Pràctica 4
Càlcul d'inverses i descomposició LU

Índex

1 Càlcul de la matriu inversa

1.1 La funció inv

Per calcular la matriu inversa d'una matriu quadrada A, fem servir la funció **inv** aplicada sobre A. Si A és invertible, aleshores la comanda

```
-->inv(A)
```

ens dóna la matriu inversa A^{-1}. En un altre cas, o bé apareix un error indicant que la matriu és singular (és a dir, no invertible), o apareix un missatge d'advertiment dient que la matriu és pròxima a ser singular o està malament escalada. En el darrer cas no és clar si la matriu és singular o no, podem fer servir, en aquesta situació, la funció **rank** per calcular el rang de A i comprovar si A té rang màxim.

Exemple 1. Considerem la matriu $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

```
-->A=[2 5 -1;0 0 9;0 -5 4]
 A  =
    2.    5.  - 1.
    0.    0.    9.
    0.  - 5.    4.
-->inv(A)
 ans  =
    0.5  - 0.1666667    0.5
    0.     0.0888889  - 0.2
    0.     0.1111111    0.
```

Podem comprovar que la inversa proporcionada és correcta:

```
-->A*inv(A)
 ans  =
    1.    5.551D-17    0.
    0.    1.           0.
    0.  - 5.551D-17    1.
```

Les entrades $(1,2)$ i $(3,2)$ (és a dir, $5{,}551 \cdot 10^{-17}$ i $-5{,}551 \cdot 10^{-17}$) haurien, probablement, de ser zero (no són zero, probablement, degut a errors d'arrodoniment en els càlculs). Fent servir la funció **clean**, podem substituir aquests nombres per 0:

```
-->clean(ans)
 ans  =
    1.    0.    0.
    0.    1.    0.
    0.    0.    1.
```

Aquesta és la matriu identitat i, per tant, el resultat és correcte.

Exemple 2. Considerem la matriu $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

```
-->B=[1 1 1; 2 2 2; 3 3 3]
 B  =
    1.    1.    1.
    2.    2.    2.
    3.    3.    3.
-->inv(B)
       !--error 19
Problem is singular.
```

Calculant el rang de B podem veure que aquesta matriu no té rang màxim:

```
->rank(B)
 ans  =
    1.
```

Així, la matriu no és invertible en aquest cas.

Exemple 3. Considerem ara la matriu $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

```
-->C=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
 C  =
    1.    2.    3.
    4.    5.    6.
    7.    8.    9.
-->inv(C)
warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00
 ans  =
   1.0D+15 *
  - 4.5035996    9.0071993  - 4.5035996
    9.0071993  - 18.014399    9.0071993
  - 4.5035996    9.0071993  - 4.5035996
-->rank(C)
 ans  =
    2.
```

Concloem que C no és invertible.

1.2 Càlcul de matrius inverses amb l'algorisme de Gauss-Jordan

Donada una matriu quadrada A, podem també trobar la inversa de A aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $A1 = [A \;\; I]$, on I és la matriu identitat:

Exemple 4. Siga A la matriu de l'exemple 1.

```
-->A1=[A,eye(3,3)]
 A1  =
    2.    5.  - 1.    1.    0.    0.
    0.    0.    9.    0.    1.    0.
    0.  - 5.    4.    0.    0.    1.
-->rref(A1)
 ans  =
    1.    0.    0.    0.5  - 0.1666667    0.5
    0.    1.    0.    0.      0.0888889  - 0.2
    0.    0.    1.    0.      0.1111111    0.
```

Aleshores A és invertible i la seua inversa és

```
-->ans(:,4:6)
 ans  =
    0.5  - 0.1666667    0.5
    0.     0.0888889  - 0.2
    0.     0.1111111    0.
```

Exemple 5. Fem el mateix amb la matriu C de l'exemple 3:

```
-->C1=[C, eye(3,3)]
 C1  =
    1.    2.    3.    1.    0.    0.
    4.    5.    6.    0.    1.    0.
    7.    8.    9.    0.    0.    1.
-->rref(C1)
 ans  =
    1.    0.  - 1.    0.  - 2.6666667    1.6666667
    0.    1.    2.    0.    2.3333333  - 1.3333333
    0.    0.    0.    1.  - 2.           1.
```

Com que la matriu de l'esquerra no és la matriu identitat, C no és invertible.

2 Descomposició LU d'una matriu quadrada

2.1 Càlcul

Una descomposició LU (també anomenada factorització LU) és una descomposició d'una matriu que escriu una matriu com el producte d'una matriu triangular inferior i una triangular superior. Aquesta descomposició té moltes aplicacions. Presentarem ací tres d'elles: resolució de sistemes d'equacions lineals, càlcul del determinant d'una matriu quadrada i càlcul de matrius inverses.

Primer de tot, explicarem el procés d'obtenció (a mà) d'una descomposició LU mitjançant un parell d'exemples. Considerem la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuant operacions elementals per files (és a dir, multiplicant A per matrius elementals adients) podem trobar, en aquest cas, una matriu triangular superior que és equivalent (per files) a A:

$$\mathsf{E}_{32}(4)\mathsf{E}_{31}(3)\mathsf{E}_{21}(-2)\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prenent $\mathsf{B} = \mathsf{E}_{32}(4)\mathsf{E}_{31}(3)\mathsf{E}_{21}(-2)$ i

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenim que

$$\mathsf{BA} = \mathsf{U},$$

on B és una matriu triangular inferior i U és una matriu triangular superior. Com que B és producte de matrius elementals, és invertible. Multiplicant la igualtat anterior per B^{-1} (per l'esquerra), tenim:

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{U}.$$

No és difícil provar que la inversa d'una matriu triangular inferior invertible és també una matriu triangular inferior. Aleshores, prenent $\mathsf{L} = \mathsf{B}^{-1}$, obtenim una descomposició LU de A:

$$\mathsf{A} = \mathsf{LU}.$$

És molt fàcil calcular L a mà perquè coneixem les inverses de les matrius elementals:

$$\begin{aligned} \mathsf{L} = \mathsf{B}^{-1} &= (\mathsf{E}_{32}(4)\mathsf{E}_{31}(3)\mathsf{E}_{21}(-2))^{-1} = \mathsf{E}_{21}(-2)^{-1}\mathsf{E}_{31}(3)^{-1}\mathsf{E}_{32}(4)^{-1} \\ &= \mathsf{E}_{21}(2)\mathsf{E}_{31}(-3)\mathsf{E}_{32}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En resum, hem obtingut la següent descomposició LU de A:

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}}.$$

Vegem un altre exemple. Considerem la matriu

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si apliquem el mateix procés d'abans a la matriu C obtenim:

$$\mathsf{E}_{32}(1)\mathsf{E}_{12}\mathsf{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}}.$$

Aleshores

$$\mathsf{L} = (\mathsf{E}_{32}(1)\mathsf{E}_{12})^{-1} = \mathsf{E}_{12}^{-1}\mathsf{E}_{32}(1)^{-1} = \mathsf{E}_{12}\mathsf{E}_{32}(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Però... aquesta matriu L no és triangular inferior! La raó és que, en el procés d'obtenció, hem intercanviat files (és a dir, hem efectuat operacions elementals de tipus 1). Aquesta és la diferència amb l'exemple previ. No obstant això, en aquest cas, mantindrem el nom de «descomposició LU» per referir-nos a la factorització obtinguda. És a dir: **una descomposició LU d'una matriu A serà una factorització A = LU on U és triangular superior i L és triangular inferior (*excepte reordenació de files*).**

Les descomposicions LU poden obtenir-se fàcilment amb Scilab fent servir la funció **lu**. Però... atenció! Aquesta funció fa servir eliminació gaussiana *amb pivotatge parcial* per obtenir la descomposició. Açò vol dir que, molt probablement, Scilab farà servir intercanvis de files en el procés i que la matriu obtinguda L no serà triangular inferior (encara que, naturalment, ho serà si hi reordenem les files). Per exemple, si calculem, fent servir Scilab, una descomposició LU de la matriu anterior A:

```
-->A=[2 5 -3; 4 7 -4; -6 -3 1];
-->[L,U]=lu(A)
 U  =
  - 6.  - 3.    1.
    0.    5.  - 3.3333333
    0.    0.    4.441D-16
 L  =
  - 0.3333333    0.8    1.
  - 0.6666667    1.     0.
    1.           0.     0.
```

Observeu que el factor L que Scilab ha calculat no és triangular inferior.

També es pot fer servir la comanda de Scilab $[\mathsf{L}, \mathsf{U}, \mathsf{P}] = \mathrm{lu}(\mathsf{A})$ (afegint un altre paràmetre P a l'eixida):

```
-->[L1,U1,P]=lu(A)
 P  =
    0.    0.    1.
    0.    1.    0.
    1.    0.    0.
 U1  =
  - 6.  - 3.    1.
    0.    5.  - 3.3333333
    0.    0.    4.441D-16
 L1  =
    1.           0.     0.
  - 0.6666667    1.     0.
```

```
 - 0.3333333    0.8    1.

-->P*L1*U1
ans  =
   2.     5.  - 3.
   4.     7.  - 4.
 - 6.   - 3.    1.

-->U-U1
ans  =
   0.     0.     0.
   0.     0.     0.
   0.     0.     0.

-->L-P*L1
ans  =
   0.     0.     0.
   0.     0.     0.
   0.     0.     0.
```

És a dir, quan posem 3 paràmetres eixida, $[\mathsf{L}, \mathsf{U}, \mathsf{P}] = \mathrm{lu}(\mathsf{A})$, ens diu la matriu de permutació tal que PA = LU, on U es triangular superior i L és triangular inferior amb tots els elements diagonals igual a 1; si posem només 2, $[\mathsf{L}, \mathsf{U}] = \mathrm{lu}(\mathsf{A})$, la matriu U és la mateixa però la matriu L ens la dona ja permutada i, per tant, aquesta L satisfà: A = LU.

2.2 Aplicacions

2.2.1 Resolució de sistemes d'equacions lineals

La descomposició LU pot aplicar-se a la resolució de sistemes d'equacions lineals. Vegem un exemple.

Considerem el sistema

$$\left.\begin{aligned} -2y + z &= 1 \\ 3x + 2y &= 2 \\ 2y + 4z &= 3 \end{aligned}\right\},$$

la matriu de coeficients de la qual és la matriu C de l'exemple anterior

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Substituint la matriu de coeficients per la seua descomposició LU tenim

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}. \tag{1}$$

El producte $\mathsf{U}\vec{x}$ és un vector columna de tres components que denotarem per $\vec{y}$, és a dir:

$$\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Per conseqüent, la igualtat (1) es pot escriure:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Aquesta és l'expressió matricial del sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_2 & = & 1 \\ y_1 & = & 2 \\ -y_2 + y_3 & = & 3 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Aquest sistema té una matriu de coeficients «quasi triangular» i pot ser resolt directament per una substitució progressiva, donant lloc a aquesta solució:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ara, com que $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$ i coneguem $\vec{y}$, podem calcular $\vec{x}$ resolent el sistema d'equacions lineals l'expressió matricial del qual és $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\vec{y}}.$$

Aquest és el «sistema triangular»

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 2z & = & 2 \\ -2y + z & = & 1 \\ -3z & = & 4 \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Resolent-lo per substitució regressiva obtenim la solució:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2/15 \\ -1/10 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

En resum: La descomposició LU de la matriu de coeficients ens ha permès de transformar el sistema d'equacions en dos sistemes que poden resoldre's directament per substitució progressiva i regressiva, respectivament: (2) i (3).

Notem que aquest mètode de resoldre sistemes d'equacions és especialment útil quan s'han de resoldre molts sistemes d'equacions lineals amb la mateixa matriu de coeficients. La raó és que la descomposició LU s'aplica només sobre la matriu de coeficients; açò significa que la mateixa descomposició LU és vàlida per a tots els sistemes lineals.

Exemple 6. Si volguérem resoldre el sistema d'equacions anterior utilitzant la descomposició LU i amb Scilab podriem introduir el següent:

```
-->C=[0 -2 1;3 0 2;0 2 4];[L,U]=lu(C)
 U  =
    3.    0.    2.
    0.  - 2.    1.
    0.    0.    5.
 L  =
    0.    1.    0.
    1.    0.    0.
    0.  - 1.    1.

-->y=L\[1;2;3]
 y  =
    2.
    1.
    4.

-->x=U\y
 x  =
    0.1333333
  - 0.1
    0.8
```

2.2.2 Càlcul de determinants

El determinant d'una matriu quadrada es pot calcular amb Scilab fent servir la funció **det**. Per exemple:

```
-->D=[1 2; 3 4]
 D  =

    1.    2.
    3.    4.

-->det(D)
 ans  =

  - 2.
```

El procediment utilitzat internament per Scilab quan s'aplica aquesta funció a una matriu A és el següent:

1. S'obté la descomposició LU de A.
2. Tenint en compte que $A = LU$, el determinant de A es calcula com $\det L \det U$. Notem que ambdós determinants involucrats ací són molt fàcils de calcular:
   - Com que U és triangular superior, el seu determinant és el producte de les entrades diagonals.
   - El determinant de L és ± 1, on el signe serà $+$ quan el nombre d'operacions elementals d'intercanvi siga parell, i $-$ quan aquest nombre siga senar[1].

```
-->A=[0 2 3; -4 6 0; 2 -5 5]
 A  =

    0.    2.    3.
  - 4.    6.    0.
    2.  - 5.    5.

-->[L,U]=lu(A)
 U  =

  - 4.    6.    0.
    0.    2.    3.
    0.    0.    8.
 L  =

    0.     1.    0.
    1.     0.    0.
  - 0.5  - 1.    1.
```

[1]Scilab calcula L de manera que, després de permutar convenientment les files per obtenir una matriu triangular inferior, en la diagonal només hi ha uns.

```
-->det(L)
 ans  =

  - 1.

-->det(U)
 ans  =

  - 64.

-->det(L)*det(U)
 ans  =

    64.

-->det(A)
 ans  =

    64.
```

2.2.3 Càlcul de matrius inverses

Quan fem servir la funció **inv** per calcular la inversa d'una matriu quadrada A d'ordre n, Scilab efectua, automàticament, les següents operacions:

1. Obté una descomposició LU de A.
2. Calcula $\det \mathsf{U}$.
3. Si $\det \mathsf{U} = 0$, aleshores Scilab indica que la matriu és singular (no invertible).
4. Si $\det \mathsf{U} \neq 0$, aleshores calcula U^{-1} de la següent manera: Si $\vec{u}_j$ denota la columna que fa j de U^{-1} i I és la matriu identitat, és clar que la igualtat $\mathsf{U}\mathsf{U}^{-1} = \mathsf{I}$ és equivalent al conjunt d'igualtats
$$\mathsf{U}\vec{u}_j = \vec{e}_j \quad j = 1, 2, \ldots n,$$
on $\vec{e}_j$ és el vector columna que fa j de la matriu identitat; per consegüent, resolent tots els sistemes d'equacions lineals $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{e}_j$ s'obtenen totes les columnes de U^{-1}, és a dir, s'obté la matriu inversa de U. La inversa de la matriu L, L^{-1}, es calcula amb el mateix algorisme. Aleshores A^{-1} s'obté com el producte $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{L}^{-1}$.

Notem que és possible obtenir una matriu singular tal que totes les entrades diagonals de U siguen diferents de zero (degut a errors d'arrodoniment en l'eliminació gaussiana). En aquest cas, la matriu inversa és calculada per Scilab i, en alguns casos, apareix un missatge d'advertiment. Per aquesta raó recomanem comprovar si o bé la matriu obtinguda quan introduïm la comanda inv(A) és de veres la matriu inversa de A o A té rang màxim (fent servir la funció **rank**).

Exemple 7. Considerem la matriu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calculem la seua inversa a partir de la seua descomposició LU i fent servir la funció **inv**:

```
-->A=[1 2 -5; -4 1 0; 1 2 7];

-->[L,U]=lu(A)
 U  =

  - 4.    1.       0.
    0.    2.25   - 5.
    0.    0.       12.
 L  =

  - 0.25    1.    0.
    1.      0.    0.
  - 0.25    1.    1.

-->inv(U)*inv(L)
 ans  =

    0.0648148  - 0.2222222    0.0462963
    0.2592593    0.1111111    0.1851852
  - 0.0833333    0.           0.0833333
```

Comprovem que la matriu obtinguda és la inversa de A:

```
-->clean(A*ans)
 ans  =

    1.    0.    0.
    0.    1.    0.
    0.    0.    1.
```