Prácticas de Matemática Discreta.
Sesión 9
Flujos y redes
2011/12

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

23 de noviembre de 2011

Índice

Índice de figuras

1. Flujos y redes

2. Introducción

2.1. Motivación

En esta lección trataremos los problemas siguientes

- Reparto de bienes desde un origen a un destino (una fuente y un sumidero)
- Reparto de bienes desde varios orígenes a varios destinos (varias fuentes y varios sumideros)

2.2. Definiciones de red y flujo

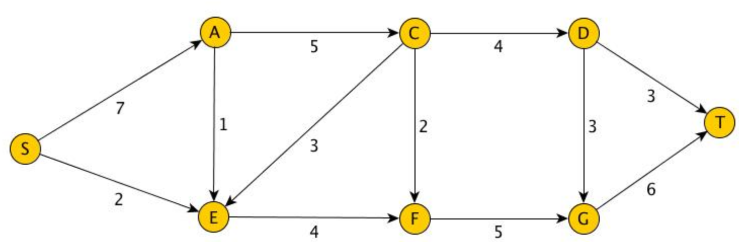
Para resolver este tipo de problemas necesitamos introducir los conceptos de **red** y de **flujo**.

Definición 2.1 ***Red.***
Una ***red*** N *es un grafo dirigido débilmente conexo* $G = (V, E)$ *con dos vértices especiales:*

- s*, al que llamaremos* ***fuente****, con* $d_0(s) > 0$*, y*
- t*, al que llamaremos* ***sumidero****, con* $d_i(t) > 0$*;*

y una función no-negativa $c : E \to \mathbb{N}$*, llamada* ***capacidad*** *de la red* N*. Denotaremos a esta red como* $N(G, s, t, c)$*.*

Ejemplo 2.1 *En el siguiente dibujo tenemos una red donde hemos representado en cada arista la capacidad de la misma.*



Para modelizar problemas basados en redes, necesitamos introducir el concepto de **flujo** en una red.

Definición 2.2 ***Flujo.***
Sea $N(G, s, t, c)$ *una red. Un* ***flujo*** f *en* N *es una función* $f : E \to \mathbb{N}$ *tal que*

- $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ *para toda* $(u, v) \in E$ *(****El flujo de*** u ***a*** v ***no puede exceder la capacidad****).*

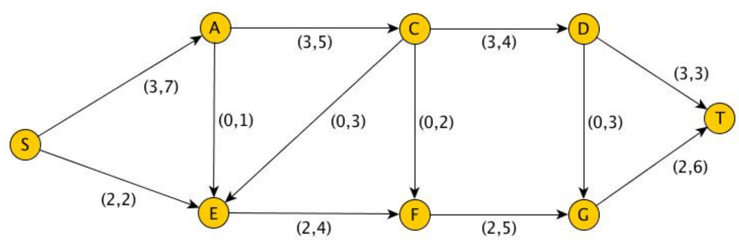
- $\sum_{v\in\Gamma(u)} f(u,v) = \sum_{w\in\Gamma^{-1}(u)} f(w,u)$ *(Para cualquier vértice que no sea ni la fuente ni el sumidero se cumple la* ***Ley de conservación del flujo****.*

Representamos por $f(N)$ *el valor del flujo* f *en* N que va de la fuente s al sumidero t asociado a f, esto es

$$f(N) = \sum_{v\in\Gamma(s)} f(s,v) = (\text{que es igual a}) = \sum_{v\in\Gamma^{-1}(t)} f(v,t).$$

Un flujo decimos que es **máximo** si $f'(N) \leq f(N)$ para cada flujo f' en N. En estos problemas, el flujo máximo podría no ser único.

Ejemplo 2.2 *En el siguiente dibujo tenemos una red donde hemos representado en cada arista el flujo y la capacidad de cada arista. Se puede comprobar que se verifican las restricciones de flujo en las aristas y en los vértices. Asímismo, se puede comprobar que el valor del flujo es 5.*



3. ¿Cómo incementar el flujo en una red?

En una red $N(G,s,t,c)$, el flujo a través de algunas arsitas coincide con la capacidad de las mismas. Diremos que una arista $e \in E$ de la red está **saturada** si $f(e) = c(e)$ y que **no está saturada** si $f(e) < c(e)$.

Un flujo en una red puede ser incrementado si podemos encontrar semicaminos dirigidos de s a t que nos permitan aumentar el flujo sobre ellos. A estos semicaminos dirigidos les llamaremos semicaminos f-incrementables.

Recordemos que un semicamino es una sucesión de aristas en el grafo subyacente no dirigido. Al obviar los sentidos hay algunas aristas que se toman en su sentido correspondiente (propiamente orientadas) y otras al revés (impropiamente orientadas).

Definición 3.1 ***Semicamino f-incrementable.***

Sea $G = (V,E)$ *un grafo dirigido El semicamino* $u_0, u_2, \ldots, u_r$ *es un* ***semicamino f-incrementable*** *si se cumplen una de las siguientes condiciones para cada arista* $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ *con* $1 \leq i \leq r$*:*

- *Si* e_i *es una arista propiamente dirigida, entonces* $c(e_i) > f(e_i)$.
- *Si* e_i *es una arista iimpropiamente dirigida, entonces* $f(e_i) > 0$.

Esto es, **podemos aumentar el flujo en la dirección de las aristas propiamente dirigidas y disminuirlo en la dirección de las impropiamente dirigidas.**

Esta idea la vemos reflejada en el siguiente resultado que nos permite aumentar un flujo utilizando semicaminos f-incrementables.

Teorema 3.1 *Sea f un flujo en la red $N(G, s, t, c)$. Sea P un semicamino f-incrementable $u_0, u_1, \ldots, u_r$, con $u_0 = s$ y $u_r = t$. Denotemos $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ con $1 \leq i \leq r$. Sea*

$$\Delta_i = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i) & \text{si } e_i \text{ es una arista propiamente dirigida,} \\ f(e_i) & \text{si } e_i \text{ es una arista impropiamente dirigida,} \end{cases}$$

y $\Delta = \min\{\Delta_i\,;\, 1 \leq i \leq r\}$.

Entonces la función $\tilde{f} : E \to \mathbb{N}$ definida como

$$\tilde{f}(e_i) = \begin{cases} f(e_i) + \Delta & \text{si } e_i \text{ es una arista propiamente dirigida,} \\ f(e_i) - \Delta & \text{si } e_i \text{ es una arista impropiamente dirigida, y} \\ f(e_i) & \text{if } e_i \text{ no pertenece a } P; \end{cases}$$

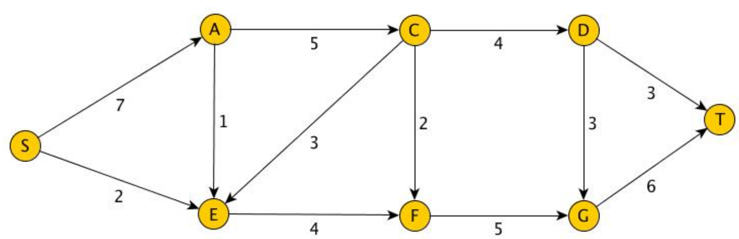
es un flujo en N y $\tilde{f}(N) = f(N) + \Delta > f(N)$

En este teorema queda claro que $\tilde{f}(N) > f(N)$ para $\Delta > 0$ puesto que P es un semicamino f-incrementable.

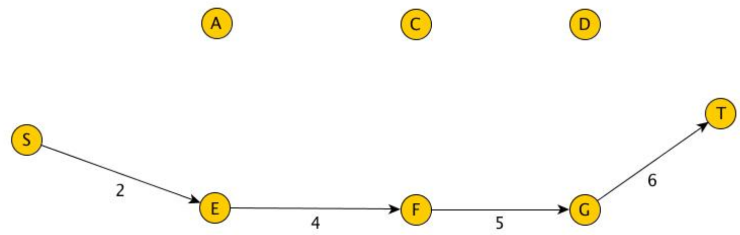
El siguiente teorema nos permite afirmar que los semicaminos f-incrementables son fundamentales para incrementar el valor de un flujo en una red.

Teorema 3.2 *Sea $N(G, s, t, c)$ una red y f un flujo en la red N. Un flujo es máximo en N si, y solamente si, no existe ningún semicamino f-incrementable en N.*

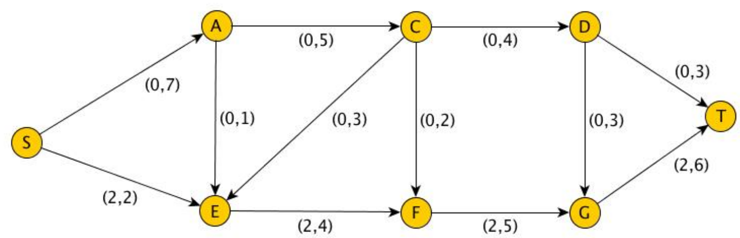
Ejemplo 3.1 *Veamos cómo se puede incrementar un flujo a partir de semicaminos incrementables. Consideremos la siguiente red en la que en cada arista está indicada la capacidad.*



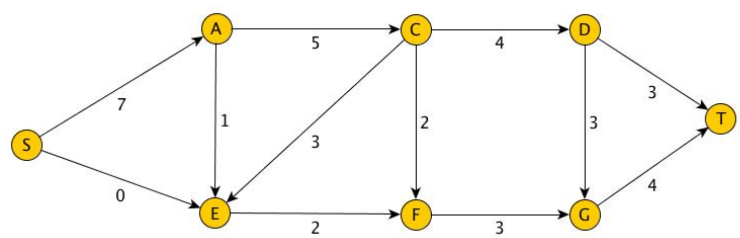
Partamos del flujo inicial nulo, es decir, el que tiene como valor del flujo 0 en cada una de las aristas. El flujo se puede incrementar a lo largo del siguiente semicamino f.



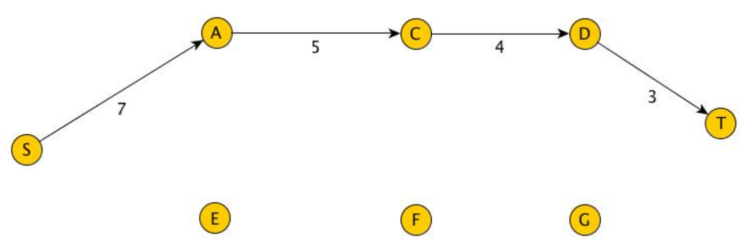
Hemos indicado la capacidad de cada arista en el dibujo. Como vemos, el flujo se puede incrementar a lo largo de este semicamino en 2 unidades. Lo incrementamos y obtendríamos el siguiente flujo. En la representación gráfica indicamos mediante una pareja de números en cada arista el flujo y la capacidad en la misma.



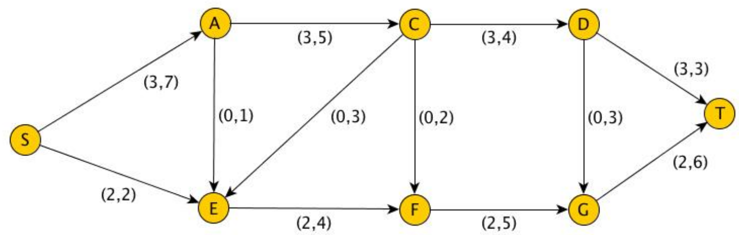
Si calculamos la diferencia entre capacidad y flujo obtenemos las "nuevas" capacidades que indican en cuànto se puede incrementar el flujo todavía.



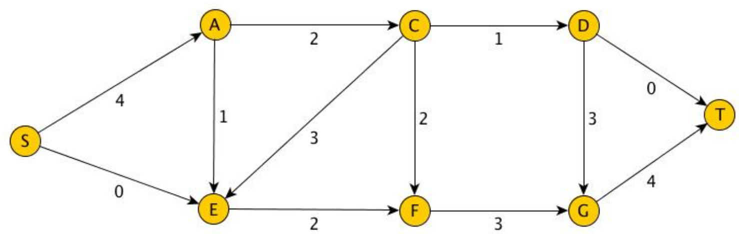
Buscamos otro camino semicamino incrementable.



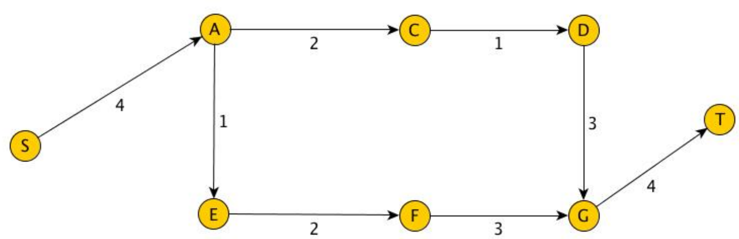
Como vemos el flujo a lo largo del mismo se puede incrementar en 3 unidades (mínimo de las capacidades de las aristas del camino). Por lo tanto, el flujo se puede incrementar como indicamos a continuación.



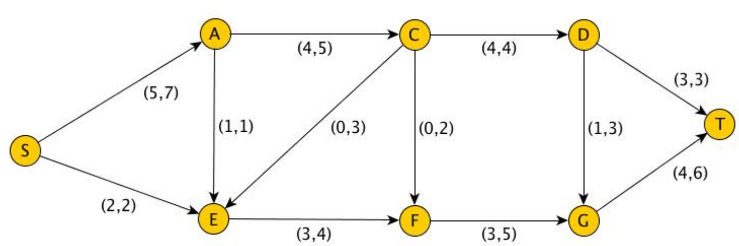
Calculamos nuevamente la diferencia entre capacidades y flujos.



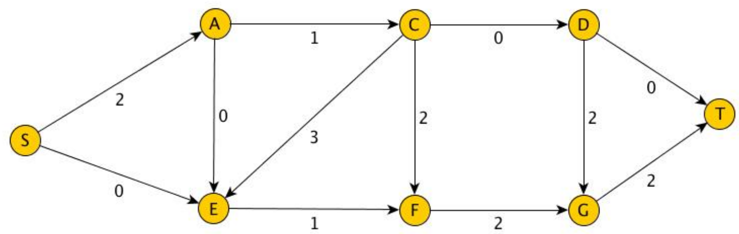
Los siguientes semicaminos muestran como se puede incrementar el flujo en 2 unidades, en 1 utilizando el semicamino S,A,B,D,G,T y en otra unidad utilizando S,E,F,G,T.



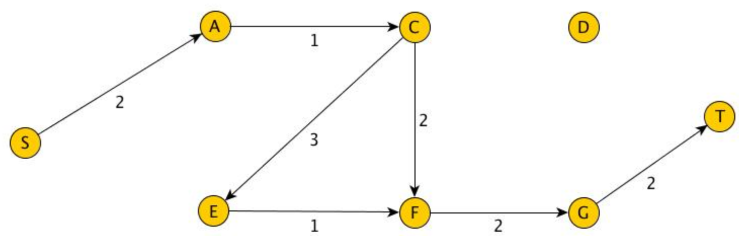
De esta manera el flujo se puede incrementar hasta obtener



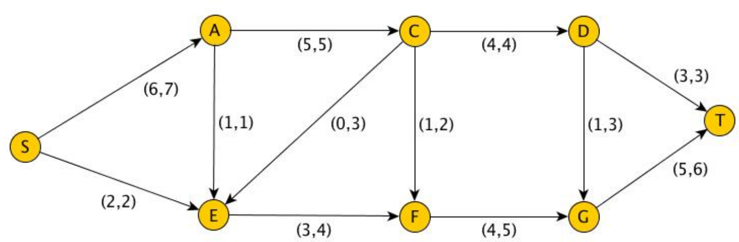
La diferencia entre capacidad y flujo en estos momentos es



Si representamos únicamente las aristas que pueden dar lugar a semicaminos incrementables obtenemos



Vemos que el flujo se puede incrementar en una unidad por el semicamino S,A,C,F,G,T o bien por S,A,C,E,F,G,T. Elegimos la primera opción y obtenemos.



Este flujo es máximo ya que no hay semicaminos incrementables de S a T.

3.1. Ejercicios complementarios

Para completar esta sesión se recomienda revisar los ejercicios que aparecen en la bibliografía de la asignatura:

- Matemáticas discreta y combinatoria : una introducción con aplicaciones / Ralph P. Grimaldi.
- Matemática discreta y sus aplicaciones (Rosen, Kenneth H.)
- Matemáticas discretas (Ross, Kenneth A.)
- Applied and algorithmic graph theory (Chartrand, Gary)
- Graph theory and its applications (Gross, Jonathan)