Prácticas de Matemática Discreta.
Teoría de Grafos
2011/12
UNIDAD 5

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

24 de abril de 2012

Índice

Índice de figuras

1. Arboles

1.1. Arbol dirigido

Definición 1.1 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Diremos que G es un* árbol *si es conexo y acíclico.*

Los árboles son estructuras que, por sus propiedades, son útiles en muchos campos de las Matemáticas. Un árbol se puede ver como la estructura básica subyacente en un grafo conexo. Si las estructuras de datos usadas para el almacenamiento de información tienen las características de un árbol, permiten una recuperación más rápida de la información almacenada. Por ejemplo, la mayoría de los sistemas operativos permiten mantener la información a diferentes niveles en directorios y subdirectorios, que se podrían ver como los vértices de un árbol. Son también útiles en otros campos como Inteligencia Artificial, redes de comunicación, análisis de datos, redes eléctricas, etc...

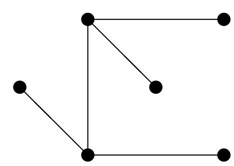

Figura 1.1: Arbol no dirigido.

Teorema 1.1 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a).- *G es un árbol.*

(b).- *G no tiene bucles y para cualquier par de vértices distintos en V, existe un único camino simple en G que los une.*

(c).- *G es acíclico y* $|E| = |V| - 1$.

(d).- *G es conexo y* $|E| = |V| - 1$.

Demostración: La equivalencia de estas cuatro afirmaciones se puede establecer demostrando que (a) $\Rightarrow$ (b); (b) $\Rightarrow$ (c); (c) $\Rightarrow$ (d); y (d) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) : Sea G un árbol, y sean x e y dos vértices distintos de G.

Procederemos por reducción al absurdo, supongamos que existen dos caminos distintos P_1 y P_2 que unen los vértices x e y. Por ser distintos habrá al menos una arista $e = (u, v)$ que esté en uno de los caminos pero no en el otro,

$$e \in P_1 \wedge e \notin P_2$$

A partir de estos caminos consideramos

$$P = (P_1 \cup P_2) - \{e\}$$

P será un camino de u a v en G. Si al camino P le añadimos la arista e, el camino resultante es un ciclo en G. Sin embargo, G es un árbol y por tanto acíclico. Hemos llegado a una contradicción y la hipótesis de que hay dos caminos distintos entre u y v es falsa. En consecuencia entre dos vértices cualesquiera de G existe un único camino.

(b) $\Rightarrow$ **(c) :** Demostrar que G es acíclico es trivial. Para demostrar que

$$|\mathrm{E}| = |\mathrm{V}| - 1$$

lo haremos por inducción sobre el número de vértices.

Base de inducción: $|\mathrm{V}| = 2$

Como cualquier par de vértices están unidos por un único camino, existirá una sola arista que une los dos vértices.

$$|\mathrm{E}| = 1 = |\mathrm{V}| - 1 = 2 - 1$$

Hipótesis de inducción: Suponemos que se cumple para n vértices siendo n $\leq$ k,

Paso de inducción: ¨Será cierto para n=k+1? Si eliminamos una arista cualquiera del grafo, a=(x,y), como es el único (x-y)-camino en G, el grafo quedará desconectado y dividido en dos subgrafos: uno que contendrá al vértice x, y otro que contendrá al vértice y.

$$\mathrm{G}_x = (\mathrm{V}_x,\mathrm{E}_x) \quad \mathrm{n}_x \leq \mathrm{k} \implies \mathrm{e}_x = \mathrm{n}_x - 1$$

$$\mathrm{G}_y = (\mathrm{V}_y,\mathrm{E}_y) \quad \mathrm{n}_y \leq \mathrm{k} \implies \mathrm{e}_y = \mathrm{n}_y - 1$$

Puesto que G_x y G_y son árboles con menos de n vértices cada uno de ellos, aplicamos la hipótesis de inducción. Además, tenemos que

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_x \cup \mathrm{E}_y \cup \{\mathrm{a}\}$$

$$|\mathrm{E}| = |\mathrm{E}_x| + |\mathrm{E}_y| + 1 = \mathrm{n}_x - 1 + \mathrm{n}_y - 1 + 1 = \mathrm{n}_x + \mathrm{n}_y - 1 = (\mathrm{k}+1) - 1 = \mathrm{k}$$

con lo que efectivamente la implicación $(b) \rightarrow (c)$ es cierta.

(c) ⇒ (d) : G es acíclico y |E| = |V| - 1. Procederemos por reducción al absurdo:

Supongamos que G no es conexo. Sean $G_x = (V_x, E_x)$ y $G_y = (V_y, E_y)$ dos componentes conexas de G.

G_x y G_y son conexos y también son acíclicos por serlo G. Por lo tanto, son árboles y, como ya se ha demostrado en $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c)$, si un grafo es un árbol el número de aristas es igual al número de vértices menos uno, entonces :

$$\begin{aligned} |E_x| &= |V_x| - 1 \\ |E_y| &= |V_y| - 1 \end{aligned}$$

de lo cual podemos deducir que :

$$|V| - 1 = |E| = |E_x| + |E_y| = |V_x| + |V_y| - 2 = |V| - 2$$

lo cual es una contradicción. Luego G es conexo.

(d) ⇒ (a) : G=(V,E) es conexo y $|E| = |V| - 1$.

Sólo hay que demostrar que G es acíclico. Para ello supongamos que existe un ciclo C en G, y sea a=(x,y) una arista de C. El grafo resultante de quitarle a G la arista a, que denotamos por $G - \{a\}$, será conexo y acíclico.

Ahora bien, G - {a} tiene n - 2 aristas (< n - 1) y sin embargo es conexo. Hemos llegado a una contradicción, luego la hipótesis era falsa. G es acíclico y conexo.

Por lo tanto, queda demostrada la equivalencia entre las cuatro afirmaciones.□

Corolario 1.1 *Sea A=(V,E) un grafo no dirigido. Si A=(V,E) es un árbol no trivial, entonces contiene al menos dos vértices de grado uno.*

Demostración : Por ser A un árbol, es conexo y acíclico.

$$\forall \ v \ \in \ A \ , \ d(v) \ \geq \ 1$$

$$\sum_{v \ \in \ V} d(v) \ = \ 2 \ e \ = \ 2n \ - \ 2 \qquad (1)$$

Si $\forall v$, $d(v) = 2$, entonces $\sum d(v) = 2\,n$, por tanto para que se verifique (1) deberá haber al menos dos vértices de grado 1. □

Corolario 1.2 *Sea A=(V,E) un grafo no dirigido. A=(V,E) es un árbol si y sólo si toda arista es de corte.*

Demostración :

($\Rightarrow$) Si la arista $e \in E$ no es de corte, el grafo H=(A,E-{e}) es conexo y

$$|V| - 1 \ \leq \ |E - \{e\}| \ = \ |V| - 2.$$

Contradicción.

($\Leftarrow$) Si A tiene un ciclo C y la arista e está en ese ciclo, como A es conexo, entonces H=(A,E-{e}) es conexo y la arista e no sería de corte. □

Definición 1.2 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Llamaremos* árbol generador *de un grafo G, a un subgrafo generador que sea árbol.*

Teorema 1.2 *Sea G un grafo no dirigido y conexo. G_1 es árbol generador de G si y sólo si G_1 es subgrafo generador conexo minimal respecto al número de aristas.*

Demostración : Vamos a demostrar la implicación en los dos sentidos.

($\Rightarrow$) : G_1 es árbol generador de G.

Por ser árbol generador es subgrafo generador de G y conexo. Queda por demostrar que G_1 es minimal respecto al número de aristas.

Como G_1 es un árbol, cualquier par de vértices está unido por un único camino. Si tenemos la arista e=(x,y) y la eliminamos del grafo, entonces x e y quedan desconectados. Luego G_1 es minimal respecto al número de aristas.

($\Leftarrow$) : G_1 es subgrafo generador de G y minimal respecto al número de aristas. Lo que hay que demostrar es que G_1 es árbol o, lo que es lo mismo, demostrar que G_1 es acíclico.

Si G_1 tuviera un ciclo se podría eliminar una arista de ese ciclo sin que el grafo dejara de ser conexo. Si esto fuera cierto, contradeciría la hipótesis de ser minimal respecto al número de aristas. Luego G_1 no puede tener ningún ciclo. Por lo tanto, es acíclico y es un árbol generador. □

Corolario 1.3 *Si G=(V,E) es un grafo no dirigido y conexo, entonces contiene un árbol generador.*

Demostración : Sea A un subgrafo generador de G. Elegimos A de forma que sea conexo y minimal respecto al número de aristas.

G es conexo y por lo tanto, tiene al menos una componente conexa. Cualquier arista de A que eliminemos dejará A desconectado, luego toda arista de A es de corte y por lo tanto A es un árbol. □

Corolario 1.4 *Todos los árboles generadores de un grafo dado G no dirigido y conexo tienen el mismo número de aristas.*

Teorema 1.3 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido conexo. Si T es un árbol generador de G y e es una arista del grafo G que no pertenece a T, entonces* $T \cup \{e\}$ *contiene un único ciclo.*

Demostración : Sea $e = (x, y) \in E$. Por ser vértices del árbol, x e y estarán unidos por un único camino $\mathcal{P}$ en T. Luego si añadimos la arista e al camino $\mathcal{P}$ tendremos un ciclo en $\mathcal{C}$ = T ∪ {e} que, por la unicidad del camino $\mathcal{P}$ en el árbol, es único. □

Corolario 1.5 *Si G es conexo, entonces* $\mid E \mid \geq \mid V \mid$ *- 1.*

Corolario 1.6 *Si G es un grafo conexo no trivial, entonces tiene al menos dos vértices que no son de corte.*

Demostración : Por el corolario 1.3 podemos decir que

$$\exists \text{ T} \subseteq \text{G} \; / \; \text{T es un árbol generador de G}$$

Además, por ser T árbol, hay al menos dos vértices de grado 1. Estos vértices no son de corte en el árbol T y, por lo tanto, tampoco lo serán en el grafo G. □

1.2. Arboles generadores de coste mínimo

Dado un grafo no dirigido, ponderado y conexo, nos interesa encontrar un árbol generador de coste mínimo. Un posible método sería obtener todos los árboles generadores, calcular el coste total de cada uno de ellos y elegir el de menor coste. Con este procedimiento nos aseguraríamos de que el árbol resultante sería de mínimo coste, pero esto es inviable debido al gran número de árboles generadores que se pueden obtener de un cierto grafo. Por ejemplo, el grafo K_n tiene al menos 2^{n-1}-1 arboles generadores. La complejidad de un algoritmo basado en este método será, en el peor de los casos, de 2^n.

No tiene por qué haber un sólo árbol generador de peso mínimo. Por ejemplo, si trabajamos con un grafo cíclico y conexo de n vértices, cuyas aristas tienen todas el mismo peso, entonces todos los árboles generadores de este grafo tendrán el mismo coste. Pero sin embargo, si todas las aristas tuvieran costes diferentes, el árbol generador de coste mínimo sería único.

Una aplicación típica de los árboles generadores de coste mínimo tiene lugar en el diseño de redes de comunicación. Los vértices del grafo representaran las ciudades o los puntos de comunicación , y las aristas las líneas de comunicación existentes, e l coste asociado a una arista representará el coste de seleccionar esa línea para la red. Un árbol generador de coste mínimo representa una red que comunica todas las ciudades con un coste global mínimo.

La mayoría de los métodos para la búsqueda de árboles generadores de coste mínimo se basan en la siguiente propiedad:

> Sea G=(V,E) un grafo conexo con una función de coste definida sobre sus aristas. Sea U algún subconjunto propio del conjunto de vértices V. Si (u,v) es una arista de coste mínimo que une a U y V-U, es decir, $u \in U,\ v \in V - U$, entonces existe un árbol generador de coste mínimo que incluye a (u,v) entre sus aristas.

Uno de los métodos que se puede utilizar para obtener el árbol generador de coste mínimo de un grafo es el método de Prim.

Si suponemos que tenemos el grafo G=(V,E) y V={1,2,3,...,n}, el algoritmo de Prim comenzaría asignando al conjunto U un valor inicial. Por ejemplo, U={1}. El vértice 1 sería el primer vértice del árbol que se desea construir y paso a paso se irán añadiendo aristas. En cada paso se localiza la arista más corta (u,v) que conecta U y V−U, y después añade v, el vértice en V − U, a U. Este paso se repite hasta que U=V.

Algoritmo 1.1 (Prim)

/ G es un grafo no dirigido ponderado de n vértices y un conjunto E de aristas. El algoritmo construye un árbol generador de coste mínimo para G*/*

line procedure PRIM(G)
T := {}; U := {1}
while (U != V) do
  sea (u, v) *la arista de menor peso de E de forma que:*
    $u \in U$ *y* $v \in V - U$
  $T := T \cup \{(u, v)\}$
  $U := U \cup \{v\}$
end while
end PRIM

El método más eficiente para obtener el árbol generador de coste mínimo es la aplicación del algoritmo de Kruskal.

La idea es la siguiente, se parte del grafo vacío y se procede a ir añadiendo las aristas de menor peso del grafo, de manera que al añadir una arista esta no forme un ciclo. El procedimiento se prolongará hasta que hayamos añadido al grafo n-1 aristas.

En el caso de buscar el arbol generador de máximo peso se procedería de forma análoga eligiendo las aristas de mayor peso.

Veamos el algoritmo.

Algoritmo 1.2 (Kruskal)

/ G es un grafo no dirigido ponderado de n vértices y un conjunto E de aristas. T es el conjunto de aristas a incluir en el árbol generador. */*

line procedure KRUSKAL(G,T,n)
$T \leftarrow 0$; $i \leftarrow 0$; $E \leftarrow E(G)$;/* $|T| = i$ */
while $((E \neq 0)$ *and* $(i \neq n - 1))$ *do*
  sea (u, w) *la arista de menor peso de E*

$E \leftarrow$ E - $\{(u,w)\}$
if (u,w) no forma un ciclo en T
then
$T \leftarrow$ $T \cup \{(u,w)\}$
$i \leftarrow$ i + 1
end if
end while
if ($i \neq n$ - 1) then print("G no es conexo")
end if
end KRUSKAL

La complejidad de este algoritmo es $\theta(e \times log\, e)$, siendo e el número de aristas del grafo.

Teorema 1.4 *El algoritmo de Kruskal proporciona el árbol generador de coste mínimo a partir de cualquier grafo G no dirigido conexo y ponderado.*

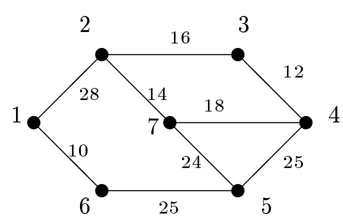

Figura 1.2: Grafo no dirigido, ponderado y conexo.

Si aplicamos el algoritmo de Kruskal al grafo de la figura 1.2, queriendo obtener los árboles generadores de máximo y mínimo peso, llegamos a los árboles representados en la figura 1.3.

Para hallar el arbol generador de mínimo peso procederíamos a añadir las aristas de la siguiente forma:

1. - Arista (1,6) de peso 10.
2. - Arista (3,4) de peso 12.
3. - Arista (2,7) de peso 14.
4. - Arista (2,3) de peso 16.
5. - Rechazamos la arista (4,7) por formar ciclo.
6. - Arista (5,7) de peso 24.
7. - Rechazamos la arista (4,5) por formar ciclo.

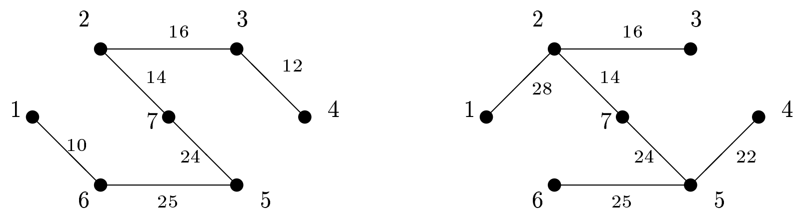

Figura 1.3: Arboles generadores de mínimo y máximo peso respectivamente.

8. - Arista (5,6) de peso 25.

9. - Hemos añadido 6 aristas. STOP

Si queremos aplicar el algoritmo de Kruskal para obtener el árbol generador de máximo coste, lo único que tenemos que hacer es escoger las aristas (en el algoritmo) en orden decreciente de peso.

1.3. Ejercicios prácticos

Ejercicio 1.1 *Dado el grafo sin bucles $G = (V, A)$, mostrar que:*

1. *Si toda pareja de vértices del grafo estan conectados por un único camino, entonces es un árbol.*

2. *Si solo tiene dos vértices de grado 1 es un camino.*

3. *Si G es un arbol, entonces es un grafo bipartido bipartido.*

Ejercicio 1.2 *Cosideremos el siguiente grafo:*

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 28 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 16 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 22 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 25 & 24 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 18 & 24 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obtener el arbol generador de mínimo peso.

(b) Obtener el arbol generador de MÁXIMO peso.

Ejercicio 1.3 *Un hidrocarburo saturado es una molécula $C - mH_n$ en la que cada átomo de Carbono tiene cuatro enlaces, y cada átomo de Hidrógeno tiene uno, de manera que ninguna sucesión de enlaces forma un ciclo.*

Demostrar que para cada entero positivo n, $C - mH_n$ existe solamente si $n = 2m + 2$.

1.4. Ejercicios complementarios

Para completar esta sesión se recomienda resolver los problemas de la lista de clase y los ejercicios del libro de Fuster.