REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE DATOS EXPERIMENTALES

Tras un hecho experimental se obtiene una serie de valores medidos que relacionan dos o más magnitudes. Un primer paso para su interpretación consiste en relacionar las magnitudes a través de una o más gráficas de forma que se pueda traducir los resultados obtenidos a una forma más fácil de estudiar.

Así, por ejemplo, supóngase que se ha estirado una fibra de plástico aplicando diferentes fuerzas y se ha medido la longitud de la fibra en cada caso, obteniéndose los valores siguientes:

F(N)	7	11	0	1	9	3	15
L(cm)	22,1	23,2	20	20,3	22,7	20,9	23,7

A partir de estos datos es difícil sacar conclusiones sobre el comportamiento del material. Un primer paso es ordenar los valores de las medidas.

F(N)	0	1	3	7	9	11	15
L(cm)	20	20,3	20,9	22,1	22,7	23,2	23,7

Se puede observar una ligera mejoría en la interpretación de los resultados. Ahora se observa que al incrementar la fuerza aplicada se incrementa la longitud de la fibra, pero no se puede decir en que proporción aumenta, ni dar con certeza un valor intermedio entre dos puntos medidos.

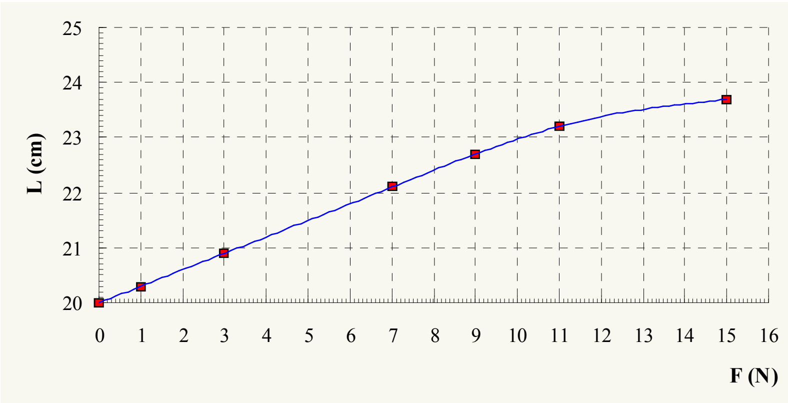


Figura 1: representación gráfica de la longitud en función de la fuerza aplicada.

Si se traza la gráfica de la longitud en función de la fuerza aplicada, tal y como aparece en la figura 1, se observa que en un principio la longitud aumenta linealmente con la fuerza aplicada. A partir de un cierto valor de fuerza la pendiente disminuye progresivamente. Una representación gráfica ayuda a la interpretación de los resultados y permite averiguar rápidamente algunos valores relacionados con la experiencia efectuada: pendiente inicial, puntos intermedios, punto de inicio de pérdida de linealidad, etc.

A la hora de trazar una gráfica, sea manualmente sobre papel milimetrado, o utilizando el ordenador mediante la hoja de cálculo o programas gráficos, se debe tener en cuenta las consideraciones que se detalla a continuación, algunas de las cuales son realizadas automáticamente cuando se utiliza el ordenador:

- En las gráficas se asigna el eje horizontal (abscisa) a la variable independiente y el eje vertical (ordenada) a la variable dependiente. Se indica sobre cada eje la magnitud que se está representando y la unidad en que se trabaja.
- Para facilitar la lectura de puntos intermedios se divide los ejes en intervalos de 1, 2, o 5 veces alguna potencia de 10. Por ejemplo, "10 20 30 40...", "50 100 150...", "0,1 0,2 0,3 0,4...", etc. Sobre los ejes sólo se indica divisiones enteras, no los valores de las medidas realizadas.
- El origen de ambas escalas no tiene necesariamente que coincidir con el punto de intersección de los dos ejes. Conviene desplazar los orígenes para que la gráfica ocupe la mayor parte del rectángulo definido por ambos ejes.

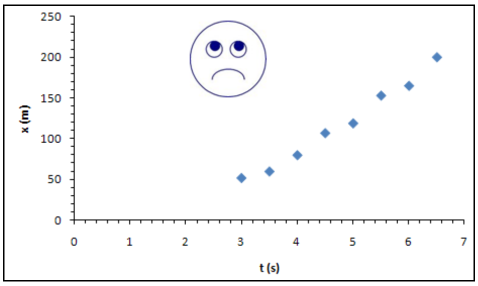


Figura 2a: ejemplo de una mala elección de los orígenes de los ejes.

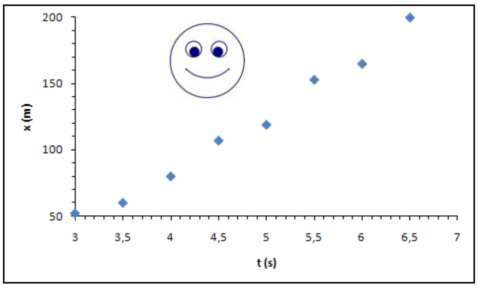
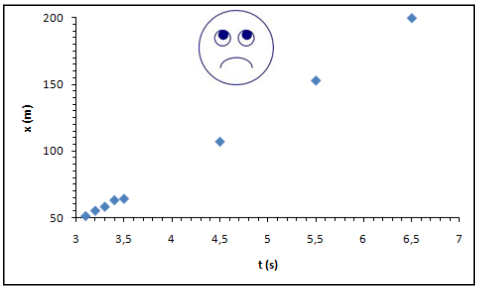


Figura 2b: ejemplo de una buena elección de los orígenes de los ejes.

- Al realizar las medidas conviene que éstas se encuentren uniformemente espaciadas sobre el intervalo de valores que se está midiendo.



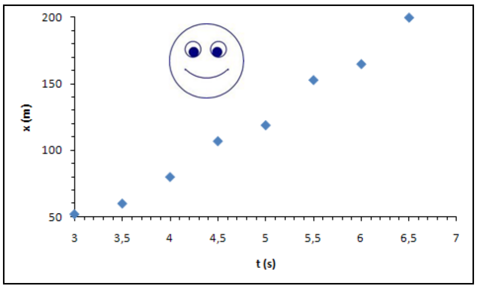
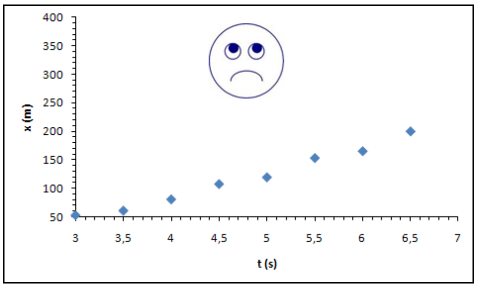


Figura 3a: ejemplo en el que no se ha espaciado uniformemente las medidas a lo largo de todo el intervalo.

Figura 3b: ejemplo en el que se ha espaciado uniformemente las medidas a lo largo de todo el intervalo.

- La escala elegida en los dos ejes no tiene porque ser la misma, de nuevo hay que procurar ocupar la mayor superficie dentro del rectángulo definido por los ejes.



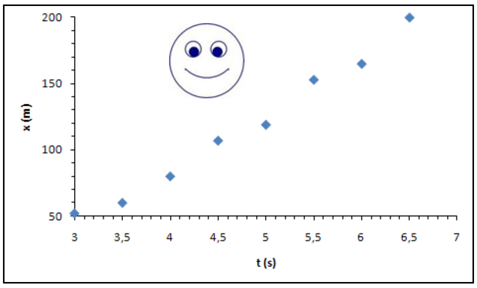


Figura 4a: ejemplo en el que no se ha escogido adecuadamente la escala del eje Y.

Figura 4b: ejemplo en el que se ha escogido adecuadamente las escalas de los ejes X e Y.

- Las líneas, rectas o curvas, que mejor se ajustan al conjunto de puntos experimentales han de ser finas y continuas, nunca quebradas, ya que, generalmente, las magnitudes físicas y sus derivadas varían de forma continua. El trazado de la curva que mejor se ajusta a la distribución se realiza de forma que pase por el mayor número posible de puntos experimentales, y deje aproximadamente el mismo número de puntos a ambos lados. La curva debe ser coherente con la experiencia que se está realizando.

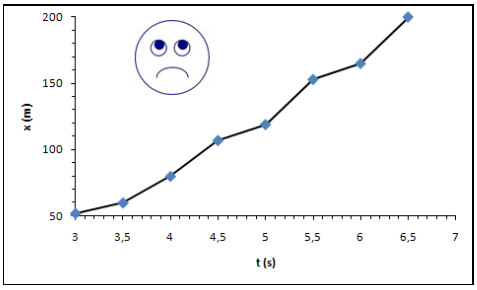


Figura 5a: ejemplo de un trazado inadecuado de la curva experimental.

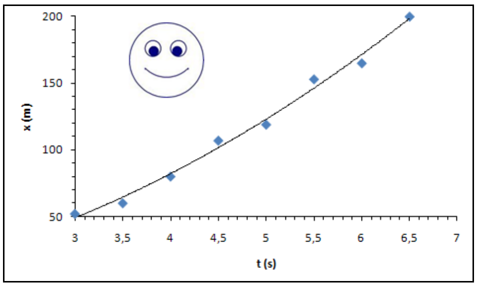


Figura 5b: ejemplo del trazado correcto de la curva experimental.

- Si las magnitudes que se representa están afectadas por un error no despreciable, en lugar de representar el dato experimental por un punto se hará por un rectángulo centrado en el dato obtenido, o unas barras en forma de "+" centradas también en el dato. Este "rectángulo" o estas "barras" tendrá de dimensiones dos veces el error cometido en la medida de cada una de las dos magnitudes representadas ($2\Delta x$ y $2\Delta y$, siendo Δx y Δy los errores correspondientes). La curva que represente el fenómeno físico estudiado deberá pasar por todos los rectángulos o barras.

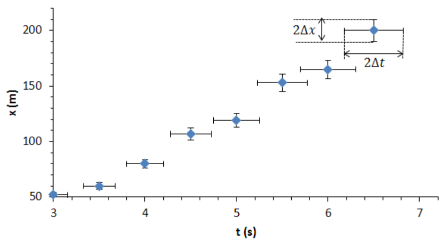


Figura 8: magnitud representada con su error en los ejes X ($2\Delta t$) e Y($2\Delta x$).

AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS A UNA RECTA

A menudo queremos establecer la relación (lineal o no) entre dos magnitudes x e y determinadas experimentalmente (por medidas directas o indirectas). Tenemos, por tanto una serie de N parejas de medidas (x_i,y_i). Nuestro objetivo es encontrar una función $y=y(x)$ que describa la relación entre las dos variables.

Supongamos que la relación entre las variables dependiente e independiente se puede aproximar a una relación lineal de la forma:

$$y(x) = ax + b$$

La ecuación de la recta (también llamada recta de regresión) se obtiene por el método de ajuste por mínimos cuadrados. El método consiste en minimizar la función S que definimos como la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores experimentales y_i y los predichos por la ecuación ax_i+b.

$$S = \sum (y_i - ax_i - b)^2$$

Esta es una función que depende de dos variables, a y b, dado que las parejas de valores (x_i,y_i) son los resultados de las medidas experimentales realizadas, y por tanto son valores conocidos.

Para minimizar S variando a y b se debe cumplir la doble condición de mínimo para las dos variables:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

De las dos derivadas se obtiene dos ecuaciones con dos incógnitas, a y b.

Definiendo:

$$A = \sum_i x_i \ , \ B = \sum_i y_i \ , \ C = \sum_i x_i^{\ 2} \ , \ D = \sum_i x_i \cdot y_i$$

Se puede demostrar que los valores de los parámetros deben ser:

$$a = \frac{D \cdot N - A \cdot B}{C \cdot N - A^2}, \quad b = \frac{C \cdot B - A \cdot D}{C \cdot N - A^2}$$

Donde N es el número de puntos experimentales.

Una vez obtenidos los parámetros de la recta, a fin de evaluar la bondad del ajuste obtenido se determina el coeficiente de correlación al cuadrado, también llamado factor ρ^2, cuyo módulo toma valores entre 0 y 1, siendo mejor el ajuste cuanto más próximo sea su valor a 1:

Definiendo $F = \sum_i y_i^2$ la expresión del coeficiente de correlación al cuadrado es:

$$\rho^2 = a\left(\frac{D \cdot N - AB}{F \cdot N - B^2}\right) = \frac{\left(N\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i\right)^2}{\left(N\sum(x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right)\left(N\sum(y_i)^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right)}$$

Al aplicar las expresiones de la recta de regresión se debe tener en cuenta que se pueden calcular los parámetros para cualquier conjunto de puntos experimentales, se ajusten o no a una recta. El factor ρ^2 será el que proporcione una idea de la bondad del ajuste, siendo necesario saber valorar dicho coeficiente.
La proximidad del factor ρ^2 al valor 1 debe ser grande para que el ajuste se pueda considerar como bueno.

Además de estimar los parámetros del ajuste (la pendiente *a* y la ordenada a origen *b*), también se puede calcular el error de estos parámetros:

$$\Delta a = a\sqrt{\frac{\frac{1}{\rho^2}-1}{N-2}} \qquad \Delta b = \Delta a\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}$$

AJUSTE A OTRAS FUNCIONES

En muchas ocasiones, los resultados experimentales no pueden ajustarse a una recta. En ese caso, la forma más sencilla de proceder es buscar alguna transformación de la ecuación que describe los datos experimentales para convertirla en una línea recta. Veamos algún ejemplo para ilustrar este procedimiento:

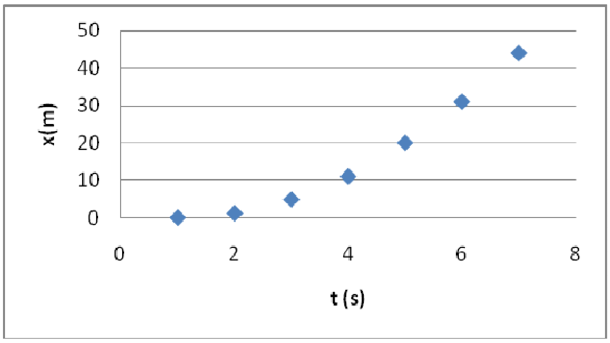
1. Cálculo de la aceleración de la gravedad mediante la caída libre de un cuerpo

Si dejamos caer un cuerpo desde una determinada altura, sin velocidad inicial, y despreciando el rozamiento con el aire, la distancia recorrida por el objeto, viene dada por

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

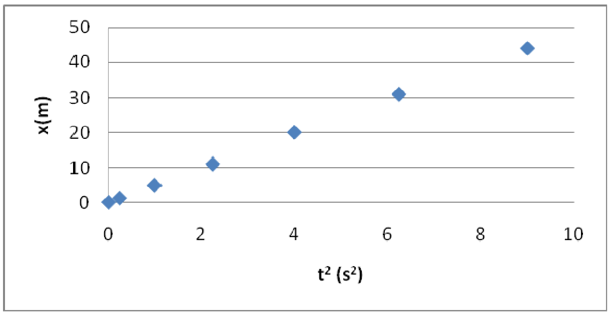
De esta forma, dejando caer un cuerpo desde diferentes alturas, y midiendo el tiempo que tarda en llegar al suelo, obtendremos una serie de parejas de puntos experimentales (x_i,t_i).

t (s)	x (m)
0,1	0,05
0,5	1,2
1,0	4,9
1,5	11
2,0	20
2,5	31
3,0	44



En este caso, la relación que existe entre las variables experimentales x y t no es lineal, por lo que no se puede utilizar el método de los mínimos cuadrados. Sin embargo, si calculamos el cuadrado del tiempo, la relación entre x y t^2 sí que es lineal:

t^2 (s^2)	x (m)
0,01	0,05
0,25	1,2
1,0	4,9
2,25	11
4,0	20
6,25	31
9,0	44



De modo que con esta transformación encontramos una relación lineal entre los datos experimentales, y podemos obtener la pendiente de la recta mediante un ajuste por mínimos cuadrados $x=a\ t^2$, y a partir de dicha pendiente el valor de la aceleración de la gravedad, ya que se verifica la siguiente relación entre la pendiente de la recta, y la aceleración de la gravedad: $a=g/2$.

Otros ejemplos

A continuación se muestran varios ejemplos de funciones no lineales, y la forma de conseguir una relación lineal, de modo que así se pueda aplicar el ajuste por mínimos cuadrados:

Función no lineal	Expresión equivalente lineal
$y = A\sqrt{x}$	$y^2 = A^2 x$
$y = A\mathrm{e}^{bx}$	$\ln y = \ln A + bx$
$y = Ax^b$	$\ln y = \ln A + b\ln x$

Finalmente, conviene comentar el hecho de que no siempre se puede establecer una relación lineal entre las variables involucradas en el proceso. En estos casos hay que recurrir a otros métodos de cálculo, que quedan fuera del objetivo de este curso.

Bibliografía

- “Prácticas de Física. Manual de Laboratorio”. JV Boscá et al. Servicio de Publicaciones UPV, ref. 93.702.
- "Prácticas de Fundamentos Físicos de la Informática. Facultad de Informática", J.A. Gómez Tejedor, et al., Servicio de Publicaciones UPV, ref. 2003.526.
- “Programas de simulación de procesos físicos”. J Riera, A Vidaurre, M Giménez, SPUPV-97.148.
- “Data reduction and error analysis for the physical science”. PR Bevington, DK Robinson, Mc Graw Hill.
- J. Higbie, American Journal of Physics, nº 59, pag. 184, 1991.