Pràctiques d'Àlgebra

Solució de les activitats de la Pràctica 1

Activitat 1. *Estudia el nombre de solucions d'aquests sistemes d'equacions lineals i calcula totes les solucions, en els casos que siguen compatibles, utilitzant la funció* ***rref****.*

$$a)\quad \left.\begin{array}{rcl} 3x+4y-7t+5u+3v &=& -9\\ x-3y-7z+8t+9u-12v &=& 1\\ 2x-4y+7z-11t-v &=& 2\\ x-y+2z-3t+5u-3v &=& -2\\ 2x+2y-4z+2t+u+v &=& -5\\ x+2y+z-4t-7u+3v &=& 2 \end{array}\right\}\quad b)\quad \left.\begin{array}{rcl} 3x+4y-7t+5u+3v &=& -9\\ x-3y-7z+8t+9u-12v &=& 1\\ 2x-4y+7z-11t-v &=& 2\\ x-y+2z-3t+5u-3v &=& -2\\ 2x+2y-4z+2t+u+v &=& -5\\ x+2y+z-4t-7u+3v &=& 2\\ 2x-6y-7z-5t-15u-11v &=& 8 \end{array}\right\}.$$

a) Introduïm la matriu A de coeficients del sistema, la columna b de termes independents i calculem l'escalonada reduïda de la matriu ampliada $[A\ b]$

```
-->A=[3 4 0 -7 5 3;1 -3 -7 8 9 -12;2 -4 7 -11 0 -1;1 -1 2 -3 5 -3
2 2 -4 2 1 1;1 2 1 -4 -7 3 ]
 A  =
    3.    4.    0.  - 7.    5.    3.
    1.  - 3.  - 7.    8.    9.  - 12.
    2.  - 4.    7.  - 11.   0.  - 1.
    1.  - 1.    2.  - 3.    5.  - 3.
    2.    2.  - 4.    2.    1.    1.
    1.    2.    1.  - 4.  - 7.    3.
-->b=[-9;1;2;-2;-5;2]
 b  =
  - 9.
    1.
    2.
  - 2.
  - 5.
    2.
-->R=rref([A b])
 R  =
    1.    0.    0.    0.    0.    0.  - 1.7325784
    0.    1.    0.    0.    0.    0.  - 0.5007919
    0.    0.    1.    0.    0.    0.  - 0.5246278
    0.    0.    0.    1.    0.    0.  - 0.5818023
    0.    0.    0.    0.    1.    0.  - 0.7336079
    0.    0.    0.    0.    0.    1.  - 0.7345581
```

A la vista del resultat, el sistema és compatible determinat i la seua única solució és

```
-->sol=R(:,7)
 sol  =
  - 1.7325784
  - 0.5007919
  - 0.5246278
  - 0.5818023
  - 0.7336079
  - 0.7345581
```

És a dir, $x = -1.7325784$, $y = -0.5007919$, $z = -0.5246278$, $t = -0.5818023$, $u = -0.7336079$, $v = -0.7345581$.

b) Igual que en l'apartat anterior introduïm la matriu $A1$ de coeficients del sistema, la columna $b1$ de termes independents i calculem l'escalonada reduïda de la matriu ampliada $[A1\ b1]$:

```
-->A1=[A;2 -6 -7 -5 -15 -11]
 A1  =
    3.    4.    0.  - 7.     5.     3.
    1.  - 3.  - 7.    8.     9.   - 12.
    2.  - 4.    7.  - 11.    0.   - 1.
    1.  - 1.    2.  - 3.     5.   - 3.
    2.    2.  - 4.    2.     1.     1.
    1.    2.    1.  - 4.   - 7.     3.
    2.  - 6.  - 7.  - 5.   - 15.  - 11.
-->b1=[b;8]
 b1  =
  - 9.
    1.
    2.
  - 2.
  - 5.
    2.
    8.
-->R1=rref([A1 b1])
 R1  =
    1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    1.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.    1.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.    0.    1.
```

Com hi ha un u principal en l'última columna, el sistema és incompatible, no hi ha cap solució.

Activitat 2. *Estudia el nombre de solucions d'aquests sistemes d'equacions lineals i calcula totes les solucions (escrivint-les en forma vectorial) en els casos que siguen compatibles utilitzant la funció* ***rref***.

$$a)\quad \left.\begin{array}{rcl} x-y &=& 2\\ x+2y &=& 8\\ x-y+z &=& 3 \end{array}\right\} \quad b)\quad \left.\begin{array}{rcl} x+y-z+2t &=& 1\\ 2x+3y+4t &=& 2\\ y+z+3t &=& -4\\ -x-2y-z-2t &=& -1 \end{array}\right\} \quad c)\quad \left.\begin{array}{rcl} x-2z &=& 2\\ -x-2y+2z &=& -2\\ 2x+2y-4z &=& 3 \end{array}\right\}.$$

$d)$ *Determina si els vectors* $\vec{s_1} = (33/2, -11, 5/2, 1/2)$ *i* $\vec{s_2} = (33/2, -11, 7/2, 1/2)$ *són solucions del sistema d'equacions de l'apartat* $b)$.

a) Introduïm la matriu A de coeficients del sistema, la columna $b1$ de termes independents i calculem l'escalonada reduïda de la matriu ampliada $[A\ b1]$

```
-->A=[1 -1 0;1 2 0;1 -1 1];b1=[2;8;3];
```

```
-->R1=rref([A b1])
 R1  =
    1.    0.    0.    4.
    0.    1.    0.    2.
    0.    0.    1.    1.
```

El sistema és compatible determinat i la seua única solució és $x = 4, y = 2, z = 1$, és a dir, el vector $(4, 2, 1)$.

b) Introduïm la matriu B de coeficients del sistema, la columna $b2$ de termes independents i calculem l'escalonada reduïda de la matriu ampliada $[B\ b2]$

```
-->B=[1 1 -1 2;2 3 0 4;0 1 1 3;-1 -2 -1 -2];b2=[1;2;-4;-1];

 -->R2=rref([B b2])
 R2  =
    1.    0.    0.  - 7.    13.
    0.    1.    0.    6.  - 8.
    0.    0.    1.  - 3.    4.
    0.    0.    0.    0.    0.
```

Observant aquesta matriu es conclou que el sistema és compatible indeterminat (x, y, z són variables principals i t és paràmetre). Aleshores, el conjunt de infinites solucions d'aquest sistema és

$$\{(13 + 7\lambda, -8 - 6\lambda, 4 + 3\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = (13, -8, 4, 0) + \{\lambda(7, -6, 3, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

c) Introduïm la matriu C de coeficients del sistema, la columna $b3$ de termes independents i calculem l'escalonada reduïda de la matriu ampliada $[C\ b3]$

```
-->C=[1 0 -2 ; -1 -2 2;2 2 -4];b3=[2;-2;3];

-->R3=rref([C b3])
 R3  =
    1.    0.  - 2.    0.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    1.
```

El sistema és incompatible, per tant no hi ha cap solució.

d) Introduïm els vectors $\vec{s_1}$ y $\vec{s_2}$, efectuem els productes $B\vec{s_1}$ i $B\vec{s_2}$ i els comparem amb $b2$

```
-->s1=[33/2; -11; 5/2; 1/2];
-->B*s1
 ans  =
    4.
    2.
  - 7.
    2.

-->s2=[33/2; -11;7/2;1/2];
 -->B*s2
 ans  =
    3.
    2.
  - 6.
    1.
```

```
-->b2
 b2  =
    1.
    2.
  - 4.
  - 1.
```

Per tant, $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ no són solució d'aquest sistema. Nota: A les activitats d'altres grups, la tercera coordenada de $s2$ era $11/2$ i, aleshores, $s2$ sí seria solució del sistema.

Activitat 3. *Estudia el nombre de solucions dels sistemes de l'activitat anterior i obtingues les solucions (si existeixen) utilitzant l'operador \ i la funció* ***kernel****. Compara els resultats amb els obtinguts en l'exercici anterior.*

a) Per a veure si el sistema és compatible calculem el rang de la matriu de coeficients i el de l'ampliada i veiem si coincideixen

```
-->rank(A)
 ans  =
    3.

-->rank([A b1])
 ans  =
    3.
```

El sistema és compatible i determinat. La seva solució s la calculem amb l'operador \

```
-->s=A\b1
 s  =
    4.
    2.
    1.
```

b) Calculem els rangs de B i de $[B\ b2]$:

```
-->rank(B)
 ans  =
    3.

-->rank([B b2])
 ans  =
    3.
```

El sistema és compatible indeterminat.

Per a calcular una solució particular S utilitzem l'operador \

```
-->S=B\b2
 warning
 matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00
computing least squares solution. (see lsq)
 S  =
    0.
    3.1428571
  - 1.5714286
  - 1.8571429
```

Atès que Scilab ens informa que la matriu B és gairebé singular, és convenient comprovar que aquesta solució és correcta. Per a això provarem que $BS = b2$

```
-->clean(B*S-b2)
 ans  =
    0.
    0.
    0.
    0.
```

Per a obtenir el conjunt de totes les solucions del sistema, a més d'una solució, S, necessitem calcular el nucli o espai nul de la matriu B amb la funció **kernel** de Scilab:

```
-->k=kernel(B)
 k  =
  - 0.7181848
    0.6155870
  - 0.3077935
  - 0.1025978
```

Així, la solució general del sistema són els vectors $S + \lambda k$ per a qualsevol $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Calculem els rangs de C i de $[C\ b3]$

```
-->rank(C)
 ans  =
    2.
-->rank([C b3])
 ans  =
    3.
```

El sistema és incompatible.

Activitat 4. *Una empresa de transports té tres camions (C1, C2 i C3), en els quals caben contenidors de tres tipus (A, B i C). En el camió C1 caben 5 del tipus A, 2 del tipus B i 4 del tipus C. En el camió C2 caben 3 del tipus A, 5 del tipus B i 3 del tipus C. En el camió C3 caben 4 del tipus A, 5 del tipus B i 6 del tipus C. Si s'han de transportar 45 contenidors del tipus A, 46 del tipus B i 54 del tipus C, quants viatges ha de fer cada camió si tots els viatges els efectuen totalment plens?*

Si denotem per x_i el nombre de viatges que ha de fer el camió C_i, es tracta de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 46 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Ho podem fer utilitzant la instrucció **rref**

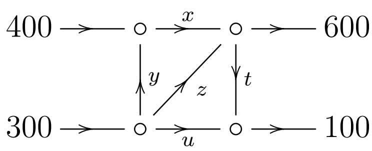
```
-->A=[5 3 4; 2 5 5;4 3 6]
 A  =
    5.    3.    4.
    2.    5.    5.
    4.    3.    6.

-->b=[45;46;54];
```

```
-->R=rref([A b])
 R  =
    1.    0.    0.    3.
    0.    1.    0.    2.
    0.    0.    1.    6.
```

El sistema és compatible determinat i la solució és $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 6.$

Activitat 5. *En la figura següent es mostra el flux de tràfic (en vehicles per hora) en una xarxa de carrers (els nodes del graf representen les interseccions). Troba les dependències entre els fluxos de tràfic dels carrers. Quin és el flux de tràfic quan* $u = 50,\ z = 150$*?*



Les dependències entre els fluxos de tràfic les proporciona la solució del següent sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 400+y &=& x \\ 300 &=& y+z+u \\ t+u &=& 100 \\ x+z &=& 600+t \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-y &=& 400 \\ y+z+u &=& 300 \\ t+u &=& 100 \\ x+z-t &=& 600 \end{array}\right\}$$

La calculem amb la instrucció **rref**

```
-->rref([1 -1 0 0 0 400;0 1 1 0 1 300;0 0 0 1 1 100;1 0 1 -1 0 600])
 ans  =
    1.    0.    1.    0.    1.    700.
    0.    1.    1.    0.    1.    300.
    0.    0.    0.    1.    1.    100.
    0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

La solució és $x = 700 - \lambda - \mu,\ y = 300 - \lambda - \mu,\ z = \lambda,\ t = 100 - \mu,\ u = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

Si $u = 50\ (\mu = 50)$ i $z = 150\ (\lambda = 150)$, el flux de tràfic és $x = 500,\ y = 100,\ z = 150,\ t = 50,\ u = 50.$