Prácticas de Matemática Discreta.
Teoría de Grafos
2011/12
UNIDAD 2

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

24 de abril de 2012

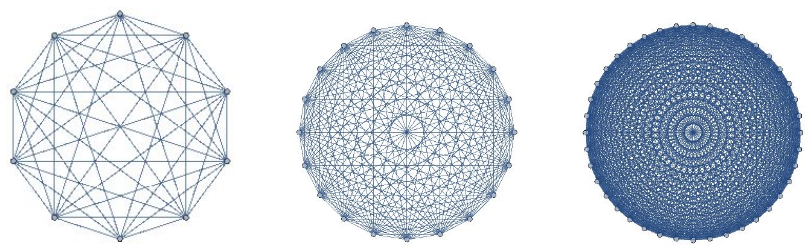
Índice

Índice de figuras

1. Representaciones de un grafo. Subgrafos. Isomorfismos.

Hay muchas maneras de representar un grafo finito, la más sencilla y probablemente la más común es la representación mediante diagramas que hemos venido utilizando hasta ahora, la ventaja de esta representación es que proporciona una visión clara sobre el grafo y alguna de sus propiedades más evidentes, pero el inconveniente es que no se puede usar en algoritmos ni es útil cuando el grafo deja de ser ligeramente pequeño, pongamos por ejemplo un grafo con 763 vértices y 12.864 aristas.

Veamos como crece la dificultad al representar grafos relativamente pequeños como K_{10}, K_{20} y K_{40}.



Otra Forma sería representar los grafos mediante conjuntos; necesitaríamos dos conjuntos, uno que contendrá todos los vértices del grafo y otro con todas las aristas, pero esta opción tampoco es la más adecuada para usarla en algoritmos.

La forma más extendida de representar grafos es mediante el uso de matrices y listas.

El método de representación elegido es un factor que puede ser fundamental en el funcionamiento eficiente o no de un algoritmo que trabaje sobre un grafo.

En esta sección veremos las formas de representación más habituales y algunas de las propiedades más interesantes desde un punto de vista algebraico.

1.1. Matriz de Adyacencia.

Definición 1.1 (Matriz de Adyacencia) *Llamaremos matriz de adyacencia de un grafo no dirigido $G = (V(G), A(G))$ de n vértices, a una matriz de dimensiones $n \times n$ denotada por $M_A(G) = [a(i,j)]_{n\times n}$ donde $a(i,j)$ es el número de aristas que une los vértices v_i y v_j.*

En el caso de que el grafo sea simple, entonces:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1\ , & (i,j) \in A(G) \\ 0\ , & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

- La matriz de adyacencia $M_A(G)$ es simétrica y si el grafo no tiene bucles, todos los elementos de la diagonal son cero.
- Una fila o una columna de ceros representa un vértice aislado.

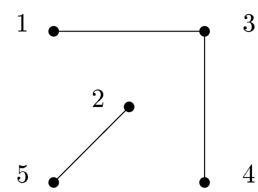


Figura 1.1:

- Los elementos no nulos de la diagonal representan los bucles
- Además se tiene que la suma de una fila o de una columna es el grado del vértice correspondiente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} = d(i)$$

- La suma de todos los elementos de la matriz es el doble del número de aristas del grafo.

Dado el grafo de la figura 1.1, su matriz de adyacencia es:

$$M_A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado un grafo simple ponderado no dirigido $G = (V(G), A(G))$, podemos considerar la matriz que contiene los pesos o costes de las aristas:

Definición 1.2 *La* matriz de costes *del grafo* $G = (V(G), A(G))$ *es la matriz* $M_C(G) = [c(i,j)]_{n\times n}$ *donde, el elemento* $c(i,j)$ *representa el coste de la arista* (i,j).

Nótese que sólo tiene sentido esta definición si estamos tratando con grafos simples.

Si consideramos el grafo de la figura 1.2, su matriz de costes es la siguiente:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

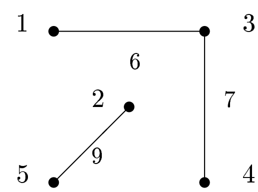


Figura 1.2: Grafo ponderado.

Si el grafo es no dirigido la matriz será simétrica y si trabajamos con grafos simples sin bucles, la diagonal estará formada exclusivamente por ceros, en estos casos es suficiente con trabajar con la parte triangular superior de la matriz, lo que nos simplificará algunas tareas en grafos de grandes dimensiones.

1.2. Matriz de Incidencia.

Mediante la matriz de adyacencia representamos el grafo en función de la existencia de aristas entre vértices, otra manera de representar un grafo es a través de la relación entre los vértices y las aristas, utilizaremos esta relación para definir la matriz de incidencia de un grafo.

Definición 1.3 (Matriz de Incidencia.) *Llamaremos matriz de incidencia de un grafo no dirigido $G = (V(G), A(G))$, con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su conjunto de vértices y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ su conjunto de aristas, a una matriz de dimensiones $n \times e$ denotada por $I = I(i, j)$ donde:*

$$I(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \textit{si la arista } e_j \textit{ es incidente con } v_i \textit{ y no es un bucle} \\ 2\ , & \textit{si la arista } e_j \textit{ es incidente con } v_i \textit{ y es un bucle} \\ 0\ , & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Por ejemplo, la matriz de incidencia para el grafo de la figura 1.1 sería la siguiente. Teniendo en cuenta que se considera que la arista uno es la (1,3), la dos la (3,4) y la tres la (2,5).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos destacar algunas propiedades de la matriz de incidencia

- La matriz de incidencia I es una matriz $n \times e$, por lo que en general será una matriz rectangular.

- La suma de todos los elementos de una fila es el grado del vértice correspondiente.
- La suma de los elementos de cualquier columna es 2.
- Una fila de ceros representa un vértice aislado.
- Dos columnas iguales representan dos aristas paralelas.
- La suma de todos los elementos de la matriz es el doble del número de aristas del grafo.

Las matrices de Adyacencia y de Incidencia permiten describir completamente un grafo. Cuando un grafo es muy grande, o está «mal condicionado» (tiene muchos vértices y pocas aristas o viceversa), estas matrices son muy grandes, con muchos ceros, y su almacenamiento y operatividad resultan costosos.

Para la gran variedad de problemas que se pueden resolver mediante grafos existen muchos métodos para resolverlos, dependiendo del enfoque de cada método: optimización combinatoria, algebraicos, etc, se han desarrollado algoritmos específicos, y en función del algoritmo resulta conveniente alguna forma especial de representación de los datos de un grafo, representaciones muy específicas en muchos casos.

La matriz de Adyancia y la de Incidencia son las representaciones de carácter más general. A lo largo del curso veremos algunas otras formas de expresar un grafo en función de los problemas que tratemos y que iremos introduciendo.

Para grafos dirigidos: Llamaremos matriz de adyacencia de un grafo dirigido $G = (V, E)$ de n vértices a una matriz de dimensiones $n \times n$, $(|V| = n)$ denotada por $A = [a(i,j)]_{n\times n}$ donde:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1\ , & <i,j>\in E \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además podemos decir que para un grafo dirigido de n vértices se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d_{entrada}(j)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d_{salida}(i)$$

Si tomamos como ejemplo el grafo de la figura **??**, su matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar la coincidencia entre la matriz de adyacencia de un grafo y la Matriz de una relación, esto nos permitirá la utilización de herramientas fácilmente trasladables de una disciplina a otra.

Para grafos dirigidos: Llamaremos matriz de incidencia de un grafo dirigido G=(V,E) de n vértices y e aristas, a una matriz de $n \times e$ denotada por $I = I(i,j)$ de forma que:

$$I(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{Si v(i) es vértice inicial de e(j)} \\ -1, & \text{Si v(i) es vértice final de e(j)} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de incidencia es capaz de representar aristas múltiples. Se necesitan $n \times e$ bits para almacenar la matriz de incidencia, sin embargo plantea dificultades la presencia de bucles.

Para el grafo dirigido de la figura **??** la matriz de incidencia correspondiente sería la siguiente. La arista primera es la $< 1,2 >$, la segunda $< 2,3 >$, la tercera $< 3,4 >$, y la cuarta la $< 2,5 >$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

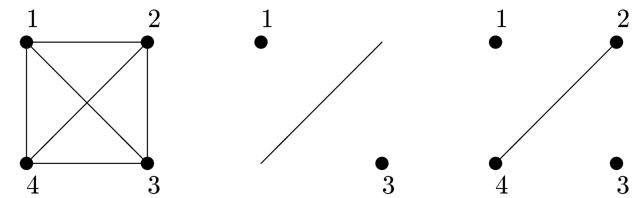
1.3. Subgrafos.

Definición 1.4 (Subgrafo) *Sea $G = (V, A)$ un grafo cualquiera. Diremos que un grafo $G' = (V', A')$ es un* subgrafo *de G si V' es subconjunto de V, $(V' \subseteq V)$ y A' es subconjunto de A, $(A' \subseteq A)$.*

Definición 1.5 (Subgrafo generador) *Sea $G' = (V', A')$ un subgrafo de $G = (V, A)$. Diremos que G' es un* subgrafo generador *de G si $V' = V$, es decir tiene exactamente todos los vértices del grafo, aunque no necesariamente todas las aristas.*

Por ejemplo, el grafo de la figura 3(b) es un subgrafo del grafo representado en la figura 3(a). Si consideramos el grafo de la figura 3(b) y le añadiéramos los vértices 2 y 4, entonces además de ser subgrafo sería un subgrafo generador. Esto se puede comprobar en la figura 3(c).

Resumiendo, un subrafo generador del grafo G es un subgrafo G' que contiene todos los vértices de G



(a) El grafo K_4 (b) Subgrafo del grafo 3(a) (c) Subgrafo generador del grafo 3(a)

Figura 1.3: El grafo K_4 y dos subgrafos de éste

Definición 1.6 *Sea $G = (V(G), A(G))$ un grafo, y sea un conjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$. Llamaremos* subgrafo generado por V' *a un grafo $G' = (V', E')$ donde las aristas de E' son aquellas aristas del grafo G, $E' \subseteq A(G)$ que tienen como vértices extremos los vértices de $V(G)$.*

Definición 1.7 *Sea $G = (V(G), A(G))$ un grafo, y sea un conjunto de aristas $E' \subset A(G)$. Llamaremos* subgrafo generado por E' *a un grafo $G' = (V', E')$ donde los elementos de V' son los vértices extremos de las aristas de E' en el grafo G, es decir, $V' \subseteq V(G)$*

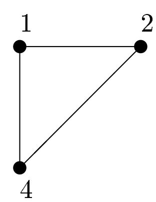


Figura 1.4: Subgrafo de K_4 generado por el conjunto de vértices $V' = \{1, 2, 4\}$.

Si tomamos como ejemplo el grafo de la figura 3(a) y el subconjunto de vértices $V' = \{1, 2, 4\}$, el subgrafo generado por V' es el representado en la figura 1.4, donde el conjunto de aristas sería $E' = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\}$.

Si escogemos también como ejemplo el grafo de la figura 3(a) y el subconjunto de aristas $E' = \{(1, 4), (3, 4)\}$, tenemos que el subgrafo generado por E' es el representado en la figura 1.5.

Definición 1.8 *Sea $G' = (V', A')$ un grafo. Llamaremos* grafo simple subyacente *de G a un subgrafo generador simple y maximal respecto al número de aristas.*

A efectos prácticos, el grafo simple subyacente se obtiene reduciendo todas las aristas paralelas a una sola. Para ciertos problemas si tenemos que trabajar con un grafo que no sea simple, usaremos su grafo simple subyacente.

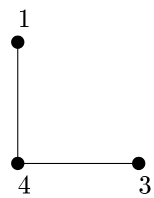


Figura 1.5: Subgrafo de K_4 generado por el conjunto de aristas $A = \{(1,4),(3,4)\}$.

Recordemos la definición de grafo completo que introdujimos en la sesión anterior:

Definición 1.9 (Grafo completo) *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que G es* completo *si cualquier par de vértices son adyacentes. Es decir entre cualquier par de vértices siempre existe una arista que los une.*

Al grafo completo simple y sin bucles de n vértices lo denotamos por K_n.

Definición 1.10 (Grafo complementario) *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Llamaremos grafo* complementario *de G a un grafo $G' = (V', A')$ cuyos vértices son los de V, $V' = V$, y sus aristas son las del grafo completo $K = (V, A_K)$ que no están en A, $A' = A_K - E$.*

Veamos un ejemplo,

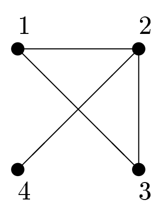


Figura 1.6: Grafo complementario del de la figura 1.5 respecto de K_4.

Un grafo no dirigido $G = (V, A)$ de n vértices completo tiene exactamente $n(n-1)/2$ aristas.

El grafo de la figura 3(a) es el grafo completo de cuatro vértices, es decir, K_4. En la figura 1.7 tenemos el grafo completo de cinco vértices, conocido como el grafo K_5 o grafo de Kuratowski.

De la definición de grafo completo se sigue que cualquier grafo simple y sin bucles no dirigido de n vértices es un subgrafo de K_n. De todos los grafos posibles no dirigidos de n vértices, K_n tiene el máximo número de subgrafos.

Existen $n!/(n-i)!i!$ formas de seleccionar i vértices de un grafo con n vértices. Y, para un grafo de i vértices, hay $i(i-1)/2$ diferentes aristas. Luego, hay $2^{i(i-1)/2}$ diferentes grafos de i vértices. Por lo tanto, K_n tiene exactamente $\sum_{i=0}^{n}$ $\binom{n}{i}2^{i(i-1)/2}$ subgrafos incluyendo el grafo vacío.

Como ejercicio, compruébese que el grafo K_3 tiene dieciocho subgrafos incluyendo el grafo vacío.

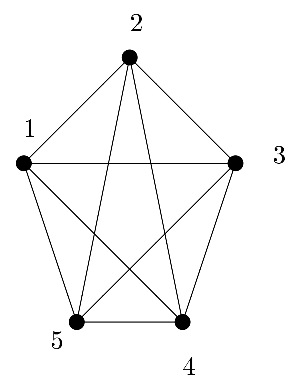


Figura 1.7: K_5.

1.4. Isomorfismo

Definición 1.11 *Sean G≡(V(G),A(G),ψ_G) y H≡(V(H),A(H),ψ_H) grafos. Diremos que G y H son* isomorfos *si existen biyecciones*

$$\begin{array}{rcl} \theta: V(G) & \longrightarrow & V(H) \\ u & \rightsquigarrow & \theta(u) \\ v & \rightsquigarrow & \theta(v) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi: A(G) & \longrightarrow & A(H) \\ e & \rightsquigarrow & \varphi(e) \end{array}$$

compatibles con las funciones de incidencia, esto es, si $a = (u, v) \in A(G)$, entonces $\varphi(a) = (\theta(u), \theta(v)) \in A(H)$.

La definición es válida tanto para grafos no dirigidos como para dirigidos.

Ejemplo: Tenemos los dos grafos G y H y queremos comprobar si son isomorfos. Probaremos que se puede establecer un isomorfismo entre ellos.

$$G \equiv (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)(3, 4)\}, \psi_G)$$
$$H \equiv (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (b, d)(c, d)\}, \psi_H)$$

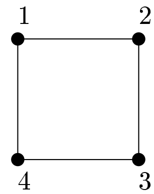


Figura 1.8: Grafo G.

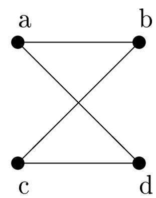


Figura 1.9: Grafo H.

Podemos construir θ y φ de la forma:

$$
\begin{array}{rccclccc}
\theta: & V(G) & \longrightarrow & V(H) & \qquad \varphi: & E(G) & \longrightarrow & E(H) \\
 & 1 & \rightsquigarrow & a & & (1,2) & \rightsquigarrow & (a,b) \\
 & 2 & \rightsquigarrow & b & & (1,3) & \rightsquigarrow & (a,c) \\
 & 3 & \rightsquigarrow & c & & (2,4) & \rightsquigarrow & (b,c) \\
 & 4 & \rightsquigarrow & d & & (3,4) & \rightsquigarrow & (c,d)
\end{array}
$$

Luego vemos que G y H son isomorfos.

Una propiedad se dice que es un imvariante si se conserva a través de isomorfismos. Algunas propiedades de los grafos son invariantes:

- El número de vértices y el número de aristas.
- La lista de grados de todos los vértices.
- Ser bipartido, k- regular o simple.
- Tener vértices aislados o tener bucles.

Se puede comprobar fácilmente que el isomorfismo es una relación de equivalencia y que dos grafos han de tener el mismo número de vértices y aristas para poder ser isomorfos, pero eso no es suficiente para que lo sean.

Los grafos que son isomorfos tienen las mismas propiedades como grafos. En muchas ocasiones es interesante saber si dos grafos son isomorfos o no. Por ejemplo, en química se usan los grafos para modelar las moléculas representando los átomos como vértices y los enlaces como aristas. Si se sintetiza una determinada molécula en el laboratorio y se desea saber algo acerca de sus características, sería conveniente comprobar si es *isomorfa* a otra molécula de la que disponemos de mayor información.

No existe todavía ningún algoritmo conocido que compruebe si dos grafos son isomorfos en un tiempo polinómico. Sin embargo, no se ha demostrado que el problema del isomorfismo sea NP-completo.

En algunos casos es muy sencillo determinar si dos grafos no son isomorfos, sin embargo a veces resulta más complicado comprobar que son isomorfos.

Definición 1.12 (Grafo bipartido) *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que G es un grafo* bipartido *con bipartición X e Y, y lo representaremos por $G = ([X, Y], A)$, si:*

- $V = X \cup Y$
- $X \cap Y = \emptyset$
- *Si $(u, v) \in E$, entonces $u \in X$ y $v \in Y$, o bien, $u \in Y$ y $v \in X$.*

Los grafos asociados a funciones son grafos bipartidos. El grafo asociado a una función se puede representar de manera que el conjunto de vértices se pueda dividir en dos subconjuntos disjuntos, conjunto origen y conjunto imagen, tales que todas las aristas del grafo unan un vértice del primer subconjunto con uno del segundo.

Si tenemos una relación $\mathcal{R}$ entre dos conjuntos disjuntos X e Y, es decir, $\mathcal{R}$ es un subconjunto del producto cartesiano de $X \times Y$, definimos un grafo bipartido $G = (V, A)$ representando a $\mathcal{R}$, como sigue:

1. V será la unión de X e Y
2. A contendrá aquellas aristas $< x, y >$ para las cuales (x, y) pertenezca a $\mathcal{R}$. $\big((x, y) \in \mathcal{R}\big)$.

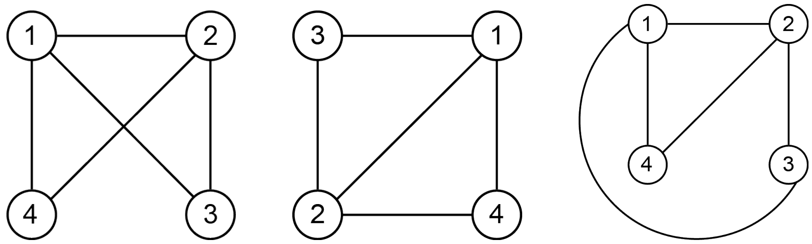
Definición 1.13 *Sea G=([X,Y],E) un grafo bipartido, $|X| = i$, $|Y| = j$. Diremos que G es* bipartido completo, *y lo representamos por $K_{i,j}$, si cada vértice de X es adyacente a todos y cada uno de los vértices de Y.*

Los grafos bipartidos completos $K_{i,j}$ son isomorfos a los bipartidos completos $K_{j,i}$.[1]

[1] Incluir grafos bipartidos, K22, K33, y otro bipartido

1.5. Ejercicios prácticos

Ejercicio 1.1 *Dados los grafos siguientes*



(a) Obtener sus matrices de adyacencia y de incidencia.

(b) Determinar si son isomorfos.

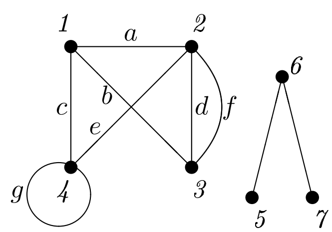
(c) Para el grafo 1, obtener su complementario respecto del completo. Analiza sus propiedades. Obtener su matriz de adyacencia. Comparar con la matriz de adyacencia del grafo.

Ejercicio 1.2 *Para el grafo siguiente:*

Obtener el sugrafo generado por los vértices 1, 2 y 3.

Obtener el sugrafo generado por las aristas a,e y f.

Obtener tres subgrafos generadores distintos entre si.



1.6. Ejercicios complementarios

Para completar esta sesión se recomienda resolver los problemas 2, 3 y 6, de la lista de clase y los ejercicios del libro de Fuster.