7 Séptima Práctica: Aproximación de raíces de ecuaciones

El objetivo de esta práctica es aproximar la solución de una ecuación del tipo $u(x) = 0$ o encontrar los ceros o las raíces de la función $u(x)$, aplicando un método de aproximación (Bisección y Newton).

El método de bisección está basado en el teorema de Bolzano, que afirma que si una función (continua) toma valores opuestos en los extremos de un intervalo cerrado y acotado, entonces se anula en algún punto interior del mismo. La demostración del teorema de Bolzano proporciona las ideas básicas del método de bisección para el cálculo aproximado de ceros de funciones. La idea se basa en construir subintervalos de longitud cada vez menor (encajados) que contengan a la raíz buscada.

El fundamento del método de Newton se halla en la construcción de rectas tangentes a la gráfica de $y = u(x)$ para lo cual será necesario que $u(x)$ sea derivable en el intervalo conveniente. Partiendo de una estimación inicial a la raíz buscada, encontraremos una nueva estimación hallando la intersección de la recta tangente en el primer punto con el eje de abscisas. Partiendo de la nueva estimación obtenemos otra mediante el mismo procedimiento y así sucesivamente. El proceso genera una sucesión recurrente que, en las condiciones adecuadas, convergerá (muy rápidamente) a la raíz.

Describiremos a continuación ambos procedimientos e implementaremos las funciones DERIVE que nos permitirán aplicarlos con facilidad.

7.1 Método de Bisección

Supongamos que conocemos un intervalo $[a, b]$ en cuyos extremos la función continua $u(x)$ cambia de signo, es decir, $u(a) \cdot u(b) < 0$ y donde $u(x)$ tiene una única raíz, α. Se considera el punto medio del intervalo $[a, b]$

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Si la función se anula en dicho punto medio hemos hallado una raíz de la ecuación, esto es, x_1 es la solución buscada. En otro caso, nos quedamos con uno de los intervalos $[a_1, b_1] = [a, x_1]$ ó $[a_1, b_1] = [x_1, b]$ donde haya alternancia de signo y reiteramos el proceso tomando el punto medio de este nuevo intervalo, $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. De esta forma, se obtiene una sucesión de intervalos encajados

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

que contienen a la raíz.

En cada uno de los pasos, el punto medio del intervalo

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

se considera una aproximación de la solución exacta, α, y contamos con una estimación del error cometido al aproximar la solución exacta α mediante x_{n+1}

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

La desigualdad anterior queda justificada ya que, en cada paso, el error cometido se reduce a la mitad,

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{|b_n - a_n|}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^n}\right)$$

De este modo, a partir del intervalo inicial $[a, b]$ es posible determinar la raíz de $f(x)$ con la precisión deseada, ε, ya que la raíz se encontrará, después de n subdivisiones en el intervalo $[a_n, b_n]$ siempre que

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon \tag{1}$$

Entre las ventajas del método de la bisección destaca la de ser siempre convergente y entre los inconvenientes el elevado número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones con suficiente precisión. En la práctica siguiente trataremos el método de Newton para aproximar raíces que, aunque no converge siempre, destaca por su rapidez.

7.1.1 Función ITERATE/ITERATES

Para definir una función-DERIVE que genere la aproximación del método de la bisección, haremos uso de las cláusulas `IF`[1], que ya conoces de la práctica anterior, y la función `ITERATE/ITERATES`.

Recuerda que la función `ITERATES(u,x,x1,n)` devuelve el vector con los $n+1$ primeros términos de la sucesión $\{x_1, u(x_1), u(u(x_1), \ldots\}$, mientras que `ITERATE(u,x,x1,n)` devuelve el elemento n+1 de la sucesión anterior. Por ejemplo, al aproximar

`ITERATES(x`^{2}`,x,2,4)`

obtienes el vector

`[2,4,16,256,65536]`

es decir, el resultado de simplificar

$$\left[2,\ 2^2,\ 4^2,\ 16^2,\ 256^2\right]$$

que itera 4 veces la expresión x^2, tomando como elemento de partida 2, sustituyendo la variable x, cada vez, por el último valor obtenido. Como ves, el vector contiene una componente más que el número de iteraciones, ya que la primera componente es el valor inicial del que se parte. Observa que al aproximar `ITERATE`$(x^2, x, 2, 4)$ sólo obtienes la última componente del resultado anterior.

Se puede utilizar la función `ITERATE/ITERATES` especificando sólo los tres primeros argumentos, es decir, omitiendo el número de iteraciones a efectuar. En este caso, el

[1]**IF(r,t,f,u)** analiza la expresión **r** y devuelve **t** cuando es cierta, **f** cuando es falsa y **u** cuando no sabe decidir. Consulta la ayuda de D5W para más detalles.

programa itera hasta que dos iterados consecutivos sean iguales con la precisión con la que estemos trabajando. No obstante, observa que es posible que ésto no se cumpla nunca y, en ese caso, será necesario abortar la operación. Observa la difierencia entre aproximar $\texttt{ITERATES}(\texttt{x}^2, \texttt{x}, 2)$ e $\texttt{ITERATES}(\texttt{sqrt}(\texttt{x}), \texttt{x}, 2)$, ¿qué sucede?

7.1.2 Implementación del método de Bisección

Sugerimos ahora la definición de una función-DERIVE, que llamaremos BISECS, y que proporcionará la sucesión de intervalos encajados mencionados, cada uno de los cuales contendrá la raíz de una función genérica u, continua en $[a, b]$, en cuyos extremos la función cambia de signo, es decir, $u(a) \cdot u(b) < 0$. Para ello, en primer lugar definimos una función auxiliar cuyo objetivo es seleccionar en qué mitad del intervalo inicial se encuentra la raíz. Edita

$$\begin{aligned}\texttt{AUX}(u, a, b) := \texttt{IF}(&\texttt{LIM}(u, x, (a+b)/2) = 0, [(a+b)/2, (a+b)/2],\\ &\texttt{IF}(\texttt{LIM}(u, x, (a+b)/2) * \texttt{LIM}(u, x, a) < 0, [a, (a+b)/2], [(a+b)/2, b])\end{aligned}$$

Observa cómo actúa la función AUX.

1. Si $u(\frac{a+b}{2}) = 0$, hemos hallado la raíz que coincide con el punto medio, por lo que devuelve el intervalo $[(a+b)/2, (a+b)/2]$, que coincide con $(a+b)/2$.
2. Si $u(a)$ y $u(\frac{a+b}{2})$ tienen signos opuestos, la raíz se encuentra en $[a, (a+b)/2]$ y ése será el resultado de la función AUX.
3. Si $u(a)$ y $u(\frac{a+b}{2})$ tienen el mismo signo será porque $u(\frac{a+b}{2})$ y $u(b)$ tienen signos opuestos. En este caso, la raíz estará en $[(a+b)/2, b]$.

A continuación, introduce la función[2]

$$\texttt{BISECS}(u, a, b, n)\texttt{:=ITERATES}(\texttt{AUX}(u, \texttt{ELEMENT}(v, 1),\ \texttt{ELEMENT}(v, 2)), v, [a, b], n)$$

que generará la sucesión de intervalos encajados mencionada. Si sólo estamos interesados en encontrar el último intervalo generado, basta con modificar la función anterior, reemplazando ITERATES por ITERATE,

$$\texttt{BISEC}(u, a, b, n)\texttt{:=ITERATE}(\texttt{AUX}(u, \texttt{ELEMENT}(v, 1), \texttt{ELEMENT}(v, 2)), v, [a, b], n)$$

y podemos construir la aproximación buscada, calculando el punto medio de este último intervalo, esto es,

$$\texttt{APROX\_BISEC}(u, a, b, n)\texttt{:=}(\texttt{ELEMENT}(\texttt{BISEC}(u, a, b, n), 1) + \texttt{ELEMENT}(\texttt{BISEC}(u, a, b, n), 2))/2$$

Observa que para aplicar cualquiera de las tres funciones-DERIVE definidas anteriormente, BISECS, BISEC y APROX_BISEC, necesitamos especificar cuatro argumentos: u, la

[2]La función ELEMENT(v, i) selecciona la componente i-ésima del vector v. También se utiliza con la notación $v \downarrow i$.

función de la que queremos hallar la raíz, a y b los extremos del intervalo a partir del cual empezamos a iterar y en el que, previamente (a partir de su gráfica, por ejemplo), habremos asegurado que la función u es continua y contiene una única raíz y n, que indicará el número de bisecciones a realizar.

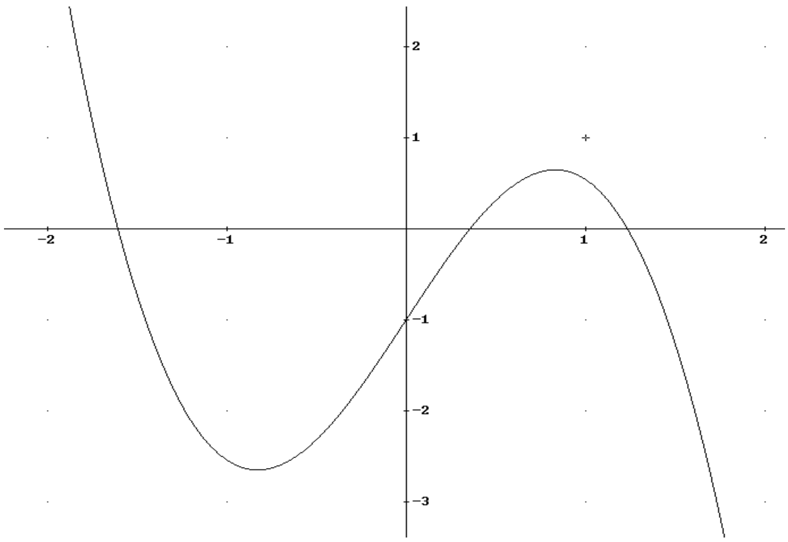
Nos proponemos a continuación utilizar las funciones anteriores para aproximar las tres raíces de la ecuación

$$x\cos(x) - x^3 + 2x - 1 = 0$$

con 5 decimales exactos cada una de ellas. Para ello, edita la línea

$$f(x) := x\cos(x) - x^3 + 2x - 1$$

ilumina la función y efectúa una representación gráfica, ejecutando dos veces el comando Plot.



Elegimos tres intervalos disjuntos, cada uno de los cuales contiene tan sólo una de las raíces buscadas, α, β y γ. Por ejemplo,

$$\alpha \in [-2, -1],\ \beta \in [0, 1] \text{ y } \gamma \in [1, 2]$$

Con el fin de aplicar el método de bisección para aproximar la raíz negativa, dado que el resto de argumentos está claro (u es $f(x)$, a vale -2 y b coincide con -1), debemos calcular el número de iteraciones n necesario para aproximar la raíz con la precisión requerida. Para ello, utilizando la cota de error (1), introduce la desigualdad[3]

```
1/2^(n+1)<10^(-6)
```

y resuélvela mediante el comando So<u>l</u>ve:<u>E</u>xpression, en modo exacto. Obtendrás como resultado

$$\mathtt{n} > \frac{6\cdot\mathtt{LN}(5)}{\mathtt{LN}(2)} + 5$$

[3]Observa que si el número de cifras decimales exactas que queremos conseguir es p, entonces el error debe ser menor que $10^{-(p+1)}$

que, al aproximar, queda

$$n > 18.93156856$$

Es decir, necesitaremos 19 bisecciones para aproximar la raíz con la precisión requerida. Para estimar la raíz negativa, edita la expresión

`BISECS(f(x),-2,-1,19)`

y aproxímala. Obtendrás

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1.5 \\ -1.75 & -1.5 \\ -1.625 & -1.5 \\ -1.625 & -1.5625 \\ -1.625 & -1.59375 \\ -1.609375 & -1.59375 \\ -1.609375 & -1.6015625 \\ -1.609375 & -1.60546875 \\ -1.609375 & -1.607421875 \\ -1.608398437 & -1.607421875 \\ -1.607910156 & -1.607421875 \\ -1.607910156 & -1.607666015 \\ -1.607910156 & -1.607788085 \\ -1.607849121 & -1.607788085 \\ -1.607818603 & -1.607788085 \\ -1.607803344 & -1.607788085 \\ -1.607795715 & -1.607788085 \\ -1.607791900 & -1.607788085 \\ -1.607789993 & -1.607788085 \end{bmatrix}$$

que contiene los 20 primeros intervalos encajados en los que se halla la raíz. Si ejecutas

`BISEC(f(x),-2,-1,19)`

verás sólo el último intervalo, cuyo punto medio es la aproximación de la raíz con la precisión exigida. La estimación de la raíz será el resultado de aproximar

`APROX_BISEC(f(x),-2,-1,19)`

es decir,

`-1.607789039`

Repite la aproximación de las funciones `BISECS`, `BISEC` y `APROX_BISEC` para estimar las otras dos raíces de $f(x)$ con 5 decimales exactos. Las aproximaciones respectivas obtenidas con el método de la bisección serán (compruébalo)

$$\beta \approx 0.3557691574 \quad \text{y} \quad \gamma \approx 1.233033180$$

Recuerda de la práctica anterior que la secuencia Solve:Expression:Numerically te permite resolver una ecuación mediante métodos aproximados. En este caso, podemos indicar el intervalo en el que está la raíz introduciendo los extremos del intervalo al seleccionar Solution Bounds. Antes de aplicar esta secuencia, conviene elegir gráficamente los intervalos (disjuntos) para aproximar cada raíz, tal y como has hecho antes de aplicar el método de bisección. Así[4], edita e ilumina $f(x)$ y pulsando Solve, Numerically, Bounds, en la lista Solution Bounds, indica las cotas Upper : -1 y Lower : -2 para aproximar α , Upper : 1 y Lower : 0 para β y Upper :2 y Lower : 1 para γ. Obtendrás las siguientes aproximaciones (compruébalo)

$$\alpha \approx -1.607789533 \quad , \quad \beta \approx 0.3557697748 \quad \text{y} \quad \gamma \approx 1.233032616$$

Observa que los cinco primeros decimales obtenidos con el método de bisección al aproximar α, β y γ coinciden con los que proporciona el comando Solve de DERIVE.

Ejercicio 1: *Aplica el método de la bisección para determinar una aproximación, con* 10 *decimales correctos, del punto de corte de las funciones $y = e^{-x}$ e $y = x$.*

Se trata de encontrar la solución de la ecuación

$$e^{-x} = x$$

En primer lugar, efectúa una representación gráfica de ambas funciones y observa que la solución que buscas está en el intervalo $[0, 1]$. Por otro lado, necesitamos escribir la ecuación de la forma $u(x) = 0$. Para ello, define

```
g(x):=ê^(-x)-x
```

Utiliza la cota de error (1) para hallar el número de bisecciones necesarias ($n = 36$). Finalmente, aproxima las expresiones

```
BISECS(g(x),0,1,36)
BISEC(g(x),0,1,36)
APROX_BISEC(g(x),0,1,36)
```

para obtener, respectivamente, la sucesión de intervalos encajados que proporciona el método de la bisección, el último intervalo y la aproximación en cuestión. En este caso, 0.5671432904.

Compara el resultado con el obtenido mediante la secuencia Solve:Expression, en modo numérico.

Ejercicio 2: *Observa gráficamente que la función $f(x) := x\cos(x) - x^3 + 2x - 1$ posee un máximo y un mínimo. Aplica el método de bisección a la función $f'(x)$ para aproximar, con 4 decimales exactos, al menos, los puntos en que alcanza el máximo y el mínimo relativo la función $f(x)$.*

[4]No utilices la definición de $F(x)$, es decir, $F(x) :=$, al aplicar Solve. Edita $F(x)$ en una línea, sombréala y aplica Solve.

Recuerda que los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ deben satisfacer la ecuación $f'(x) = 0$, ya que en estos puntos la recta tangente es horizontal. Por tanto, debes aplicar el método de bisección a la función $f'(x)$. Utiliza Calculus: Differentiate para hallar la derivada de la función $f(x)$. Observa que el máximo está en el intervalo $[0,1]$ y el mínimo en $[-1,0]$. A partir de la cota de error (1), halla el número de bisecciones necesario para garantizar la precisión exigida ($n = 16$). Efectúa las aproximaciones correspondientes y comprueba que el máximo se alcanzará en 0.82938 y el mínimo en -0.82938.

7.2 Método de Newton

En esta práctica vamos a estudiar el método de Newton, conocido también como Newton-Raphson. Este método constituye una herramienta muy potente para resolver de forma aproximada la ecuación $y = u(x)$ y, como ya comentamos, se basa en el uso de rectas tangentes a la gráfica de $y = u(x)$ cerca de los puntos donde $u(x)$ (derivable) se anula. Comenzaremos por un ejemplo sencillo que nos permitirá describir el algoritmo en un caso general.

Ejercicio 3: *Encuentra la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ mediante aproximaciones sucesivas, a partir de la estimación inicial, $x_1 = 1$.*

El ejercicio es equivalente a encontrar el valor de $\alpha = \sqrt{2} = 1.414213...$ La función considerada ahora será $f(x) = x^2 - 2$, derivable en $\mathbb{R}$ y $x_1 = 1$ parece una primera estimación "razonable" para $\sqrt{2}$. Para encontrar la aproximación x_2 escribimos la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_1 = 1$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Longleftrightarrow y = -1 + 2(x-1) = 2x - 3$$

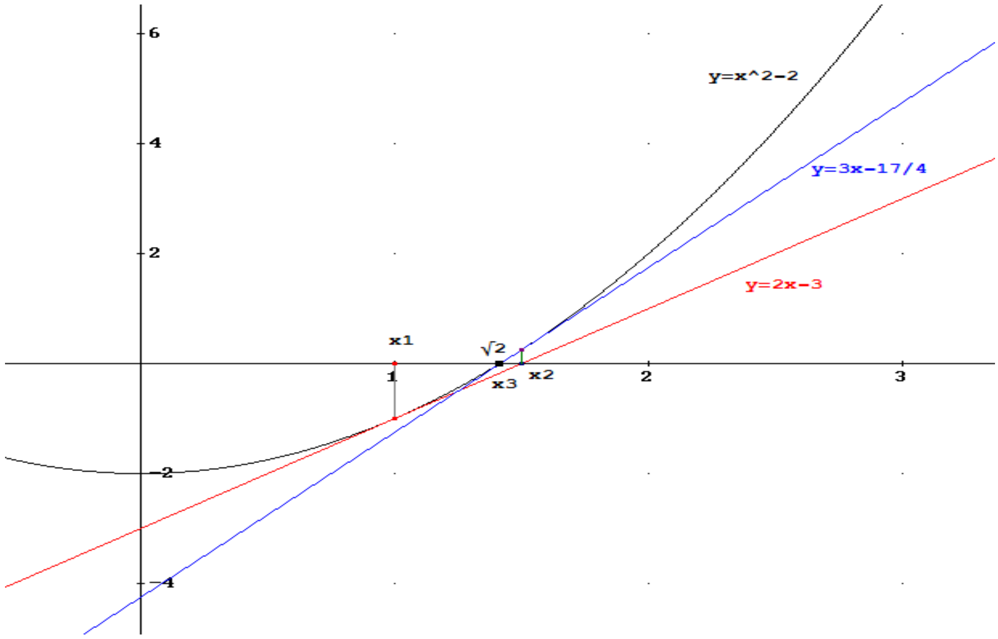
cuya intersección con el eje de abscisas será $x = x_2 = 1.5$. Repetimos el proceso para encontrar la aproximación x_3. La recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_2 = 1.5$ será

$$y - f(1.5) = f'(1.5)(x-1.5) \Longleftrightarrow y = 0.25 + 3(x-1.5) = 3x - 4.25$$

y corta al eje de abscisas en $x = x_3 = 1.41\overline{6}$. Observa que con dos iteraciones ya hemos encontrado un primer decimal para $\sqrt{2}$. Puedes comprobar que, siguiendo el procedimiento descrito obtendríamos

$$x_4 = 1.414215...$$

que ya nos proporciona cinco decimales correctos para $\sqrt{2}$. Una gráfica te ayudará a visualizar el proceso.



En general, la sucesión de aproximaciones a una raíz de la función derivable $y = u(x)$ se obtendrá de la siguiente manera: Partiendo de la estimación inicial x_1 obtendremos x_2 igualando a cero la tangente a la curva en $x = x_1$

$$y = u(x_1) + u'(x_1)(x - x_1) = 0 \Longrightarrow x = x_2 = x_1 - \frac{u(x_1)}{u'(x_1)}.$$

Iterando este proceso, dada la estimación x_n a la raíz, la aproximación x_{n+1} se obtendrá mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$$

supuesto que la derivada $u'(x)$ no está próxima a cero cerca de la raíz buscada. ¿Qué crees que ocurre si la recta tangente es horizontal o próxima a la horizontal en algún x_k?

En el caso concreto del ejercicio 3,

$$u(x) = x^2 - 2 \Longrightarrow u'(x) = 2x$$

y la fórmula para generar los sucesivos iterados que aproximan $\sqrt{2}$ será[5]

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n - \left(\frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \end{aligned}$$

[5]Observa que, sustituyendo en esta fórmula el 2 de dentro del paréntesis por cualquier otro número, dispondríamos de una fórmula recurrente para aproximar la raíz cuadrada de cualquier número natural.

resultado que te permitirá encontrar de forma automática las aproximaciones que antes hallamos paso a paso. Haciendo uso de la función ITERATE, la sexta aproximación a $\sqrt{2}$ vendría dada por (compruébalo con DERIVE)

$$\mathrm{x}_6 = \mathtt{ITERATE((1/2)(x+2/x),x,1,5)} = 1.41421356237309504880 1689...$$

y nos proporcina (con tan solo cinco iteraciones) veintitrés decimales correctos para

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880 1688...$$

A diferencia del método de Bisección, no hemos propuesto una cota de error para el método de Newton, así que al implementarlo hemos de fijarnos en los decimales que se van estabilizando. Observa que

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= 0.5 \\ |x_3 - x_2| &< 0.084 \\ |x_4 - x_3| &< 0.0025, ... \end{aligned}$$

y también que, siendo $\alpha = \sqrt{2}$ en este caso,

$$\begin{aligned} |x_1 - \alpha| &< 0.5 \\ |x_2 - \alpha| &< 0.086 \\ |x_3 - \alpha| &< 0.0025 \\ |x_4 - \alpha| &< 0.000003, ... \end{aligned}$$

Puede demostrarse que la convergencia del método de Newton solo está garantizada si la primera derivada de $u(x)$ no es demasiado pequeña y la segunda no demasiado grande en el intervalo de trabajo, aunque aquí no entraremos en detalles. En este caso, la convergencia es cuadrática, lo que significa que la precisión se duplica (aproximadamente) en cada iteración así que el método resulta muy eficiente (mucho más que Bisección). También existe una correlación (que puede apreciarse en las desigualdades anteriores) entre las diferencias entre iterados consecutivos y la diferencia entre el último iterado y la solución (desconocida), así que estas diferencias pueden utilizarse para detener el proceso cuando creamos conveniente. En la práctica es importante proponer un valor inicial adecuado (si no lo es se aprecia inmediatamente al observar divergencia en las iteraciones). Unas pocas iteraciones suelen bastar entonces para aproximarnos significativamente.

7.2.1 Implementación del método de Newton

Teniendo en cuenta la estructura de las sucesivas aproximaciones a la raíz, α, de la función $u(x)$ mediante el método de Newton, resulta muy sencillo utilizar la función ITERATES para definir en DERIVE la función correspondiente. Así pues, proponemos

$$\mathtt{NEWTON(u,x1,n)} := \mathtt{ITERATES(x-u/dif(u,x),x,x1,n)}$$

que, dada la estimación inicial, x_1, nos proporcionará un vector con las $n+1$ aproximaciones a la raíz α, supuesto que u es una función de x. Una alternativa seria hacer uso de `ITERATE` para obtener solamente la aproximación x_{n+1} pero preferimos generar la secuencia de iterados para que se aprecie la mejora en la precisión (o la divergencia, si fuera el caso).

Como aplicación, si consideramos la aproximación de $\sqrt{2}$ mediante $f(x) = x^2 - 2$ y comenzamos por $x_1 = 1$, como antes, tendremos que

$$\texttt{NEWTON}(x^2 - 2, 1, 5)$$

nos proporcionará la secuencia de las seis primeras aproximaciones, concretamente,

$$[1, 1.5, 1.416666666666666666666666666666, 1.414215686274509803921568627\,45, \\ 1.414213562374689910626295578\,89, 1.414213562373095048801689623\,50]$$

y ya hemos visto anteriormente que el iterado x_6 coincide con $\sqrt{2}$ hasta el decimal 23. Una forma alternativa de utilizar la función `NEWTON` consistiría en omitir el número de iteraciones. Si hay convergencia, el proceso se detendrá cuando los dos últimos iterados coincidan, dentro de la precisión de trabajo, proporcionando una estimación adecuada. En el caso del ejemplo anterior, y trabajando con 10 dígitos significativos en DERIVE,

$$\texttt{NEWTON}(x^2 - 2, 1)$$

nos proporciona la secuencia

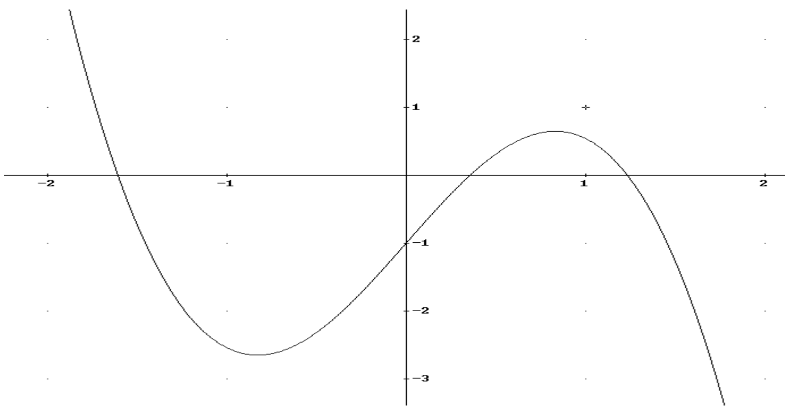
$$[1, 1.5, 1.416666666, 1.414215686, 1.414213562, 1.414213562]$$

así que podríamos asegurar que el iterado x_6 garantiza, al menos, 9 decimales correctos para la aproximación, aunque en realidad sabemos que aproxima mucho mejor.

Para finalizar utilizaremos el método de Newton para aproximar las tres soluciones de la ecuación onsiderada en el ejemplo inicial de esta práctica para el método de Bisección.

Ejercicio 4: *Utiliza el método de Newton para aproximar las tres raíces de la función* $f(x) := x\cos(x) - x^3 + 2x - 1$.

A la vista de la gráfica propuesta al principio



las tres raíces, α, β y γ se encuentran en los intervalos

$$\alpha \in [-2,-1], \qquad \beta \in [0,1], \qquad \gamma \in [1,2]$$

En principio, podríamos considerar x_1 en cualquiera de esos intervalos para aproximar cada una. Por ejemplo,

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, -2)$$

nos proporciona las iteraciones

$$[-2, -1.686769547, -1.612211418, -1.607804754, -1.607789534, -1.607789533, \\ -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533]$$

y

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, -1)$$

nos conduce a

$$[-1, -2.952323589, -2.106421636, -1.724369819, -1.617006840, -1.607855254, \\ -1.607789537, -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533, \\ -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533]$$

estabilizándose ambas secuencias, antes o después, en -1.607789533, valor que coincide, hasta el noveno decimal, con el que nos proporciona DERIVE para α mediante Solve y mucho más preciso que el que proporciona en método de Bisección con más trabajo (19 bisecciones).

Por otra parte,

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, 0)$$

genera la sucesión de iterados

$$[0, 0.3333333333, 0.3554645709, 0.3557697143, 0.3557697748, 0.3557697748]$$

que, muy rápidamente (5 iteraciones) aproxima la raíz β con la misma precisión. Sin embargo, observa ahora que

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, 1)$$

nos conduce a

$$[1, 1.415243860, 1.265801489, 1.234452267, 1.233035485, 1.233032616, \\ 1.233032616, 1.233032616]$$

es decir, a una aproximación (de nuevo muy rápida) pero de la raíz γ. Y lo mismo ocurriría si aplicamos

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, 2)$$

$$[2, 1.523300628, 1.303298439, 1.239047704, 1.233083547, 1.233032620,$$
$$1.233032616, 1.233032616]$$

Existen análisis (que no mencionaremos aquí) para determinar qué valores iniciales x_1 conducirían a una u otra raíz. Nuestra sugerencia es utilizar una gráfica adecuada y el sentido común para proponer el valor inicial. Si no hay convergencia nos daremos cuenta inmediatamente y podemos proponer otro.

Por último, recuerda que, en la aplicación del método de Newton, la derivada de $u(x)$ no debería estar próxima a cero en el intervalo de trabajo puesto que aparece en el denominador de la fórmula de recurrencia y eso podría conducirnos a resultados inesperados. En este mismo ejemplo, si observas de nuevo el gráfico anterior, $f'(x)$ se halla próxima a cero, por ejemplo, para $x \cong 0.83$, punto en el que la función alcanza su máximo relativo. Fíjate en que, eligiendo este punto como valor inicial x_1 y efectuando cinco iteraciones del método de Newton

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, 0.83, 5)$$

DERIVE nos devuelve la secuencia (oscilante)

$$[0.83, 151.3565943, 100.9675251, 67.36495835, 44.80605805, 29.96487933]$$

que debería ser suficiente para que reconsideráramos la elección del valor inicial. En realidad, si no limitamos el número de iteraciones,

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, 0.83)$$

el resultado es

$$[0.83, 151.3565943, 100.9675251, 67.36495835, 44.80605805, 29.96487933, 19.88048065,$$
$$13.37473554, 9.038101751, 6.089018474, 4.140759322, 2.722242631,$$
$$1.903706755, 1.475100460, 1.285532865, 1.236520291, 1.233049844,$$
$$1.233032616, 1.233032616, 1.233032616]$$

así que, finalmente, habría convergencia a la raíz γ, aunque más lentamente. Observa que, cambiando ligeramente de valor inicial, tomar $x_1 = 0.82$ nos lleva a

$$\texttt{NEWTON}(x\cos(x) - x^3 + 2x - 1, 0.82)$$

$$[0.82, -9.076720966, -6.118486182, -4.181797668, -2.790763376, -2.026696172,$$
$$-1.695795027, -1.613220860, -1.607812466, -1.607789534, -1.607789533,$$
$$-1.607789533, -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533, -1.607789533]$$

y, en consecuencia, aproxima la raíz α esta vez. Esto te da una idea de la inestabilidad del método en condiciones desfavorables (derivada próxima a cero). Te proponemos

Ejercicio 5: *Utiliza valores iniciales próximos (por encima y por debajo) al punto en el que* $f(x) := x\cos(x) - x^3 + 2x - 1$ *alcanza mínimo relativo (derivada nula) y analiza la convergencia del método de Newton en estos casos.*