Pràctica 6
Ortogonalitat i projeccions ortogonals

Índex

1 Producte escalar, norma i distància

Recordarem en aquest punt diversos conceptes presentats en la teoria. Siguen $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors de $\mathbb{R}^n$.

- El *producte escalar* (o producte interior) de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és el nombre real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, es diu que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són *ortogonals*.

- Si W és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$, s'anomena *complement ortogonal* de W al subespai

$$W^{\perp} = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{z} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{per a tot } \vec{w} \in W\}.$$

- La *norma* (o longitud) de $\vec{v}$ és

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

  i $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

- Un vector es diu *unitari* si la seua norma és 1. El vector $(1/\|\vec{v}\|)\vec{v}$ sempre és unitari.

- La *distància* entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

- Donada una matriu real A amb m files i n columnes, s'anomena *subespai columna* de A (i es denota $\mathrm{Col}\,\mathsf{A}$) al subespai vectorial de $\mathbb{R}^m$ generat pels vectors columna de A.
- Donada una matriu real A amb m files i n columnes, s'anomena *subespai fila* de A (i es denota $\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}$) al subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ generat pels transposats dels vectors fila de A.

Teorema 1. Siga A una matriu real amb m files i n columnes. Se satisfà:

$$(\mathrm{Fil}\,\mathsf{A})^\perp = \mathrm{Nul}\,A \quad \text{i} \quad (\mathrm{Col}\,\mathsf{A})^\perp = \mathrm{Nul}\,A^t.$$

Exemple 1. Siguen

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

i considerem $W = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ i

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals, perquè $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 = 0.$
- $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 5^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{11}.$
- El vector $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w} = \begin{bmatrix} 3/2\sqrt{11} \\ 3/2\sqrt{11} \\ 5/2\sqrt{11} \\ -1/2\sqrt{11} \end{bmatrix}$ és unitari.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(5-4)^2 + (-4-1)^2 + (0-(-3))^2 + (3-8)^2} = 2\sqrt{15}.$
- A és equivalent per files a

  $$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 62 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  per tant

  $$(\mathrm{Fil}\,A)^\perp = \left(\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 62 \end{bmatrix} \right\rangle \right)^\perp = \mathrm{Nul}\,\mathsf{A} \quad \text{i} \quad (\mathrm{Col}\,A)^\perp = W^\perp = \mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^t$$

  Amb Scilab:

- Introduïm els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$:

```
-->u=[5;-4;0;3], v=[-4;1;-3;8], w=[3;3;5;-1]
 u  =

    5.
  - 4.
    0.
    3.
 v  =

  - 4.
    1.
  - 3.
    8.
 w  =

    3.
    3.
    5.
  - 1.
```

- Per comprovar que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals, calculem el seu producte escalar:

```
-->uv=u'*v
 uv  =

    0.
```

- Per determinar la norma del vector $\vec{w}$, farem servir la comanda **norm()**:

```
-->norm(w)
 ans  =

    6.6332496
```

- Per determinar un vector unitari associat amb $\vec{w}$, calculem

```
-->t=w/norm(w)
 t  =

    0.4522670
    0.4522670
    0.7537784
  - 0.1507557
```

- Comprovem que $\vec{t}$ és unitari:

```
-->norm(t)
 ans  =

    1.
```

- Per determinar la distància entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, fem

```
-->norm(u-v)
 ans  =

    11.83216
```

- Construïm la matriu A que té per columnes els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$:

```
-->A=[u v w]
 A  =

    5.  - 4.    3.
  - 4.    1.    3.
    0.  - 3.    5.
    3.    8.  - 1.
```

- Per trobar una base del subespai $(\mathrm{Fil}\,\mathsf{A})^{\perp}$, calculem el subespai nul associat a la matriu A:

```
-->NF=kernel(A)
 NF  =

     []
```

  És a dir: el vector nul és l'únic ortogonal al subespai fila $\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}$.

- De forma anàloga, per determinar una base del subespai $(\mathrm{Col}\,\mathsf{A})^{\perp}$ haurem de calcular una base del subespai nul associat amb A^t:

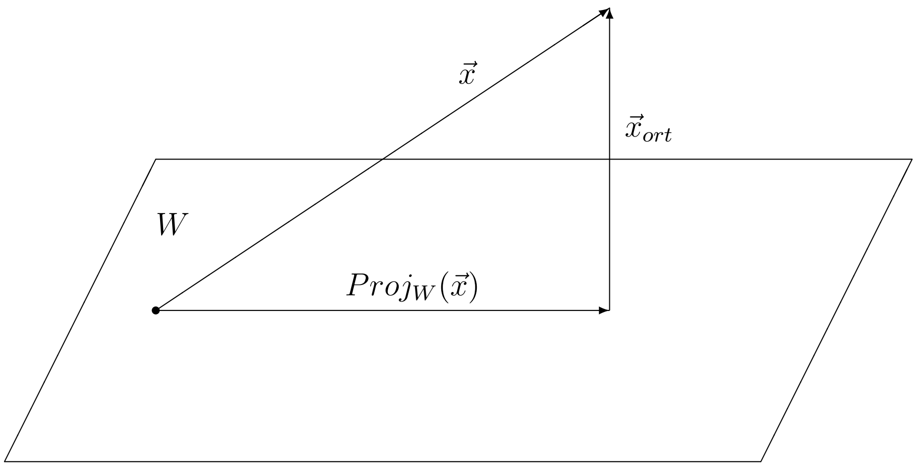
```
-->NC=kernel(A')
 NC  =

    0.4958960
    0.5689754
  - 0.6524947
  - 0.0678594
```

2 Projeccions ortogonals

2.1 Definició

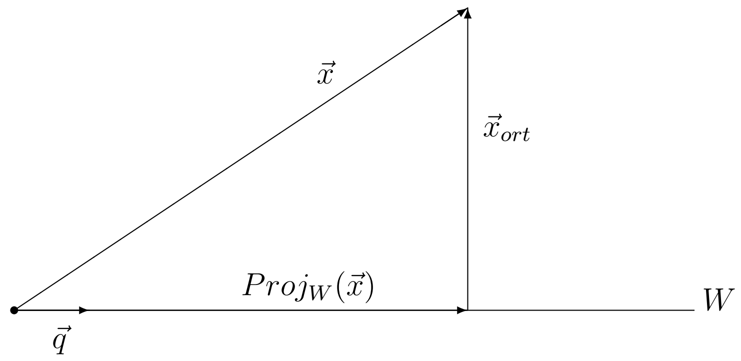
Siga W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Per a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existeix un *únic* vector $\vec{w} \in W$ i un únic vector $\vec{x}_{ort}$ en el complement ortogonal $W^\perp$ tals que $\vec{x} = \vec{w} + \vec{x}_{ort}$. El vector $\vec{w}$ s'anomena *projecció ortogonal* de $\vec{x}$ sobre el subespai W, i el denotarem amb $Proj_W(\vec{x})$. Aquesta definició formalitza i generalitza la idea greomètrica de "projecció perpendicular":



El vector $\vec{x}$ es pot descomposar, de forma única, com a suma de dues *components*: una d'elles ($Proj_W(\vec{x})$) sobre W i l'altra ($\vec{x}_{ort}$) és ortogonal a tots els vectors de W (és a dir, pertany a $W^\perp$). Quan parlem de la projecció ortogonal de $\vec{x}$ sobre W estem parlant de la component $Proj_W(\vec{x})$ sobre W en aquesta descomposició.

2.2 Cas fàcil: projecció ortogonal sobre una recta

Considerem el cas en el qual W és una recta de $\mathbb{R}^n$, és a dir, està generat per un únic vector no nul. Podem dividir aquest generador entre la seua norma i transformar-lo en un vector unitari (que continuarà generant la recta). Prenem $S = \{\vec{q}\}$, on $\vec{q}$ es un vector unitari que genera la recta.



Considerem un vector no nul qualsevol $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Volem calcular la projecció ortogonal $Proj_W(\vec{x})$ de $\vec{x}$ sobre W. Com $Proj_W(\vec{x})$ pertany a la recta W, existeix un escalar λ tal que $Proj_W(\vec{x}) = \lambda\vec{q}$. Però el vector $\vec{x} - \lambda\vec{q} = \vec{x}_{ort}$ és ortogonal a W i, per tant, $(\vec{x} - \lambda\vec{q}) \cdot \vec{q} = 0$. És a dir, $\vec{x} \cdot \vec{q} - \lambda\vec{q} \cdot \vec{q} = 0$; com $\vec{q}$ es unitari tenim que $\lambda = \vec{q} \cdot \vec{x}$ o, utilitzant la notació de producte fila-columna en lloc de la notació del producte escalar, $\lambda = \vec{q}^{\,t}\vec{x}$. Concloem, per tant, la següent afirmació:

> La projecció ortogonal d'un vector $\vec{x}$ sobre una recta W és el vector
>
> $$Proj_W(\vec{x}) = (\vec{q}^{\,t}\vec{x})\vec{q}$$
>
> on $\vec{q}$ és un generador unitari de la recta.

Exemple 2. Considerem la recta $W = \langle(1, -2, 5)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Calcularem a continuació la projecció ortogonal del vector $\vec{x} = (0, 1, 1)$ sobre W. Primer calcularem un generador unitari de la recta, dividint aquest vector entre la seua norma:

```
-->u=[1; -2; 5];

-->q=u/norm(u)
 q  =

    0.1825742
  - 0.3651484
    0.9128709
```

Ara calcularem la projecció utilitzant la fórmula d'abans:

```
-->x=[0; 1; 1];

-->(q'*x)*q
 ans  =
```

```
  0.1
- 0.2
  0.5
```

Per tant, la projecció ortogonal és $(0.1, -0.2, 0.5)$.

2.3 Cas general

Veurem ara com calcular la projecció ortogonal de un vector sobre un subespai vectorial qualsevol W. Suposem conegut un sistema generador $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ de W. Aleshores W es pot veure com al subespal columna de la matriu $\mathsf{M}(S)$ (la matriu que té, com a columnes, els vectors $\vec{u}_i$). Per tant

$$W^\perp = \mathrm{Nul}(\mathsf{M}(S)^t).$$

Com $\vec{x} = Proj_W(\vec{x}) + \vec{x}_{ort}$ es té que $\vec{x} - Proj_W(\vec{x}) = \vec{x}_{ort}$ i, per tant,

$$\boxed{\vec{x} - Proj_W(\vec{x}) \text{ ha de ser ortogonal a } W,}$$

és a dir,

$$\vec{x} - Proj_W(\vec{x}) \in W^\perp = \mathrm{Nul}(\mathsf{M}(S)^t).$$

Així, tenim que

$$\mathsf{M}(S)^t(\vec{x} - Proj_W(\vec{x})) = \vec{0},$$

és a dir,

$$\mathsf{M}(S)^t Proj_W(\vec{x}) = \mathsf{M}(S)^t\vec{x}. \tag{1}$$

Per altra banda

$$\boxed{\text{el vector } Proj_W(\vec{x}) \text{ pertany a } W}$$

i açò vol dir que es pot escriure com a combinació lineal dels vectors de S (que és un sistema generador de W). Denotem per y_i als coeficients d'aquesta combinació lineal:

$$Proj_W(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + \cdots + y_r\vec{u}_r \tag{2}$$

i definim el vector

$$\vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}.$$

(Observa que calcular $Proj_W(\vec{x})$ equival a calcular $\vec{y}$).

La igualtat (2) significa que

$$Proj_W(\vec{x}) = \mathsf{M}(S)\vec{y}.$$

Substituint aquesta nova expressió de $Proj_W(\vec{x})$ en la igualtat (1) es té

$$M(S)^t\mathsf{M}(S)\vec{y} = \mathsf{M}(S)^t\vec{x}.$$

Observa que $M(S)^t\mathsf{M}(S)$ és una matriu quadrada d'ordre r i que la igualtat anterior és l'expressió matricial d'un sistema de r equacions lineals amb incògnites $y_1, \ldots, y_r$ i amb vector de termes independents $M(S)^t\vec{x}$ (recorda que $\vec{x}$ és el vector que estem projectant!). Es pot raonar fàcilment que totes les solucions $(y_1, \ldots, y_r)$ d'aquest sistema donen lloc a la mateixa combinació lineal $y_1\vec{u}_1 + \cdots + y_r\vec{u}_r$, que és la projecció ortogonal desitjada.

Hem deduït, per tant, el següent resultat:

> La projecció ortogonal d'un vector $\vec{x}$ sobre un subespai vectorial W generat per un conjunt de vectors $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ és el vector $Proj_W(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + \cdots + y_r\vec{u}_r$, on $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_r)$ és una solució del sistema
>
> $$M(S)^t\mathsf{M}(S)\vec{y} = \mathsf{M}(S)^t\vec{x}. \tag{3}$$

Suposem ara que S és linealment independent, és a dir, que és una base de W.

En aquest cas, $\mathrm{rang}(\mathsf{M}(S)^t\mathsf{M}(S)) = r$ i açò implica que el sistema (3) **té solució única** què ens dóna els coeficients $\vec{y}_i$ (respecte de la base S) de la projecció ortogonal de $\vec{x}$. Com la matriu $\mathsf{M}(S)^t\mathsf{M}(S)$ és invertible es té que la igualtat (3) equival a

$$\vec{y} = (\mathsf{M}(S)^t\mathsf{M}(S))^{-1}\mathsf{M}(S)^t\vec{x}.$$

Com les components de $\vec{y}$ són les coordenades (respecte de la base S) de la projecció de $\vec{x}$, el producte $\mathsf{M}(S)\vec{y}$ serà igual a $Proj_W(\vec{x})$:

$$Proj_W(\vec{x}) = \mathsf{M}(S)(\mathsf{M}(S)^t\mathsf{M}(S))^{-1}\mathsf{M}(S)^t\vec{x}.$$

Així, quan el sistema de generadors S és una base de W, hem obtingut una fórmula elegant per a projectar sobre W qualsevol vector!

> La projecció ortogonal d'un vector $\vec{x}$ sobre un subespai vectorial W generat per <u>una base</u> S de W és
>
> $$Proj_W(\vec{x}) = \mathsf{P}_W\vec{x}, \tag{4}$$
>
> on
>
> $$\mathsf{P}_W = \mathsf{M}(S)(\mathsf{M}(S)^t\mathsf{M}(S))^{-1}\mathsf{M}(S)^t$$
>
> s'anomena *matriu de projecció* sobre W.

(La matriu de projecció P_W és independent de la base S que considerem).

Exemple 3. Siga W el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ amb base $S = \{(1, 2, 3), (-3, 5, 1)\}$ (observa que S és, efectivament, una base!) i considerem el vector $\vec{x} = (2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$. Calcularem, amb l'ajuda de Scilab, la projecció ortogonal de $\vec{x}$ sobre W.

Primer definirem la matriu $\mathsf{M}(S)$:

```
-->u1=[1; 2; 3;]; u2=[-3; -5; 1]; MS=[u1 u2]
 MS  =

    1.  - 3.
    2.  - 5.
    3.    1.
```

Calculem la matriu de projecció P_W:

```
-->x=[2; 3; 4];
-->PW=MS*inv(MS'*MS)*MS'
 PW  =

    0.2589744    0.4358974  - 0.0435897
    0.4358974    0.7435897    0.0256410
  - 0.0435897    0.0256410    0.9974359
```

Multiplicant aquesta matriu pel vector $\vec{x}$ obtindrem la projecció ortogonal:

```
-->PW*x
 ans  =

    1.6512821
    3.2051282
    3.9794872
```

Per tant $Proj_W(\vec{x}) = (1.6512821, 3.2051282, 3.9794872)$.