Pràctiques de Matemàtica Discreta

Activitats de la sesió 2

Exercici 1. Determina si les següents llistes poden correspondre o no a les llistes dels graus de tots els vèrtexs d'un graf simple i sense bucles. En cas afirmatiu, dibuixa un graf amb aquestes característiques i, en cas contrari, justifica perquè aquest graf no pot existir.

(a) $3, 3, 3, 5, 2$

(b) $3, 4, 3, 4, 3$

(c) $1, 2, 2, 3, 4$

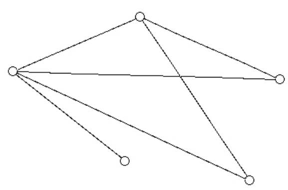
(d) $2, 2, 2, 2, 4, 4$

Solució:

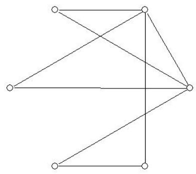
(a) No existeix cap graf simple i sense bucles amb aquestes característiques ja que, si existira, el vèrtex de grau 5 hauria de ser adjacent a 5 vèrtexs diferents; açò no és possible posat que el nombre total de vèrtexs és 5. *Observació:* Si permetem tenir bucles, llavors sí que pot construir-se un graf amb aquests graus.

(b) No existeix cap graf amb aquestes característiques, ja que la suma dels graus no és un nombre parell.

(c) Si que existeix:



(d) Si que existeix:



Exercici 2. Un graf amb 19 arestes té 5 vèrtexs de grau 1, 3 vèrtexs de grau 2, 5 vèrtexs de grau 3 i la resta de grau 4. Determina el nombre de total de vèrtexs d'aquest graf.

Solució:

Denotant per x el nombre de vèrtexs de grau 4, com la suma dels graus dels vèrtexs ha de ser igual al doble del nombre d'arestes tenim

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + x \cdot 4 = 2 \cdot 19.$$

Resolent l'equació s'obté que $x = 3$. Per tant, el nombre total de vèrtexs és:

$$5 + 3 + 5 + 3 = 16.$$

Exercici 3. És possible organitzar una festa amb 9 persones, cadascuna de les quals coneix exactament a 5 de les restants persones?

Solució:

Representem la situació mitjançant un graf en el qual els vèrtexs es corresponen amb cadascuna de les 9 persones i de manera que dos vèrtexs estan units amb una aresta si i només si les dues persones associades als vèrtexs es coneixen. Aquest graf és, en cas d'existir, simple i sense bucles. La llista de graus és:

$$5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.$$

Com la suma dels graus és imparell, no pot existir un graf amb aquestes característiques. Per tant, no és possible organitzar aquesta festa.

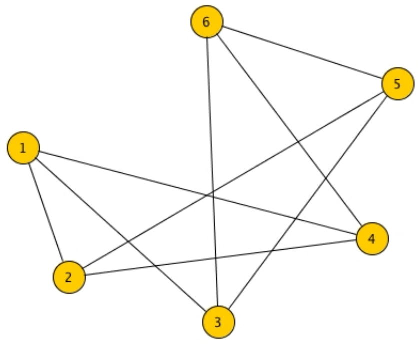
Exercici 4. Disposem de 6 ordinadors i de 9 cables de connexió. Volem que cada ordinador es connecte exactament amb altres 3 ordinadors. Existeix alguna forma de connectar-los?

Solució:

Representem la situació mitjançant un graf els vèrtexs del qual es corresponen amb els 6 ordinadors i les arestes del qual es corresponen amb els cables de connexió. Vist d'aquesta manera, el que volem és obtenir un graf de 9 arestes la llista de graus del qual és la següent:

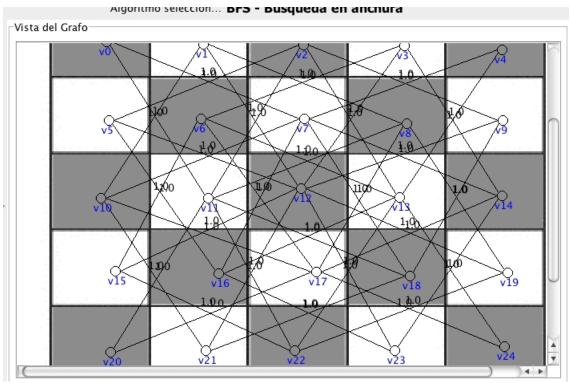
$$3, 3, 3, 3, 3, 3.$$

Veiem que la suma dels graus és igual a 18, que és el doble del nombre d'arestes que volem; per tant, no hi ha incompatibilitat amb la fórmula dels graus. Bé "a ull" o ben usant l'Algorisme de Hakimi s'obté el graf cercat:



Exercici 5. A partir d'un "tauler d'escacs" de grandària 5×5 considerem el graf els vèrtexs del qual es corresponen amb les caselles i de manera que, dos vèrtexs estan units per una aresta si i només si les caselles corresponents estan connectades mitjançant un únic moviment de cavall. És bipartit aquest graf? En cas afirmatiu, troba una partició de vèrtexs associada i determina raonadament si és un graf bipartit complet o no ho és.
Sugerencia: Obri el programa *SWGraphs*, estableix com a imatge de fons la del fitxer *grid.jpg*, dibuixa un vèrtex en cada casella i dibuixa les arestes corresponents.

Solució:



El graf és bipartit, ja que les caselles blanques s'uneixen amb les negres i viceversa, no havent-hi arestes entre caselles del mateix color i no havent-hi cap vèrtex aïllat. Per tant, una partició de vèrtexs associada és la formada, d'una banda, pels vèrtexs associats a caselles blanques i, d'altra banda, pels vèrtexs associats a caselles negres.

La llista de graus de qualsevol graf bipartit complet té només dos valors diferents. En aquest cas hi ha més de dos graus diferents. Per tant, no es tracta d'un graf bipartit complet.