Prácticas de Matemática Discreta

Actividades de las sesión 3

16 de septiembre de 2013

Ejercicio 1. Determina las componentes conexas del grafo dado por la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Etiquetaremos los vértices del grafo mediante v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 (siguiendo el mismo orden que en la matriz de adyacencia). Representando el grafo observaremos que tiene dos componentes conexas. Una de ellas tiene, como conjunto de vértices, $\{v_1, v_2, v_3\}$, y como conjunto de aristas todas las incidentes con estos vértices. La otra componente conexa tiene, como conjunto de vértices, $\{v_4, v_5\}$; sus aristas son las incidentes con estos vértices.

Ejercicio 2.

1. ¿Para qué valores de n es cierto que el grafo K_n es un grafo euleriano? Encuentra un camino euleriano cerrado en el grafo K_5.
2. Determina si K_n puede tener un camino euleriano abierto en caso de no ser euleriano.

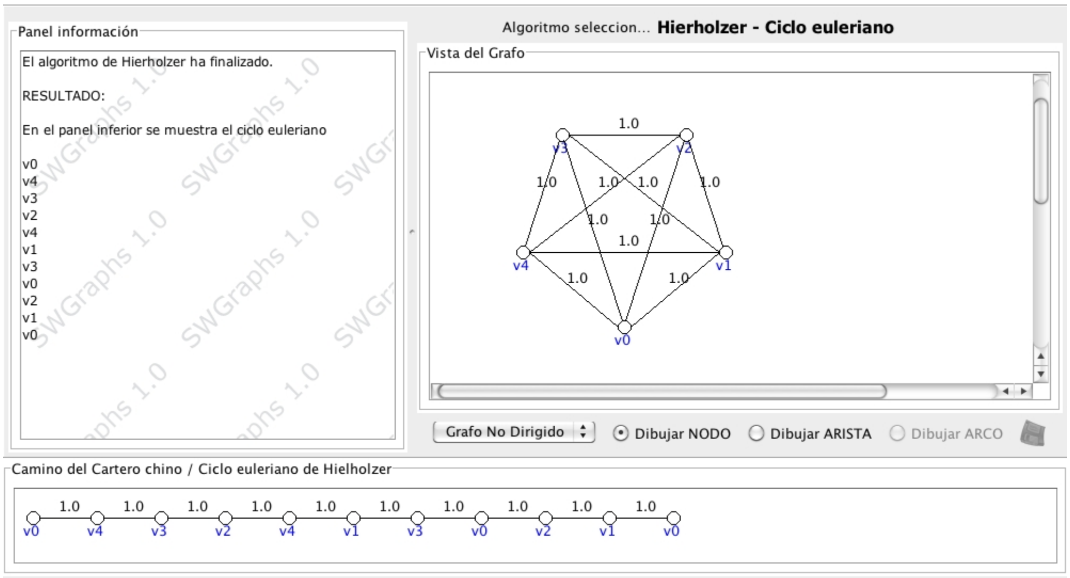
Solución:

1. Aplicando el Teorema de Euler, K_n será euleriano si y sólo si es conexo y todos los vértices tienen grado par.

   - K_n siempre es conexo, independientemente del valor de n.
   - Todos los vértices de K_n tienen, como grado, $n - 1$.

   Por tanto: K_n es un grafo euleriano si y sólo si n es impar.

   Podemos hallar un camino euleriano cerrado en K_5 usando el algoritmo de Hierholzer:



2. Por el Teorema de Euler, K_n tiene un camino euleriano abierto si y sólo si existen exactamente 2 vértices de grado impar. Como el grado de todos los vértices es el mismo, esto obliga a que $n = 2$. Por tanto, el único grafo completo que tiene un camino euleriano abierto es K_2.

Ejercicio 3. Cada vez que alguien se dispone a visitar cierta mansión histórica, recibe una copia del plano de la casa (figura 1). ¿Es posible visitar cada habitación de la casa pasando por cada puerta sólo una vez?

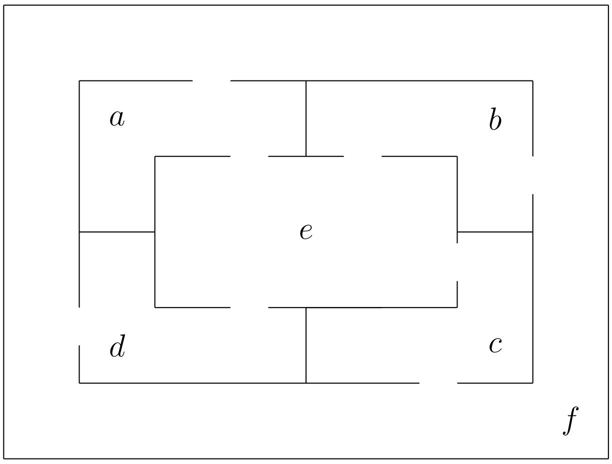
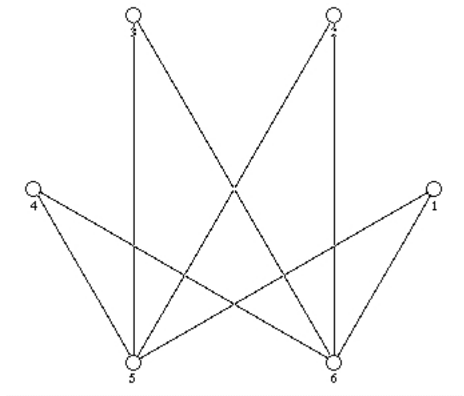


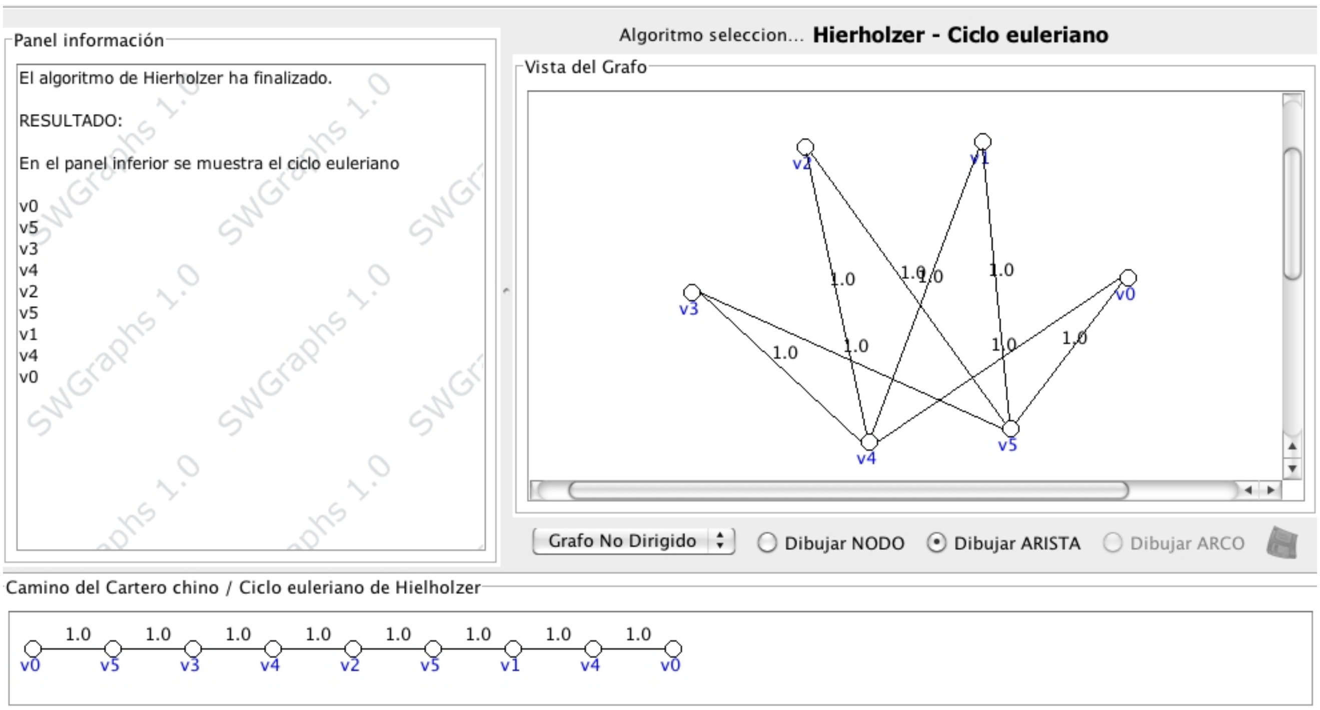
Figura 1: Plano de una mansión histórica (problema 3)

Solución:

Podemos representar la situación mediante un grafo cuyos vértices se corresponden con las habitaciones, y cuyas aristas se corresponden con las puertas. Nuestro problema se reformula de la siguiente manera: ¿tiene este grafo un camino Euleriano? Representamos primero el grafo:



Ya vemos que el grafo es conexo. Además, ya vemos que todos los vértices tienen grado par. Aplicando el Teorema de Euler se tiene que el grafo es Euleriano. Para obtener un camino Euleriano cerrado podemos aplicar el algoritmo de Hierholzer:



Ejercicio 4. (*) En el grafo de la figura 2 se han representado las 8 paradas de un autobús que realiza una ruta escolar y las distintas conexiones entre ellas. ¿Es posible recorrer todas las calles una sola vez volviendo al punto de partida, aunque se pase más de una vez por alguna parada?

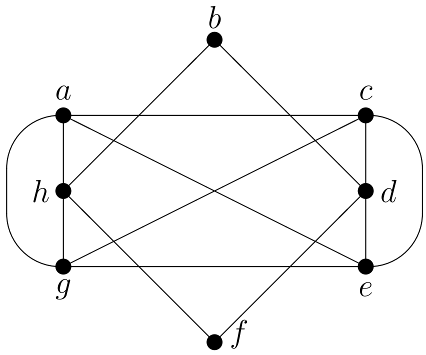
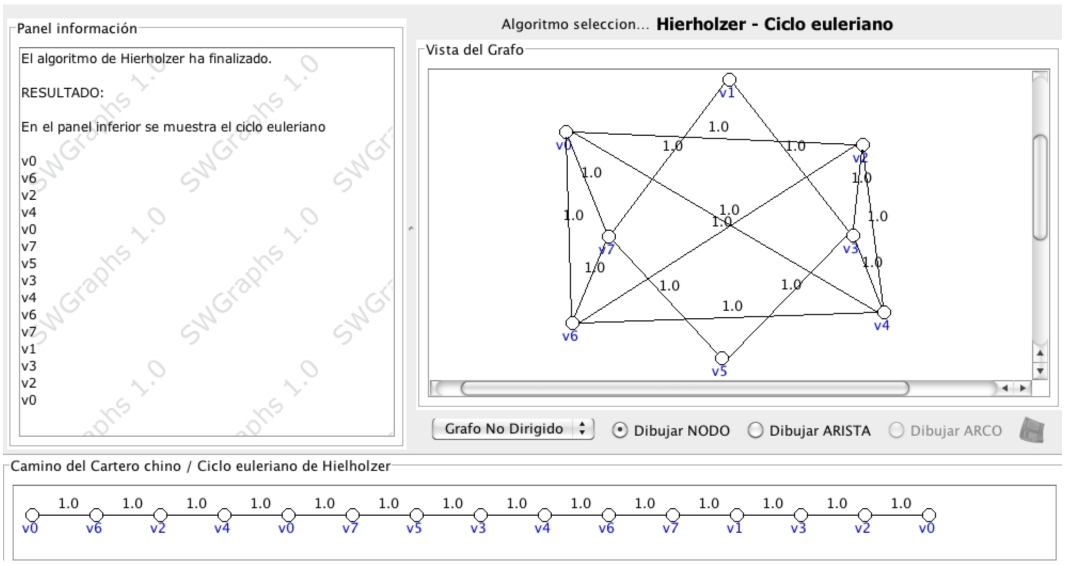


Figura 2: Ruta del autobús escolar (problema 4)

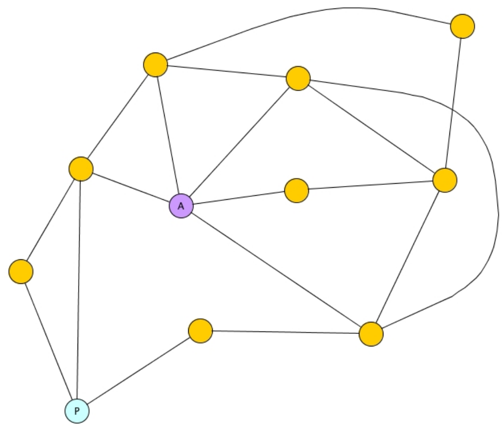
Solución:

El problema se reformula de la siguiente manera: ¿es euleriano el grafo de la figura? La respuesta es afirmativa como consecuencia del Teorema de Euler, ya que es conexo y todos los vértices tienen grado par. Si queremos obtener un camino Euleriano, podemos aplicar el algoritmo de Hierholzer:



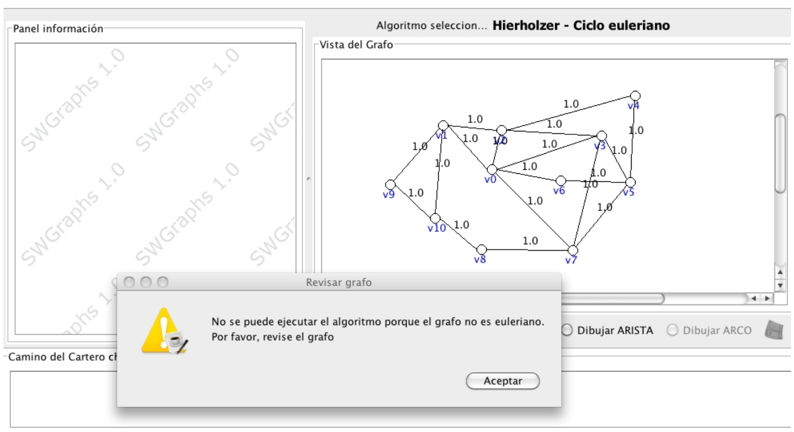
Ejercicio 5. (*) Durante las fiestas patronales en la ciudad X se va a celebrar una carrera popular infantil. En el siguiente gráfico se representan las calles por las que se ha decidido que pase la carrera. Las calles son estrechas y no muy largas, por lo que, para evitar encuentros, es conveniente que los corredores pasen sólo una vez por cada una. La carrera deberá partir del

Ayuntamiento (A) y terminar en el parque municipal (P). ¿Será posible realizar la carrera en las condiciones exigidas? Modeliza el problema usando conceptos de Teoría de Grafos y, en el caso en que la respuesta sea afirmativa, calcula el trazado de la carrera usando el algoritmo adecuado. (Puedes usar el programa *SWGraphs*).

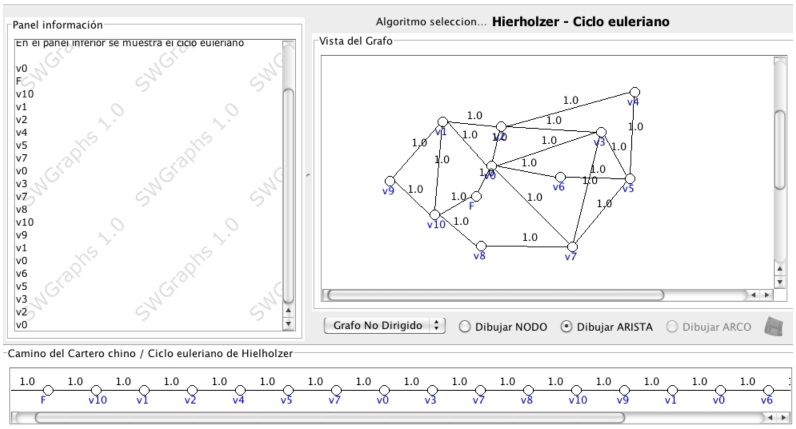


Solución:

Nos están preguntando si el grafo de la figura posee un camino Euleriano. Vemos que el grafo es conexo y que, además, todos sus vértices tienen grado par excepto dos de ellos (los correspondientes al Ayuntamiento y al parque municipal). Por tanto, aplicando el segundo enunciado del Teorema de Euler, existe un camino Euleriano abierto cuyos extremos han de ser, necesariamente, los dos vértices de grado impar. Por lo tanto la respuesta a la pregunta es afirmativa. Para calcular un camino Euleriano podemos utilizar el algoritmo de Hierholzer. Vamos a aplicar este algoritmo usando *SWGraphs*:



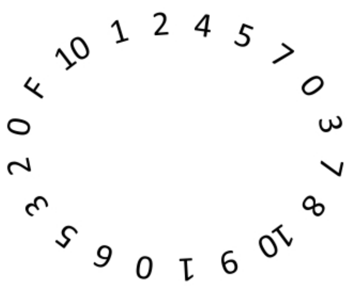
El Ayuntamiento está representado mediante el vértice v_0 y el parque municipal mediante el vértice v_{10}. Nos da un mensaje de error porque el programa sólo aplica el algoritmo de Hierholzer sobre grafos Eulerianos (es decir, para obtener caminos Eulerianos cerrados), y el nuestro no lo es. Podemos solucionar esto muy fácilmente introduciendo un vértice ficticio (que hemos denotado por F) entre los dos vértices de grado impar (v_0 y v_{10}) y dos aristas ficticias que lo unen con v_0 y v_{10}. De esta manera conseguimos un nuevo grafo que sí que es Euleriano (puesto que ahora todos los vértices tienen grado par). Aplicamos sobre él el algoritmo de Hierholzer:



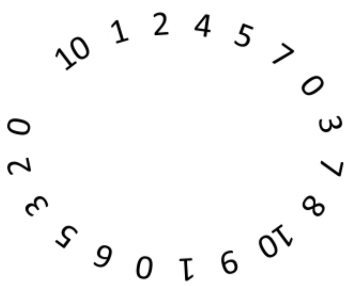
El programa nos devuelve el siguiente camino:

$$v_0\ F\ v_{10}\ v_1\ v_2\ v_4\ v_5\ v_7\ v_0\ v_3\ v_7\ v_8\ v_{10}\ v_9\ v_1\ v_0\ v_6\ v_5\ v_3\ v_2\ v_0$$

Puesto que es un camino cerrado, es mejor verlo en forma "circular":



Eliminamos ahora el vértice ficticio (F), conjuntamente con las aristas que lo unen a v_0 y v_{10}:



Queda claro ahora que un posible camino Euleriano entre v_0 y v_{10} es el siguiente:

$$v_0\ v_2\ v_3\ v_5\ v_6\ v_0\ v_1\ v_9\ v_{10}\ v_8\ v_7\ v_3\ v_0\ v_7\ v_5\ v_4\ v_2\ v_1\ v_{10}.$$