

Pràctiques d'Àlgebra

Solució de les activitats de la Pràctica 7

Activitat 1. Determineu una solució per mínims quadrats de $A\vec{x} = \vec{b}$, construint les equacions normals, i calcula l'error de l'aproximació sent

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

```
-->A=[1 1 0; 1 1 0; 1 0 1; 1 0 1], b=[1 3 8 2]'
```

```
A =
```

```
1.    1.    0.
1.    1.    0.
1.    0.    1.
1.    0.    1.
```

```
b =
```

```
1.
3.
8.
2.
```

Les equacions normals són:

```
-->AA=A'*A, bb=A'*b
```

```
AA =
```

```
4.    2.    2.
2.    2.    0.
2.    0.    2.
```

```
bb =
```

```
14.
4.
10.
```

```
-->AA\b
```

Advertencia :

la matriz esta cerca de la singularidad o mal escalada. rcond = 0.0000D+00
calculando la solución de mínimos cuadrados. (vea Isq).

```
ans =
```

```
5.  
- 3.  
0.
```

Perquè no és determinat aquest sistema? Perquè la matriu A no és de rang complet:

```
-->rank(A)
```

```
ans =
```

```
2.
```

Per a entendre què és el que passa, trobem totes les solucions de les equacions normals

```
-->rref([AA bb])
```

```
ans =
```

```
1.    0.    1.    5.  
0.    1.   - 1.   - 3.  
0.    0.    0.    0.
```

Així que la solució general és $(5, -3, 0) + \lambda(1, -1, 0)$. El problema de mínims quadrats només té solució única si la matriu és de rang màxim per columnes.

Activitat 2. Trobeu l'equació $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de mínims quadrats que millor s'ajuste als punts (2, 3), (3, 2), (5, 1) i (6, 0) i calculeu la norma del vector residual.

```
->x=[2 3 5 6]'; b=[3 2 1 0]';
```

```
-->X=[ones(x) x]
X =
```

```

1.    2.
1.    3.
1.    5.
1.    6.
```

```
-->XX=X'*X, bb=X'*b
XX =
```

```

4.    16.
16.    74.
bb =

6.
17.
```

```
-->XX\bb
ans =
```

```

4.3
- 0.7
```

La recta és $y = 4,3 - 0,7x$. L'error és

```
-->norm(X*ans-b)
ans =
```

```

0.3162278
```

Activitat 3. Per mesurar el rendiment del motor d'un avió durant l'envol d'un avió, es va mesurar la seua posició horitzontal cada segon, des de $t = 0$ fins a $t = 12$. Les posicions obtingudes van ser 0; 8,8; 29,9; 62,0; 104,7; 159,1; 222,0; 294,5; 380,4; 471,1; 571,7; 686,8 i 809,2. Determineu la corba cúbica de mínims quadrats $y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ per a aquestes dades. Feu servir el resultat per estimar la velocitat de l'avió quan $t = 4,5$ segons.

```
->x=[1:13]'-1
x =
```

```
0.
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
```

```
-->X=[ones(x) x x.^2 x.^3]
X =
```

```
1.    0.    0.    0.
1.    1.    1.    1.
1.    2.    4.    8.
1.    3.    9.   27.
1.    4.   16.   64.
1.    5.   25.  125.
1.    6.   36.  216.
1.    7.   49.  343.
1.    8.   64.  512.
1.    9.   81.  729.
1.   10.  100. 1000.
1.   11.  121. 1331.
1.   12.  144. 1728.
```

```
-->b=[0 8.8 29.9 62 104.7 159.1 222 294.5 380.4 471.1 571.7 686.8 809.2]';
```

```
-->rank(X)
```

```
ans =
```

```
4.
```

Com que $X \backslash b$ aplica el mètode de mínims quadrats,

```
-->sol=X\b
```

```
sol =
```

```
- 0.8557692
```

```
4.702485
```

```
5.5553696
```

```
- 0.0273601
```

El polinomi és

$$y = -0.8557692 + 4.702485t + 5.5553696t^2 - 0.0273601t^3$$

La velocitat és la derivada d'aquesta funció,

$$y' = 4.702485 + 2(5.5553696)t - 3(0.0273601)t^2$$

La velocitat en $t = 4,5$ és

$$v = y'(4,5) = 4.702485 + 2(5.5553696)4.5 - 3(0.0273601)4.5^2$$

```
-->sol(2)+2*sol(3)*4.5+3*sol(4)*4.5^2
```

```
ans =
```

```
53.038683
```

Activitat 4. Quan les vendes mensuals d'un cert producte estan subjectes a fluctuacions al llarg de la temporada, una corba que aproxima les dades de vendes podria tenir la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \sin(\pi x/6)$, on x és el temps en mesos. Determineu la corba de mínims quadrats al llarg de 6 mesos, sabent que les fluctuacions respectives són: 0,80; 0,66; 0,64; 0,73; 0,78 i 0,67. Calculeu la norma del vector residual corresponent.

```
-->x=[1:6] '
x =
```

```
1.
2.
3.
4.
5.
6.
```

```
-->b=[0.8 0.66 0.64 0.73 0.78 0.67] ';
```

```
-->X=[ones(x) x sin(%pi*x/6)]
X =
```

```
1.    1.    0.5
1.    2.    0.8660254
1.    3.    1.
1.    4.    0.8660254
1.    5.    0.5
1.    6.    1.225D-16
```

```
-->rank(X)
ans =
```

```
3.
```

```
-->X\b
ans =
```

```
0.8144262
- 0.0144028
- 0.0814828
```

La corba és

$$y = 0.8144262 - 0.0144028x - 0.0814828 \sin(\pi x/6)$$

I la norma del vector residual,

```
-->norm(X*ans-b)  
ans =
```

```
0.1362983
```