# PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA

## Tema 4. Introducción a la teoría de grafos

1. Sea $G = (V, A)$ el grafo con $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ y cuya aplicación de incidencia viene dada por:

$$\psi(a_1) = \{a, b\}, \quad \psi(a_2) = \{b, c\}, \quad \psi(a_3) = \{b, e\}, \quad \psi(a_4) = \{c, e\}$$
$$\psi(a_5) = \{d, f\}, \quad \psi(a_6) = \{e, g\}, \quad \psi(a_7) = \{f, g\}$$

   *a*) Analiza si se trata de un grafo simple, si existen bucles y si hay vértices aislados.

   *b*) Dibuja una representación gráfica de $G$.

   *c*) Obtén las matrices de adyacencia e incidencia de $G$.

2. *a*) ¿Puede la siguiente matriz ser la matriz de incidencia de un grafo?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   *b*) Haz una representación gráfica de dos grafos cuyas matrices de adyacencia sean, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Determina si las siguientes listas pueden corresponder o no a las listas de los grados de todos los vértices de un grafo simple y sin bucles. En caso afirmativo, dibuja un grafo con dichas características y, en caso contrario, justifica porqué dicho grafo no puede existir.

   *a*) $3, 3, 3, 5, 2$    *b*) $3, 4, 3, 4, 3$    *c*) $1, 2, 2, 3, 4$    *d*) $2, 2, 2, 2, 4, 4$

4. A una fiesta asisten 20 personas. ¿Es posible que cada una de ellas conozca a un número diferente de invitados? Justifica la respuesta.

5. Un grafo con 19 aristas tiene 5 vértices de grado 1, 3 vértices de grado 2, 5 vértices de grado 3 y el resto de grado 4. Determina el número de total de vértices de dicho grafo.

6. Determina las componentes conexas del grafo simple dado por la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. *a*) ¿Para qué valores de $n$ es cierto que el grafo $K_n$ es un grafo euleriano? Encuentra un camino euleriano cerrado en el grafo $K_5$.

   *b*) Determina si $K_n$ puede tener un camino euleriano abierto en caso de no ser euleriano.

8. En el grafo de la figura 1 se han representado las 8 paradas de un autobús que realiza una ruta escolar y las distintas conexiones entre ellas. ¿Es posible recorrer todas las calles una sola vez volviendo al punto de partida, aunque se pase más de una vez por alguna parada?

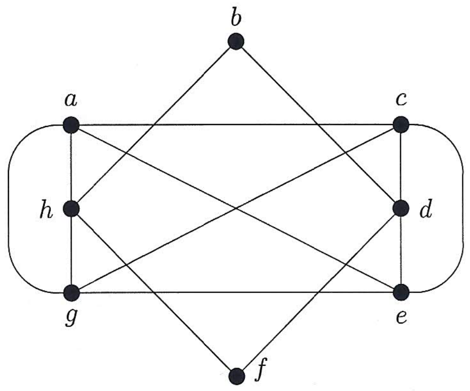


Figura 1: Ruta del autobús escolar (problema 8)

9. Cada vez que alguien se dispone a visitar cierta mansión histórica, recibe una copia del plano de la casa (figura 2). ¿Es posible visitar cada habitación de la casa pasando por cada puerta sólo una vez?

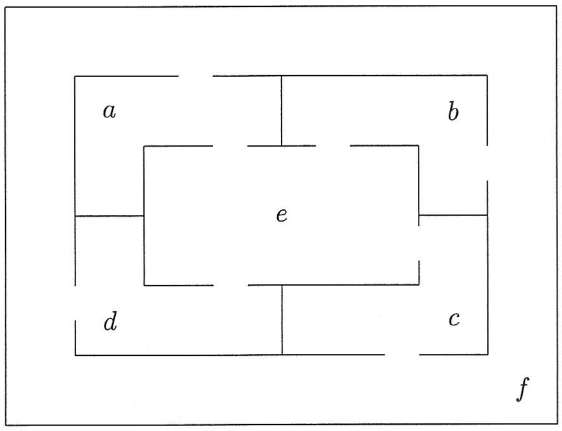


Figura 2: Plano de una mansión histórica (problema 9)

10. Determina cuáles de los grafos de la figura 3 son isomorfos, justificando la respuesta.

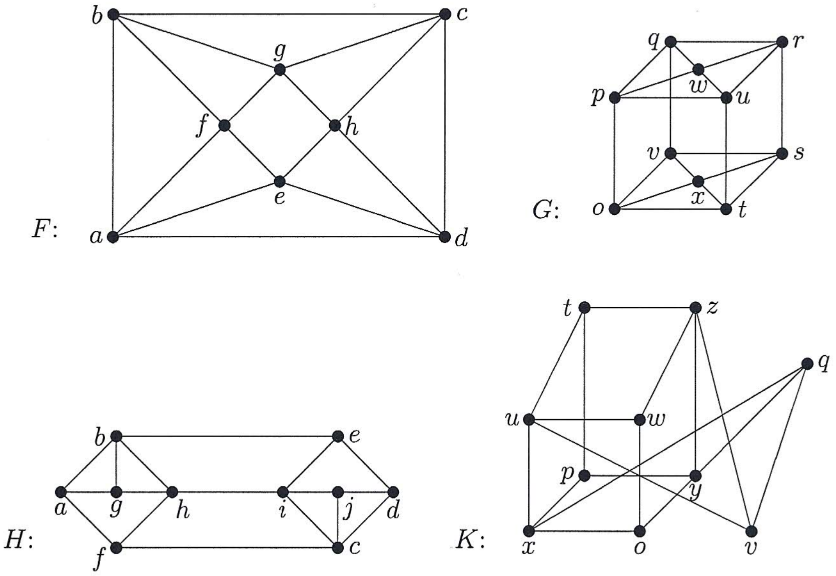


Figura 3: Grafos del problema 10

11. Determina cuáles de los grafos de la figura 4 son isomorfos, justificando la respuesta.

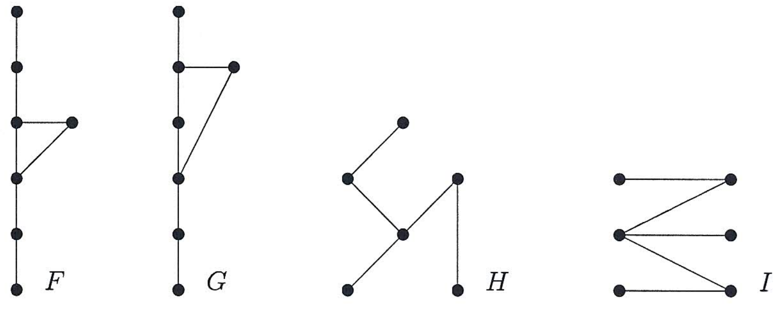


Figura 4: Grafos del problema 11

12. Un árbol tiene $2n$ vértices de grado 1, $3n$ vértices de grado 2 y $n$ vértices de grado 3. Determina el número de vértices y de aristas de dicho árbol.

13. Sea $T$ un árbol con 21 vértices, cuyo conjunto de grados es $\{1, 3, 5, 6\}$. Sabiendo que tiene 15 hojas y un solo vértice de grado 6, ¿cuántos vértices de grado 5 tiene?

14. Dibuja todos los árboles mutuamente no isomorfos con 5 vértices.