Pràctiques d'Àlgebra

Solució de les activitats de la Pràctica 2

Activitat 1. *Determineu si la matriu de coeficients de cadascun dels sistemes d'equacions lineals següents, és (o no és) estrictament diagonalment dominant.*

$$a) \quad \left.\begin{array}{rcl} 10x+y+2z &=& 3 \\ 4x-6y-z &=& 9 \\ -2x+3y+8z &=& 51 \end{array}\right\} \qquad b) \quad \left.\begin{array}{rcl} 2x+y+t &=& 1 \\ x+y+z+2t &=& 1 \\ 2x+y+3z+t &=& 1 \\ x+2y+z-t &=& 2 \end{array}\right\}$$

Les matrius de coeficients d'aquests sistemes són

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -1 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per tant, A és estrictament diagonal dominant ($10>1+2,\ 6>4+1$ i $8>2+3$) i B no ho és.

Nota: si la matriu A fóra molt gran, podríem comprovar si és o no dominant calculant la diagonal D, la matriu Q sense diagonal, i comprovant si, fila a fila, $abs(D)$ és major que la suma de $abs(Q)$:

```
-->A=[10 1 2;4 -6 -1;-2 3 8];
-->D=diag(A)
 D  =
    10.
  - 6.
    8.
-->Q=A-diag(D)
 Q  =
    0.    1.    2.
    4.    0.  - 1.
  - 2.    3.    0.
-->abs(D)>sum(abs(Q),2)
 ans  =
  T
  T
  T
```

(Hem escrit $sum(-,2)$ perquè calcule la suma de les files; si no s'especifica gens, $sum(-)$, o es posa un 1, $sum(-,1)$, Scilab calcula la suma de les columnes.

Activitat 2. *a) Calculeu de forma directa les solucions dels sistemes de l'Activitat 1.*
b) Apliqueu els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel als sistemes anteriors, fent només 6 iteracions i elegint el vector nul com a vector inicial. Són convergents?

a) Introduïm les matrius de coeficients i els termes independents i resolem amb **rref**

```
-->A=[10 1 2;4 -6 -1;-2 3 8];b1=[3;9;51];R1=rref([A b1])
 R1  =
    1.    0.    0.  - 0.85
    0.    1.    0.  - 3.3
    0.    0.    1.    7.4
```

La solució d'aquest sistema és el vector $(-0.85,-3.3,7.4)$.

```
-->B=[2  1 0 1;1 1 1 2;2 1 3 1;1 2 1 -1];b2=[1;1;1;2];rref([B b2])
 ans  =
    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.    1.
    0.    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    1.    0.
```

La solució d'aquest sistema és el vector $(0, 1, 0, 0)$.

b) Apliquem el mètode de Jacobi al primer sistema

```
-->D=diag([diag(A)])
 D  =
    10.     0.    0.
    0.   - 6.    0.
    0.      0.    8.

-->U=triu(A)-D
 U  =
    0.    1.    2.
    0.    0.  - 1.
    0.    0.    0.
-->L=tril(A)-D
 L  =
    0.    0.    0.
    4.    0.    0.
  - 2.    3.    0.

-->x=[0;0;0];for i=1:6 x=D\(b1-(L+U)*x)
-->end

 x  =
    0.3
  - 1.5
    6.375
 x  =
  - 0.825
  - 2.3625
    7.0125
 x  =
  - 0.86625
  - 3.21875
    7.0546875
 x  =
  - 0.7890625
  - 3.2532812
    7.3654687
 x  =
  - 0.8477656
  - 3.2536198
    7.3977148
 x  =
```

```
   - 0.8541810
   - 3.2981296
     7.383166
```

$x_6 = (-0.8541810, -3.2981296, 7.383166)$ és una aproximació de la solució exacta.

Ara apliquem el mètode de Gauss-Seidel al mateix sistema. Primer activem el fitxer *SustitucionProgresiva.sci* i després calculem les 6 iteracions amb un bucle

```
-->x=[0;0;0];for i=1:6 x=SustitucionProgresiva(L+D,b1-U*x)
-->end

 x  =
     0.3
   - 1.3
     6.9375
 x  =
   - 0.9575
   - 3.2945833
     7.3710938
 x  =
   - 0.8447604
   - 3.2916892
     7.3981934
 x  =
   - 0.8504697
   - 3.3000121
     7.3998871
 x  =
   - 0.8499762
   - 3.2999653
     7.3999929
 x  =
   - 0.8500021
   - 3.3000002
     7.3999996
```

Ambdós mètodes convergeixen perquè A és estrictament diagonal dominant. Observa que la convergència és bastant ràpida sobretot amb Gauss-Seidel.

Apliquem el mètode de Jacobi al segon sistema:

```
-->D=diag([diag(B)]);U=triu(B)-D;L=tril(B)-D;

-->x=[0;0;0;0];for i=1:6 x=inv(D)*(b2-(L+U)*x)
-->end
 x  =
     1.
     4.1666667
     0.3333333
     0.8333333
 x  =
   - 2.
   - 2.
   - 2.
     7.6666667
```

```
 x  =
 - 2.3333333
 - 10.333333
 - 0.2222222
 - 10.
 x  =
   10.666667
   23.555556
   8.6666667
 - 25.222222
 x  =
   1.3333333
   32.111111
 - 6.2222222
   64.444444
```

Apliquem ara el mètode de Gauss-Seidel

```
-->x=[0;0;0;0];for i=1:6   x=SustitucionProgresiva(L+D,b2-U*x)
-->end
 x  =
   0.5
   0.5
 - 0.1666667
 - 0.6666667
 x  =
   0.5833333
   1.9166667
 - 0.4722222
   1.9444444
 x  =
- 1.4305556
 - 0.9861111
   0.9675926
 - 4.4351852
 x  =
  3.2106481
   5.6921296
 - 2.2260802
   10.368827
 x  =
 - 7.5304784
 - 9.9810957
   5.2244084
 - 24.268261
 x  =
   17.624678
   26.687436
 - 12.222844
   56.77670
```

A la vista dels resultats obtinguts podem concloure que cap dels dos mètodes convergeix.

Activitat 3. *Siga el sistema d'equacions*

$$\begin{aligned} 0.2x + 2.2y + 4.5z &= 0.7 \\ 1.3x + 3.7y + 2.1z &= 1.2 \\ 4.2x + 3.1y + 0.4z &= 5.2 \end{aligned}$$

(a) *Elegint el vector nul com a aproximació inicial, obteniu 20 aproximacions aplicant-hi el mètode de Jacobi. És convergent aquest mètode?*

(b) *Reordeneu les equacions d'aquest sistema perquè la seva matriu associada sigui estrictament diagonalment dominant. En tal cas, comproveu que el mètode de Jacobi convergeix i calculeu l'aproximació obtinguda fent servir 20 iteracions.*

a) Introduïm la matriu del sistema i la columna de termes independents i apliquem el mètode de Jacobi

```
-->A=[0.2 2.2 4.5;1.3 3.7 2.1;4.2 3.1 0.4]
 A  =
    0.2    2.2    4.5
    1.3    3.7    2.1
    4.2    3.1    0.4
-->b=[0.7;1.2;5.2];
-->D=diag([diag(A)])
 D  =
    0.2    0.     0.
    0.     3.7    0.
    0.     0.     0.4
-->R=A-D
 R  =
    0.     2.2    4.5
    1.3    0.     2.1
    4.2    3.1    0.

-->x=[0;0;0];for i=1:20   x=D\*(b-R*x)
-->end
 x  =
    3.5
    0.3243243
    13.
 x  =
  - 292.56757
  - 8.2837838
  - 26.263514
        .
        .
        .
 x  =
   1.0D+21 *
    24.654826
    1.9866275
    42.883508
 x  =
```

```
  1.0D+22 *
- 98.673183
- 3.3001795
- 27.427204
```

A la vista dels resultats podem concloure que el mètode no convergeix. Observeu que la matriu A no és diagonalment dominant.

b) En aquest cas és possible reordenar les equacions per a obtenir una matriu estrictament diagonalment dominant (intercanviant les equacions 1 i 3). Així, el mètode de Jacobi convergirà. Vegem com seria l'aproximació en la iteració 20.

Introduïm en Scilab la reordenació

```
-->A([1,3],:)=A([3,1],:)
 A  =
    4.2    3.1    0.4
    1.3    3.7    2.1
    0.2    2.2    4.5

-->b([1,3],:)=b([3,1],:)
 b  =
    5.2
    1.2
    0.7
```

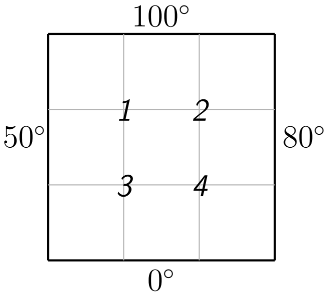
Ara, per a aquestes matrius, calcularem D i R i aplicarem Jacobi

```
-->D=diag([diag(A)])
 D  =
    4.2    0.     0.
    0.     3.7    0.
    0.     0.     4.5

-->R=A-D
 R  =
    0.     3.1    0.4
    1.3    0.     2.1
    0.2    2.2    0.

-->x=[0;0;0];for i=1:20 x=inv(D)*(b-R*x)
-->end
 x  =
    1.2380952
    0.3243243
    0.1555556
   .
   .
   .
 x  =
    1.4601648
  - 0.3292824
    0.2537708
 x  =
```

```
    1.4569683
  - 0.3327386
    0.2516418
```

L'aproximació obtinguda en la iteració numero 20 és $x_{20} = (1.4569683, -0.3327386, 0.2516418)$ que no sembla tenir encara moltes xifres decimals exactes (encara és gran la diferència entre x_{19} i x_{20}).

Activitat 4. *Una placa metàl·lica quadrada té una temperatura constant en cadascuna de les seues quatre vores. Per a calcular la temperatura en punts de l'interior de la placa, se superposa una reixeta virtual connectant punts de la vora amb punts interiors (vegeu l'exemple en la figura) i se suposa que la temperatura en cada punt interior és la mitjana de les temperatures en els 4 punts als quals està connectat mitjançant la reixeta.*



Així doncs, si T_i denota la temperatura al punt i, tenim que, per exemple

$$T_1 = \frac{1}{4}(50 + 100 + T_2 + T_3).$$

Calculeu les aproximacions de les temperatures als 4 punts interns de la reixeta amb els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel, fent-hi 11 iteracions i partint d'una aproximació inicial nul·la.

Escrivint la temperatura en cada punt com la mitjana de les temperatures als quatre punts veïns obtenim el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} T_1 &=& \frac{1}{4}(50+100+T_2+T_3) \\ T_2 &=& \frac{1}{4}(100+T_1+T_4+80) \\ T_3 &=& \frac{1}{4}(T_1+50+0+T_4) \\ T_4 &=& \frac{1}{4}(T_2+T_3+0+80) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 4T_1 - T_2 - T_3 &=& 150 \\ -T_1 + 4T_2 - T_4 &=& 180 \\ -T_1 + 4T_3 - T_4 &=& 50 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 &=& 80 \end{array}\right\}$$

La matriu de coeficients d'aquest sistema és estrictament diagonalment dominant, per tant ambdós mètodes convergiran.

Jacobi:

```
-->A=[4 -1 -1 0;-1 4 0 -1;-1 0 4 -1;0 -1 -1 4]
 A  =
    4.  - 1.  - 1.    0.
  - 1.    4.    0.  - 1.
  - 1.    0.    4.  - 1.
    0.  - 1.  - 1.    4.
-->b=[150;180;50;80]
 b  =
    150.
    180.
    50.
    80.
-->D=diag([diag(A)]);U=triu(A)-D;L=tril(A)-D;
```

```
-->x=[0;0;0;0];for i=1:11 x=inv(D)*(b-(L+U)*x)
-->end
 x  =
    37.5
    45.
    12.5
    20.
 .
 .
 .
 x  =
    66.193848
    73.693848
    41.193848
    48.693848
 x  =
    66.221924
    73.721924
    41.221924
    48.721924
```

Gauss-Seidel:

```
-->x=[0;0;0;0];for i=1:11 x=SustitucionProgresiva(L+D,b-U*x)
-->end
 x  =
    37.5
    54.375
    21.875
    39.0625
 .
 .
 .
 x  =
    66.249852
    73.749926
    41.249926
    48.749963
 x  =
    66.249963
    73.749982
    41.249982
    48.749991
```

Observeu que el mètode de Gauss-Seidel ha sigut més ràpid (és més menuda la distància entre x_{19} i x_{20}) i es pot concloure que la solució és: $T_1 = 66.25$, $T_2 = 73.75$, $T_3 = 41.25$ i $T_4 = 48.75$.