtengamos una expresión explícita de la última sucesión tratada en el epígrafe anterior

$$\begin{cases} a_1 & = & -1 \\ a_2 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & \frac{2a_n + a_{n+1}}{3} \ , \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

que nos permita obtener su límite. Para ello la podemos reescribir en la forma

$$a_{n+2} - \frac{1}{3} \cdot a_{n+1} - \frac{2}{3} \cdot a_n = 0$$

y aplicar la función correspondiente. Simplificando

```
LIN2_CCF_BV(−1/3,−2/3,0,n,1,−1,2,1)
```

obtendremos que $a(n)$ viene definido por la expresión

$$\frac{2^n \cdot 3^{2-n} \cdot \cos(n\pi)}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n + \frac{1}{5}$$

que obviamente[3] tiende a $\frac{1}{5} = 0.2$.

Aunque el proceso es, en general, muy sencillo debemos tener cuidado con la forma de las ecuaciones en diferencias que resolvemos. Su formato debe ajustarse al que D5W resuelve o encontraremos resultados incorrectos. Quiere esto decir que para resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} a_n = n^2 + 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} \quad , \quad n > 3 \\ a_1 = 1, \ a_2 = 1. \end{cases}$$

[3]Observa que $\cos(n\pi) = (-1)^n$

tienes que empezar por reescribirla (cambiando n por $n+2$ y llevando los sumandos correspondientes al primer miembro de la igualdad) en la forma equivalente

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2 \cdot a_{n+1} + a_n = (n+2)^2 \quad , \quad n > 1 \\ a_1 = 1, \;\; a_2 = 1. \end{cases}$$

Así, simplificando la función `LIN2` correspondiente

```
LIN2_CCF_BV(-2,1,(n+2)^2,n,1,1,2,1)
```

obtendremos la solución

$$a_n = \frac{n^4 + 4n^3 + 5n^2 - 58n + 60}{12}.$$