Prácticas de Matemática Discreta.
Teoría de Grafos
2011/12
UNIDAD 3

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

24 de abril de 2012

Índice

Índice de figuras

1. Caminos y conexión

1.1. Conceptos básicos.

Definición 1.1 (cadena, camino y ciclo) *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su conjunto de vértices y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ su conjunto de aristas. Llamaremos* cadena *del vértice v_1 al vértice v_k, a una sucesión de vértices y aristas:*

$$P = v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_k, a_k, v_{k+1} \tag{1}$$

de manera que $\forall j,\ 1 \leq j \leq k, \quad a_j = (v_j, v_{j+1})$. Es decir cada arista a_i tiene como vértices extremos los mismos que tiene en el camino.

- *A los vértices v_1 y v_{k+1} se les llama vértices extremos de la cadena.*
- *Si todas las aristas son distintas diremos que la cadena es* simple*, y si $v_1 = v_{k+1}$, diremos que la cadena es* cerrada.
- *Cuando en P todos los vértices sean distintos, excepto, quizá, el primero y el último, que podrían coincidir, diremos que P es un* camino.
- *Un camino o una cadena decimos que es trivial, si sólo tiene un vértice y ninguna arista.*
- *Cuando en un camino no trivial, los vértices extremos coinciden $v_1 = v_{k+1}$, entonces diremos que es un* ciclo. *La diferencia con la cadena cerrada es que en un ciclo no se repiten vértices, mientras que en una cadena cerrada si pueden repetirse.*
- *Llamaremos* longitud *de un camino a su número de aristas.*
- *Llamaremos* distancia entre dos vértices *a la longitud del camino más corto en el grafo entre los dos vértices.*

Nótese que cuando el grafo sea simple y sin bucles, cada arista queda unívocamente determinada por sus vértices extremos. En dicho caso, podremos representar un camino enumerando exclusivamente sus vértices.

Ejemplos: En el grafo K_5 de la figura 1.1:

- $P_1 = 1, 3, 2, 5, 4, 2, 1, 3$ es una (1-3)-cadena y $P_2 = 1, 3, 2, 5, 4$ es un (1-4)-camino.
- $P_3 = 1, 2, 4, 3, 5, 1$ y $P_4 = 1, 2, 3, 4, 5$ son ciclos
- $P_5 = 1, 2, 4, 1, 3, 5, 1$ es una cadena cerrada
- $P_6 = 1$, es un camino trivial.
- P_2 tiene cuatro aristas, por lo tanto su longitud $l(P_2)$ es 4.

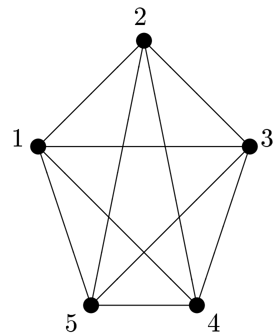


Figura 1.1: K_5.

- Del vértice 1 al vértice 4 tenemos en K_5 caminos de longitud 1, de longitud 2, de longitud 3 y de longitud 4, por lo tanto la distancia de u a v es 1, $D(u,v) = 1$.

Definición 1.2 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido, sea* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *su conjunto de vértices y* $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ *su conjunto de aristas. Llamaremos* semicamino *dirigido del vértice* v_1 *al vértice* v_k*, a una sucesión de vértices y aristas:*

$$P = v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_k, a_k, v_{k+1} \tag{2}$$

de manera que $\forall j,\ 1 \leq j \leq k,\quad a_j =< v_j, v_{j+1} >$ *o* $a_j =< v_{j+1}, v_j >$*.*

Diremos que (2) es un camino dirigido *si* $\forall j,\ 1 \leq j \leq k,\quad a_j =< v_j, v_{j+1} >$ *.*

Llamaremos semiciclo dirigido*, a un semicamino cuyos vértices inicial y final coinciden.*

Llamaremos ciclo dirigido*, a un camino dirigido cuyos vértices inicial y final coinciden.*

Ejemplos: En el grafo K_5 de la figura 1.1, $P_1 = 1,3,2,5,4,2,1,3$ es un (1-3)-cadena y $P_2 = 1,3,2,5,4$ es un (1-4)-camino.

En el grafo de la figura **??**, $P_3 = 1,3,5,4$ es un camino dirigido y $P_4 = 1,2,3,4,5$ es un semicamino dirigido ya que las aristas $< 3,4 >$ y $< 4,5 >$ no son del grafo.

1.2. Conexión y componentes conexas.

Definición 1.3 (Conexión) *Supongamos G=(V,E) un grafo no dirigido y* $u, v \in V$*. Diremos que los vértices* u *y* v *están* **conectados** *si y solamente si existe algún (u-v)-camino en el grafo.*

También podemos decir que existe un camino en el grafo que contiene a los vértices u y v.

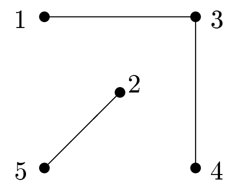


Figura 1.2: Grafo con vértices desconectados.

Propiedades de la relación de conexión:

- Un vértice esta conectado consigo mismo por un camino de longitud cero.
- Si existe un camino de u a v, también existe un camino de v a u.
- Si existe un camino de u a v y otro de v a w, entonces los vértices u y w están también conectados.

De estas propiedades, se deduce que la relación de conexión definida sobre el conjunto de los vértices de un grafo no dirigido es una relación binaria de equivalencia ya que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Por ejemplo en el grafo de la figura 1.2, los vértices 1 y 4 están conectados ya que existe un camino $P = (1, 3, 4)$ que los une. Sin embargo, los vértices 2 y 3 no están conectados.

Esta relación nos permitirá definir una *clases de equivalencia* sobre V, de manera que dado un vértice u su clase será

$$[u] = \{\ v \in\ V\ /\ \exists\ un\ u - v\ camino\ en\ G\}$$

donde los vertices de $[u]$ son los conectados con u.

Para el ejemplo anterior y tomando $u = 3$ tenemos que su clase de equivalencia es:

$$[3] = \{1, 3, 4\}$$

De la misma forma $u = 2$ tenemos que su clase de equivalencia es:

$$[2] = \{2, 5\}$$

Definición 1.4 (Componente conexa) *Llamaremos* componente conexa *de un grafo no dirigido $G = (V, A)$, al* subgrafo generado *por cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación de conexión sobre el conjunto de vértices V, es decir el grafo cuyos vértices son los de $[u] \subseteq V$, y las aristas las del grafo G incidentes con los vértices de $[u]$*

Definición 1.5 (Grafo conexo) *Un grafo diremos que es conexo si todos sus vértices estan conectados entre sí.*

Si un grafo tiene ω componentes conexas distintas, diremos que se trata de un grafo ω-conexo.

El grafo K_5 es conexo. Para el ejemplo de la figura 1.2 hay dos clases de equivalencia: la del vértice 3 y la del 2. Por lo tanto hay dos componentes conexas y podemos decir que el grafo es 2-conexo.

Propiedades de las componentes conexas:

- No tienen vértices comunes
- No tienen aristas comunes
- No hay aristas entre componentes conexas distintas de un grafo.

Esto es porque las clases de equivalencia son una partición del conjunto de vértices.

1.3. Propiedades de la conexión.

Teorema 1.1 *Sea G un grafo no dirigido y conexo. G es bipartido si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Demostración :
($\longrightarrow$) Partimos de la base de que $G = (V, A)$ un grafo cualquiera no dirigido y conexo es bipartido. Hay que demostrar que no contiene ciclos de longitud impar.

Como es bipartido, existirán dos subconjuntos de V, X e Y de forma que

$$X \cup Y = V$$
$$X \cap Y = \emptyset$$

y

$$\forall e \in E,\ e = (x, y) \text{ con } x \in X,\ y \in Y,$$

es decir, una bipartición.

Suponemos que tenemos el ciclo C

$$C = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, ..., v_{k-1}, e_{k-1}, v_0$$

y que el primer vértice $v_0 \in X$.

Por ser G bipartido, v_1 pertenecerá a Y, v_2 pertenecerá a X, ..., y v_{k-1} ha de pertenecer a Y, ya que v_0 pertenece a X. Además,

$$\text{longitud(ciclo)} = k = \text{par}$$

ya que empezamos y acabamos por el mismo vértice.

Si cualquier ciclo escogido es par, entonces es que no puede contener ciclos de longitud impar.

($\longleftarrow$) Partimos de que G no contiene ciclos de longitud impar y que es no dirigido y conexo. Tenemos que crear una bipartición de G.

Denotaremos por $d(u, v)$ la longitud del camino más corto de u a v. De esta forma, dado un vértice u, podemos definir dos subconjuntos de G, como sigue:

$$V_1 = \{v \in V / d(u, v) = \text{IMPAR}\}$$
$$V_2 = \{v \in V / d(u, v) = \text{PAR}\}$$

Como G es conexo sabemos que $V_1 \cup V_2 = V$ y que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Nos falta comprobar que no hay aristas entre vértices de $V_i,\ i = 1, 2$.

Sean dos vértices $x, y\ \in V_2$ de forma que existe una arista (x, y) perteneciente a A. (Para V_1 sería análogo).

$$x \in V_2 \Longrightarrow d(u, x) = 2p$$
$$y \in V_2 \Longrightarrow d(u, y) = 2q$$

donde hay un camino P de longitud $2p$ desde u hasta x y otro camino Q de longitud $2q$ desde u hasta y.

Si $p = q$ entonces la longitud de $P \cup (x, y) \cup Q$ es impar y como eso es imposible concluimos que $p \neq q$.

Si $p < q$ entonces $2p < 2p + 1 < 2q$. Si ahora formamos el camino $P' = P \cup (x, y)$, tenemos un camino que va desde u hasta y de longitud

$$\text{longitud}\,(P') = 2p + 1 < 2q$$

y habíamos supuesto que el camino más corto de u a y era Q. Luego hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto la hipótesis de que $e = (x, y)$ pertenecía a E era falsa y G es bipartido. $\square$

Teorema 1.2 *Si G es un grafo no dirigido conexo no trivial, entonces G tiene un vértice de grado uno, un ciclo o ambas cosas.*

Demostración : Vamos a suponer que G no tiene ningún vértice de grado uno, es decir,

$$\forall v \in V, \quad d(v) > 1 \ \Rightarrow \delta \geq 2.$$

Tenemos $v_1 \in V$ cuyo grado es mayor que uno. Ha de existir algún v_2 de forma que $(v_1, v_2) \in A$. También existe algún v_3 distinto de v_1 y $(v_2, v_3) \in A$. Si v_3 y v_1 fueran iguales tendríamos un ciclo. Este razonamiento puede seguir hasta llegar al último vértice v_n. Tendría que existir un v_{n+1} que fuera adyacente a v_n pero como no hay ya más:

$$\exists v_j, \quad 1 \leq j < n / (v_n, v_j) \in E$$

con lo cual tenemos un ciclo. $\square$

Teorema 1.3 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido conexo y C un ciclo en G. Sea e una arista de C, entonces $G - \{e\}$ sigue siendo conexo.*

Demostración : Sea $H = (V, E')$ con $E' = E - \{e\}$ siendo $e = (x, y)$ una arista del ciclo C. Para que H sea conexo hay que demostrar :

$$\forall u, v \in V,\ \exists (u - v) \text{ camino en } H$$

Cualquier vértice u y v de H pertenecen también a G y G es conexo. Hay dos casos a analizar:

- si e no pertenece al u-v camino de G, entonces u y v están conectados.
- si e pertenece al u-v camino de G, entonces el u-v camino y el ciclo C son de la forma:

$$\begin{aligned} P &= u, u_1, u_2, \ldots, x, y, v_1, v_2, \ldots, v, \\ C &= x, y, c_1, c_2, \ldots, c_k, x. \end{aligned}$$

Aunque quitemos la arista $e = (x, y)$, siempre podremos formar otro camino alternativo P'.

$$P' = u, u_1, u_2, \ldots, x, ck, \ldots, c_1, y, v_1, v_2, \ldots, v$$

Luego en el grafo H para cualquier par de vértices u y v, hay un u-v camino que los une. Por tanto, H es conexo.□

Teorema 1.4 *Si G es conexo y no dirigido con $|V| \geq 2$, entonces el número de aristas de G es mayor o igual que $|V| - 1$.*

Demostración : Supongamos que exista un grafo con n vértices, conexo, no dirigido y con menos de n-1 aristas.

Sea m el menor número para el cual existe un grafo conexo, no dirigido y con menos de m-1 aristas.

Sea $G = (V, A)$ un grafo con m vértices y que contiene el mínimo número de aristas de entre todos los grafos conexos con m vértices. Así, este grafo no tendrá ciclos y si no tiene ciclos, como es conexo, tendrá un vértice de grado uno.

Llamemos u al vértice de grado uno y sea (u,v) la única arista incidente con él. Consideremos el grafo $H = (V - \{u\}, A - \{(u, v)\})$. Entonces

$$|V - \{u\}| = m - 1 \text{ y } |E - \{(u, v)\}| < m - 2$$

y además es conexo. Esto contradice la suposición de que m es el menor valor para el cual existen grafos conexos con m vértices y m-1 aristas. □

Teorema 1.5 *Sea V un conjunto de vértices, entonces existe un grafo no dirigido y conexo con $|V| - 1$ aristas.*

Demostración : Hay que encontrar algún grafo no dirigido conexo cuyo número de aristas sea igual al número de vértices menos uno. Supongamos que tenemos n vértices,

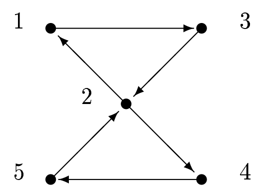


Figura 1.3: Grafo fuertemente conexo.

$$\mathrm{V} = \{\ \mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3,\ ...,\ \mathrm{v}_n\ \}.$$

El conjunto de aristas que definen este grafo es:

$$\begin{gathered}
\mathrm{e}_1 = < \mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2 > \\
\mathrm{e}_2 = < \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3 > \\
.... \\
\mathrm{e}_{n-2} = < \mathrm{v}_{n-2},\ \mathrm{v}_{n-1} > \\
\mathrm{e}_{n-1} = < \mathrm{v}_{n-1},\ \mathrm{v}_n >
\end{gathered}$$

$G = (V, \{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\})$ es conexo con $n-1$ aristas.$\square$

1.3.1. La conexión en grafos dirigidos.

Definición 1.6 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. Dos vértices u y v estan fuertemente conectados si y sólo si $\exists u-v$ y $v-u$ camino dirigido*

Definición 1.7 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. G es* fuertemente conexo *si y sólo si:*

$$\forall u, v \in V,\ \exists u - v \text{ y } v - u \textit{ caminos dirigidos}$$

Definición 1.8 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. Dos vértices u y v estan unilateralmente conectados si y sólo si $\exists u-v$ o $v-u$ camino dirigido*

Definición 1.9 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. G es* unilateralmente conexo *si y sólo si:*

$$\forall\ u,v \in\ V,\ \exists\ u - v \text{ o } v - u \textit{ camino dirigido.}$$

Definición 1.10 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. Dos vértices u y v están débilmente conectados si y sólo si $\exists u-v$ semicamino dirigido*

Definición 1.11 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. G es* débilmente conexo *si y sólo si:*

$$\forall\ u,v \in\ V,\ \exists <u,v> \textit{ semicamino dirigido}$$

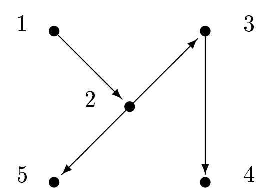


Figura 1.4: Grafo débilmente conexo.

Resulta sencillo comprobar que las relaciones de conexión fuerte y débil sobre los vértices de un grafo dirigido son binarias de equivalencia, sin embargo, la conexión unilateral no verifica la propiedad transitiva. Obsérvese que si consideramos el grafo de la Figura 1.4, los vértices 5 y 2 estan unilateralmente conectados así como los vértices 2 y 4, sin embargo los vértices 5 y 4 no están unilateralmente conectados. Por esto, procede definir las componentes conexas en grafos dirigidos sin recurrir a las clases de equivalencia, pero antes veamos algunos ejemplos.
Ejemplos: El grafo de la figura 1.4 no es unilateralmente conexo ya que no existe ni el camino del vértice 3 al 5, ni al revés. Si que es débilmente conexo porque entre cualquier par de vértices del grafo hay un semicamino dirigido.

El grafo de la figura 1.3 si que es fuertemente conexo ya que para cualquier par de vértices u, v existe un camino dirigido desde u hasta v y otro desde v hasta u.

Corolario 1.1
- *Si un grafo G es fuertemente conexo es unilateralmente conexo.*
- *Si un grafo G es unilateralmente conexo es débilmente conexo.*

Definición 1.12 *Sea G un grafo dirigido y $G_1 \subseteq G$ de forma que G_1 es fuertemente conexo. G_1 es una* componente fuertemente (unilateralmente, débilmente) conexa *de G si y sólo si:*

$$\forall\ G_2 \subseteq G \text{ y } G_2 \text{ fuertemente (unilateralmente, débilmente) conexo } / \ G_2 \supseteq G_1 \Rightarrow G_1 \equiv G_2$$

Es decir, no hay ningún otro subgrafo fuertemente (unilateralmente, débilmente) conexo de G que contenga a G_1.

En el grafo de la figura 1.5, $G_1 \subseteq G$ es una componente fuertemente conexa de G.

En el grafo de la figura 1.5, la componente unilateralmente conexa formada por los vértices 1 y 3 es una componente unilateralmente conexa de G ya que no hay ninguna otra que la contenga. El grafo G es desconexo.

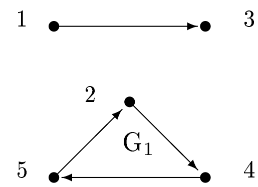


Figura 1.5: Grafo G.

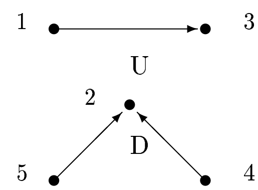


Figura 1.6: Grafo desconexo H.

En el grafo de la figura 1.6, hay una componente unilateralmente conexa de H denominada por U y otra componente débilmente conexa que se llama D.
Nota: Obsérvese que mientras la conexión fuerte y la débil son relaciones binarias de equivalencia, la conexión unilateral no lo es, por tanto, las componentes conexas unilaterales no tienen porque ser disjuntas.

1.4. Propiedades de la conexión.

Teorema 1.6 *Si G es dirigido y fuertemente conexo con $|V| \geq 2$, entonces el número de aristas ha de ser mayor o igual que $|V|$.*

Demostración : G=(V,E) es dirigido fuertemente conexo y $|V| \geq 2$. Por ser G fuertemente conexo

$$\forall u, v \quad \exists\ < u, v > \text{ camino dirigido y } \exists\ < u, v > \text{ c. d.}$$
$$\mathrm{d}_s(u) \geq 1$$
$$\mathrm{d}_e(v) \geq 1$$
$$\mathrm{d}_e(u) \geq 1$$
$$\mathrm{d}_s(v) \geq 1$$

$\forall v \in$ V, el grado de entrada y el de salida son ambos mayor o igual que uno. Luego

$$|E| = \sum d_s(v) \geq n$$

como se quería demostrar.□

Teorema 1.7 *Sea V un conjunto de vértices, entonces existe un grafo dirigido y fuertemente conexo cuyo número de aristas es igual a* $|\ V\ |$.

Demostración : La prueba es análoga al teorema anterior. Supongamos que tenemos n vértices,

$$\mathrm{V} = \{\ \mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3,\ ...,\ \mathrm{v}_n\ \}.$$

Se puede conseguir un grafo de las características que se quiere sin más que formar un ciclo dirigido entre todos los vértices del grafo. El conjunto de aristas que definen este grafo es:

$$\begin{array}{c} \mathrm{e}_1 = <\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2> \\ \mathrm{e}_2 = <\mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3> \\ .... \\ \mathrm{e}_{n-1} = <\mathrm{v}_{n-1},\ \mathrm{v}_n> \\ \mathrm{e}_n = <\mathrm{v}_n,\ \mathrm{v}_1> \end{array}$$

G=(V,{e_1, e_2, ..., e_n}) es fuertemente conexo con n aristas.□

1.5. Matriz de Accesibilidad.

De la misma forma que los conceptos de adyacencia e incidencia, relacionados directamente con la existencia de aristas entre vértices del grafo nos ha suministrado dos formas de representar un grafo, las matrices de adyacencia y de incidencia, la conexión entre vértices nos dará lugar a una nueva forma de representar el grafo.

Sea G=(V,E) un grafo. Diremos que v_j es accesible desde v_i, si existe un camino (dirigido o no dirigido) desde v_i hasta v_j.

Definiremos la matriz de Accesibilidad de un grafo de n vértices y la representaremos por $R = [r(i,j)]_{n\times n}$ como

$$r(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \textit{si } v_j \textit{ es accesible desde } v_i \\ 0\ , & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Si llamamos $R(v_i)$ a los vértices alcanzables desde v_i, podemos obtenerlos mediante el uso de la función Γ.

$$\mathrm{R}(\mathrm{v}_i)\text{=Alcanzables desde}(\mathrm{v}_i) = \{\mathrm{v}_i\} \cup \Gamma(\mathrm{v}_i) \cup \ldots \cup \Gamma^n(\mathrm{v}_i)$$

La matriz de accesibilidad para el grafo de la figura 1.3 es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recíprocamente a la matriz de accesibilidad, se define la matriz de acceso.

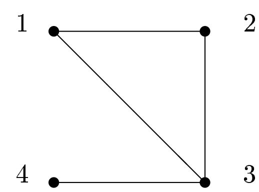


Figura 1.7: Grafo no dirigido.

Definición 1.13 *La Matriz de Acceso es la traspuesta de la matriz de accesibilidad. Se denota por $Q = [q(i,j)]_{n\times n}$, y se define como sigue:*

$$q(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \textit{si } v_i \textit{ es accesible desde } v_j \\ 0\ , & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de acceso para el grafo de la figura 1.3 es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando el grafo es no dirigido las matrices de accesibilidad y acceso coinciden. (Es simétrica).

1.6. Listados de adyacencia.

También podemos representar un grafo mediante listados, veamos el más común.

Sea G=(V,E) con $|V| =$ n y $|E| =$ e. Representamos G mediante dos vectores: H de dimensiones $1 \times n + 1$ y L. Las dimensiones de L varían si G es dirigido o no dirigido. Si el grafo es dirigido las dimensiones de L son $1 \times e$ y si no, $1 \times 2e$. L contiene los vértices adyacentes al primer vértice, luego los adyacentes al segundo y así sucesivamente. H sirve para indexar L y poder saber donde empiezan los adyacentes de cada vértice.

Por ejemplo, si tenemos el grafo no dirigido G:

$$G \equiv (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\})$$

Las dimensiones de H y L son 1×5 y 1×8, respectivamente. Después de rellenar los vectores como procede el resultado es:

H : (1,3,5,8,9)

L : (2,3,1,3,1,2,4,3)

1.7. Matriz de Accesibilidad.

De la misma forma que los conceptos de adyacencia e incidencia, relacionados directamente con la existencia de aristas entre vértices del grafo nos ha suministrado dos formas de representar un grafo, las matrices de adyacencia y de incidencia, la conexión entre vértices nos dará lugar a una nueva forma de representar el grafo.

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que v_j es accesible desde v_i, si existe un camino (dirigido o no dirigido) desde v_i hasta v_j.

Definiremos la matriz de Accesibilidad de un grafo de n vértices y la representaremos por $R = [r(i,j)]_{n\times n}$ como

$$r(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } v_j \text{ es accesible desde } v_i \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si llamamos $R(v_i)$ a los vértices alcanzables desde v_i, podemos obtenerlos mediante el uso de la función Γ.

$$\mathrm{R}(\mathrm{v}_i)\text{=Alcanzables desde}(\mathrm{v}_i) = \{\mathrm{v}_i\} \cup \Gamma(\mathrm{v}_i) \cup \ldots \cup \Gamma^n(\mathrm{v}_i)$$

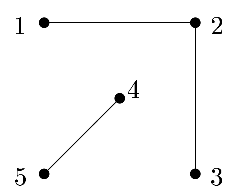


Figura 1.8: Grafo 2-conexo.

La matriz de accesibilidad para el grafo de la figura 2.3 es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8. Listados de adyacencia.

También podemos representar un grafo mediante listados. Veamos el más común.

Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido con $|V| = n$ y $|A| = e$. Representamos G mediante dos vectores: H de dimensiones $1 \times n + 1$ y L, de dimensiones $1 \times 2e$. L contiene los vértices adyacentes al primer vértice, luego los adyacentes al segundo y así sucesivamente. H sirve para indexar L y poder saber donde empiezan los adyacentes de cada vértice.

Por ejemplo, si tenemos el grafo no dirigido G de la figura 1.9:

$$G \equiv (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\})$$

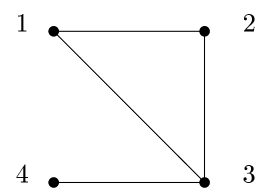


Figura 1.9: Grafo no dirigido.

Las dimensiones de H y L son 1×5 y 1×8, respectivamente. Después de rellenar los vectores como procede el resultado es:

$$H : (1, 3, 5, 8, 9)$$
$$L : (2, 3, 1, 3, 1, 2, 4, 3)$$

2. Métodos de búsqueda en grafos.

2.1. Breadth First Search. (BFS)

Este método de recorrer un grafo empieza con un cierto vértice y primero busca por todos los vértices alcanzables desde el mismo. Luego sigue con los vértices recién alcanzados. Es válido tanto para grafos dirigidos como para grafos no dirigidos.

Algoritmo 2.1 (BFS)

```
procedimiento BFS(v)
/* se aplica sobre un grafo G de n vértices */
global G,n,ALCANZADO(1:n);
cola COLA;
x ← v;
ALCANZADO(v) ← 1;
inicializar la cola a vacío;

bucle
   para todos los vértices w adyacentes desde x hacer
      si ALCANZADO(w) = 0
         entonces
             ALCANZADO(w) ← 1
             añadir w a COLA
   si COLA está vacia
        entonces return
   borrar el vértice x de COLA
fin del bucle

fin BFS
```

Al final de la aplicación del algoritmo BFS sobre un grafo G cualquiera, ALCANZADO(i) será igual a uno si el vértice i es alcanzable desde el vértice de partida del recorrido.

Si aplicamos el algoritmo BFS al grafo de la figura 2.1, los vértices serán recorridos en el siguiente orden: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Este algoritmo también puede usarse para determinar si un grafo no dirigido es o no conexo. Si el grafo es conexo al final de la aplicación del algoritmo el vector ALCANZADO sólo contendrá unos. También puede usarse este algoritmo para encontrar las componentes conexas de un grafo no dirigido desconexo. Aplicando este procedimiento a grafos conexos podemos obtener árboles generadores

La complejidad temporal del algoritmo depende de qué técnica se use para representar el grafo. Si se usa la matriz de adyacencia, la complejidad de encontrar todos los vértices adyacentes a uno dado es del orden del número de

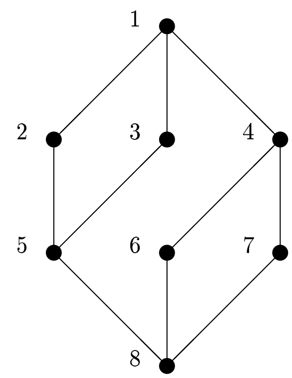


Figura 2.1: Grafo conexo no dirigido.

vértices. En cuanto a la complejidad espacial se necesitan n bits para representar ALCANZADO y n bits para implementar la COLA, además de los bits necesarios para almacenar el grafo.

2.2. Depth First Search. (DFS)

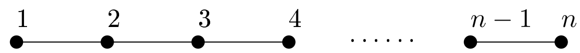
Este algoritmo funciona del modo siguiente: partiendo de un vértice v, lo marcamos como alcanzado y buscamos algún vértice adyacente a él que aún no haya sido marcado como alcanzado. Si no existe ningún vértice de estas condiciones, entonces la búsqueda ha terminado. Suponemos que existe algún w adyacente a v y que no ha sido marcado como alcanzado. Ahora iniciamos el mismo proceso pero tomando como vértice inicial el vértice w y así sucesivamente. Al principio del algoritmo, alcanzado $(i) = 0$ para todos los vértices i del grafo.

Algoritmo 2.2 (DFS)

procedimiento DFS(v)
/ se aplica sobre un grafo G de n vértices */*
global G,n,ALCANZADO(1:n);
integer v,w;
ALCANZADO(v) $\leftarrow$ *1;*
  para todos los vértices w(no alcanzados) adyacentes desde x hacer
    call DFS(w)
  fin del para
fin DFS

Por ejemplo, si aplicamos este algoritmo al grafo de la figura 2.1, un posible recorrido en profundidad empezando por el vértice número uno sería: 1, 2, 5, 8, 6, 4, 7, 3.

Ambos algoritmos tienen la misma complejidad temporal y espacial.



Peor caso para DFS
Mejor caso para BFS

Figura 2.2: Complejidad espacial.

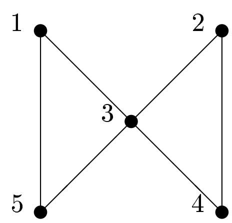


Figura 2.3: Grafo conexo.

El algoritmo BFS utiliza una cola, mientras que DFS utiliza una pila, esto hace que su comportamiento dependa del tipo de grafo sobre el que los apliquemos.

Por ejemplo, en los grafos cuyos vértices tienen un elevado grado de salida funciona muy bien el DFS y es precísamente el peor caso para el BFS. Lo contrario sucede en grafos del tipo de la figura 2.2, donde funciona mejor el BFS.

Si aplicaramos este algoritmo a un grafo G disconexo, podríamos obtener sus componentes conexas haciendo sucesivas llamadas a DFS cada vez con un vértice que aún no haya sido alcanzado.

Definición 2.1 *Decimos que V' es una* cortadura de vértices, *siendo $V' \subseteq V$ y G conexo, si $G \sim V'$ es disconexo. Si, además, $|V'| = k$ entonces V' es una k-cortadura de vértices.*

Definición 2.2 *La* conectividad *de un grafo es el mínimo número entero k, para el cual el grafo tiene una k-cortadura de vértices. O dicho de otra forma, el mínimo número de vértices que se han de quitar para que el grafo sea disconexo.*

Para el grafo de la figura 2.3, tenemos que $V' = \{3\}$ es una 1-cortadura de vértices. Además la conectividad de este grafo es uno. Es decir, con sólo eliminar un vértice el grafo ya pasa a ser disconexo.

Definición 2.3 *A' es una* cortadura de aristas *si el grafo $G \sim E'$ es disconexo. Si se cumple $|E'| = k'$ decimos que el grafo tiene una k'-cortadura de aristas.*

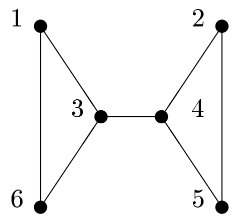


Figura 2.4: Grafo conexo.

Definición 2.4 *Definimos la* aristoconectividad *como el menor número entero k' para el cual el grafo tiene una k'-cortadura de aristas*

Se puede demostrar que

$$\text{Conectividad} \leq \text{Aristoconectividad} \leq \text{Grado mínimo}$$

El conjunto $E' = \{(3,4)\}$ es una 1-cortadura de aristas para el grafo de la figura 2.4. Y además, la aristoconectividad para este grafo es uno.

Definición 2.5 *Decimos que un vértice v es un* vértice de corte *si por sí mismo constituye una 1-cortadura.*

Definición 2.6 *Decimos que una arista a es una* arista de corte *si por sí misma constituye una 1-cortadura de aristas.*

En los dos ejemplos anteriores tanto el vértice como la arista eran de corte. Una arista que esté contenida en un ciclo del grafo no puede ser una arista de corte.

Definición 2.7 *Definimos un grafo como un* bloque *cuando éste es conexo y no tiene vértices de corte.*

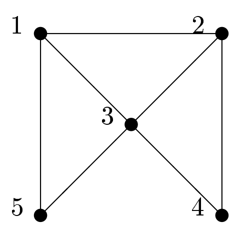


Figura 2.5: Bloque: Grafo conexo y sin vértices de corte.

El grafo de la figura 2.5 es un bloque. Podemos definir el concepto de bloque de un grafo G como un subgrafo de G que es bloque y maximal respecto de G. Siempre podemos expresar un grafo como la unión de sus bloques.

2.3. Ejercicios prácticos

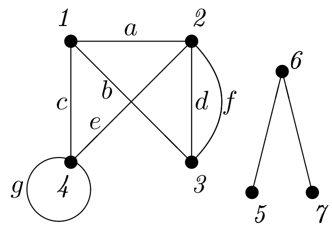
Ejercicio 2.1 *Dado el grafo* $G = (V, A)$*, donde* $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y* $A = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 6)\}$

(a) Aplicar un algoritmo de búsqueda para vértice del grafo.

(b) Determinar si el grafo es conexo, y si no lo es obtener sus componentes conexas.

(c) Encontrar un ciclo el grafo.

Ejercicio 2.2 *Cosideremos el siguiente grafo:*



(a) Determinar si el grafo es conexo, y si no lo es obtener sus componentes conexas.

(b) Encontrar un ciclo en el grafo y una cadena cerrada.

(c) Para cada una de las dos componentes conexas encontrar, si es posible al menos, un vértices de corte, una arista de corte, una cortadura de vértices y una cortadura de aristas.

(d) Obtener la matriz de accesibilidad.

2.4. Ejercicios complementarios

Para completar esta sesión se recomienda resolver los problemas de la lista de clase y los ejercicios del libro de Fuster.