Pràctiques d'Àlgebra

Solució de les activitats de la Pràctica 3

Activitat 1. *Determineu si les següents matrius són estocàstiques. Justifiqueu la resposta.*

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 3/5 & 7/5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Les dues primeres matrius no són estocàstiques. Observeu que les columnes de la primera no sumen 1 i en la segona hi ha elements negatius. La tercera sí que ho és.

Activitat 2. *Considereu la matriu estocàstica* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) *Calculeu el seu conjunt de vectors estacionaris.*

(b) *Calculeu un vector estacionari de probabilitat. És únic?*

(c) *La matriu estocàstica A és regular?*

a) Sabem que un vector $\vec{x}$ no nul és estacionari per a una matriu A si $A\vec{x} = \vec{x}$, és a dir, si $\vec{x}$ és solució del sistema homogeni $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$. Així, els vectors estacionaris de A són els vectors no nuls del nucli de la matriu $A - I$ que els calcularem mitjançant la funció **kernel** de Scilab

```
-->A=[0 0.5 0 0;0.25 0 0 0;0.5 0.25 1 0;0.25 0.25 0 1];

-->kernel(A-eye(3,3))
ans
   0.      0.
   0.      0.
   0.      1.
   1.      0.
```

Açò significa que el conjunt de vectors estacionaris de A és

$$\{\lambda(0,0,0,1) + \mu(0,0,1,0) = (0,0,\mu,\lambda) \ : \ \lambda \neq 0 \text{ ó } \mu \neq 0\}$$

b) Els vectors estacionaris de probabilitat seran de la forma

$$\frac{1}{\lambda + \mu}(0,0,\lambda,\mu)$$

sent $\lambda + \mu \neq 0$. Per tant, hi ha infinits vectors estacionaris de probabilitat. Els dos vectors que proporciona Scilab amb **kernel**, per exemple, ho són.

c) Pel que s'ha dit en l'apartat anterior, podem concloure que la matriu A no és regular (si ho fóra, existiria un únic vector estacionari de probabilitat, segons el Teorema 1 del butlletí). Sense usar aquest teorema es podria provar que no és regular observant que qualsevol potència de la matriu A té sempre elements nuls:

```
-->A^5
 ans  =
    0.            0.0078125    0.     0.
    0.0039063     0.           0.     0.
    0.640625      0.5664062    1.     0.
    0.3554688     0.4257812    0.     1.
```

Activitat 3. *Donada la matriu* $B = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.85 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.85 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

(a) Comproveu que B és una matriu estocàstica regular.

(b) Calculeu el conjunt de vectors estacionaris de B.

(c) Calculeu un vector estacionari de probabilitat.

(d) Escriviu els tres primers termes de la cadena de Markov amb matriu de transició A i vector d'estat inicial x_0=(0.3, 0.5, 0.2).

(e) Aquesta cadena és convergent?

a) La matriu és estocàstica perquè totes les seues entrades són no negatives i totes les seues columnes sumen 1. Açò es pot comprovar també amb Scilab (**sum(B,1)** dóna la matriu [1;1;1]). També és regular ja que inicialment totes les seues entrades són no nul·les.

b) Per a calcular els vectors estacionaris de B resolem el sistema $(B-I)\vec{x} = \vec{0}$ amb la funció **kernel** de Scilab

```
-->B=[0.05 0.85 0.5; 0.1 0.05 0.1;0.85 0.1 0.4];

-->kernel(B-eye(3,3))
 ans  =
    0.5591810
    0.1447880
    0.8163045
```

El conjunt $\{\lambda(0.5591810,\ 0.1447880,\ 0.8163045)\ :\ \lambda \neq 0\}$ és el conjunt de vectors estacionaris de B.

c) Si anomenem x al vector que genera el nucli de $(B-I)$, el vector estacionari de probabilitat ho calculem dividint x per la suma dels seus components:

```
-->x=kernel(B-eye(3,3))
 x  =
    0.5591810
    0.1447880
    0.8163045

 -->v=(1/sum(x))*x
 v  =
    0.3678161
    0.0952381
    0.5369458
```

Per tant, el vector v és l'únic vector de probabilitat de B.

d) Introduïm el vector inicial d'estats i calculem els tres primers termes de la cadena de Markov amb matriu de transició B.

```
-->x0=[0.3;0.5;0.2];
-->x1=B*x0
 x1  =
    0.54
    0.075
```

```
    0.385
-->x2=B*x1
 x2  =
    0.28325
    0.09625
    0.6205
-->x3=B*x2
 x3  =
    0.406225
    0.0951875
    0.4985875
```

Els vectors x1, x2 i x3 són els tres termes demanats.

e) La cadena de Markov és convergent perquè la matriu de transició és estocàstica regular i a més convergeix al vector estacionari de probabilitat, v, obtingut en l'apartat c) (Teorema 1 del butlletí).

Podem comprovar amb Scilab la dita convergència calculant alguns termes més de la cadena de Markov. Calcularem, per exemple, els termes x20, x25 i x30:

```
-->x20=B^20*x0
 x20  =
    0.3678160
    0.0952381
    0.5369459

-->x25=B^25*x0
 x25  =
    0.3678161
    0.0952381
    0.5369458

-->x30=B^30*x0
 x30  =
    0.3678161
    0.0952381
    0.5369458
```

(La diferència entre x25 i x30 és inapreciable.)

Activitat 4. *En un país fan eleccions cada quatre anys i els resultats de cada elecció depenen únicament dels resultats de l'elecció anterior. Els partits que s'hi presenten són: el Demòcrata (D), el Liberal (L) i el Conservador (C). El 70% dels votants de D votaran novament a D, el 10% dels votants de D votaran L i el 20% votaran a C; el 80% dels votants de L continuaran votant L, el 5% passaran a votar a D i el 15% votaran a C; finalment, el 70% dels votants de C votaran novament a C i el 30% votaran a L (cap votant de C passarà a votar a D).*

(a) *Construïu la matriu P que es correspon amb aquest procés i comproveu que és estocàstica.*

(b) *Si els percentatges de vots en una elecció són: 55% per a D, 40% per a L i 5% per a C, determineu el resultat que es donarà a la següent elecció.*

(c) *Quin percentatge de vots ha d'obtindre cadascun dels partits a unes eleccions per a què a les eleccions següents s'obtinga exactament el mateix resultat?*

a) La matriu corresponent a aquest procés és

```
-->P=[0.7 0.05 0; 0.1 0.8 0.3;0.2 0.15 0.7]
 P  =
    0.7     0.05     0.
    0.1     0.8      0.3
    0.2     0.15     0.7
```

Aquesta matriu és clarament estocàstica. A més és també regular perquè, encara que P té l'element $(1,3)$ nul, P^2 té tots els seus elements no nuls.

```
-->P^2
 ans  =
    0.495    0.075    0.015
    0.21     0.69     0.45
    0.295    0.235    0.535
```

b) Per a obtindre el percentatge de vots en les següents eleccions basta multiplicar la matriu P pel vector x_0 que representa el percentatge obtingut en aquestes eleccions

```
-->x0=[0.55;0.40;0.05];
-->P*x0
 ans  =
    0.405
    0.39
    0.205
```

Així, D obtindrà el 40,5%, L el 39% i C el 20,5% dels vots.

c) Es tracta de buscar un vector v de percentatges (els seus components han de sumar 1) que complisca que $Pv = v$, és a dir, es tracta de buscar el vector estacionari de probabilitat de la matriu P que sabem que existeix i és únic per ser P una matriu estocàstica regular.

```
-->x=kernel(P-eye(3,3))
 x  =
    0.1407970
    0.8447819
    0.5162556
```

El vector x i tots els seus múltiples no nuls són els vectors estacionaris de P. Per a buscar el de probabilitat, v, dividim x per la suma dels seus components

```
-->v=(1/sum(x))*x
 v  =
    0.09375
    0.5625
    0.34375
```

Així, perquè en unes eleccions s'obtinga el mateix resultat que en les següents, el percentatge de vots ha de ser 9,375% (D), 56,25% (L) i 34.375% (C).