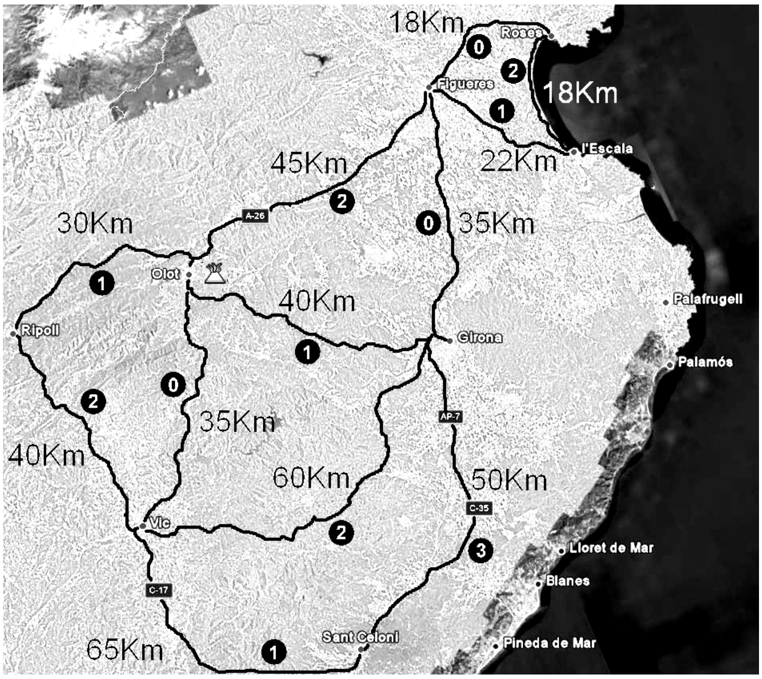
Pràctiques de Matemàtica Discreta

Activitats de la sesió 1

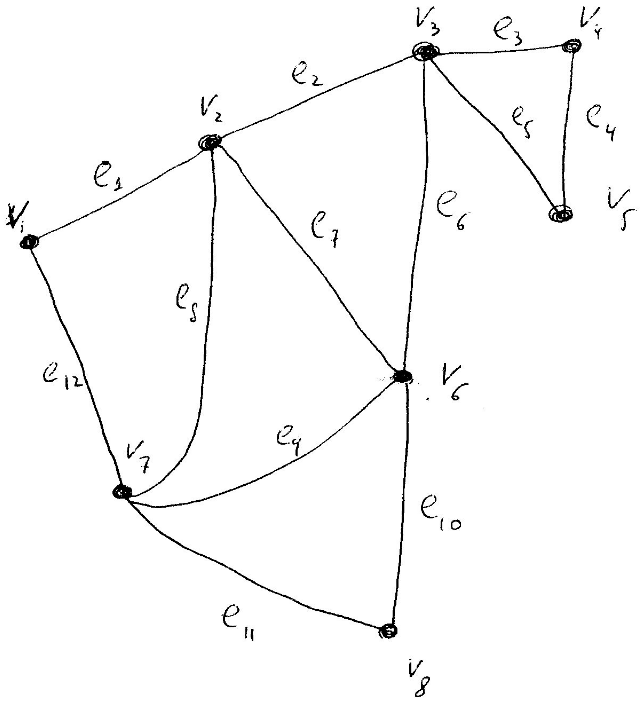
Exercici 1. Considerem el següent mapa de carreteres (apareixen les distàncies en Km i, dins de cercles, el nombre de peatges existents en cada tram):



1. Representa el mapa (obviant les distàncies i el nombre de peatges) per mitjà d'un graf les arestes del qual es corresponguen amb les carreteres i els vèrtexs del qual es corresponguen amb les poblacions connectades per elles. Etiqueta els vèrtexs i les arestes.
2. Descriu l'aplicació d'incidència del graf.
3. Escriu la seua matriu d'adjacència.
4. Escriu els graus de tots els vèrtexs del graf.
5. Compara la suma de tots els graus amb el nombre d'arestes del graf. Quina relació guarden?

Solució:

1. Una representació del graf en forma de diagrama és la següent:



2. L'aplicació d'incidència δ ve definida de la següent manera:

$$\delta(e_1) = \{v_1, v_2\}, \quad \delta(e_2) = \{v_2, v_3\}, \quad \delta(e_3) = \{v_3, v_4\}, \quad \delta(e_4) = \{v_4, v_5\}$$

$$\delta(e_5) = \{v_3, v_5\}, \quad \delta(e_6) = \{v_6, v_3\}, \quad \delta(e_7) = \{v_6, v_2\}, \quad \delta(e_8) = \{v_7, v_2\}$$

$$\delta(e_9) = \{v_6, v_7\}, \quad \delta(e_{10}) = \{v_6, v_8\}, \quad \delta(e_{111}) = \{v_7, v_8\}, \quad \delta(e_{12}) = \{v_1, v_7\}.$$

3. La matriu d'adjacència del graf és la següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Els graus dels vèrtexs són els següents:

$$\deg(v_1) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = \deg(v_8) = 2,$$
$$\deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_6) = \deg(v_7) = 4.$$

5. La suma de tots els graus és 24. El nombre d'arestes és 12. La relació és la següent: la suma dels graus és igual al doble del nombre d'arestes.

Exercici 2. Pot la següent matriu ser la matriu d'incidència d'un graf? Per què?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

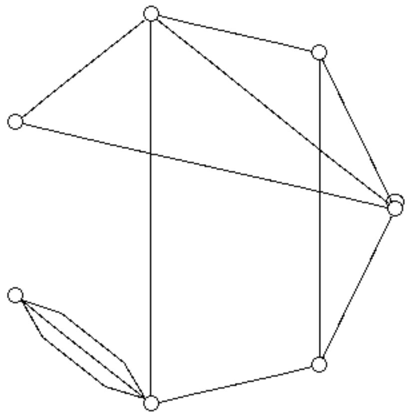
Solució:

Com cada aresta és incident, o bé amb 2 vèrtexs, o bé amb 1 (si és un llaç), les columnes de la matriu d'incidència han de tenir, o bé dues uns (i la resta d'elements són zeros) o bé un dos (i la resta d'elements són zeros). La primera columna de la matriu de l'enunciat no compleix aquesta condició. Per tant, aquesta matriu no pot ser la matriu d'incidència associada a un graf.

Exercici 3. Fes una representació gràfica del graf la matriu d'adjacència del qual siga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució:



Exercici 4. Siga $G = (V, A, \delta)$ el graf amb $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ i $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ i l'aplicació d'incidència del qual ve donada per:

$$\delta(a_1) = \{a, b\}, \quad \delta(a_2) = \{b, c\}, \quad \delta(a_3) = \{b, i\}, \quad \delta(a_4) = \{c, i\}$$
$$\delta(a_5) = \{d, f\}, \quad \delta(a_6) = \{i, g\}, \quad \delta(a_7) = \{f, g\}$$

1. Analitza si es tracta d'un graf simple, si existeixen bucles i si hi ha vèrtexs aïllats.

2. Dibuixa una representació gràfica de G.

3. Calcula les matrius d'adjacència i incidència de G.

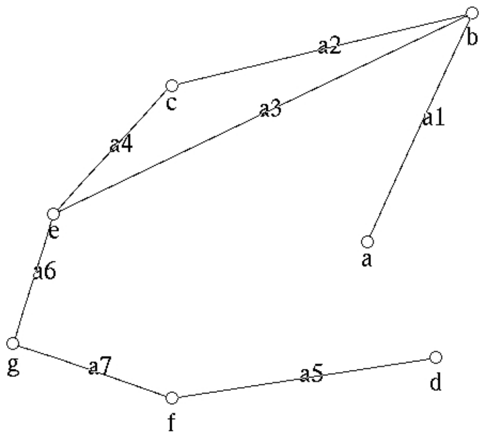
Solució:

1. És un graf simple, ja que no posseeix arestes múltiples (és a dir, diverses arestes amb els mateixos extrems).

2. No existeixen bucles, ja que no hi ha cap aresta els extrems de la qual coincidisquen.

3. No existeixen vèrtexs aïllats, ja que tots els vèrtexs són extrems d'alguna aresta.

4. Una representació gràfica del graf és la següent:



5. La matriu d'adjacència de G és:

$$M_A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

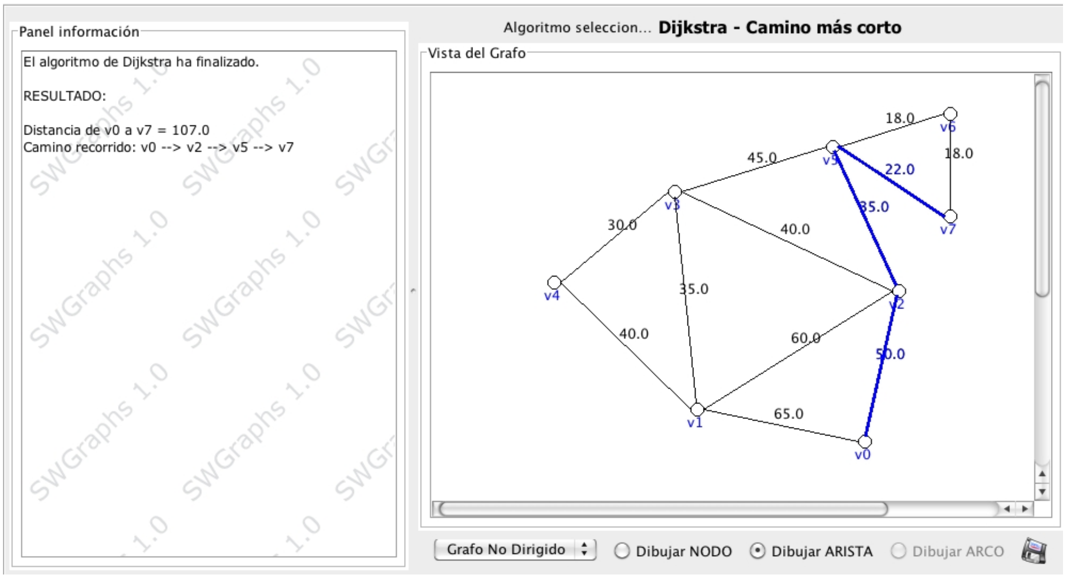
La matriu d'incidència de G és:

$$M_I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 5. Considera el graf de l'Exercici 1 i pondera les seues arestes amb les distàncies en cada tram de carretera. Introdueix aquest graf ponderat en *SWGraphs*. L'algorisme *Dijkstra* (que apareix en la barra de menús de *SWGraphs*) calcula la "ruta més curta" entre dos vèrtexs del graf (és a dir, el "camí" entre dos vèrtexs tal que la suma dels pesos és la menor possible). Encara que en una pràctica posterior estudiarem amb detall aquest algorisme, ho usarem ací per a contestar a la següent qüestió: qual és la ruta més curta entre Sant Celoni i L'Escala? (Resulta obvi que aquesta pregunta pot respondre's, en aquest cas, mitjançant una simple inspecció ocular; no obstant açò, en el cas de grafs molt grans i complexos, resulta necessari disposar d'un algorisme que resolga aquest tipus de problemes).

Solució:

Representem en *SWGraphs* el graf de l'Exercici 1, conjuntament amb els pesos de les arestes (distàncies). Sant Celoni es correspon amb el vèrtex v_0 i L'Escala amb el vèrtex v_7.



El camí més curt apareix marcat en blau. La distància mínima és de 107 Km.

Exercici 6. En la mateixa situació de l'exercici anterior utilitza el programa *SWGraphs* per a contestar a les següents qüestions:

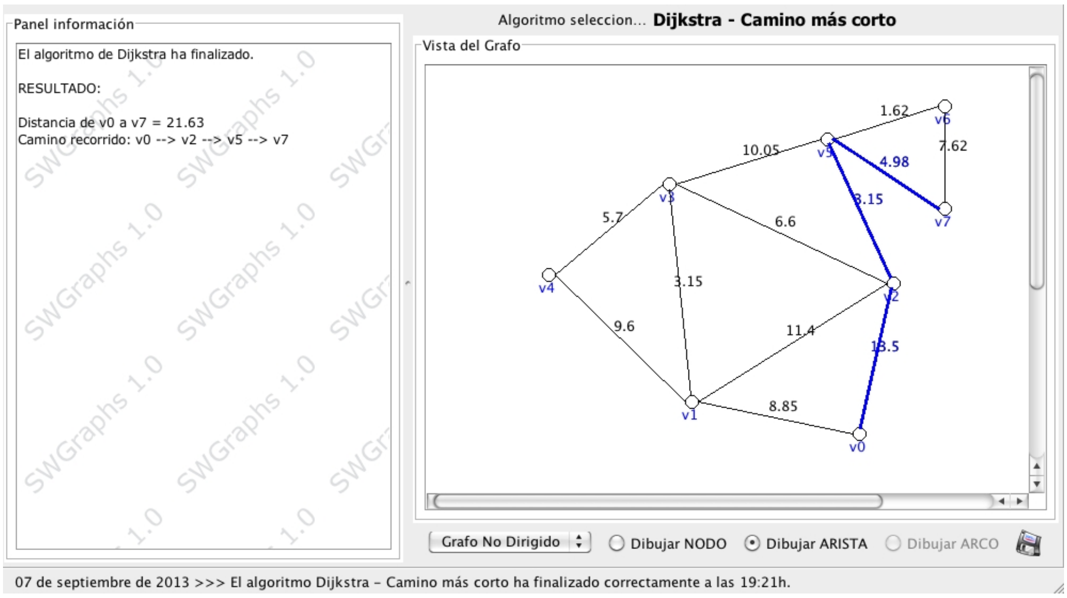
(a) Un viatjant vol anar des de Sant Celoni a L'Escala. No li importa la quantitat de quilòmetres que puga fer, però vol passar pel menor nombre de peatges possible. Troba una possible ruta amb aquesta condició.

(b) El mateix viatjant vol anar des de Sant Celoni a L'Escala de manera que els diners que es gaste entre gasolina i peatges siga el menor possible. Tenint en compte que el seu cotxe gasta 6 litres de gasolina cada 100 quilòmetres, que el litre de gasolina costa 1.5 euros i que en cada peatge han de pagar-se 3 euros, calcula la ruta més econòmica.

Solució:

(a) Canviant els pesos de les arestes del graf utilitzat en l'exercici anterior pels nombres de peatges i aplicant l'algorisme de Dijkstra, s'obté una ruta amb menor pes, és a dir, amb el menor nombre de peatges possible (en aquest cas 3).

(b) Tenint en compte les dades aportades, cada quilòmetre costa $0{,}09$ euros. Ponderem cada aresta amb el següent pes: $0{,}09\times$(nombre de Km)$+3\times$(numere de peatges). D'aquesta manera obtindrem un graf ponderat els pesos del qual representen les quantitats de diners que costa viatjar per cada tram. Aplicant l'Algorisme de Dijkstra obtindrem el "camí més curt", és a dir, la ruta "més econòmica":



La ruta és: Sant Celoni-Girona-Figueres-L'Escala i costa 21,63 euros entre gasolina i peatges.