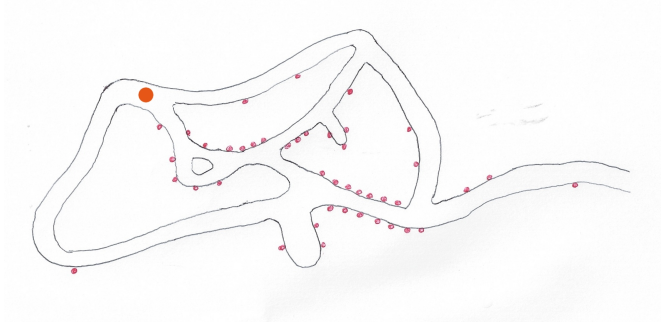


Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la Teoria de Grafs

Sessió 4 **Problema del carter xinès**

Plantejament del problema

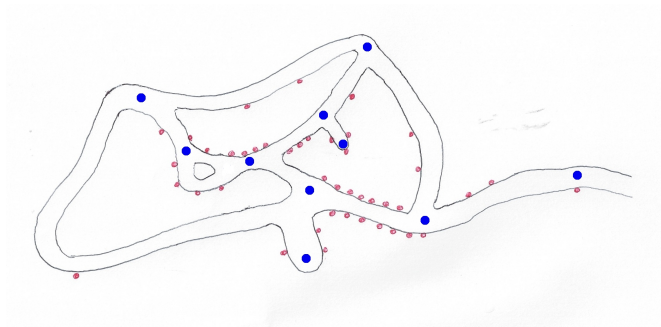
Un carter rural eix de la central de correus (que es troba, aproximadament, en el lloc assenyalat amb el punt taronja) i ha de repartir el correu per totes les cases del poble, tornant finalment a la central. Quin recorregut ha de fer per complir amb la seva tasca en el menor temps possible ?



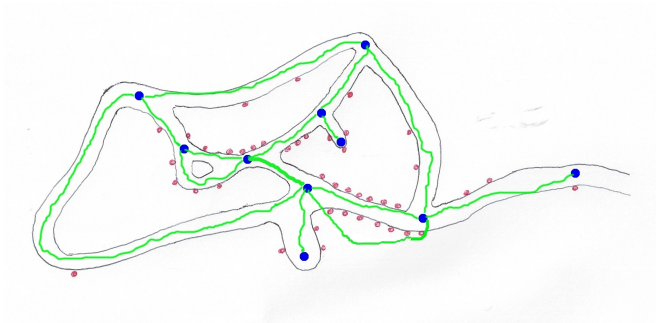
Hem representat mitjançant punts rojos les entrades a totes les cases del poble.

Modelització

L'objectiu consisteix a representar la situació mitjançant un graf que ens permeti interpretar el nostre problema en termes de teoria de grafs. Els vèrtexs del graf representaran les interseccions entre els carrers :

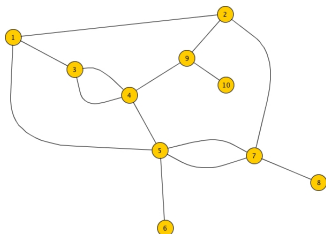


I les arestes representaran els diferents trams de carrers:



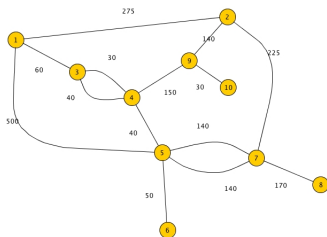
OBSERVACIÓ: Si un carrer té portals de cases només en un dels seus costats, el representarem mitjançant una sola aresta (ja que, per repartir les cartes, el carter només el necessita recórrer una vegada). El mateix passa si el carrer té portals a banda i banda però es tracta d'un carrer molt curt (és coherent que el carter puga repartir les cartes recorrent el carrer d'una sola vegada en ziga - zaga). No obstant això, si un carrer és llarg i té portals en ambdós costats, és millor repartir les cartes primer en un costat i després en un altre. Es recorreria, així, dues vegades i, per tant, hauria de representar-se mitjançant dues arestes .

Es té, per tant, el següent graf:



Si el graf fos eulerià, un camí eulerià tancat seria la solució al problema (es recorrerien tots els carrers exactament una vegada, arribant al punt de partida). Però no ho és, ja que no tots els vèrtexs del graf són de grau parell. Per tant, en el recorregut buscat, s'hauran de recórrer alguns carrers (arestes) més d'una vegada procurant, això sí, que les ' ' repeticions ' ' ens ocupen el menor **temps** possible. Com el factor temps és important en aquest problema, haurem de ponderar les arestes del graf amb el temps que es tarda en recórrer (o amb la seua **longitud** , què és directament proporcional al temps) .

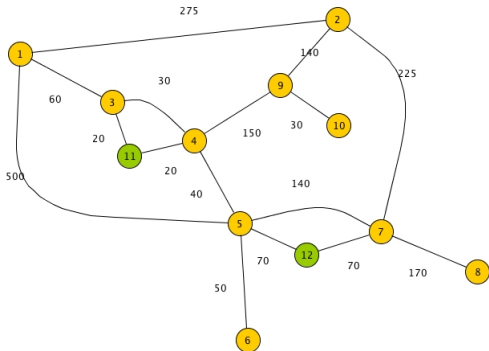
Ponderant cada aresta amb la longitud del tram de carrer que li correspon, tenim el següent graf ponderat (que ens proporciona una informació afegida):



Per resoldre el problema podem procedir de manera similar a l'algorisme de càlcul d'un camí eulerià obert: s'afegiran algunes arestes "fictícies" fins que tots els vèrtexs del graf tinguin grau parell per "euleritzar" el graf (és a dir, convertir-lo en un eulerià) . Un cop fet això aplicarem l'algorisme de Hierholzer per calcular un camí eulerià tancat. Òbviament la suma dels pesos de les arestes fictícies afegides ha de ser la menor possible .

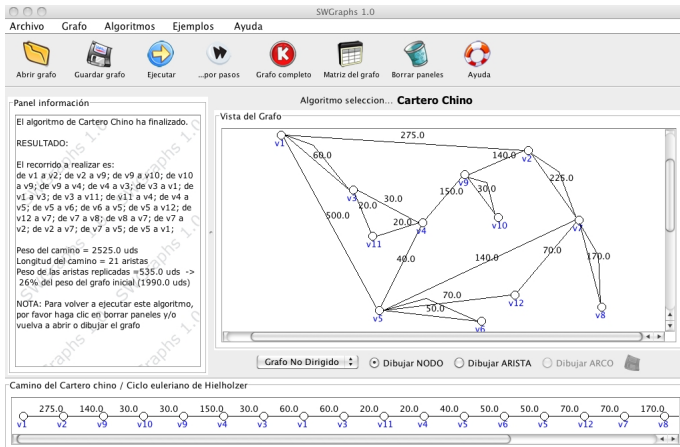
No entrarem en els detalls d'aquest algorisme. Ens limitarem a modelitzar el problema i deixarem que la "feina bruta" la realitzi SWGraphs.

Com SWGraphs no admet arestes paral·leles, si entre dos vèrtexs hi ha dues arestes, “doblares” una d’elles afegint un vèrtex fictici “enmig” i convertint-la en dues arestes “fictícies” **del mateix pes** (la meitat del pes de l’aresta inicial):



Resolució

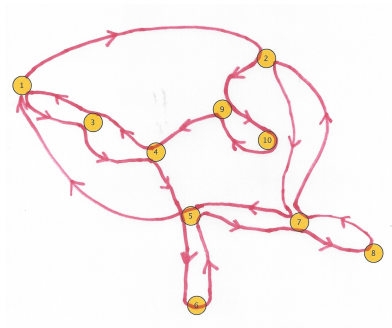
Introduïrem el graf ponderat en SWGraphs i li aplicarem l'algorisme "Carter xinès":



A la part esquerra de la pantalla (i també a la part inferior) apareix el camí que ha de recórrer el carter per dedicar el menor temps possible, així com la distància total recorreguda.

Solució

Més explícitament, el recorregut serà el següent:



Observa que hi ha carrers que es recorren dues vegades.

Síntesi

El **problema del carter xinès** consisteix en, donat un graf ponderat connex, trobar un camí tancat de pes mínim que recórrega totes les arestes del graf (pot ser que més d'una vegada).

Si el graf és eulerià, la solució s'obté calculant un camí eulerià tancat mitjançant l'algoritme de Hierholzer. En cas contrari, caldrà arestes que s'hauran de recórrer més d'una vegada.

Com aquest problema va ser estudiat pel matemàtic xinès Meigu Guan el 1962, s'ha popularitzat amb el nom de **problema del carter xinès**.