Pràctiques d'Àlgebra

Solució de les activitats de la Pràctica 6

Activitat 1. *Donats els vectors* $\vec{u} = (3, 5, -1, 0)$ *i* $\vec{v} = (1/2, 1/4, 1/3, -3)$, *calcula*

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ *i* $\|\vec{v}\|$

b) La distància entre $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$

c) Un vector unitari amb la mateixa direcció que $\vec{u}$

a) Introduïm en columnes els vectors

```
-->u=[3;5;-1;0] ; v=[1/2;1/4;1/3;-3];

-->pescalar=u'*v
 pescalar  =
    2.4166667

-->modulu=norm(u)
 modulu  =
    5.9160798

-->modulv=norm(v)
 modulv  =
    3.0697901
```

b)

```
-->distancia=norm(u-v)
 distancia  =
    6.2920806
```

c)

```
-->unitari=(1/norm(u))*u
 unitari  =
    0.5070926
    0.8451543
  - 0.1690309
    0.
```

Activitat 2. *Siguen els vectors* $\vec{b} = (1, 2, 3)$ *i* $\vec{c} = (1, 0, 2)$.

a) Determina el valor de m *per a que el vector* $\vec{y} = (m, -1, 2)$ *siga ortogonal a* $\vec{b}$ *i a* $\vec{c}$.

b) Calcula $H^{\perp}$ *sent* $H =< \vec{b}, \vec{c} >$.

c) Comprova que el vector $\vec{y}$ *obtés a l'apartat (a) pertany a* $H^{\perp}$.

a) El vector $\vec{y}$ ha de complir que $\vec{b} \cdot \vec{y} = 0$ i que $\vec{c} \cdot \vec{y} = 0$. És a dir, $m - 2 + 6 = 0$ i $m + 0 + 4 = 0$. Per tant, $m = -4$.
Amb Scilab podem fer:

```
-->k=kernel([1 2 3;1 0 2])
 k  =
  - 0.8728716
  - 0.2182179
    0.4364358

-->k/(-k(2))
 ans  =
  - 4.
  - 1.
    2.
```

Com el conjunt de tots els vectors ortogonals a b i c està generat pel vector k, qualsevol vector ortogonal s'obté multiplicant k per un escalar. I hem dividit per $-k(2)$ perquè done -1 en aquesta coordenada: la tercera és 2, com es vol, i la primera és -4.

b) Segons el Teorema 1 del butlletí, $H^{\perp} =< \vec{k} >$. Anem a calcular el nucli de A^t amb la instrucció kernel de Scilab.

```
-->b=[1;2;3]; c=[1;0;2];
-->A=[b c]
 A  =
    1.    1.
    2.    0.
    3.    2.

-->ortoH=kernel(A')
 ortoH  =
    0.8728716
    0.2182179
  - 0.4364358
```

Per tant, $H^{\perp} =< (0.8728716, 0.2182179, -0.4364358 >$.

c) Atès que m ha estat triat perquè $\vec{y}$ siga ortogonal als dos generadors de H, $\vec{y}$ estarà en $H^{\perp}$, per definició de complement ortogonal. Altra forma de veure que $\vec{y} = (-4, -1, 2)$ pertany a $H^{\perp}$ és comprovant que $\vec{y}$ és combinació lineal de la base de $H^{\perp}$. Vegem-ho:

```
-->y=[-4;-1;2];

-->C=[ortoH y]
 C  =
    0.8728716   - 4.
    0.2182179   - 1.
  - 0.4364358     2.

-->rank(C)
 ans  =
    1.
```

Atès que el rang de la matriu C és 1, es dedueix que la segona columna ($\vec{y}$) és combinació lineal de la primera (base de $H^{\perp}$).

Activitat 3. *Siguen* $\vec{r} = (1, -2, 4, -1)$ *i* $W =< \vec{r} >$

(a) Calcula la projecció ortogonal del vector $\vec{x} = (3, 0, -3, 5)$ *sobre* W.

(b) *Calcula una base de* $W^{\perp}$.

(c) *Comprova que el vector obtés en (a) és ortogonal als vectors de la base de* $W^{\perp}$.

a) Atès que W és un subespai de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 1, aplicarem la fórmula de la projecció sobre una recta

$$ProjW(\vec{x}) = (\vec{q}^t\vec{x})\vec{q}$$

sent $\vec{q}$ un vector unitari que genera a W, és a dir,

$$\vec{q} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$$

Fem els càlculs amb Scilab:

```
-->r=[1;-2;4;-1];q=(1/norm(r))*r
 q  =
    0.2132007
  - 0.4264014
    0.8528029
  - 0.2132007

-->x=[3;0;-3;5]
 x  =
    3.
    0.
  - 3.
    5.

-->ProjWx=(q'*x)*q
 ProjWx  =
  - 0.6363636
    1.2727273
  - 2.5454545
    0.6363636
```

b) Si anomenem A a la matriu que té com única columna al vector generador de W, aleshores $W^{\perp} = (col(A))^{\perp} = Nul(A^t)$. Ho calculem amb Scilab:

```
-->A=r
    1.
  - 2.
    4.
  - 1.

-->ortoW=kernel(A')
 ortoW  =
    0.2132007  - 0.8528029    0.4264014
  - 0.0749333    0.2997331    0.8501335
    0.1498665    0.4005339    0.2997331
    0.9625334    0.1498665  - 0.0749333
```

Així, una base de $W^{\perp}$ és el conjunt $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$, sent $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ i $\vec{c}_3$ les columnes de la matriu ortoW.

c) Per a provar que $Proj_W(\vec{x})$ és ortogonal als vectors $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ i $\vec{c}_3$ efectuem el producte de la traslladada de la matriu ortoW pel vector $Proj_W(\vec{x})$ i comprovem que és una matriu nul·la.

```
-->ortoW'*ProjWx
 ans  =
   1.0D-15 *
  - 0.3330669
    0.8049117
  - 0.4024558

-->clean(ans)
 ans  =
    0.
    0.
    0.
```

Activitat 4. *Siga* $W =< \vec{u}_1, \vec{u}_2 >$, *sent* $\vec{u}_1 = (-1, 2, 4)$ *i* $\vec{u}_2 = (4, -5, 1)$

(a) *Escriu la projecció ortogonal del vector* $\vec{x} = (2, 2, 3)$ *sobre* W, $Proj_W(\vec{x})$, *com a combinació lineal dels vectors* $\vec{u}_1$ *i* $\vec{u}_2$.

(b) *Calcula* $Proj_W(\vec{x})$ *mitjançant la matriu de projecció* P_W. *Comprova que s'obté el mateix resultat que a l'apartat (a).*

(c) *Calcula* $Proj_W(\vec{z})$ *i* $Proj_W(\vec{t})$, *sent* $\vec{z} = (-6, 9, 7)$ *i* $\vec{t} = (-22/3, -17/3, 1)$. *Quina conclusió pots deduir dels resultats obtinguts?*

a) Sabem que

$$Proj_W(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$$

sent $\vec{y} = (y_1, y_2)$ la solució del sistema de equacions

$$M^t M\vec{y} = M^t\vec{x}$$

on M és la matriu del conjunt de vectors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, és a dir, M és la matriu que té com a columnes a aqueixos dos vectors. Resoldrem amb Scilab tal sistema d'equacions utilitzant la comanda rref:

```
-->u1=[-1;2;4];u2=[4;-5;1];

-->M=[u1 u2]
 M  =
  - 1.    4.
    2.  - 5.
    4.    1.

-->x=[2;2;3]
 x  =
    2.
    2.
    3.

R=rref([M'*M M'*x])
 R  =
    1.    0.    0.7647059
    0.    1.    0.2058824
```

```
-->y1=R(1,3)
 y1  =
    0.7647059

-->y2=R(2,3)
 y2  =
    0.2058824
```

Així,

$$Proj_W(\vec{x}) = 0.7647059\vec{u}_1 + 0.2058824\vec{u}_2.$$

b) Atés que el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ és linealment independent, la matriu M^tM té rang 2 i per conseguent és invertible. Així, podem construir la matriu projecció $P_W = M(M^tM)^{-1}M^t$.

```
-->PW=M*inv(M'*M)*M'
 PW  =
    0.3810742  - 0.4782609    0.0843990
  - 0.4782609    0.6304348    0.0652174
    0.0843990    0.0652174    0.9884910
```

Ara calculem la projecció de $\vec{x}$ mitjançant la fórmula

$$Proj_W(\vec{x}) = P_W\vec{x}$$

```
-->ProjWx=PW*x
 ProjWx  =
    0.0588235
    0.5
    3.2647059
```

Per veure si hem obtés el mateix resultat que a l'apartat a), efectuem el càlcul de la expressió obtinguda

$$Proj_W(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 :$$

```
-->ProjWxa=y1*u1+ y2*u2
 ProjWxa  =
    0.0588235
    0.5
    3.2647059
```

que, efectivament, és el mateix.

c) Introduïm els vectors $\vec{z}$ i $\vec{t}$ i calculem les seues projeccions mitjançant la matriu de projecció.

```
-->z=[-6;9;7] ; t=[-22/3;-17/3;1];

-->ProjWz=PW*z
 ProjWz  =
  - 6.
    9.
    7.
```

```
-->ProjWt=PW*t
 ProjWt  =
   1.0D-15 *
  - 0.0277556
  - 0.7216450
  - 0.2220446

-->clean(ProjWt)
 ans  =
    0.
    0.
    0.
```

Així, $Proj_W(\vec{z}) = \vec{z}$ i $Proj_W(\vec{t}) = \vec{0}$. Açò ens indica que $\vec{z} \in W$ i que $\vec{t}$ és ortogonal a W, és a dir, $\vec{t} \in W^{\perp}$.

Activitat 5. *Siga W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Demostra que qualsevol matriu de projecció P_W és simètrica i idempotent ($P_W^2 = P_W$).*

Si P_W és una matriu projecció, llavors $P_W = M(M^tM)^{-1}M^t$, sent M la matriu d'una base de W. Atés que

$$P_W^t = (M(M^tM)^{-1}M^t)^t = (M^t)^t((M^tM)^{-1})^tM^t =$$
$$= M((M^tM)^t)^{-1}M^t = M(M^t(M^t)^t)^{-1}M^t = M(M^tM)^{-1}M^t = P_W$$

concloem que la matriu P_W és simètrica.

D'altra banda,

$$P_W^2 = (M(M^tM)^{-1}M^t)(M(M^tM)^{-1}M^t) = M((M^tM)^{-1}M^tM)(M^tM)^{-1}M^t =$$
$$= MI(M^tM)^{-1}M^t = M(M^tM)^{-1}M^t = P_W$$

Per tant, P_W és idempotent.

Exemple: podem comprovar les dues propietats amb la matriu projecció de l'activitat anterior:

```
-->PW
 PW  =
    0.3810742  - 0.4782609    0.0843990
  - 0.4782609    0.6304348    0.0652174
    0.0843990    0.0652174    0.9884910

-->PW^2
 ans  =
    0.3810742  - 0.4782609    0.0843990
  - 0.4782609    0.6304348    0.0652174
    0.0843990    0.0652174    0.9884910

-->PW'
 ans  =
    0.3810742  - 0.4782609    0.0843990
  - 0.4782609    0.6304348    0.0652174
    0.0843990    0.0652174    0.9884910
```