

Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessió 9

1 Problema del flux màxim

2 Terminologia

3 Solució

4 Exemple

5 Aplicació (transport)

Problema model

Un agent de viatges vol preparar un viatge de 12 turistes de Madrid a Sant Petersburg en una certa data, sabent el nombre de seients lliures en cadascun dels vols que poden ser utilitzats^a. Es detallen en la següent taula^b:

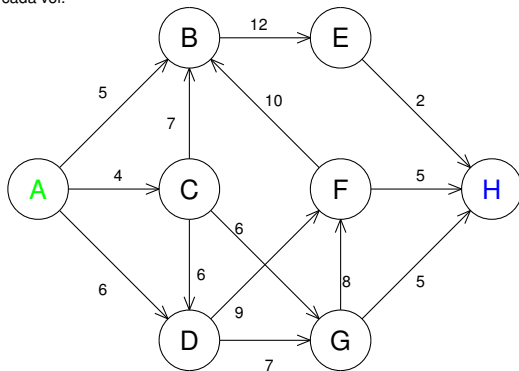
Vol	Seients lliures
Madrid-París	5
Madrid-Frankfurt	4
Madrid-Bruselas	6
París-Helsinki	12
Frankfurt-París	7
Frankfurt-Bruselas	6
Frankfurt-Varsovia	6
Bruselas-Riga	9
Bruselas-Varsovia	7
Helsinki-Sant Petersburg	2
Riga-París	10
Riga-Sant Petersburg	5
Varsovia-Riga	8
Varsovia-Sant Petersburg	5

Es possible que puguem viatjar tots els turistes? Quines rutes han de seguir?

^a Se suposa que tots els horaris dels vols són compatibles a efectes d'enllaços

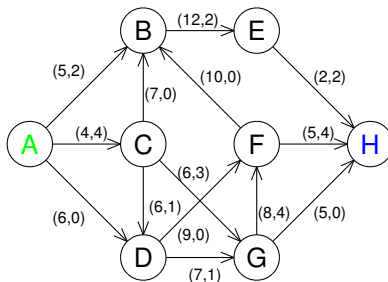
^b Dades fictícies sense cap pretensió realista

La situació pot modelitzar-se mitjançant un graf dirigit ponderat els vèrtexs del qual es corresponen amb les ciutats, les arestes amb els vols, i els pesos (que, en aquest tipus de problema, s'anomenen **capacitats**) són les quantitats de seients lliures en cada vol:



La correspondència entre les etiquetes dels vèrtexs i les ciutats són les següents: A: Madrid, B: París, C: Frankfurt, D: Bruselas, E: Helsinki, F: Riga, G: Varsovia, H: San Petersburgo.

Denominarem **flux** a tot conjunt possible de pesos que representen al nombre de viatgers de cada vol. Un possible exemple de flux seria el següent: 2 dels viatgers segueixen el recorregut ABEH, altres 4 recorren AC i, un cop a C, es bifurquen: 3 segueixen el camí CGFH i 1 segueix el camí CDGFH. Podem representar aquest flux (conjuntament amb les capacitats) de la següent manera:



Observeu que aquest flux només permet viatjar a 6 dels 12 turistes.

Objectiu: trobar un flux que permeti tancar al màxim nombre de turistes.

1 Problema del flux màxim

2 Terminologia

3 Solució

4 Exemple

5 Aplicació (transport)

Xarxa de transport

Una **xarxa** (o **xarxa de transport**) és un graf dirigit ponderat dèbilment connex i sense bucles amb dos vèrtexs especials:

- una **font**, amb grau d'eixida > 0 i grau d'entrada $= 0$,
- i un **pou**, amb grau d'entrada > 0 i grau d'eixida $= 0$,

i tal que els pesos són **enters no negatius**. El pes d'una aresta e s'anomena **capacitat** de e , i es denota per $c(e)$.

El graf del nostre exemple és una xarxa que té com a font el vèrtex A , i com a pou el vèrtex H .

Flux

Un **flux** f d'una xarxa és un conjunt de pesos de les arestes tal que:

- Els pesos són enters no negatius.
- El pes (flux) de cada aresta e (que denotarem per $f(e)$) és menor o igual que la capacitat de l'aresta. És a dir:
 $f(e) \leq c(e)$.
- Per a cada vèrtex que no siga ni la font ni el pou, **la suma dels fluxos de les arestes entrants coincideix amb la suma dels fluxos de les arestes que eixen**.

Valor del flux

El **valor** d'un flux f , denotat per $v(f)$, és la suma dels fluxos de les arestes que eixen de la font.

1 Problema del flux màxim

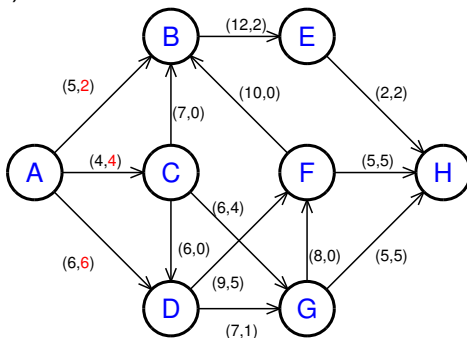
2 Terminologia

3 Solució

4 Exemple

5 Aplicació (transport)

Existeix un algorisme, anomenat de **Ford-Fulkerson**, que calcula un flux màxim d'una xarxa. Aplicant este algorisme al nostre exemple s'obté, com a flux màxim, el següent (el valor del qual és 12):



1 Problema del flux màxim

2 Terminologia

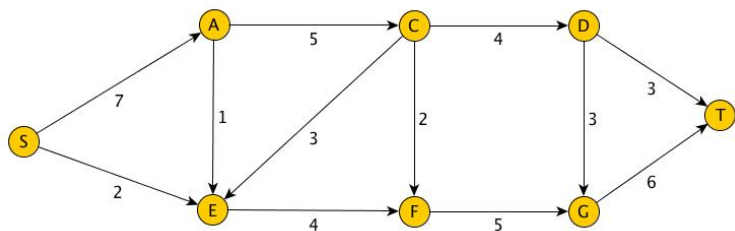
3 Solució

4 Exemple

5 Aplicació (transport)

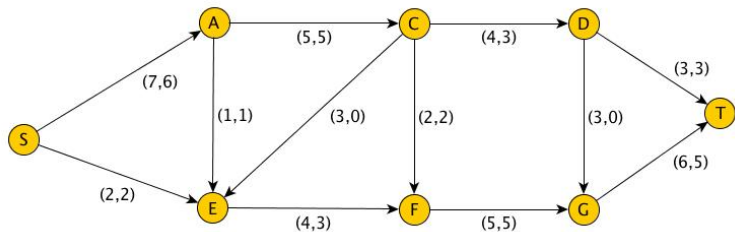
Exemple

Al següent exemple mostrem una xarxa i indiquem, com a pesos de les arestes, les capacitats:



Ejemplo

Aplicant l'algorisme de Ford-Fulkerson obtenim el següent flux màxim:



El seu valor és 8.

1 Problema del flux màxim

2 Terminologia

3 Solució

4 Exemple

5 **Aplicació (transport)**

Problema

Tenim la següent llista de productes químics i les corresponents quantitats de contenidors (per a emmagatzemar-los):

$$A(7), B(6), C(5), D(6), E(10)$$

Volem transportar-los des d'un magatzem a un altre. Per fer açò disposem de 4 camions les capacitats dels quals (en nombre de contenidors) són les següents:

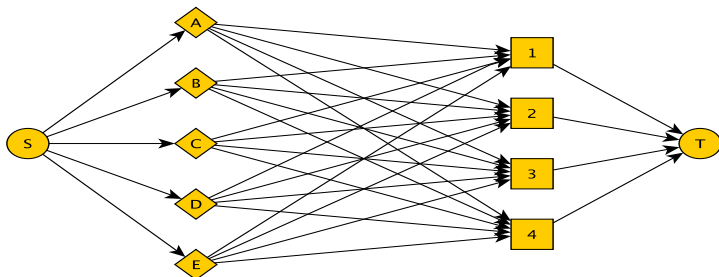
Camión 1 (4), **camión 2** (7), **camión 3** (6), **camión 4** (5)

A més a més, a l'hora de transportar els productes, per motius de seguretat, es té que complir la següent condició: no poden transportar-se en un mateix camió dos contenidors del mateix tipus.

Quin és el nombre màxim de contenidors que poden transportar-se en un viatge dels 4 camions, i com han de distribuir-se?

Modelització del problema

Este problema pot modelitzar-se mitjançant la següent xarxa:



Qüestió:

Quines són les capacitats que han de col·locar-se en cada aresta per a resoldre el problema utilitzant l'algorisme de Ford-Fulkerson?