MIscelánea:
Más problemas.

A. Hervás
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

2 de junio de 2014

Índice

1. Problemas de Grafos

Problema 1.1 *Obtener un grafo donde cuatro interpretes deben traducir siete lenguas distintas, habiendo tres interpretes que hablan dos lenguas distintas entre si y hay uno que habla cuatro.*

Problema 1.2 *Demostrar que si G es un grafo regular y bipartido, $G = [X, Y]$, entonces $\sharp X = \sharp Y$.*

Problema 1.3 *Demuéstrese que G es conexo sy y sólo si para cualquier partición de V en dos conjuntos no vacios, V_1 y V_2, hay una arista con un extremo en V_1 y otro extremo en V_2 .*

NOTA: Se dice: para cualquier ***partición de V****.*

Problema 1.4 *Demuestrese que si en un grafo $G = (V, E)$, si $\sharp V \leq \sharp E$, entonces G contiene un ciclo.*

Problema 1.5 *Mostrar que si G es desconexo, entonces del grafo complementario de G, G^c es conexo. ¿Es cierto el recíproco?*

Problema 1.6 *Demostrar que si G es un grafo conexo, entonces dos caminos más largos siempre tienen un vértice en comun*

Problema 1.7 *Demostrar que si G es un grafo simple con $\delta \geq k$, entonces G contiene un camino de longitud k partiendo de cualquier vertice.*

Demostrar que si G es un grafo simple con $\delta \geq 2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$.

Problema 1.8 *Erase una vez un estudiante al que le preguntaron si dos grafos G y H eran isomorfos. Pillado en falso, el alumno intento salir del paso respondiendo: "G es isomorfo, pero H no".*

¿Que opinas de la respuesta?¿Porque?

Problema 1.9 *Demostrar que en un grafo simple sin bucles, si cualquier par de vertices esta conectado por un unico camino, entonces es un arbol.*

Problema 1.10 *Demostrar que todo arbol con solo dos vertices de grado 1 es un camino.*

Problema 1.11 *Un bosque es un grafo aciclico. Demostrar que G es un bosque si toda arista es de corte.*

Problema 1.12 *Demuestrese que todo arbol es un grafo bipartido*

Problema 1.13 *Un hidrocarburo saturado es una molecula C_mH_n en la que cada atomo de Carbono tiene cuatro enlaces y cada molecula de Hidrogeno tiene uno, de manera que ninguna sucesion de enlaces forma un ciclo.*

Demostrar que para cada entero positivo m, C_mH_n existe solamente si $n = 2m + 2$

Problema 1.14 *¿Puede un grafo euleriano tener una arista de corte?. ¿Y puede tener un vertice de corte?*

2. Problemas de Lógica

Problema 2.1 *Demuéstrese que cada una de las siguientes conclusiones se deduce de las premisas dadas:*

1. - *P1:* $P \wedge Q \Rightarrow R$
   - *P2:* $P \vee Q \Rightarrow U$
   - *P3:* $R \Rightarrow \overline{U}$
   - *Conclusión:* $P \Rightarrow \overline{Q}$
2. - *P1:* $P \Rightarrow Q \vee R$
   - *P2:* $R \Rightarrow S \vee T$
   - *P3:* $S \Rightarrow T$
   - *Conclusión:* $P \Rightarrow T$
3. - *P1:* $\overline{Q} \Rightarrow R \vee S$
   - *P2:* $(U \Rightarrow T) \Rightarrow P$
   - *P3:* $\overline{T} \vee \overline{Q} \Rightarrow \overline{U}$
   - *Conclusión:* $\overline{R} \Rightarrow S$
4. - *P1:* $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
   - *P2:* $Q \wedge \overline{S} \Rightarrow \overline{R}$
   - *P3:* $T \Rightarrow R \vee U$
   - *P4:* $Q \Rightarrow \overline{S}$
   - *Conclusión:* $\overline{T} \vee \overline{P} \vee U$

Problema 2.2 *Véase que cada una de las conclusiones se deduce de las premisas dadas:*

1. - *P1:* $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)]$
   - *P2:* $\forall x[P(x) \Rightarrow R(x)]$
   - *P3:* $\neg\exists x[S(x) \wedge R(x)]$
   - *Conclusión:* $\forall x[S(x) \Rightarrow \overline{P(x)}]$
2. - *P1:* $\forall x[\overline{Q(x)} \Rightarrow P(x)]$
   - *P2:* $\neg\exists x[R(x) \wedge Q(x)]$
   - *P3:* $\neg\exists x[S(x) \wedge P(x)]$
   - *Conclusión:* $\neg\exists x[R(x) \wedge S(x)]$
3. - *P1:* $P(d)$
   - *P2:* $\neg\exists x[R(x) \wedge \overline{Q(x)}]$

- *P3:* $\neg\exists x[Q(x) \land P(x)]$
- *Conclusión:* $\overline{R(d)}$

4.
- $\neg\exists x \forall y[P(y,x) \Leftrightarrow \overline{P(y,y)}]$

5.
- *P1:* $\exists x[P(x) \land [\forall y(P(y) \land R(y)) \Rightarrow \overline{G(x,y)}]]$
- *P2:* $\forall x[P(x) \Rightarrow R(x)]$
- *Conclusión:* $\exists x[P(x) \land \forall y P(y) \Rightarrow \overline{G(x,y)}]$

6.
- *P1:* $\forall x \exists y[P(x,y) \land S(x,y)]$
- *P2:* $\forall x \forall y[P(x,y) \Rightarrow R(x,y)]$
- *Conclusión:* $\forall x \exists y[R(x,y) \land S(x,y)]$

7.
- *P1:* $\forall x \forall y[P(x) \land Q(y) \land S(y) \Rightarrow \not R(x,y)]$
- *P2:* $\exists x \forall y[P(x) \land Q(y) \land \overline{U(x,y)} \Rightarrow \overline{T(x,y)}]$
- *P3:* $\forall x \exists y[P(x) \Rightarrow Q(y) \land S(y) \land T(x,y)]$
- *Conclusión:* $\exists x \exists y[P(x) \land Q(y) \land U(x,y) \land \overline{R(x,y)}]$

Problema 2.3 *Obtener las lógicas de primer orden de cada una de las siguientes expresiones. Establecer claramente el Univeso del discurso y lo que significa cada predicado.*

Para cada conjunto de premisas y conclusión, comprueba que esta de deduce de aquellas.

1. *Las flores coloreadas siempre son dignas de admiración. No me gustan las flores que no crecen en el exterior. Ninguna flor que crezca en el exterior carece de colorido. Por tanto, ninguna flor que no sea digna de admiración me gusta.*

2. *Ningún analfabeto compra el periódico, ningún mono sabe leer. Los que no saben leer son analfabetos. Por lo tanto ningún mono compra el periódico.*

3. Problemas de Inducción

Problema 3.1 *Pruébense por inducción las siguientes reglas de inferencia*

1.
$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2.
$$\sum_{i=0}^{n} (2i-1)^2 = [\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}] + 1$$

3.
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

4.
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

5.
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{2}{2^n}$$

Problema 3.2 *Se definen los números de Fibonacci F(0), F(1), F(2), ...por las ecuaciones:*

$F(0) = 0$
$F(1) = 1$
$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$
Demuéstrese que:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Problema 3.3 *Sea* $f(0) = 0$, $f(1>) = 1$, *y sea* $f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2) + 3^n 4, \ , n > 2$.

Demuéstrese por inducción sobre n que:

$$f(n) = 2^n 35 - 3^n 35 + 12n3^n \quad , para\ n \geq 0$$

Problema 3.4 *Demuéstrese la siguiente relación para todos los números naturales* n *y* $a \neq 0$*:*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

4. Problemas de Relaciones

Problema 4.1 *Dada la relación* $< R, A >$, *demuéstrese que:*

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

Problema 4.2 *Demostrar que si* $< R, A >$, *es una Relación Binaria que cumple las propiedades:*

1. $\forall a \in A,\ \exists \in A \ / < x, a > \in R$

2. *Si* aRb *y* aRc *entonces* bRc.

entonces R *es una Relación de EQUIVALENCIA*

Problema 4.3 *Dadas las relaciones* R *y* S *definidas en el conjunto* $A = \{a, b, c\}$, *por las matrices*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtengase $str((R \cup S)^{-1} \cap R^c)$

Problema 4.4 *Dado un conjunto* A *con cinco elementos, y la relación* R *definida sobre él por la matriz:*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtener $sr(R^{-1})$