A

Apéndice

Resumen de la Teoría de Circuitos Lineales

A.1. Elementos activos de un circuito

Fuente de tensión

Una fuente de tensión ideal se define como un generador cuya tensión de salida es independiente de la corriente que suministra, y su símbolo aparece en la figura 1.

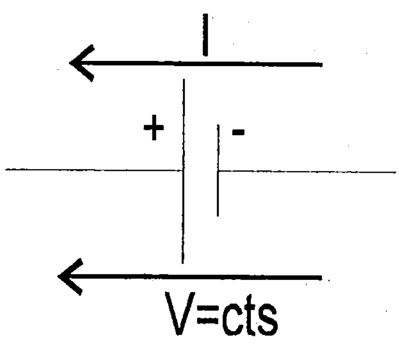

Figura 1. Símbolo de una fuente de tensión

Fuente de corriente

Una fuente de corriente ideal se define como una fuente que suministra una corriente constante independientemente de la tensión existente entre sus terminales. En una fuente hay una caída de tensión positiva del terminal + al terminal - independientemente del sentido de la corriente. En la figura 2 aparece el símbolo con que se representa una fuente de corriente.

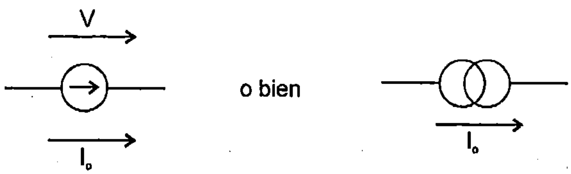

Figura 2. Símbolo de una fuente de corriente

En la realidad, en cualquier fuente siempre hay una cierta energía que se convierte en calor. Una fuente de tensión real puede representarse mediante una resistencia interna en serie con la fuente ideal, tal como muestra la figura 3.

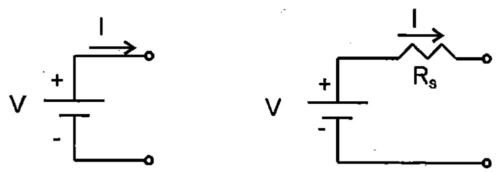

Figura 3. Fuente de tensión real

Una fuente de corriente real se puede representar mediante una resistencia interna en paralelo con la fuente ideal, como indica la figura 4.

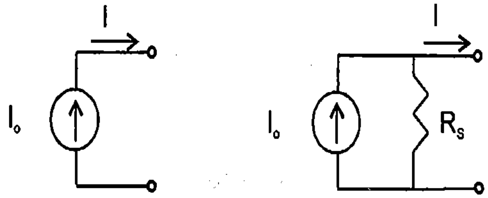

Figura 4. Fuente de corriente real

A.2. Elementos pasivos de un circuito

Resistencia

La ley de Ohm establece que la tensión V entre extremos de una resistencia es proporcional a la intensidad I que circula por ella. El factor de proporcionalidad V/I se denomina resistencia y se expresa en omhs(Ω).

$v(t) = Ri(t)$

1Ω (ohmio) $= 1V \,/\, 1A$

En una resistencia hay una caída de tensión positiva en sentido opuesto a la corriente. En la figura 5 se muestra el símbolo de la resistencia.

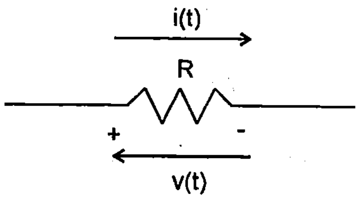

Figura 5. Símbolo de la resistencia

Capacidad

Un condensador es un elemento de circuito basado en fenómenos relacionados con campos eléctricos. El parámetro característico de este elemento es la capacidad C que se mide en Faradios y relaciona la corriente en el circuito con el voltaje. La corriente en los terminales del condensador es proporcional a la variación del voltaje a través del condensador con el tiempo:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$1F(Faradio) = \frac{1A*1s}{1V}$$

En la figura 6 se muestra el símbolo del condensador.

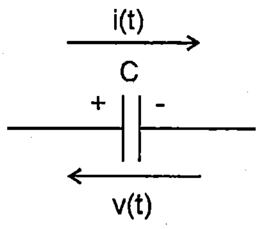

Figura 6. Símbolo del condensador

Autoinducción

Un condensador es un elemento de circuito basado en fenómenos relacionados con campos magnéticos. El parámetro característico de este elemento es la inductancia L que se mide en Henrios y relaciona el voltaje inducido con la corriente. La tensión en los terminales de la autoinducción es proporcional a la variación de la corriente a través de la autoinducción con el tiempo:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$1H(Henrio) = \frac{1V*1s}{1A}$$

En una autoinducción, la caída de tensión positiva tiene sentido contrario al de la corriente. En la figura 7 se muestra su símbolo.

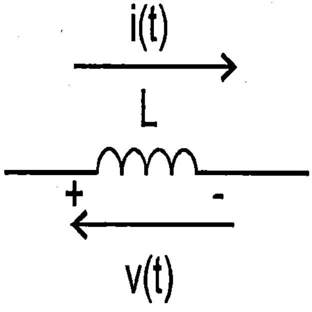

Figura 7. Símbolo de la autoinducción

A.3. Leyes de Kirchhoff

Antes de expresar las dos leyes de Kirchhoff, de las corrientes y de las tensiones, es necesario definir qué se conoce como nudo y malla de un circuito.

Un nudo es un punto de un circuito en el que concurren dos o más corrientes.

Malla: Es un camino cerrado dentro de un circuito que se forma empezando por un nudo y pasando por los elementos básicos seleccionados del circuito hasta regresar al nudo original.

1º ley de Kirchhoff (de las corrientes)

La primera ley de Kirchhoff, para las corrientes, establece que en cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de todas las corrientes que concurren en un nudo es igual a cero. Esto se debe al principio físico de conservación de las cargas.

El convenio que se utiliza es suponer que las corrientes que entran al nudo son positivas, y las que salen negativas según puede verse en la figura 8.

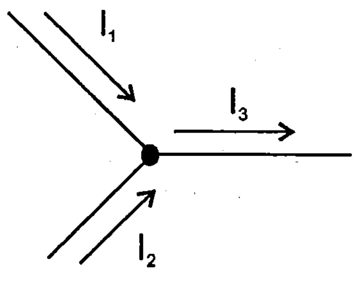

Figura 8. Convenio para las corrientes que concurren en un nudo

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \rightarrow I_3 = I_1 + I_2$$

En general se puede expresar como: $\sum_k I_k(t) = 0$

2ª Ley de Kirchhoff (de las tensiones)

La segunda ley de Kirchhoff, para las tensiones, establece que la suma algebraica de todos los voltajes a lo largo de una malla en un circuito es nula en cualquier instante de tiempo. En la figura 9 puede observarse un ejemplo de la aplicación de esta ley.

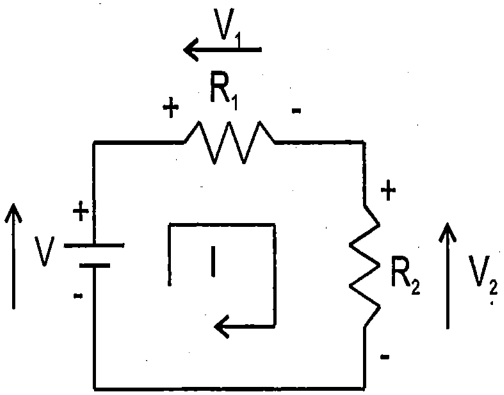

Figura 9. Aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff

$$V - V_1 - V_2 = 0$$
$$V = V_1 + V_2 = I * R_1 + I * R_2$$

En general puede expresarse como:

$$\sum_k V_k(t) - R_k * I_k(t) = 0$$

o bien

$$\sum_k V_k(t) = R_k * I_k(t)$$

Ejemplo: Divisor resistivo

Se aplicará la segunda ley de Kirchhoff al circuito de la figura 10 que corresponde a un divisor resistivo.

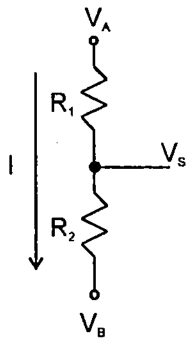

Figura 10. Divisor resistivo

Aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R_1 + R_2}$$

Calculemos la tensión Vs. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff::

$$V_S = V_{R1} + V_B = I * R_2 + V_B = \frac{V_A - V_B}{R_1 + R_2} * R_2 + V_B$$

Si suponemos que la tensión V_B es la tensión de referencia y que es masa (0V), entonces:

$$V_S = \frac{V_A - V_B}{R_1 + R_2} * R_2$$

A.4. Asociación de resistencias: serie y paralelo

Circuito serie

En un circuito serie, circula la misma corriente por todas las resistencias, en cambio la tensión es diferente en cada una de ellas. Las resistencias en serie son equivalentes a una resistencia cuyo valor es la suma de las resistencias individuales.

En la figura 11 se puede observar el circuito equivalente de un circuito con un conjunto de resistencias colocadas en serie.

$$Req = R_1 + R_2 + R_3$$

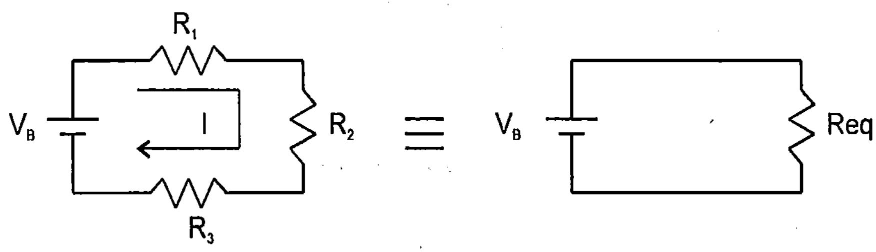

Figura 11. Circuito en serie

Circuito paralelo

En un circuito en paralelo, la tensión aplicada a cada una de las resistencias es la misma, en cambio la corriente es diferente en cada una de ellas. Las resistencias en paralelo son equivalentes a una resistencia cuyo valor es la inversa de la suma de las inversas de cada una de las resistencias. En la figura 12 se puede observar el circuito equivalente de uno formado por tres resistencias en paralelo.

$$Re\,q = \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)^{-1}$$

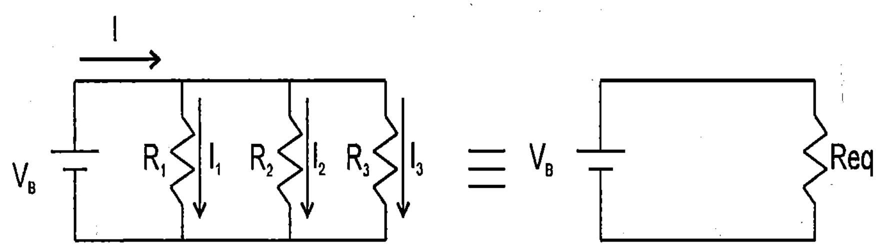

Figura 12. Circuito en paralelo

La notación que se emplea para expresar resistencias en paralelo es: $R1\|R2\|R3$

Casos particulares

Supongamos que se tiene dos resistencias en paralelo:

$$R1\|R2 = \frac{R1 * R2}{R1 + R2}$$

- Si R1 >> R2 $\rightarrow R1\|R2 \approx R2$
- Si R1 = R2 $\rightarrow R1\|R2 \approx R1/2$

Ejemplo :

Calculemos la resistencia equivalente del circuito de la figura 13.

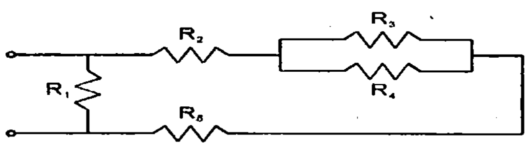

Figura 13. Ejemplo para el cálculo de la resistencia equivalente

$$Re\,q = R1\|\left(R2 + \left(R3\|R4\right) + R5\right)$$

A.5. Teorema de Thevenin

Red lineal

Antes de establecer el teorema de Thevenin es conveniente definir el concepto de red lineal. Una red lineal es un circuito eléctrico compuesto por elementos lineales (fuentes, resistencias, condensadores, autoinducciones). Se dice que un circuito es lineal cuando existe una relación lineal entre la corriente que circula por él y la caída de tensión entre sus bornes: $I = f(V) = K*V$, donde $K = \frac{1}{R}, \frac{1}{Z_C}, \frac{1}{Z_L}$.

Ejemplo

La resistencia es un elemento lineal, pues la relación entre la corriente que circula por ella y la tensión en sus bornes es lineal según puede verse en la figura 14.

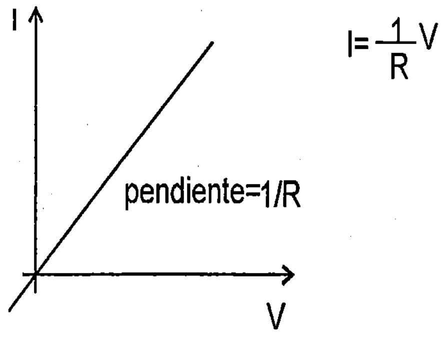

Figura 14. Relación corriente-tensión en una resistencia

Teorema de Thevenin

El teorema de Thevenin establece que cualquier red lineal puede sustituirse respecto de un par de terminales, por un generador de tensión V_{TH} en serie con una resistencia R_{TH}, como muestra la figura 15.

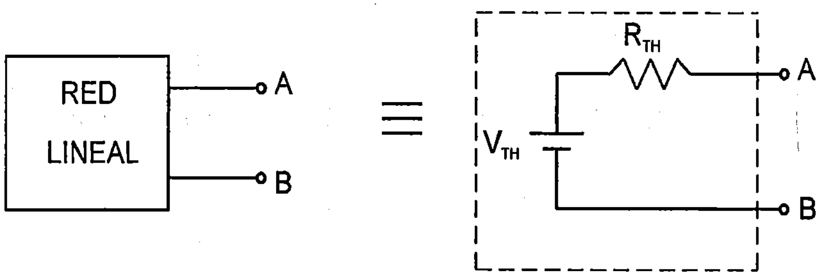

Figura 15. Aplicación del teorema de Thevenin

A V_{TH} se le llama tensión equivalente de Thevenin y se define como la tensión entre los terminales A y B en circuito abierto.

A R_{TH} se le llama resistencia equivalente de Thevenin y se define como la resistencia vista desde los terminales A y B cortocircuitando todas las fuentes de tensión y poniendo en circuito abierto las fuentes de corrientes.

A.6. Análisis de redes por tensión en los nudos

En este método de análisis de redes se eligen como incógnitas las tensiones nodales. La utilización de este método es conveniente cuando el número de nudos es menor que el número de mallas independientes, ya que el número de ecuaciones a resolver es menor. A continuación se describe un ejemplo de utilización de este método sobre el circuito de la figura 16.

Ejemplo :

El sentido de las corrientes en el circuito de la figura 16 de eligen de forma arbitraria.

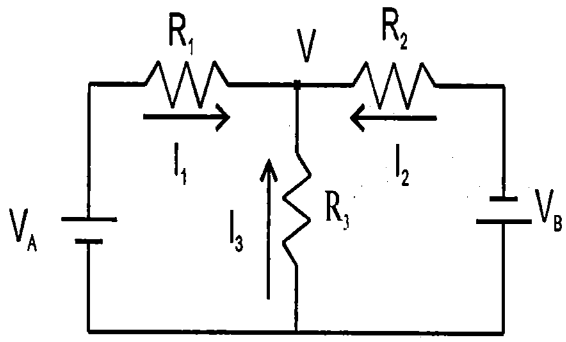

Figura 16. Ejemplo de circuito para su análisis por tensión en los nudos.

Calculemos cada una de las corrientes:

$$I_1 = \frac{V_A - V}{R1}$$

$$I_2 = \frac{-V_B - V}{R2}$$

$$I_3 = \frac{-V}{R3}$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\frac{V_A - V}{R1} + \frac{-V_B - V}{R2} + \frac{-V}{R3} = 0$$

$$\frac{V_A}{R1} - \frac{V_B}{R2} = V\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)$$

De esta última ecuación se despeja V y se sustituye en cada una de las ecuaciones de las corrientes. Si alguna de las corrientes sale negativa, quiere decir que el sentido real de esa corriente es contrario al que inicialmente habíamos supuesto.

En general

Para n nudos, obtendremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$I_j = \left(-\frac{1}{R_{j1}} - \ldots + \frac{1}{R_{jj}} - \ldots - \frac{1}{R_{jn}}\right)\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

donde:

$\frac{1}{R_{jj}}$ = admitancia del nudo j

$\frac{1}{R_{j1}}$ = coadmitancia de los nudos j e i

I_j = suma de las corrientes de fuente que concurren en j.

A.7. Análisis de redes por corrientes de malla

El método del análisis por corrientes de mallas es análogo al de los nudos con la salvedad de que ahora se debe aplicar la segunda ley de Kirchhoff y se toman como incógnitas las corrientes de malla. A continuación se da un ejemplo de utilización de este método en el circuito de la figura 17.

Ejemplo

En el circuito de la figura 17 hay dos mallas independientes. y en ellas se elige el sentido de las corrientes de forma arbitraria.

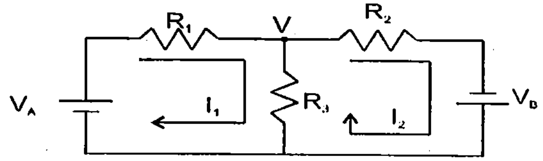

Figura 17. Circuito ejemplo para su análisis por la corriente en las mallas

Aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} malla\ 1 &\rightarrow V_A = I_1 * (R1 + R3) - I_2 * R3 \\ malla\ 2 &\rightarrow V_B = -I_1 * R3 + I_2 * (R2 + R3) \end{aligned}$$

Podemos expresar estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R1+R3) & -R3 \\ -R3 & (R2+R3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

La solución de esta ecuación matricial (I_1, I_2) la podemos obtener aplicando la regla de Cramer.

En general

Para n mallas, obtenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$V_j = \begin{pmatrix} -R_{j1} & -R_{j2} & \cdots & +R_{jj} & \cdots & -R_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_j \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

donde:

R_{jj} = impedancia de la malla j.

R_{ji} = copedancia de las mallas j e i.

V_j = suma algebraica de las tensiones de fuente.

A.8. Bibliografía

J. A. Edminister
Circuitos eléctricos
McGraw-Hill. Serie Schaum, 1970

J. W. Nilsson
Circuitos eléctricos
Addison-Wesley Iberoamericana, 1995

J. Millman y A. Grabel
Microelectrónica
Hispano Europea, 1991