Prácticas de Matemática Discreta.
Teoría de Grafos
2011/12
UNIDAD 4

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

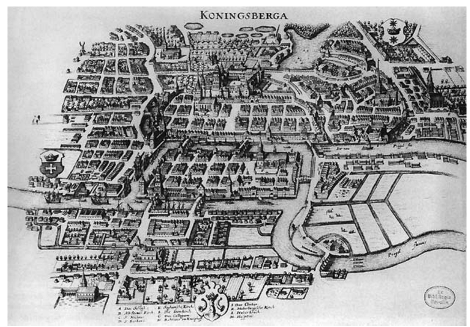
24 de abril de 2012

Índice

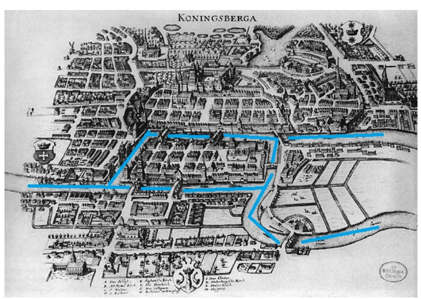
Índice de figuras

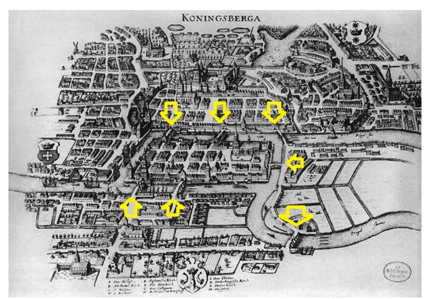
1. Grafos Eulerianos.

Para encontrar el origen de la teoría de grafos debemos retrotraernos al siglo XVIII y trasladarnos al ciudad de Königsberg, entonces en Prusia Oriental, actualmente Kaliningrado en Rusia. El río Pregel atravesaba la ciudad y después de rodear la isla Kneiphof se dividía en dos ramas, dividiendo la ciudad en cuatro zonas diferentes que estaban unidas por siete puentes, como podemos ver en este antiguo grabado.



El problema consiste en determinar si es posible, partiendo de un punto determinado, pasar por todos los puentes exactamente una vez y retornar al punto de partida.

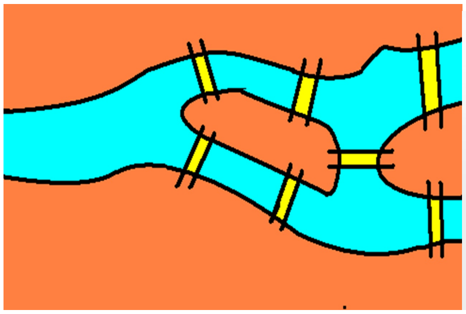


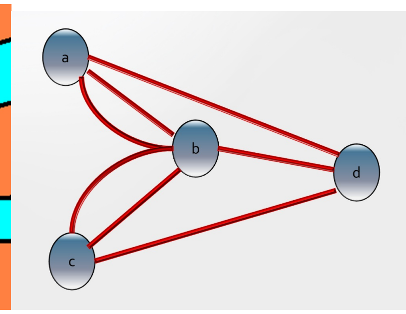


Este problema lo podemos expresar como un problema de grafos considerando las masas de tierra como los vértices y los puentes representan las aristas que los unen, en ese caso, el problema se podría formular como el de recorrer todas las aristas del grafo volviendo al punto de partida sin pasar dos veces por la misma arista, es decir encontrar un ciclo que recorra todas las arista del grafo exactamente una vez.

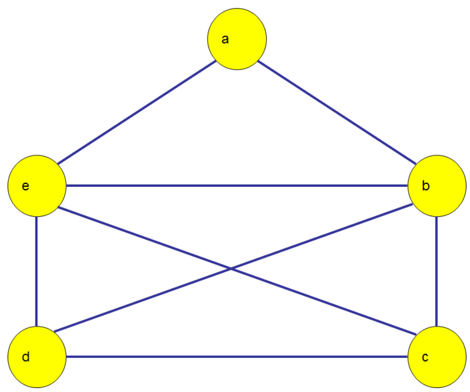
Euler demostró que no era posible encontrar este tipo de ciclo y que el problema de los puentes de Königsberg no tenía solución[1], además establecía las condiciones para que el problema la tuviese.

[1] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (Solución de un problema relativo a la geometría de posición





Una versión más cotidiana de este problema la tenemos en el juego de dibujar un sobre de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel.



Definición 1.1 (Camino euleriano) *Dado un grafo $G = (V(G), A(G))$ no dirigido, diremos que P es un camino euleriano en G si recorre todas las aristas del grafo exactamente una vez.*

Definición 1.2 (Ciclo euleriano) *Dado un grafo $G = (V(G), A(G))$ no dirigido, si en un camino euleriano P los vértices inicial y final coinciden, decimos que es un ciclo euleriano.*

Definición 1.3 (Grafo euleriano) *Dado un grafo $G = (V(G), A(G))$ no dirigido, diremos que es un grafo euleriano si contiene un ciclo euleriano.*

Teorema 1.1 *Sea un grafo no dirigido $G = (V(G), A(G))$, conexo y no trivial.*
G es euleriano si y solo si no tiene vértices de grado impar.

Demostración :
($\longrightarrow$) Tenemos un grafo euleriano G, luego existe un ciclo euleriano C en G de forma que C recorre todas las aristas del grafo exactamente una vez.

Tomamos un vértice cualquiera v del grafo G. Como C recorre todas las aristas del grafo puede ocurrir que v sea un vértice intermedio de C o el vértice inicial.

¿Qué podemos decir del grado del vértice V? El grado de v es el número de aristas que inciden en él, como el grafo es euleriano, entonces el grado de v será el número de aristas de C que incidan en él.

Si es un vértice intermedio, entonces $d(v) = 2p$, siendo p el número de veces que el camino C pasa por v, por lo tanto su grado será par.

Si es el vértice inicial, también será el vértice final, entonces $d(v) = 1 + 2p + 1 = 2(p + 1)$, siendo p el número de veces que el camino C pasa por v, por lo tanto su grado será par.

Así pues queda demostrado que si G es euleriano, entonces G no tiene vértices de grado impar.

($\longleftarrow$) Sea G un grafo conexo, no trivial, de manera que no tiene vértices de grado impar. Procederemos por reducción al absurdo:

Si no tiene vértices de grado impar, entonces

$$\forall v \in V(G), d(v) \text{ es par } \Rightarrow \delta \geq 2$$

Como G es conexo, contiene un ciclo de longitud $\delta + 1$.

Supongamos que G no sea euleriano, y sea C una cadean cerrada y maximal respecto del número de aristas en G, es decir C es la cadena cerrada con mayor número de aristas que existe en G, como tiene un ciclo de al menos longitud $\delta + 1$, tiene que haber una.

Como G no es euleriano, no tiene un ciclo que recorra todas las aristas, por tanto deben de quedar aristas fuera de C.

Consideremos el grafo $H = (V(G), A(G) - A(C))$, es decir el grafo que tiene los mismos vértices que G y las aristas de G que no son del ciclo C.

Este grafo tiene al menos una componente conexa no trivial, esa componente conexa G' con $\sharp A(G') > 0$, puesto que si todas las componentes fuesen triviales, vértices aislados sin aristas, todas las aristas del grafo estarían en el ciclo C, y entonces el grafo sería euleriano, cosa que estamos asumiendo que no ocurre.

Sea pues la componenete conexa no trivial G', y sea v un vértice de esa compònente conmexa. El grado de v en G es par por hipótesis, como a G le quitamos las aristas del ciclo C a v le hemos quitado dos aristas incidentes con él por cada vez que el ciclo C lo atraviesa, por lo tanto el grado de v en G' seguirá siendo par.

Como los vértices de la componente G' tienen grado par, y partiendo de un vértice $x \in C \cap V(G')$, podemos construir una cadena cerrada C' que empiece y termine en x. De esta forma como x está en C y en C', si construimos $C \cup C'$, obtenemos una nueva cadena cerrada que además tiene más aristas que C, $\sharp(C \cup C') > \sharp C$, lo cual contradice la elección de C como cadena cerrada maximal.

Así pues G tiene que ser euleriano.$\square$

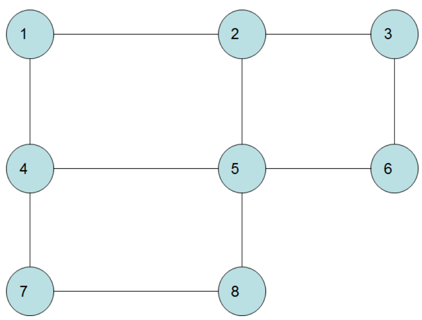
Corolario 1.1 *Sea un grafo no dirigido no euleriano $G = (V(G), A(G))$ y conexo no trivial, G contiene un camino euleriano si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

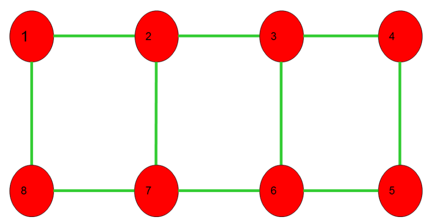
($\longrightarrow$) Si G contiene camino euleriano, mediante un razonamiento análogo al del teorema anterior obtendremos que todos los vértices internos del camino tienen grado par.

($\longleftarrow$) Si consideramos el grafo resultante de unir los dos vértices de grado impar con una arista artificial obtendremos un nuevo grafo que si será euleriano, ya que todos los vértice tendrán grado par. Por ser euleriano tendrá un ciclo euleriano C que contendrá la arista artificial añadida a G. Si eliminmaos esta arista artificial del ciclo, obtendremos el camino euleriano.$\square$

Podemos comprobar que el grafo de los puentes de Königsberg no verfica la condición del Teorema de Euler, por lo tanto no es euleriano, y que el grafo del sobre tiene dos vértices de grado impar, por lo tanto contendrá un camino euleriano, pero no un ciclo.

Si consideramos los grafos siguientes, el primero tiene dos vértices de grado impar, por lo tanto contiene un camino euleriano y el otro tiene cuatro vértices de grado 3, por lo tanto no es euleriano.





El grafo K_5 es un grafo euleriano.

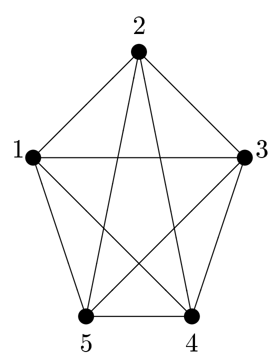


Figura 1.1: K_5.

1.1. La regla de Fleury

La regla de la Fleury es un procedimiento sencillo que permite encontrar un ciclo euleriano en un grafo euleriano.

La regla consiste en, partiendo de un vértice dado, ir cruzando todas las aristas del grafo sucesivamente, de manera que cuando se cruza una arista, esta se elimina del grafo, aunque no está permitido atravesar una arista que deje el grafo desconectado en dos componentes conexas no triviales.

Si es posible volver al punto de partida después de haber eliminado todas las aristas, entonces habremos encontrado un ciclo euleriano y estaremos en condiciones de concluir que el grafo es euleriano.

Podemos formalizar la Regla de Fluery con el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1.1 (Algoritmo de Fleury) *El Algoritmo de Fleury permite obtener, si existe, un camino o un ciclo euleriano en un grafo no dirigido G.*

- *Step 1 Comprobar que G es conexo y no trivial.*
- *Step 2 Comprobar que se cumple el teorema de Euler. Si todos lo vértices tienen grado par elegir uno cualquiera. Si solamente hay dos con grado impar elgir uno de los dos como vértice de partida.*
- *Step 3 CEuler=(v)*
- *Step 4 While $E(G) \neq \emptyset$ do*
  - *Step 5 If $d(v) = 1$ then*
    - *Step 6 w = adjacent(v)*
    - *Step7 $V(G) = V(G) - \{v\}$,*

    If not
    - *Step 8 Buscar w entre los vértices adyacentes a v de manera que (v, w) no sea arista de corte.*
    - *Step 9 $E(G) = E(G) - \{v\}$*

    Endif
  - *Step 10 $CEuler = Ceuler + (w)$*
  - *Step 11 $v = w$*

  End While
- *Step 12 End CEul*

Son muchos los problemas relacionados con los grafos eulerianos, entre los más interesante podemos destacar el conocido como "problema del cartero chino", y las "sucesiones de Brujin".

En el problema del cartero chino, formulado por Mei-Ko Kwan en 1962 se trata de optimizar la ruta que debe seguir un cartero para repartir sus cartas en un conjunto de calles. Teniendo en cuenta que el cartero debe recorrer todas las casa de la calle al menos una vez, y que recorrer cada calle tiene un coste asociado, si el grafo es euleriano deberemos obtener el ciclo euleriano, y si el grafo no es euleriano, deberemos determinar las calles por las que debe pasar dos veces con un coste mínimo.

El problema de las sucesión de Brujin, conocida como una sucesión de registro de desplazamiento de longitud máxima en un vector circular sobre un alfabeto, se aplica al alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ permitiendo ordenar 2^k dígitos binarios sobre un vector circular de manera que las 2^k sucesiones de k dígitos consecutivos sean distintas entre sí, con interesantes aplicaciones a la criptografía.

2. Grafos hamiltonianos.

En el siglo XIX el matemático irlades Sir William R. Hamilton diseñó un juego llamado **alrededor del mundo**, en el que sobre un dodecaedro, figura geométrica con 12 caras pentagonales, se situaban 20 ciudades, que debían recorrerse sin repetir ninguna ciudad.

Planteado como un problema de grafos, se trata de un grafo con un total de 20 vértices y 30 aristas, donde partiendo de un vértice se deben recorrer todos los vértices del grafo sin repetir ninguno.

Se trata de un problema parecido al de los grafos eulerianos, donde debían recorrerse todas las aristas, pero en este caso deben recorrerse todos los vértices.

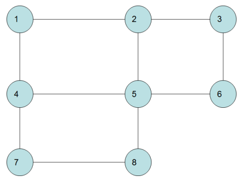
Definición 2.1 (Camino hamitoniano) *Dado un grafo* $G = (V(G), A(G))$ *no dirigido diremos que* P *es un camino hamiltoniano si pasa por cada vértice del grafo exactamente una vez, y solo una.*

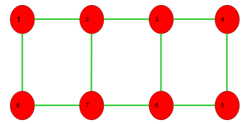
Definición 2.2 (Ciclo hamiltoniano) *Un camino hamiltoniano, que sea un ciclo es llamado ciclo Hamiltoniano.*

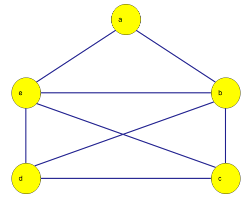
Definición 2.3 (Grafo hamiltoniano) *Dado un grafo* $G = (V(G), A(G))$ *no dirigido, si tiene un ciclo hamiltoniano, entonces diremos que es un grafo hamiltoniano.*

Nótese que esta definición es equivalente a decir que un grafo hamiltoniano tiene un ciclo generador.

Los siguientes grafos que ya hemos visto anteriormente son hamiltonianos.







El problema de determinar si un grafo es Hamiltoniano es un problema NP-completo.

Desafortunadamente no existe ninguna caracterización para saber si un grafo es hamiltoniano, ninguna condición necesaria y suficiente, circunstancia que si se da para los grafos eulerianos.

Resulta interesante conocer condiciones bajo las cuales un grafo puede ser hamiltoniano, o algunas propiedades que cumplen los grafos hamiltonianos.

Teorema 2.1 (Dirac) *Sea un grafo no dirigido $G = (V(G), A(G))$ de orden $p = 3$. Si $d(v) = p/2$, para cualquier vértice de G, entonces G es hamiltoniano*

Corolario 2.1 *Sea un grafo no dirigido $G = (V(G), A(G))$ de orden $p = 3$. Si $d(v) = (p-1)/2$, para cualquier vértice de G, entonces G contiene un camino hamiltoniano*

Teorema 2.2 *Sea un grafo no dirigido $G = (V(G), A(G))$, sea $k(G)$ el número de componentes conexas del grafo G*

Si G es hamiltoniano, entonces $k(G - S) = |S|$, para cualquier conjunto no vacío S de $V(G)$

3. Ejercicios

3.1. Ejercicios prácticos

Ejercicio 3.1 *Dado el grafo definido por la siguiente matriz de adyacencia:*

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. *Determinar si es un grafo euleriano*
2. *Encontrar si existe una camino o un ciclo euleriano.*
3. *Determinar si el grafo es hamiltoniano.*
4. *Encontrar un camino hamiltoniano si es posible.*

3.2. Ejercicios complementarios

Para completar esta sesión se recomienda resolver los problemas de la lista de clase y los ejercicios del libro de Fuster.