DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

ALG - Test Bloc 2 (Pràctiques P4 a P7)

---

1. Considera la matriu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a)$_{(1p)}$ Calcula amb *Scilab* la inversa, A^{-1} de dues maneres i verifica que trobes el mateix resultat.

b)$_{(1p)}$ Resol l'equació matricial

$$A \cdot X \cdot A^t = A + B$$

on $B = A \cdot A^t$.

c)$_{(1p)}$ A partir de la descomposició *LU* de A que *Scilab* te proporciona, resol el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ on $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 0, 3)$ i verifica que el resultat que trobes és correcte.

---

a)

```
–>A=[-2 4 2 2;8 -2 1 2;-4 2 1 4;-2 1 4 4]
A =
- 2. 4. 2. 2.
8. - 2. 1. 2.
- 4. 2. 1. 4.
- 2. 1. 4. 4.
–>rank(A)
ans =
4.
–>inv(A)
ans =
0.0913978 0.1129032 - 0.0376344 - 0.0645161
0.3118280 0.0322581 - 0.0107527 - 0.1612903
0.0430108 - 0.0645161 - 0.3118280 0.3225806
- 0.0752688 0.1129032 0.2956989 - 0.0645161
–>rref([A,eye(4,4)])
ans =
1. 0. 0. 0. 0.0913978 0.1129032 - 0.0376344 - 0.0645161
0. 1. 0. 0. 0.3118280 0.0322581 - 0.0107527 - 0.1612903
0. 0. 1. 0. 0.0430108 - 0.0645161 - 0.3118280 0.3225806
0. 0. 0. 1. - 0.0752688 0.1129032 0.2956989 - 0.0645161
–>inversA=ans(:,5:8)
inversA =
0.0913978 0.1129032 - 0.0376344 - 0.0645161
0.3118280 0.0322581 - 0.0107527 - 0.1612903
0.0430108 - 0.0645161 - 0.3118280 0.3225806
- 0.0752688 0.1129032 0.2956989 - 0.0645161
```

b) Com A és invertible, multiplicant a l'esquerra per A^{-1} i a la dreta per $\left(A^{-1}\right)^t$, l'equació equival a

$$X = \left(A^{-1}\right)^t + I$$

i, en *Scilab,*

X=inv(A)'+eye(4,4)
X =
1.0913978 0.3118280 0.0430108 - 0.0752688
0.1129032 1.0322581 - 0.0645161 0.1129032
- 0.0376344 - 0.0107527 0.6881720 0.2956989
- 0.0645161 - 0.1612903 0.3225806 0.9354839

Podem comprovar el resultat:

->B=A*A'
B =
28. - 18. 26. 24.
- 18. 73. - 27. - 6.
26. - 27. 37. 30.
24. - 6. 30. 37.
–>clean(A*X*A'-A-B)
ans =
0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0.

c)

Si $A = LU$, el sistema $Ax = b$ serà equivalent a

$$L(Ux) = b$$

i si anomenem $Ux = y$ resoldrem amb *Scilab*

$$Ly = b$$

i, a continuació,

$$Ux = y$$

obtenint la solució demanada:

->[L U]=lu(A)
U =
8. - 2. 1. 2.
0. 3.5 2.25 2.5
0. 0. 3.9285714 4.1428571
0. 0. 0. 3.3818182
L =
- 0.25 1. 0. 0.
1. 0. 0. 0.
- 0.5 0.2857143 0.2181818 1.
- 0.25 0.1428571 1. 0.
->b=[-1;2;0;3]
b =
- 1.
2.
0.
3.

```
–>y=L\b
y =
2.
- 0.5
3.5714286
0.3636364
–>x=U\y
x =
- 0.0591398
- 0.7311828
0.7956989
0.1075269
```

Comprovació:

```
->clean(A*x-b)
ans =
0.
0.
0.
0.
```

---

2. **a)**$_{(1p)}$ Calcula la projecció ortogonal de $\overrightarrow{x} = (1, -1, 2)$ sobre la recta $w =< (1, 2, -1) >$.

b)$_{(1p)}$ Converteix el conjunt de vectors

$$\overrightarrow{u} = (-3, -2, 1, 0), \quad \overrightarrow{v} = (0, 0, 0, -1), \quad \overrightarrow{w} = (-1, 3, 3, 0)$$

en un sistema ortonormal.i troba un vector unitari de la forma $\overrightarrow{x} = (a, b, c, 0)$, ortogonal als tres anteriors.

c)$_{(1p)}$ Calcula la projección ortogonal de $\overrightarrow{x} = (1, -1, 2)$ sobre el subespai $W =< (1, 2, -1), (1, 1, -2) >$.

d)$_{(1p)}$ Troba el subespai ortogonal, $W^{\perp}$, del subespai de **c)** i verifica (de dues maneres) que la projecció calculada, $Proj_W(\overrightarrow{x})$, es troba efectivament en W.

---

a)

El vector unitari, q, en la direcció del generador de la recta serà

```
->w=[1;2;-1];
–>q=w/norm(w)
q =
0.4082483
0.8164966
- 0.4082483
```

i tenint en compte la fórmula de la projecció sobre una recta,

```
x=[1;-1;2];
–>proj_x=(q'*x)*q
proj_x =
- 0.5
- 1.
0.5
```

Comprovació:

```
>clean((x-proj_x)'*q)
ans =
0.
```

b)

A la vista dels resultats:

u=[-3;-2;1;0];

–>v=[0;0;0;-1];

–>w=[-1;3;3;0];

–>u'*v

ans =

0.

–>u'*w

ans =

0.

–>v'*w

ans =

0,

el sistema es ortogonal i, a més a més, v és unitari, així que farem unitaris u i w dividint per les seues normes:

->u=u/norm(u)

u =

- 0.8017837

- 0.5345225

0.2672612

0.

–>w=w/norm(w)

w =

- 0.2294157

0.6882472

0.6882472

0.

Ara plantejarem el sistema que fa que el nou vector, x siga ortogonal als tres anteriors (en la forma inicial, més senzilla):

$$\begin{aligned} -3a-2b+c &= 0 \\ -a+3b+3c &= 0 \end{aligned}$$

Resoldrem amb *Scilab* i cercarem una solució no nul.la:

>A=[-3 -2 1;-1 3 3]

A =

- 3. - 2. 1.

- 1. 3. 3.

–>b=[0;0]

b =

0.

0.

>rref([A b])

ans =

1. 0. - 0.8181818 0.

0. 1. 0.7272727 0.

i d'ací,

–>x=[ans(:,3);-1;0]

x =

- 0.8181818

0.7272727

- 1.

0.

–>x=x/norm(x)
x =
- 0.5518254
0.4905115
- 0.6744533
0.
i ja tenim x unitari.i, com pots comprovar explícitament, ortogonal a u ,v i a w.

c)

Farem servir les fórmules per a la projecció sobre un subespai. Ara la matriu $M(S)$ serà la formada pels vectors (columna) generadors de W.

En *Scilab,*
->u=[1;2;-1];
–>v=[1;1;-2];
–>M=[u v]
M =
1. 1.
2. 1.
- 1. - 2.
–>x=[1;-1;2]
x =
1.
- 1.
2.
–>proj_x=M*inv(M'*M)*M'*x
proj_x =
- 0.6363636
- 0.4545455
1.4545455
L'apartat següent ens servirà de comprovació.

d)

Una forma de verificar que la projecció es troba en W és veure que el rang de la matriu de W ampliada amb *proj_x* és dos:
->A=[M proj_x]
A =
1. 1. - 0.6363636
2. 1. - 0.4545455
- 1. - 2. 1.4545455
–>rank(A)
ans =
2.
Una forma alternativa és obtenir $W^{\perp}$ (de matriu el nucli de $M(s)^t$) i veure que *proj_x* és ortogonal a aquest espai:
->ort_W=kernel(M')
ort_W =
0.9045340
- 0.3015113
0.3015113
->clean(proj_x'*ort_W)
ans =
0.

3. **a)**$_{(1.5p)}$ Troba amb *Scilab* la solució per mínims quadrats per al sistema $Ax = b$, construint les equacions normals i calculant l'error d'aproximació, on

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & -6 & 4 \\ 7 & -6 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b)$_{(1.5p)}$ Troba l'equació $y = \alpha + \beta x$ de la recta de mínims quadrats per als punts

$$P_1 = (1, -1), \quad P_2 = (3, 0), \quad P_3 = (6, 0), \quad P_4 = (-1, 4)$$

i calcula l'error residual.

---

a) Construirem, en primer lloc, les equacions normals:

```
[6 -4 4;8 -6 4;7 -6 2;-3 2 -2; 4 -4 2]
A =
6. - 4. 4.
8. - 6. 4.
7. - 6. 2.
- 3. 2. - 2.
4. - 4. 2.
–>b=[-2;0;1;1;2]
b =
- 2.
0.
1.
1.
2.
–>AM=A'*A
AM =
174. - 136. 84.
- 136. 108. - 64.
84. - 64. 44.
–>bM=A'*b
bM =
0.
- 4.
- 4.
```

I ara resoldrem el sistema per a trobar el vector solució per mínims quadrats:

```
->xM=AM\bM
xM =
- 1.7647059
- 2.2941176
- 0.0588235
```

Finalment, l'error residual serà:

```
->norm(A*xM-b)
ans =
0.7669650
```

b)
A partir de les dades construirem la matriu de disseny:
->X=[1 1;1 3;1 6; 1 -1]
X =
1. 1.
1. 3.
1. 6.
1. - 1.
i el vector observació
->y=[-1;0;0;4]
y =
- 1.
0.
0.
4.
i resoldrem per mínims quadrats:
->XM=X'*X
XM =
4. 9.
9. 47.
–>yM=X'*y
yM =
3.
- 5.
–>solM=XM\yM
solM =
1.7383178
- 0.4392523
Finalment, el vector error residual vindrà donat per:
>y-X*solM
ans =
- 2.2990654
- 0.4205607
0.8971963
1.822429
de norma,
–>norm(ans)
ans =
3.0965763