2 Práctica Segunda: Funciones Elementales

2.1 Trazado de Gráficas

Nos proponemos ahora analizar con detalle las utilidades gráficas de D5W en dos dimensiones.

El programa D5W contempla la posibilidad de utilizar, de forma simultánea, dos ventanas, la de álgebra y la de gráficos. Ahora iremos explicando cómo moverse de una a otra o cómo mezclar éstas.

Comencemos por efectuar un gráfico de la función racional $f(x)$, escribiendo en la línea de edición

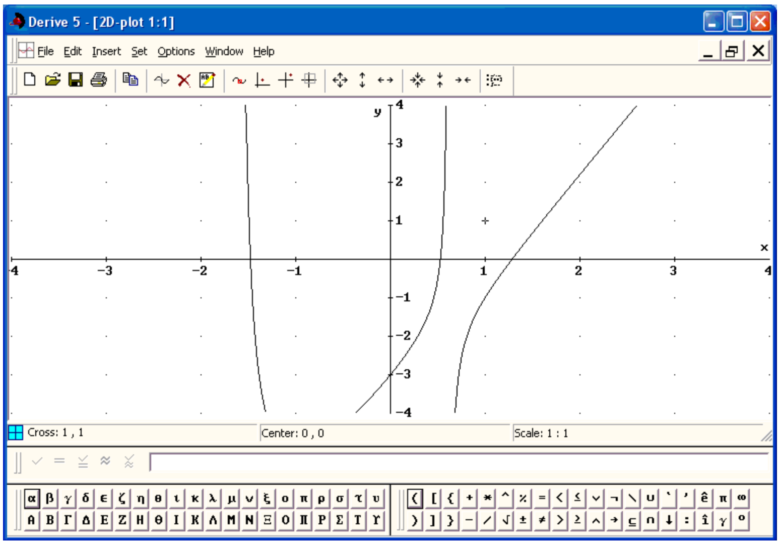
$$f(x) := (3x^3 - x^2 - 6x + 3)/(x^2 + x - 1)$$

y tras pulsar OK, te aparecerá en pantalla:

$$\mathtt{f(x)} := \frac{3x^3 - x^2 - 6x + 3}{x^2 + x - 1} .$$

Para representarla gráficamente, en la ventana de álgebra debes 'iluminar' la función: la línea donde se definió la función o la expresión f(x) de cualquier línea. Para abrir una ventana de gráficos, haz clic sobre el botón de la línea de herramientas (tercero a la derecha), o bien en el submenú Window, elige la opción New 2D-plot Window 2D.

Ahora estás en la ventana 2D y el aspecto y los menús son diferentes, pero todavía no hay ninguna gráfica. Usando ahora Insert:Plot, o haciendo clic sobre el botón de la nueva línea de herramientas, te aparecerá en la ventana 2D una primera versión de la gráfica de f. Su aspecto será similar a



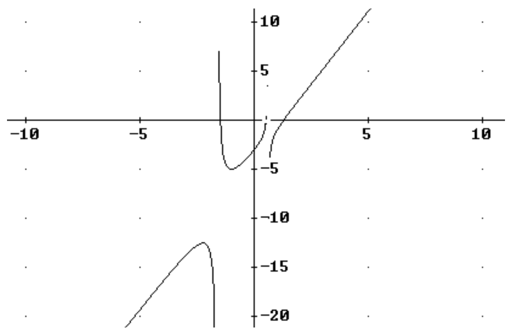
con los ejes coordenados etiquetados, por defecto, como x e y.

Cruz. Un elemento importante en la ventana 2D es la pequeña cruz —*cross* en inglés— que tienes en pantalla y cuyas coordenadas aparecen en la parte inferior izquierda. Esta cruz puede desplazarse al lugar que desees de la ventana 2D mediante las teclas de dirección, pulsando simultáneamente la tecla Ctrl si deseas ir más deprisa. También puedes hacer clic sobre el punto donde deseas que aparezca. Podremos así señalar puntos interesantes de la gráfica.

Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x)$ parece cortar tres veces al eje OX lo que, como sabes, significa que f posee tres raíces reales, en principio. Para obtener una primera estimación de estas raíces, podemos situar la cruz sobre cada una de ellas y observar el valor de la primera[1] coordenada de la cruz. Determinaremos así que f se anula en las abscisas -1.48, 0.53 y 1.28, aproximadamente.

Zoom. Otra de las utilidades de la ventana 2D es la posibilidad de reducir o ampliar la región representada. Esto puede hacerse efectuando zoom hacia tí (*in*) o hacia afuera (*out*) lo que conseguirás pulsado las teclas F9 y F10, respectivamente, o haciendo clic sobre los botones o . Por ejemplo, al pulsar dos veces la tecla F9 tan sólo veremos en la ventana 2D una rama de la gráfica de f, la que contiene la segunda de sus raíces. Si colocamos la cruz sobre ella, centramos el gráfico en la cruz pulsando el botón , y pulsamos dos veces más la tecla F9 podemos determinar, gracias al tamaño del dibujo, que la coordenada x ha de ser 0.526, aproximadamente, con tres cifras decimales correctas. El proceso podría seguir, permitiéndote hallar aproximaciones cada vez más precisas[2] de la raíz en cuestión.

Por el contrario, al pulsar F10 la gráfica se aleja de nosotros. Si pulsas F10 cuatro veces desde donde estás volverás a la situación inicial y si vuelves a pulsar se aprecia la presencia de un mínimo relativo de $f(x)$ cuyas coordenadas son, aproximadamente, -1 y -5. Si continúas pulsando F10 también observarás una parte de la función que había pasado desapercibida. Por ejemplo, con el siguiente zoom



se observa un máximo relativo que no habíamos visto. Parece adivinarse también la existencia de una asíntota oblicua y de dos asíntotas verticales de la función.

Colocando la cruz sobre el punto donde $f(x)$ parece alcanzar el máximo, verás que la abscisa es $x \approx -2.27$ y el valor del máximo, $f(-2.27) \approx -12.5$. Pulsando de nuevo F10 no aparecen elementos nuevos de la función; todo lo contrario, la gráfica pierde resolución al alejarnos demasiado.

[1] Obviamente la segunda coordenada de la cruz será nula.

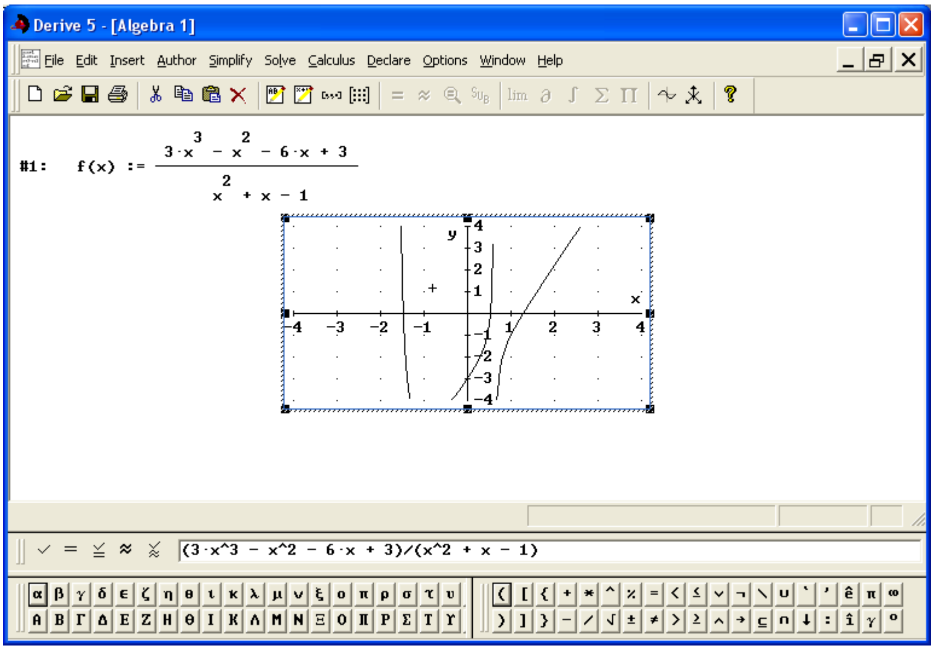
[2] Con un máximo de siete dígitos significativos, que son los que se muestran en la parte inferior.

Es interesante que sepas que es posible efectuar zoom solamente en una de las direcciones x o y, mediante las teclas F5, F6, F7 y F8 o haciendo clic sobre los botones , , y , convenientemente elegidos. Todo esto, combinado con el uso de las teclas F9 y F10 y con la posibilidad de centrar tu gráfico en la cruz o en el origen, te permite visualizar en cada caso la parte que deseas estudiar con detalle.

Si, por alguna razón, pierdes tu gráfica o gran parte de ella siempre puedes volver a la situación inicial. Para ello, debes seleccionar la escala 1:1 mediante Set:Plot Region o Set:Plot Range y pulsar, en el cuadro de diálogo que te aparece, Reset y luego OK.

Diferentes ventanas. Si en algún momento quieres consultar qué funciones tienes en la ventana de álgebra o quieres hacer algún cálculo extra, debes saber que no conviene **cerrar** la ventana de gráficos sino que puedes ir a ella seleccionando en el menú `Window` la línea `1 Algebra 1` o haciendo `clic` sobre el icono . Así, cuando **vuelvas** a la ventana de gráficos (con el icono o con `Window 2 2D-plot 1:1`) tendrás todas las opciones y gráficos que dejaste allí.

También es posible insertar una copia de la ventana 2D en la de álgebra eligiendo File:Embed (Ctrl+B) desde la ventana de gráficos. Si vuelves a la ventana de álgebra observarás el gráfico en cuestión, centrado y a tamaño reducido, a continuación de la última expresión numerada. Si lo haces con la ventana 2D en la que estamos trabajando tu ventana de álgebra será similar a



Para modificar el gráfico más tarde[3] será suficiente con seleccionarlo y pulsar Enter. Se abrirá de nuevo la ventana 2D para que realices las modificaciones y, cuando acabes, puedes actualizar el gráfico mediante File:Update.

[3]Incluso si cerraste la ventana 2D que lo contenía.

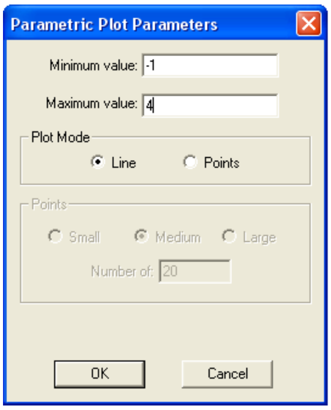
Forma paramétrica. Por último, te mostraremos cómo representar gráficamente una función en un intervalo. Esto puede conseguirse mediante una representación paramétrica de la función que, por otra parte, nos será de gran utilidad para obtener gráficos de sucesiones de números reales en la siguiente práctica. Como ejemplo consideremos la función $h(x)$, que puedes introducir en D5W editando

$$\texttt{h(x)} := (4\ \texttt{sin}(\texttt{x} - 1) + \texttt{exp}(2 - \texttt{x\^{}2}))/(\texttt{cos}(\texttt{x}) + \texttt{log}(1 + \texttt{x\^{}2}))$$

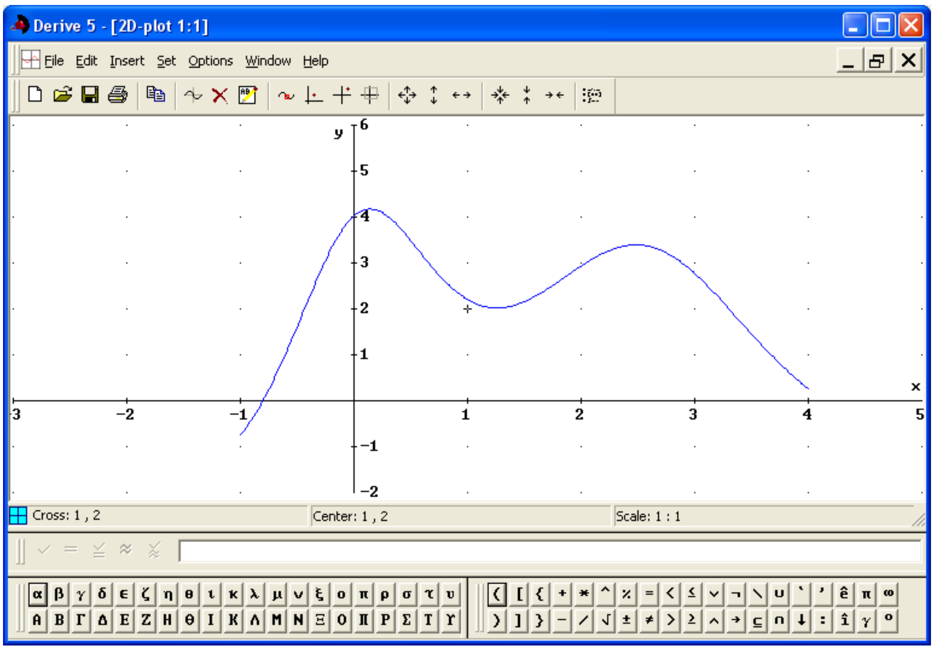
Para su representación paramétrica debes introducir

$$[\texttt{x,h(x)}]$$

que D5W interpreta como el punto de coordenadas x y $h(x)$. Al intentar representarla se abre el cuadro de diálogo



para, entre otras opciones, introducir los extremos del intervalo en el que deseas la gráfica. Considerando los extremos -1 y 4, tras colocar la cruz en $(1, 2)$ y centrar en ella, la ventana 2D será similar a



y puedes ver que, en esta región, $y = h(x)$ posee una raíz y tres extremos relativos.

Trabajando como con la función $f(x)$ puedes comprobar que $h(x)$ se anula en $x = -0.79$, aproximadamente, que el mínimo relativo se alcanza en $x \approx 1.26$ y los dos máximos relativos en $x \approx 0.14$ y en $x \approx 2.47$.

Observa que el máximo (absoluto) de la función se alcanza en el primero de los máximos relativos y que el mínimo (absoluto) se obtiene en el extremo inferior del intervalo, cuando $x = -1$.

Poligonales. Para concluir, veamos cómo dibujar puntos sueltos y poligonales (segmentos de rectas uniendo puntos distintos). Éstos deben ser escritos con el formato anterior, usando corchetes en lugar de paréntesis, es decir, lo que D5W entiende como vectores y matrices. Así, si quieres dibujar el punto de coordenadas $(1, 3)$ debes escribir, en la ventana Algebra o en la línea de edición de la ventana 2D, la expresión

$$[1, 3]$$

y, para dibujarlo, seleccionar Options:Display:Points, Size:Large OK y volver a hacer clic en el icono para ver claramente el punto.

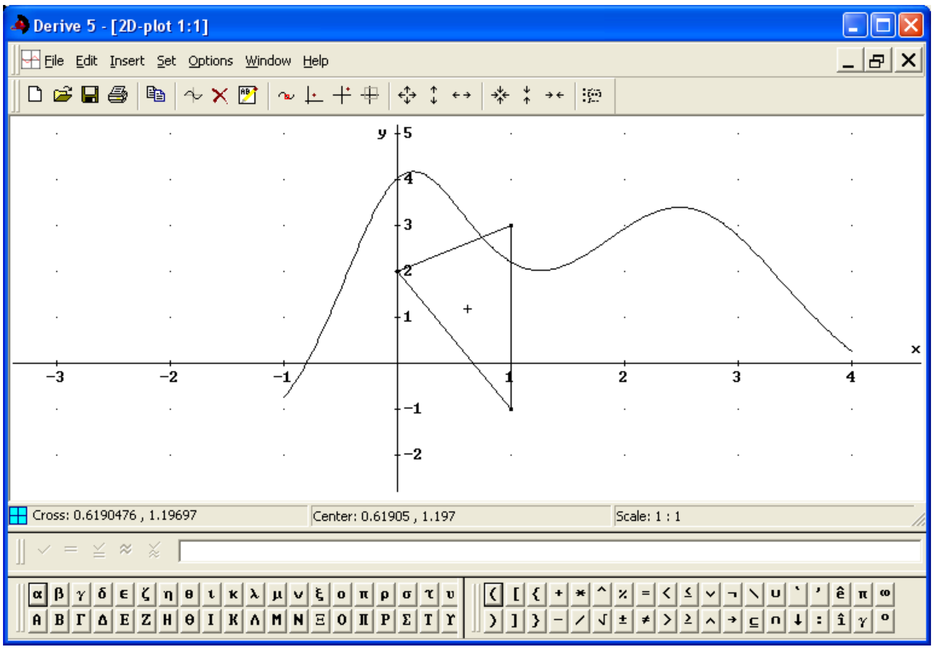
Para dibujar poligonales debemos indicarle los puntos con corchetes, dentro de un corchete general. Por ejemplo, si escribimos

$$[[1, 3], [0, 2], [1, -1]]$$

nos dibujará (haciendo clic en el icono) los tres puntos. Si queremos que dibuje el triángulo, deberemos elegir Options:Display:Points, Conected:Yes y escribiremos

$$[[1, 3], [0, 2], [1, -1], [1, 3]]$$

para que 'cierre' el triángulo.



2.2 Funciones Elementales

Las funciones elementales modelizan muchos de los procesos que encontramos al estudiar problemas asociados a situaciones reales. Tanto su definición y propiedades como sus gráficas y sus aplicaciones prácticas son conocidas de cursos anteriores y además aparecen recogidas en la introducción a la ut2.

El objetivo de la presente actividad es conocer cómo usar D5W para trabajar con estas funciones, dejando al programa la realización de los cálculos (operaciones, simplificación, derivadas, etc.) para centrarnos en aspectos conceptuales relacionados con los problemas.

Funciones racionales. Asíntotas Son aquellas funciones que vienen expresadas como un cociente de polinomios. No están por tanto definidas para los valores que anulen el denominador (discontinuidades). Por ejemplo,

$$q(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Dom}\,(q\,(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Las discontinuidades que desaparecen al simplificar el cociente de polinomios son *evitables* y en los demás casos la función presenta una *asíntota vertical*. En el caso de la función $q\,(x)$ del párrafo anterior, -1 es una discontinuidad evitable y la recta de ecuación $x = 1$ es una asíntota vertical de $q(x)$.

Las funciones racionales también pueden presentar *asíntotas horizontales*. Si el numerador es de menor grado que el denominador, como en el caso de $q(x)$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, ya que

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = 0$$

Si el numerador y el denominador de la fracción son polinomios del mismo grado, la recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal de $f\,(x)$ para el valor

$$b = \lim_{x\to+\infty} f\,(x) \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y tendremos una *asíntota oblicua* cuando el grado del numerador exceda en uno al del denominador. En este caso la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de $f\,(x)$ para los valores

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f\,(x)}{x} \quad , \quad n = \lim_{x\to+\infty} (f\,(x) - mx)$$

Consideremos por ejemplo la función racional $q_1(x) = \dfrac{2x^3+7x^2}{x^2-3x+3}$.

El polinomio en el denominador no se anula, por lo que se trata de una función continua definida en todo $\mathbb{R}$; no existen asíntontas verticales ni discontinuidades evitables.

Por otra parte, la recta $y = 2x + 13$ es una asíntota oblicua de $q_1(x)$ porque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{2x^3+7x^2}{x^2-3x+3}\right) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+7x^2}{x^2-3x+3} - 2x\right) = 13$$

De forma similar, la función racional $q_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$ tampoco presenta discontinuidades y la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de $q_2(x)$ porque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+1} = 3$$

Finalmente observar que, una vez que conocemos lo que estamos buscando, la ecuación de la asíntota (oblicua u horizontal) puede obtenerse de forma inmediata con Dfw sin más que usar Simplify+Expand.

Si pruebas con los ejemplos anteriores obtendrás las expresiones

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \\
q_1(x) &= \frac{2x^3+7x^2}{x^2-3x+3} = \frac{33x}{x^2-3x+3} - \frac{39}{x^2-3x+3} + 2x + 13 \\
q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{x^2+1} = 3 - \frac{4}{x^2+1}
\end{aligned}$$

que permiten reconocer fácilmente las ecuaciones de las asíntotas oblicuas u horizontales sin más que observar la parte polinómica de la expresión simplificada. En efecto, $q(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = 0$, $y = 2x + 13$ es una asíntota oblicua de $q_1(x)$ e $y = 3$ es una asíntota horizontal de $q_2(x)$. Observa , además, que anulando los denominadores de las fracciones que aparecen en las expresiones simplificadas podemos hallar las asíntotas verticales. En el caso de $q(x)$ encontramos la asíntota vertical $x = 1$, mientras que $q_1(x)$ y $q_2(x)$ no tienen asíntotas verticales ya que los denominadores correspondientes, $x^2 - 3x + 3$ y $x^2 + 1$, sólo tienen raíces complejas.

Representa gráficamente $q(x)$, $q_1(x)$ y $q_2(x)$ junto con sus asíntotas.

Funciones irracionales Las funciones definidas con raíces requieren tener un cuidado especial. Cuando el índice de la raíz es par están definidas sólo para valores positivos pero cuando el índice es impar sabemos que están definidas también para los negativos. Así,

$$\mathrm{Dom}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{Dom}\left(\sqrt[4]{x}\right) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

D5W no dispone de símbolos especiales para introducir estas funciones y por tanto, para trabajar con ellas, deberemos sustituirlas por exponentes fraccionarios. Para trabajar con $\sqrt[3]{x}$ deberemos usar $x^{1/3}$.

Sin embargo, $\sqrt[3]{x}$ y $x^{1/3}$ no son idénticas. Si representas la función $y = x^{1/3}$ verás que Dfw sólo considera los valores positivos de x. Esto es, que

$$\mathrm{Dom}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \mathbb{R} \quad \text{mientras que} \quad \mathrm{Dom}\left(x^{1/3}\right) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

lo cual es un hecho importante a tener en cuenta cuando trabajamos con raíces de índice impar.

Como norma general, para las raíces de índice impar debemos tener en cuenta que

$$\sqrt[m]{x} = \begin{cases} x^{1/m} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -(-x)^{1/m} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y si no lo hacemos así obtendremos valores inesperados (lo cual no quiere decir que sean incorrectos). Por ejemplo, si simplificas $(-1)^{1/3}$ esperando obtener -1 que es la raíz cúbica real de -1, cometes un error porque el valor que te proporciona derive es

$$(-1)^{1/3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Esto ocurre porque Dfw y muchos programas similares evalúan las potencias con la identidad

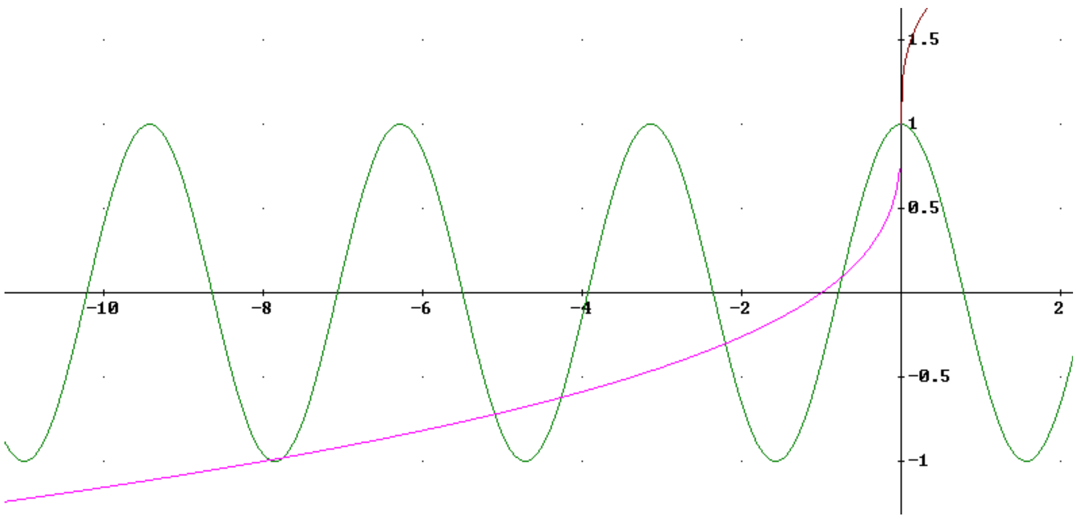
$$a^b = \exp\left(b * \log\left(a\right)\right)$$

y usando la determinación principal del logaritmo complejo para los valores negativos de a. En otras palabras que $(-1)^{1/3}$ no es la raíz cúbica (real) de -1 sino la raíz cúbica (compleja) que está en el primer cuadrante. Sin embargo cuando hablamos de $\sqrt[3]{-1}$ nos referimos a la raíz real.

Como ejemplo, si queremos obtener una representación gráfica de las funciones $\cos(2x)$ y $1 + \sqrt[3]{x}$ para determinar en cuántos puntos se cortan, representaremos

$$f(x) = \cos(2x) \quad , \quad g_1(x) = 1 + x^{1/3} \quad \text{y} \quad g_2(x) = 1 - (-x)^{1/3}$$

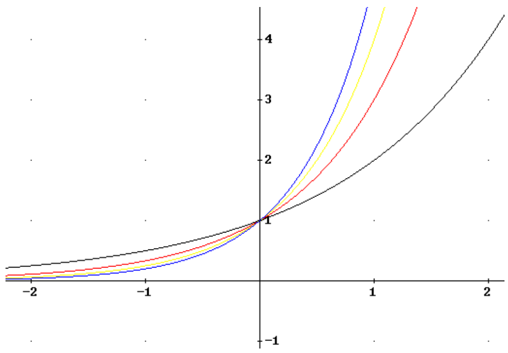
siendo $g_2\left(x\right)$ la que nos proporciona las imágenes de $1 + \sqrt[3]{x}$ para valores negativos de x.

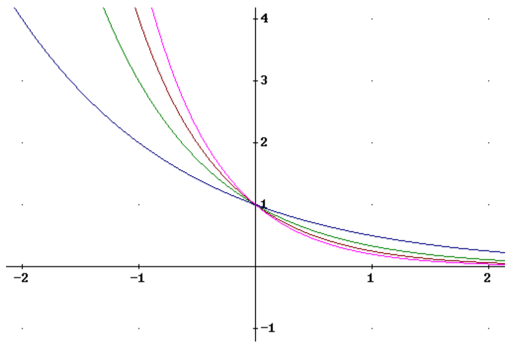


En la gráfica se aprecia que se cortan en $x = 0$ y en otros seis puntos más.

Exponenciales y logaritmos Las gráficas de las funciones a^x y $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje de ordenadas y crecen/decrecen más o menos rápidamente en función de la magnitud de $a > 0$.

Si representas a^x y a^{-x} para $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ obtendrás gráficas que ilustran el comentario

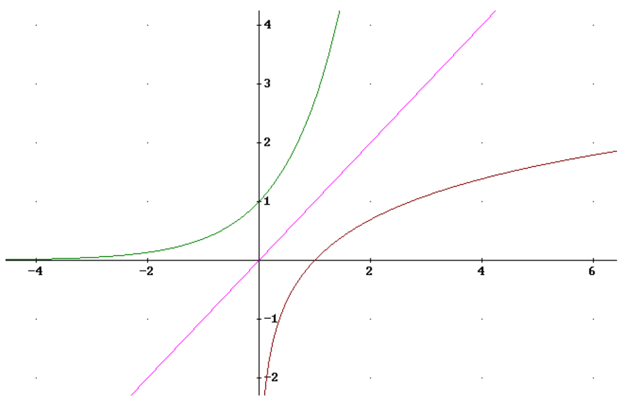




Observa que a^x es creciente para $a > 1$ (la imagen a la izquierda) y decreciente para $a < 1$ (la imagen a la derecha). Además en todos los casos la gráfica pasa por el punto $(0, 1)$, la función es positiva, y la recta $x = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

¿Qué ocurre si $a = 1$?

La función inversa de a^x es el logaritmo en base a, $\log_a(x)$. Sus gráficas, por ser funciones inversas, son simétricas con respecto a la bisectriz del primer cuadrante y si representas las tres obtendrás (para e^x y tras ajustar las dimensiones de los ejes) algo similar a



También puedes comprobar que Dfw aplica correctamente las propiedades de los logaritmos y las potencias

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad , \quad a^x / a^y = a^{x-y} \quad , \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$
$$\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y) \quad , \quad y \cdot \log(x) = \log(x^y)$$

El logaritmo en base a, $\log_a(x)$, puedes introducirlo en Dfw mediante `LOG(x,a)` pero verás que rápidamente lo convierte en logaritmos neperianos usando la identidad

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

por eso siempre consideramos logaritmos neperianos.

Funciones trigonométricas Representa la circunferencia de radio uno centrada en el origen; que viene definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

Observa que el triángulo de vértices $(0,0), (2,0), \left(1, \sqrt{3}\right)$ es equilátero y que, como consecuencia, la recta que pasa por $(0,0)$ y $\left(1, \sqrt{3}\right)$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje de abscisas.

Comprueba que las coordenadas del punto de corte de esta recta con la circunferencia coinciden con los valores

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Traza ahora la recta vertical que pasa por $(1,0)$ y comprueba que las coordenadas del nuevo punto de corte son

$$\left(1, \sqrt{3}\right) = \left(1, \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Las gráficas de las funciones trigonométricas reflejan la periodicidad que se deduce de su definición. Las funciones $\cos(x)$ y $\sin(x)$ tienen periodo 2π y el periodo de $\tan(x)$ es π.

Sobre el dominio, $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ están definidas para todos los valores reales mientras que $\tan(x)$ presenta discontinuidades en el conjunto $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Las funciones inversas de las trigonométricas: $\arccos(x)$, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arctan(x)$, están definidas únicamente en determinados intervalos debido a que proceden de funciones que no son inyectivas.

Compara las gráficas de $\operatorname{arcsen}(x)$ y de $\arccos(x)$ con las de $\operatorname{sen}(x)$ y de $\cos(x)$ para identificar el dominio de las primeras. Comprueba que

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsen}(x)) = \operatorname{Dom}(\arccos(x)) = [-1, 1]$$

De forma similar puedes comprobar que $\arctan(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y que presenta dos asíntotas horizontales

$$y = \frac{-\pi}{2} \quad , \quad y = \frac{\pi}{2}$$

Funciones pares e impares A la hora de analizar el dominio y las propiedades de las funciones resulta útil conocer previamente si se trata de funciones pares o impares por las propiedades de simetría que presentan cuando lo son.

Una función es par cuando presenta simetría respecto del eje OX es decir,

$$f(x) \text{ es par} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(-x) = 0$$

y es impar cuando es simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir

$$f(x) \text{ es impar} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + f(-x) = 0$$

Son ejemplos de funciones pares las constantes, x^2 y $\cos(x)$. Son impares x, x^3 y $\operatorname{sen}(x)$.

Las funciones hiperbolicas se definen mediante

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\cosh(x)$, a la izquierda, es una típica función par y $\operatorname{senh}(x)$, a la derecha, es impar.