4 Práctica Cuarta: Integración

La integral de Riemann formaliza el concepto geométrico intuitivo que conocemos como área de un recinto plano. El cálculo de primitivas nos permite determinar el valor (exacto) de la integral en algunos casos, concretamente cuando podemos encontrar una función expresada como composición de funciones elementales cuya derivada sea la que necesitamos.

Cuando no disponemos del valor exacto de la integral disponemos de métodos numéricos aproximados para estimar su valor. Utilizaremos en esta práctica, el método de los trapecios y el de Simpson.

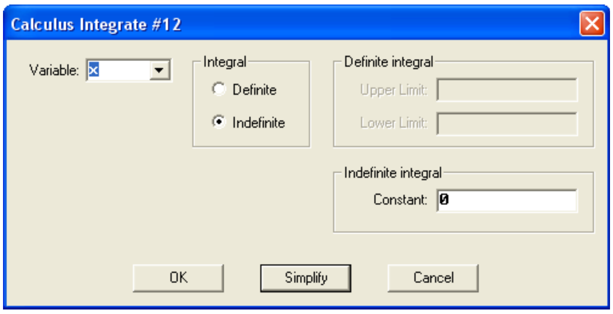
Nos proponemos aquí mostrar el manejo de D5W para el cálculo de primitivas y, como aplicación, para determinar (de modo exacto) áreas planas. Por otro lado, veremos cómo usar el programa para realizar los cálculos necesarios en integración aproximada.

4.1 Cálculo de primitivas

D5W es capaz de determinar correctamente la mayor parte de las integrales que admiten una primitiva expresable como composición de funciones elementales. Conoce y aplica las técnicas usuales que nos llevan a encontrarlas. Puedes comprobarlo, pidiéndole que simplifique (Calculus:Integrate) las siguientes integrales indefinidas

$$\int \frac{\cos(\log(1+x))}{1+x}dx \quad , \quad \int e^x \sin(x)dx \quad , \quad \int x\left(\cos\left(x^2\right)\right)^2 dx \quad , \quad \int x^3\sqrt{\frac{1+x}{x-2}}dx$$

Recuerda de la primera práctica que para integrar, por ejemplo, la función $\dfrac{\cos(\log(1+x))}{1+x}$ tras iluminarla aplicamos la secuencia Calculus:Integrate y aparece el cuadro de diálogo



con x en Variable. Marca Indefinite y, por defecto, el programa propone 0 como constante de integración. Al pulsar OK la ventana muestra

$$\int \frac{\mathtt{COS(LN(1+x))}}{\mathtt{1+x}}\mathtt{dx}$$

Al simplificar esta expresión, pulsando en el cuadro de diálogo anterior Simplify en lugar de OK, obtenemos el resultado.

$$\mathtt{SIN(LN(1+x))}$$

Repite el proceso para hallar el resto de primitivas.

En ocasiones, el programa no reconoce el cambio de variable necesario y debemos ayudarle. Por ejemplo, no es capaz de obtener (compruébalo) el valor de

$$\int \texttt{COS(LN(1+x))dx}$$

si no le indicamos el cambio que debe realizar. D5W tiene definida, en el fichero `MISC.MTH`, una función `INT_SUBST(y,x,u)` que devuelve una primitiva de la función $y(x)$ sustituyendo la inversa de $u(x)$ por x en $y(x)$, integrando y volviendo a sustituir $u(x)$ por x en el resultado. En nuestro ejemplo, deberías simplificar la expresión

`INT_SUBST(COS(LN(1+x)), x, LN(1+x))`

y obtendrás

$$\frac{\texttt{(x+1)COS(LN(1+x))}}{\texttt{2}} + \frac{\texttt{(x+1)SIN(LN(1+x))}}{\texttt{2}}$$

Observa que para poder realizar un cambio de variable del tipo $t = g(x)$ la función `INT_SUBST` necesita poder invertir la función $g(x)$, lo cual no siempre es posible. Comprueba, por ejemplo, que D5W no te proporciona el valor de la integral

$$\int (1 + \log(x)) \sqrt{1 + (x \log(x))^2} dx$$

ni siquiera usando la función `INT_SUBST` aplicando el cambio $t = x \log(x)$. Si haces manualmente este cambio de variable, obtendrás que[1]

$$\int (1 + \log(x)) \sqrt{1 + (x \log(x))^2} dx = \int \sqrt{1 + t^2} dt$$

y puedes resolver la integral última con D5W.

4.2 Cálculo de áreas

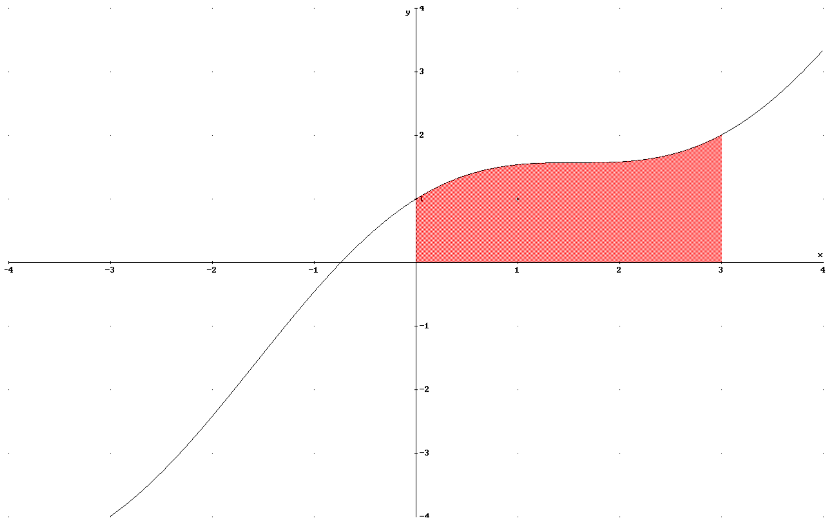
Para el cálculo de áreas y otras aplicaciones usuales de la integral, D5W cuenta con funciones predefinidas que realizan de forma directa los cálculos. El problema puedes analizarlo previamente en la ventana 2D representando el área en cuestión mediante las funciones (prefdefinidas) `PlotInt` y `AreaBetweenCurves`.

Nos proponemos ahora determinar el valor del área encerrada por la función $f(x) = x + \cos(x)$ y el eje de abscisas sobre el intervalo $[0, 3]$. Puedes representar el área que pretendes calcular simplificando previamente

`PlotInt(x+COS(x), x, 0, 3, y)`

[1] Observa que si $t = x \log(x)$, entonces $dt = (1 + \log(x))dx$

para obtener el recinto. A continuación sombrea la expresión obtenida y represéntala gráficamente. Obtendrás



Como puede verse a partir de la gráfica, el área se obtendrá (dado que la función es positiva en $[0,3]$) simplificando la integral definida

$$\int_0^3 (x + \cos(x))\, dx$$

cuyo valor será $A = \sin(3) + \frac{9}{2} \approx 4.641120008$.

Para representar el área encerrada entre las curvas $y = u(x)$ e $y = v(x)$ en el intervalo $[a,b]$ podemos utilizar la función `AreaBetweenCurves(u,v,x,a,b,y)`. Como ejemplo, representa gráficamente las funciones $\sin(x)$ y $\sin(2x)$. Colorea en la ventana 2D el área encerrada entre ellas desde el origen hasta el primer punto de corte de abscisa positiva. Se trata de la región que simplifica la expresión

$$\texttt{AreaBetweenCurves(SIN(x),SIN(2x),x,0,}\pi\texttt{/3,y)}$$

Calcula después este área[2] y obtén que su valor es $\frac{1}{4}$.

4.3 Integración aproximada

El fichero `TRAPEZIS-SIMPSON.dfw` que acompaña a la práctica contiene funciones que te permiten aplicar el método de trapecios y Simpson para aproximar una integral, bien eligiendo el número de subdivisiones a realizar o bien prefijando la precisión que deseas obtener.

Fórmula de Trapecios:

$$T_n f = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) \; ; \; h = \frac{b-a}{n}$$

[2] Ten en cuenta que $\sin(2x) > \sin(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Cota de error: $E_n = \left|\int_a^b f - T_n f\right| \leq \frac{nh^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$; $M_2 \geq \max\limits_{[a,b]} |f''|$

Fórmula de Simpson :
$(n$ par$)$

$$S_n f = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh) + f(b)\right)$$

Cota de error: $E_n = \left|\int_a^b f - S_n f\right| \leq \frac{nh^5}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$; $M_4 \geq \max\limits_{[a,b]} \left|f^{(iv)}\right|$

Observa que `STRAPEZIS(u, x, a, b, n)` calcula la aproximación por el método de los trapecios de la integral de u en el intervalo $[a, b]$ efectuando n subdivisiones del intervalo $[a, b]$, mientras que `SSIMPSON(u, x, a, b, n)` define la aproximación de la misma integral usando el método de Simpson. Para aplicar cualquier de las dos funciones-DERIVE necesitamos especificar cinco argumentos: u, la función integrando, x la variable de integración, a y b los extremos del intervalo de integración y n el número de subdivisiones del intervalo $[a, b]$ que, en el caso de Simpson, ha de ser par.

Nos proponemos a continuación utilizar las funciones anteriores para aproximar el valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

dividiendo el intervalo de integración en 100 partes iguales. La función e^{-x^2} es un caso clásico de función integrable Riemann para la que no se conoce una primitiva elemental.

Para aplicar la fórmula de los trapecios, edita la línea

$$\texttt{STRAPEZIS}(\texttt{e}^{-\texttt{x}^2}, \texttt{x}, 0, 1, 100)$$

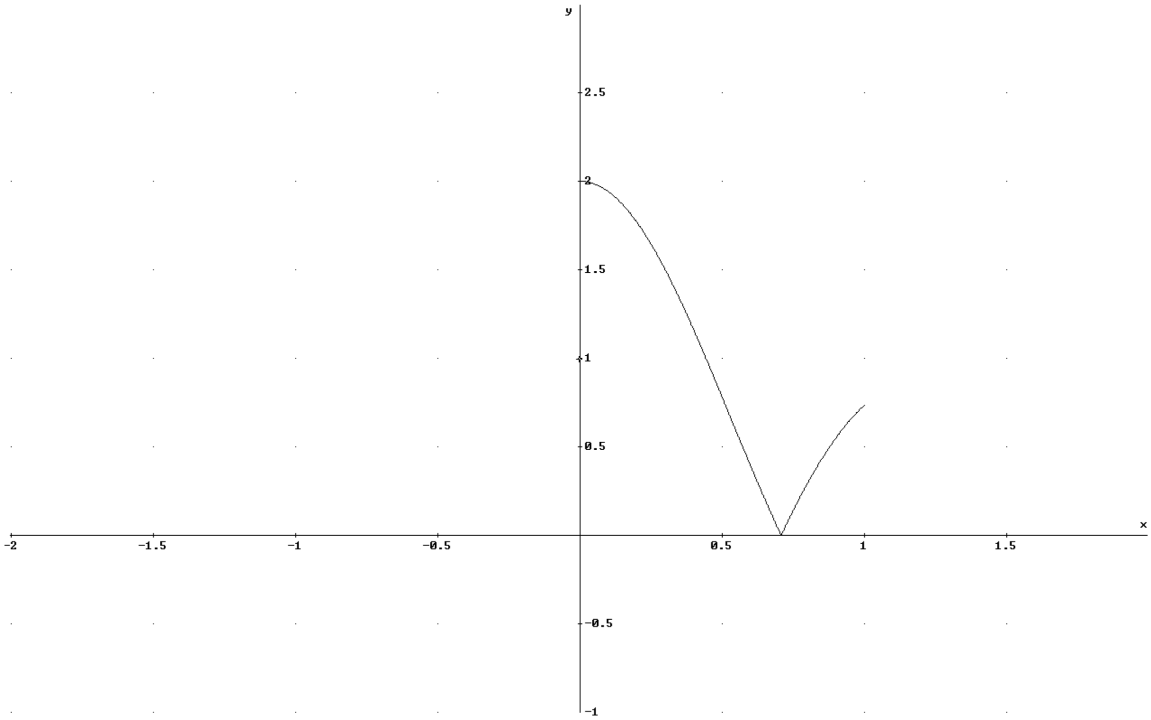
y aproxímala. Obtendrás como resultado 0.7468180014. Podemos saber el número de decimales correctos obtenidos en la aproximación acotando el error. Observa la función-DERIVE `ETS(m2,a,b,n)`del fichero que define la cota de error del método de los trapecios . Para aplicarla sólo falta por determinar el valor de `m2`, que representa una cota de la derivada segunda de e^{-x^2} en el intervalo $[0, 1]$. Halla, mediante Calculus:Differentiate, la derivada segunda de la función e^{-x^2} cuyo valor es

$$e^{-x^2}\left(4x^2 - 2\right)$$

y represéntala gráficamente en valor absoluto y en forma paramétrica en el intervalo $[0, 1]$. Recuerda que debes editar

$$[\texttt{x}, \texttt{ABS}(\texttt{e}^{-\texttt{x}^2}\ (4\texttt{x}^2 - 2))]$$

Al intentar representar esta función, se abre el cuadro de diálogo para introducir los extremos del intervalo en el que deseas la gráfica. Considerando los extremos 0 y 1, tras acercar y centrar la gráfica, la ventana 2D será similar a



de donde podemos concluir que el parámetro `m2` es 2. La cota del error cometido en la aproximación anterior se obtendrá , tras aproximar la expresión

`ETS(2, 0, 1, 100)`

cuyo valor será $1.666666666 \cdot 10^{-5}$ $(< 10^{-4})$ que garantiza, al menos, tres decimales exactos (en realidad, cuatro). En efecto, observa, al efectuar la aproximación con D5W que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7468241328...$$

Nos proponemos ahora determinar el número de subdivisiones a realizar en $[0, 1]$ para conseguir aproximar la integral anterior con 8 decimales exactos, al menos. Para ello, basta plantear la desigualdad

$$\texttt{ETS(2, 0, 1, n)} < \texttt{10}^{-9}$$

y, mediante soLve en modo aproximado, comprueba que necesitaríamos elegir $n \geq 12910$. En efecto, si aproximas

$$\texttt{STRAPEZIS}(\texttt{e}^{-\texttt{x}^2}, \texttt{x}, 0, 1, 12910)$$

obtendrás 0.7468241324 que, garantiza un decimal más de lo esperado.

Para aplicar la fórmula de Simpson con el fin de aproximar la integral anterior dividiendo el intervalo de integración en 100 partes iguales, edita la línea

$$\texttt{SSIMPSON}(\texttt{e}^{-\texttt{x}^2}, \texttt{x}, 0, 1, 100)$$

y aproxímala. Obtendrás como resultado 0.7468241328 que como, puedes observar, ya proporciona los diez primeros decimales correctos. No obstante, podemos estimar el número de decimales correctos que garantiza la cota de error del método de Simpson, usando la función `ESS(m4,a,b,n)`. Para aplicarla sólo falta por determinar el valor de `m4` que representa una cota del valor absoluto de la derivada cuarta de e^{-x^2}. Procediendo como antes para el cálculo de m2, puedes concluir que `m4` vale 12. Por tanto, la cota del error que proporciona la aproximación del método de Simpson con $n = 100$ se obtendrá, tras aproximar la expresión

$$\mathtt{ESS}(12,\ 0,\ 1,\ \mathtt{100})$$

cuyo valor será $6.666666666 \cdot 10^{-10}$ ($< 10^{-9}$) que garantiza, al menos, ocho decimales exactos[3]. Cambia a 20 dígitos la precisión con Declare: Simplification Settings y comprueba que sólo los diez primeros decimales son correctos. Vuelve a aplicar el método de Simpson para conseguir ahora 15 decimales exactos, al menos. Previamente, para hallar n, necesitarás resolver la inecuación

$$\mathtt{ESS}(12,\ 0,\ 1,\ \mathtt{n}) < \mathtt{10}^{-16}$$

cuya solución es $n \geq 5082$. Tan sólo queda aproximar

$$\mathtt{SSIMPSON}(\mathtt{e}^{-\mathtt{x}^2},\ \mathtt{x},\ \mathtt{0},\ \mathtt{1},\ \mathtt{5082})$$

que proporciona como resultado 0.74682413281242703765. Contrasta este resultado con el valor aproximado de la integral que te proporciona D5W.

[3]Observa que para conseguir mediante el método de los trapecios ocho decimales exactos, al menos, el número de subdivisiones requerido ha sido 12910 frente a las 100 del método de Simpson.