Prácticas de Matemática Discreta

Actividades de la sesión 5 (Árboles)

1. Un árbol tiene $2n$ vértices de grado 1, $3n$ vértices de grado 2 y n vértices de grado 3. Determina el número de vértices y de aristas de dicho árbol.

   Solución:

   El número de vértices del árbol en función de n es $2n + 3n + n = 6n$.

   Sabemos que, **al tratarse de un árbol, su número de aristas es el número de vértices menos uno**, es decir, $6n - 1$. Así, tenemos tanto el número de vértices como el de aristas en función de n. Calculando n obtendremos la solución al problema.

   Sabemos que la suma de los grados de los vértices de cualquier grafo es igual al doble del número de aristas. Aplicado a este caso:

   $$2n + (3n) \cdot 2 + n \cdot 3 = 2(6n - 1).$$

   Resolviendo esta sencilla ecuación obtenemos $n = 2$, con lo cual el árbol tiene 12 vértices y 11 aristas.

2. Sea T un árbol con 21 vértices, cuyo conjunto de grados es $\{1, 3, 5, 6\}$. Sabiendo que tiene 15 hojas y un solo vértice de grado 6, ¿cuántos vértices de grado 5 tiene?

   Solución:

   El enunciado nos dice, por un lado, que sólo hay 4 posibilidades para los grados de los vértices (1,3,5 y 6) y que el árbol tiene

   - 15 vértices de grado 1
   - 1 vértice de grado 6

   El número de vértices de grado 3 es desconocido. Llamémosle x. También es desconocido el número de vértices de grado 5. Llamémosle y. Éste último es, realmente, el dato que hemos de hallar.

   Por otro lado, el enunciado nos dice que el número de vértices es 21. Luego tenemos la relación

   $$15 + 1 + x + y = 21,$$

   es decir,

   $$x + y = 5.$$

   Si pudiéramos establecer otra ecuación podríamos calcular x e y y habríamos resuelto el problema. La otra ecuación viene de dos observaciones:

- Por un lado, como se trata de un árbol, el número de aristas es igual al número de vértices menos uno. Es decir, hay $15+1+x+y-1 = 15+x+y$ aristas.
- Por otro lado, sabemos que la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas:

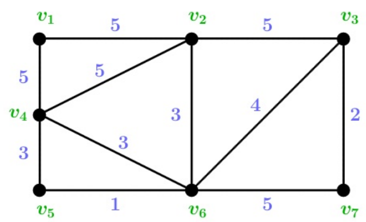
$$15 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + x \cdot 3 + y \cdot 5 = 2(15+x+y),$$

  es decir,

$$x + 3y = 9.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales dado por esta ecuación y la anterior, se obtiene que $x = 3$ y $y = 2$. Por tanto, existen 2 vértices de grado 5.

3. Calcula un árbol generador minimal, aplicando el algoritmo de Kruskal, del siguiente grafo ponderado:



Calcula también un árbol generador maximal.

Solución:

El árbol generador minimal se obtuvo en clase (tiene peso 18). El maximal se calcula análogamente pero eligiendo las aristas de mayor a menor peso.

4. (*) Considera el mapa de España del ejemplo de SWGraphs que aparece al abrir los menús Ejemplos-Dijkstra-mapa de España. Se pretende conectar entre sí todas las ciudades que aparecen en el mapa mediante una red de líneas de AVE. En el ejemplo se ha modelizado la situación mediante un grafo cuyos vértices se corresponden con las ciudades que se desea conectar, y cuyas aristas se corresponden con los "posibles tramos" por los que puede construirse la línea férrea. Se indica, también, la longitud de cada tramo (en Km). El diseño de la red de AVE debería verificar las siguientes condiciones razonables (al menos, a priori):

   - la red debe conectar dos ciudades cualesquiera de las que aparecen en el mapa (es decir, un viajero debe ser capaz de viajar entre dos ciudades cualesquiera tomando sólo trenes AVE);
   - la longitud total de vía construida ha de ser la menor posible (para así minimizar el coste de la obra, que es, de por sí, considerable).

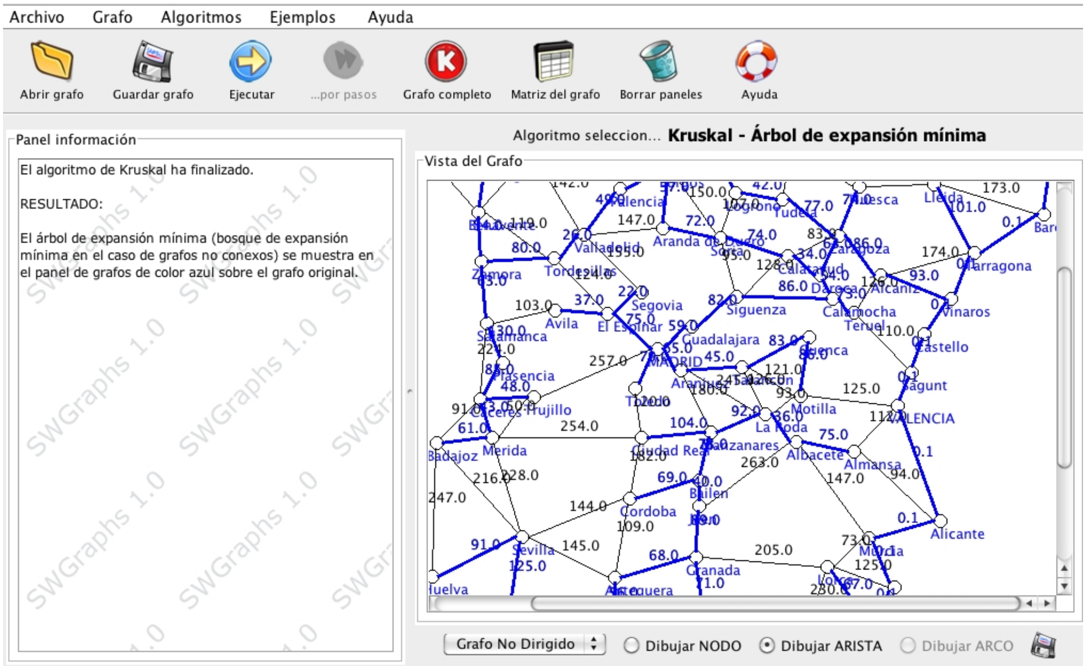
(a) Determina un posible diseño de la red de AVE con estas condiciones usando algún algoritmo de Teoría de Grafos, razonando adecuadamente por qué aplicas dicho algoritmo.

(b) Por motivos estratégicos resulta conveniente realizar la construcción de un eje mediterráneo (Gerona-Barcelona-Tarragona-Vinarós-Castelló-Sagunt-Valencia-Alicante-Murcia-Cartagena-Águilas-Almería). ¿Cuál es el recorrido total del AVE que debe diseñarse teniendo en cuenta, además de los 2 requisitos iniciales, la condición de que el eje mediterráneo debe estar presente?

Solución:

(a) Como queremos que todas las ciudades estén conectadas entre sí, el diseño de red de AVE que buscamos debe de modelizarse mediante un grafo conexo. Además, como queremos ahorrar en la cantidad de vía utilizada, el grafo no deberá de contener ciclos y el peso total del mismo deberá de ser el menor posible. Por tanto, lo que buscamos es un **árbol generador de peso mínimo** del grafo del ejemplo. Podemos calcularlo rápidamente con SWGraphs usando el algoritmo de Kruskal:

(b) Para forzar a que las aristas del "corredor mediterráneo" aparezcan forzosamente al aplicar el algoritmo de Kruskal, podemos modificar su peso cambiándolo por uno que sea menor que todos los demás (por ejemplo, 0.1). De esta manera forzaremos a que, al aplicar Kruskal, las primeras aristas que se añadan sean precisamente las del corredor mediterráneo:

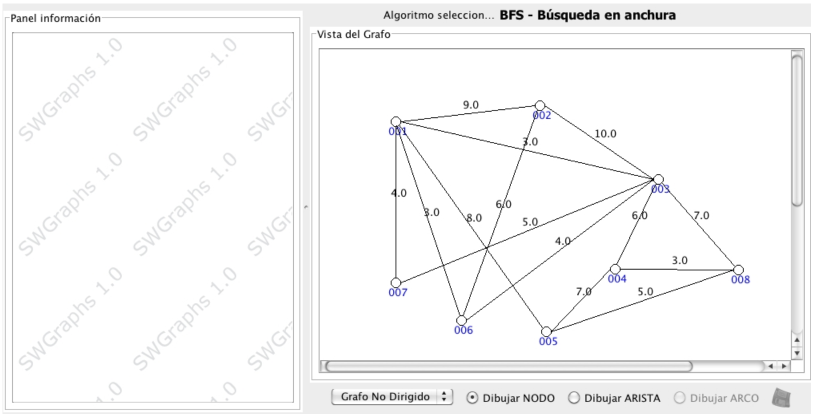


5. (*) Los agentes 001,002,003,004,005,006,007 & 008 están trabajando en una misión para salvar el mundo (una vez más). Se quiere establecer un sistema de comunicación entre los agentes de manera que cada agente tenga la posibilidad de contactar, directa o indirectamente, con los restantes agentes. Establecer una comunicación entre dos agentes tiene un cierto riesgo. En la siguiente tabla aparecen los factores de riesgo asociados a las comunicaciones directas entre dos agentes (a mayor factor, mayor riesgo); el resto de canales de comunicación han sido interceptados. ¿Cuál es el riesgo total mínimo de un sistema de comunicación entre los agentes?

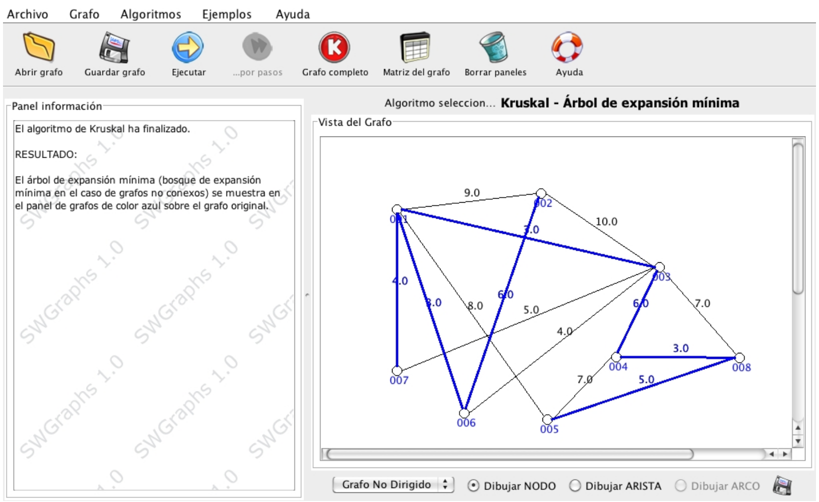
Agentes	Factor de riesgo
001-002	9
001-003	3
001-005	8
001-006	3
001-007	4
002-003	10
002-006	6
003-004	6
003-006	4
003-007	5
003-008	7
004-005	7
004-008	3
005-008	5

Solución:

Podemos modelizar la situación mediante un grafo cuyos vértices se asocian con los agentes y de manera que dos vértices están unidos con una arista si existe un canal de comunicación entre los correspondientes agentes que no ha sido interceptado. Además ponderaremos el grafo asignando a cada arista el factor de riesgo correspondientre:



Buscamos encontrar un sistema de comunicación que permita comunicar (directa o indirectamente) a cualquier agente con otro; por tanto buscamos un subgrafo **conexo**. Además buscamos minimizar riesgos, con lo cual convendrá que no haya ciclos, puesto que son innecesarios y añaden riesgos. Así pues, buscamos un árbol que contenga a todos los vértices del grafo (es decir un **árbol generador**) y que, además, tenga el menor peso posible (**minimal**). Esto puede conseguirse aplicando el algoritmo de Kruskal:



Vemos que el riesgo total del sistema de comunicación obtenido es 30.