1 Primera Práctica: Introducción a Derive

A continuación te mostramos algunas de las utilidades del programa DERIVE (la versión 5, para WINDOWS, a la que nos referiremos como D5W a partir de ahora) en Análisis Matemático.

Como complemento al contenido tanto de ésta como de otras prácticas, te sugerimos que consultes la ayuda *en línea* que D5W te proporciona.

1.1 Edición de Expresiones

D5W arranca haciendo *clic* dos veces sobre su icono, o , o a través del menú de inicio de WINDOWS. Se accede así a la pantalla principal del programa.

A las diversas opciones del menú (desplegables) se accede haciendo *clic* sobre cada una de ellas o mediante la combinación de teclas Alt+□, donde □ corresponde a la letra que aparece subrayada en cada caso. En la ventana de álgebra irán apareciendo, numeradas, las distintas expresiones, a medida que las vayamos introduciendo.

Inicialmente, el cursor estará situado en la **línea destinada a la edición de expresiones** para que puedas introducir una expresión. Puedes acceder a esta línea, cuando no estés en ella, situando el puntero del ratón en ella y haciendo *clic*.

Tecleando, por ejemplo, x^3 − 8 en la línea de edición y pulsando Enter —o bien el botón situado a la izquierda— aparece la expresión

$$x^3 - 8$$

en la ventana de álgebra numerada como #1. Repitiendo el proceso con la expresión x^2 − 5x + 6, D5W guardará, como #2,

$$x\hat{}2 - 5x + 6\ .$$

Para obtener el cociente de las dos expresiones anteriores, $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$, puedes teclear, en la línea de edición, #1/#2 y pulsar Enter.

Obviamente, es también posible escribir directamente cocientes en la línea de edición sin necesidad de introducir previamente y por separado el numerador y el denominador. Tecleando, por ejemplo,

$$(x^3 - 8)/(x^2 - 5x + 6)$$

y pulsando Enter. Obtendremos la misma expresión que hemos escrito antes.

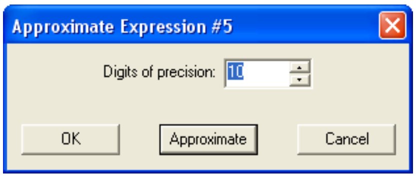
Simplificación de fórmulas. Si quieres evaluar, calcular o simplificar una expresión, puedes elegir la secuencia Simplify:Basic —o bien el botón situado a la izquierda— en lugar de Enter tras introducir la expresión que desees simplificar. Así, por ejemplo, si introduces la expresión

$$(2\hat{}(2 * 3) + 2)/(2 + 3\hat{}4 + 27/(3\hat{}3 - 8\hat{}(1/3)))$$

y después pulsas $\boxed{=}$, obtendrás

$$\frac{825}{1051}.$$

Aproximación numérica. Las representaciones decimales de los números racionales anteriores pueden obtenerse[1] mediante Simplify:Approximate (Ctrl+G) eligiendo el número de dígitos de la aproximación (10 por defecto) y pulsando OK o Approximate en el cuadro:



Iluminando $\frac{825}{1051}$ y procediendo así obtendríamos su forma decimal, 0.7849666983.

Si has elegido la tecla OK en el cuadro anterior, en lugar del cálculo te habrá aparecido una expresión. Para evaluarla ahora debes pulsar la tecla $=$ de la parte superior de la pantalla. La tecla OK en muchos otros cuadros tiene ese funcionamiento, te escribe qué quieres hacer, no lo hace.

Observa que a la izquierda de la línea de edición también hay el símbolo equivalente $\approx$ que aproximará numéricamente las expresiones de la línea en lugar de las de la ventana.

Algunas constantes usuales como π, e, i (compleja) o el símbolo ∞ se introducen en D5W de forma especial. Por ejemplo, la letra `e` no es interpretada por el programa como la constante de Euler, $2.71828\ldots$, sino como una variable con ese nombre.

El número π puede introducirse, en la línea de edición, mediante Ctrl+P, escribiendo `pi` o, directamente, haciendo *clic* sobre el símbolo π del alfabeto que aparece en la ventana de edición. El número e puede escribirse como Ctrl+E, `#e`, ê o, como antes, haciendo *clic* sobre el símbolo ê; así aparecerá en la pantalla para distinguirlo de la letra `e`. El complejo i se introduce, mediante Ctrl+I, `#i`, î o eligiéndolo directamente del alfabeto de edición y aparece en pantalla como î. Por último, el símbolo de infinito te aparecerá en la pantalla cuando escribas `inf`, Ctrl+0 o haciendo *clic* sobre el símbolo correspondiente.

Notas:

1. A medida que trabajas con D5W van acumulándose en la pantalla expresiones que no volverás a necesitar, lo que dificulta manipular las demás. Puedes seleccionar una o varias y eliminarlas mediante Edit:Delete[2] o mediante la tecla Supr[3]. Si eliminas alguna por error puedes recuperarla con Edit:Undelete (o Ctrl+Z). El orden de las demás puedes alterarlo seleccionándolas y arrastrándolas, manteniendo pulsado el botón izquierdo del ratón, a la posición deseada.

[1] También con el botón $\boxed{\approx}$, aunque en este caso no podrás seleccionar el número de dígitos.
[2] También con el botón $\boxed{\times}$ de la barra de herramientas.
[3] Además puedes usar los conocidos Cut, Copy y Paste que encontrarás en el menú Edit, en la barra de herramientas y también al pulsar el botón derecho del ratón.

2. En D5W, puedes añadir una línea de comentario en pantalla desde la línea de edición, pero siempre que la coloques entrecomillada[4]. Sin las comillas D5W entiende que se trata de una expresión matemática y busca en ella funciones predefinidas. Por ejemplo, puedes introducir

   “`Las cosas que estan sin hacer`”

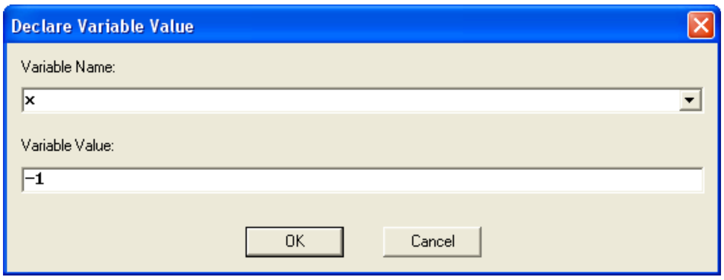
   y aparecerá la frase como una expresión (numerada) al pulsar OK. Si introduces la misma expresión sin entrecomillar D5W identificará la expresión como un producto de funciones y constantes. En este caso cree reconocer las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), entre otras. Compruébalo.

3. Observa que podrás reutilizar fragmentos de expresiones sin necesidad de introducirlos de nuevo, bastará iluminar esa expresión y pulsando la tecla F3 observarás que la expresión iluminada aparece en la línea de edición. La tecla F4 juega el mismo papel que F3, pero coloca la expresión entre paréntesis.

1.2 Declaración de Variables y Funciones

Veamos ahora cómo pueden declararse variables y funciones con D5W y su utilidad. En el primer caso, es posible asignar un valor a una variable para utilizarlo posteriormente o bien comunicar al programa que determinada variable se encuentra en cierto dominio. Ambas cosas pueden hacerse desde el submenú Declare: la asignación de un valor a partir de Variable Value y la del dominio mediante Variable Domain.

Como ejemplo, asignaremos a la variable x el valor -1. Utilizando la secuencia Declare:Variable Value aparece el cuadro de diálogo



y en él introducimos el nombre de la variable, `x` en nuestro caso, y el valor que ha de tomar, ahora -1. Al pulsar OK aparece numerada como `#10` la expresión

$$\mathtt{x} := -1$$

A la misma asignación se llegaría directamente si en la línea de edición escribes `x` $:= -1$ y pulsas Enter. A partir de ahora, si no se elimina esta asignación, x tomará el valor -1 en cualquier cálculo. Así, si simplificamos ahora la línea 1, obtendremos el valor -9, resultado de calcular

$$(-1)^3 - 8$$

[4] En la ventana de álgebra las comillas no son visibles.

es decir, la línea 1 no se ha modificado, pero su evaluación ya es un resultado numérico. No es, por tanto, muy interesante asignar valores concretos a variables de uso común porque las expresiones que la contienen quedan modificadas. Es recomendable asignar valores a variables particulares, por ejemplo, `mix := 7^(1/3)` .

De todas formas, podemos 'liberar' la variable x, es decir, que deje de valer -1. Para **eliminar una asignación** no es suficiente borrar la línea en la que aparece $\mathtt{x} := -1$, lo que debes hacer es realizar otra asignación en blanco, por ejemplo, introduciendo

$$x :=$$

En cuanto a las asignaciones de **dominio**, al utilizar la secuencia Declare:Variable Domain aparece un cuadro de diálogo que permite, por ejemplo, indicarle al programa que la variable x es real y se halla en el intervalo $[1, 5]$. Como antes, para eliminar asignaciones como ésta no es suficiente con borrar la línea y necesitas una asignación en blanco (del tipo $\mathtt{x} :=$).

Abordemos ya la cuestión de la **declaración de funciones**. Como en el caso de las asignaciones de valor o de dominio, es posible hacerlo a partir del submenú Declare o, directamente, desde la línea de edición. La secuencia de comandos Declare:Function Definition abre un cuadro de diálogo para la definición de funciones similar al anterior, aunque resulta más cómodo declarar una función introduciendo directamente la expresión correspondiente. Así, por ejemplo, escribiendo en la línea de edición

$$f(x) := (3x^3 - x^2 - 6x + 3)/(x^2 + x - 1)$$

y tras pulsar OK, te aparecerá en pantalla:

$$\mathtt{f(x)} := \frac{3\mathtt{x}^3 - \mathtt{x}^2 - 6\mathtt{x} + 3}{\mathtt{x}^2 + \mathtt{x} - 1} \ .$$

A partir de ahora, $f(x)$ representa exactamente tal función y podemos utilizarla con esa notación.

Es importante resaltar —lo mismo podríamos decir en la declaración de variables o en la asignación de dominios— la importancia de los dos puntos, : , antes del signo = cuando se definen funciones desde la línea de edición, es decir, la diferencia entre $\boxed{:= \quad \text{y} \quad =}$. Si no aparecen los dos puntos antes del signo =, D5W entenderá que planteas una ecuación pero no reconoce declarada la función y, en consecuencia, no será posible referirse a ella como $f(x)$, sin más.

Tras haber declarado la función, si deseamos, por ejemplo, calcular los valores de f en los puntos 3, -1 y $\frac{1}{2}$ basta con escribir y simplificar $\mathtt{f(3)}$, $\mathtt{f(-1)}$ y $\mathtt{f}\left(\frac{1}{2}\right)$, respectivamente. Obtendrás los resultados

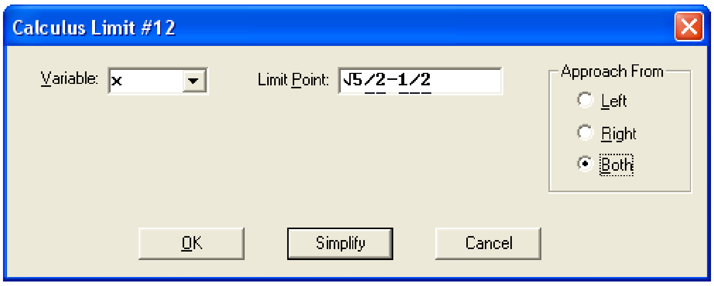
$$\mathtt{f(3)} = \frac{57}{11}, \quad \mathtt{f(-1)} = -5, \quad \mathtt{f}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

1.3 Cálculo con D5W

El objetivo del presente epígrafe es mostrarte las utilidades del submenú Calculus en D5W; sin duda el más interesante en Análisis Matemático. Básicamente, nos ocuparemos de que conozcas cómo aborda el programa el cálculo de límites y la derivación e integración.

1.3.1 Límites

D5W dispone de la secuencia Calculus:Limit para determinar límites de funciones —de sucesiones, en particular, que trataremos en la tercera práctica—. Al utilizarla[1] el programa te muestra en la pantalla un cuadro de diálogo en el que introducirás la variable —`x` en nuestro caso— y el punto al que tiende (Limit Point). Por ejemplo, ilumina la función $f(x)$ y pulsa el icono de límite. Te sugiere que la variable es x y que el límite lo quieres cuando $x \to 0$. Pulsando Simplify obtienes -3 que coincide con $f(0)$ porque $f(x)$ es continua en 0. Si cambias el punto 0 por $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ (que es una de las raíces del denominador de $f(x)$)

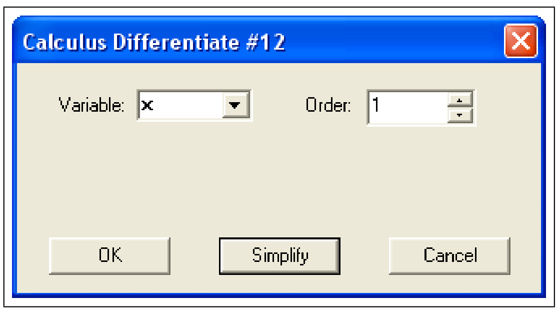


obtienes el resultado esperado: ∞.

Puedes probar distintos puntos y distintas funciones. En el punto límite también puedes poner **infinito**: escribe `+inf` o `+inf` (o pincha el icono ∞) en la casilla de Limit Point y obtendrás el resultado, ∞ también.

1.3.2 Derivadas

D5W utiliza la secuencia Calculus:Differentiate para hallar derivadas de funciones. Para derivar la función $f(x)$, por ejemplo, aplicamos esta secuencia[1] tras iluminar `f(x)` aparece el cuadro de diálogo



---

[1] O al pulsar el botón situado en la barra de herramientas.

[1] O pulsa el botón .

con x en Variable[2] y 1 en Order. El programa entiende así que pretendemos calcular la derivada de primer orden de f respecto de x. Al pulsar OK la ventana muestra

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{dx}}\mathtt{f(x)}\ ,$$

de acuerdo con la notación matemática usual. La forma directa[3] de pedir la derivada primera de $f(x)$ es en la línea de edición

DIF(f(x),x),

Para que evalúe la derivada debemos simplificar esta expresión. Al hacerlo[4] obtenemos

$$\frac{3x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x + 3}{(x^2 + x - 1)^2}\ .$$

Para obtener una derivada de orden superior basta seleccionar, en el cuadro de diálogo correspondiente el orden de derivación elegido. Considerando, por ejemplo, 2, (en forma directa escribiendo DIF$(f(x), x, 2)$ y simplificando) obtendremos el valor de la segunda derivada de $f(x)$,

$$\frac{2\,(x^3 - 3x^2 - 1)}{(x^2 + x - 1)^3}\ .$$

Si ahora quieres saber cuanto vale $f''(-1)$ puedes utilizar Simplify:Variable substitution tomando x como -1 en la última expresión y obtendrás que $f''(-1) = 10$.

Nota: La sustitución se tiene que hacer después de haber calculado la derivada, porque si x tiene un valor numérico, la derivada será 0.

1.3.3 Integrales

D5W es capaz de calcular integrales indefinidas (primitivas), definidas e impropias. En principio, D5W aplica la regla de Barrow para calcular tanto integrales de Riemann como integrales impropias. Ya sabes que si $v(x)$ es una primitiva [5] de la función (integrable) $u(x)$ en un intervalo $[a, b]$, este método nos dice que

$$\int_a^b u(x)dx = v(b) - v(a).$$

La regla se aplica, claro está, cuando el programa es capaz de obtener una primitiva de $u(x)$ en forma exacta y operar con ella. No obstante, existen funciones que no

[2]Si la función o expresión iluminada en la ventana tiene más de una variable, el cuadro de diálogo nos mostrará todas ellas: deberemos seleccionar la letra respecto a la cual queremos calcular la derivada.

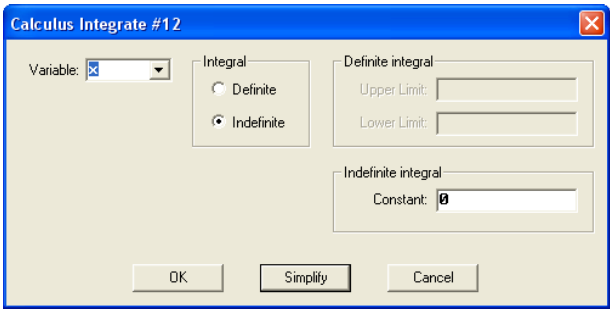
[3]Si la función que queremos derivar tiene asignado un nombre, en nuestro caso $f(x)$, también es valida la notacíon $f'(x)$ para la derivada, $f''(x)$ para la segunda derivada, etc.

[4]Al mismo resultado llegaríamos, directamente, si en el cuadro de diálogo mencionado pulsamos Simplify en lugar de OK.

[5]Lo que significa que $v'(x) = u(x)$ en $]a, b[$.

poseen primitiva elemental y para ellas es imposible aplicar la regla de Barrow. En estos casos el programa dispone de recursos que le permiten utilizar métodos numéricos de aproximación para hallar la integral con la precisión deseada.

Comencemos por el cálculo de primitivas. Para integrar, por ejemplo, la función $f(x)$ tras iluminar f(x) aplicamos la secuencia[1] Calculus:Integrate y aparece el cuadro de diálogo análogo a los que aparecen al calcular límites o derivadas



con x en Variable. Marca Indefinite y, por defecto, el programa propone 0 como constante de integración. Al pulsar OK la ventana muestra

$$\int \mathtt{f(x)dx}.$$

La forma directa de pedir la integral indefinida en la línea de edición es

$$\mathtt{INT(f(x),x)}$$

cuya sintaxis es análoga a la de límites y derivadas. Al simplificar esta expresión, pulsando en el cuadro de diálogo anterior Simplify en lugar de OK, obtenemos el resultado

$$\frac{3\sqrt{5}\,\mathrm{LN}\left(\frac{2x+\sqrt{5}+1}{2x-\sqrt{5}+1}\right)}{10}+\frac{\mathrm{LN}\left(x^2+x-1\right)}{2}+\frac{3x^2}{2}-4x$$

Para calcular una integral definida, $\int_1^2 f(x)dx$ por ejemplo, se procede como antes, es decir, aplicamos ahora de nuevo la secuencia Calculus:Integrate a $f(x)$ y aparecerá el cuadro de diálogo anterior. En el recuadro Integral debes elegir la opción Definite y en el recuadro Definite Integral has de seleccionar los extremos superior Upper Limit : 2 e inferior Lower Limit : 1 de la integral. Al pulsar OK en tu pantalla aparecerá el símbolo de la integral que buscamos escrito en la forma matemática habitual; es decir,

$$\int_1^2 \mathtt{f(x)dx}$$

que corresponde, editándola, a

$$\mathtt{INT(f(x), x, 1, 2)}\ .$$

Para llegar al resultado final, simplifica la expresión que contiene la integral o pulsa Simplify en lugar de OK en el cuadro de diálogo correspondiente a la integración. Obtendrás la integral planteada en modo exacto,

$$-\frac{3\sqrt{5}\,\mathtt{LN}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\right)}{10}+\frac{\mathtt{LN}\,(5)}{2}+\frac{1}{2}$$

Como hemos comentado antes, D5W puede utilizar en los casos en los que no puede resolver de modo exacto integrales definidas algoritmos de aproximación que te permiten determinar estimaciones de las integrales con la precisión deseada. Para conseguir que el programa trabaje en esta forma basta simplificar en modo aproximado (Ctrl+G) la integral correspondiente en lugar de hacerlo en modo exacto (Ctrl+B).

Compruébalo, por ejemplo, para hallar una aproximación, con diez decimales exactos, de la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

La función e^{-x^2} es un caso clásico de función integrable Riemann para la que no se conoce una primitiva elemental.