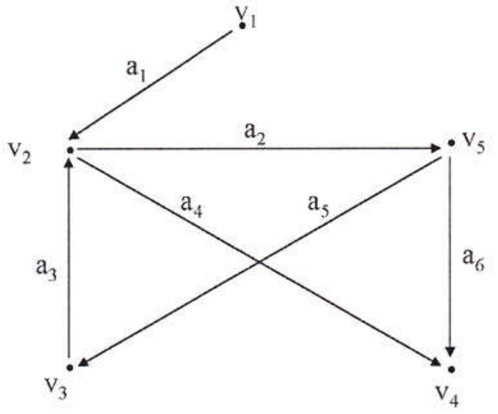
Prácticas de Matemática Discreta

Problemas sesión 8 (Grafos dirigidos)

1. Sea G el grafo de la figura



   a) Obtén las matrices de adyacencia e incidencia del grafo G.
   b) Determina los grados de entrada y salida de todos sus vértices y encuentra los vértices pozo y los vértices fuente.
   c) Determina si el grafo es débilmente conexo o fuertemente conexo.
   d) Calcula las componentes fuertemente conexas de G.

a)
$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz de adyacencia — matriz de incidencia

b)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
deg^+	1	2	1	0	2
deg^-	0	2	1	2	1

pozo: v_4 fuente: v_1

c) El grafo es débilmente conexo porque su grafo subyacente es conexo.
El grafo no es fuertemente conexo. Por ejemplo, v_1 no es accesible desde v_2.

d) Hay 3 componentes fuertemente conexas:

$CF_1 = \{v_1\}$ $CF_2 = \{v_2, v_3, v_5\}$ $CF_3 = \{v_4\}$

2. Decide, en cada caso, si las listas que se muestran pueden corresponder a los grados de entrada y de salida de un grafo dirigido de 5 vértices. En caso afirmativo, muestra un ejemplo.

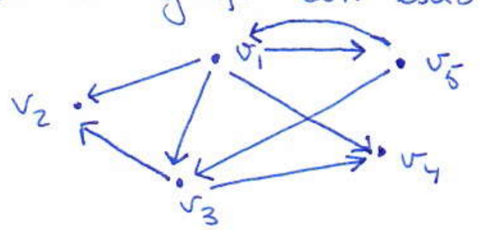
   a) $deg^+(v_1) = 4,\ deg^+(v_2) = 0,\ deg^+(v_3) = 2,\ deg^+(v_4) = 0,\ deg^+(v_5) = 2$
   $deg^-(v_1) = 1,\ deg^-(v_2) = 2,\ deg^-(v_3) = 2,\ deg^-(v_4) = 2,\ deg^-(v_5) = 3$

   b) $deg^+(v_1) = 4,\ deg^+(v_2) = 0,\ deg^+(v_3) = 2,\ deg^+(v_4) = 0,\ deg^+(v_5) = 2$
   $deg^-(v_1) = 1,\ deg^-(v_2) = 2,\ deg^-(v_3) = 2,\ deg^-(v_4) = 2,\ deg^-(v_5) = 1$

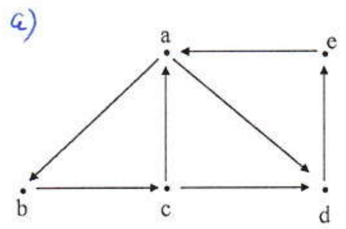
a) No hay un grafo dirigido con esa lista de grados ya que $\sum_{i=1}^{5} deg^+(v_i) = 8$ y $\sum_{i=1}^{5} deg^-(v_i) = 10$

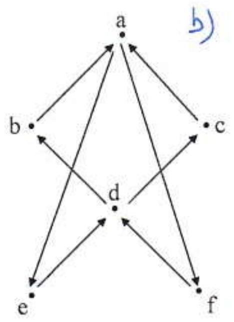
b) Comprobamos en primer lugar que $\sum_{i=1}^{5} deg^+(v_i) = \sum_{i=1}^{5} deg^-(v_i) = 8$

Dibujamos un grafo con esas listas de grados:



3. Justifica teóricamente si los siguientes grafos son eulerianos o si tienen algún camino euleriano abierto. En caso afirmativo, encuentra dichos caminos.





a) Es un grafo débilmente conexo y además se cumple que: $deg^+(a) = deg^-(a) = 2$, $deg^+(b) = deg^-(b) = 1$, $deg^+(e) = deg^-(e) = 1$, $deg^+(c) = deg^-(c) + 1$ y $deg^+(d) = deg^-(d) - 1$. Por tanto, tiene un camino euleriano abierto desde c hasta d

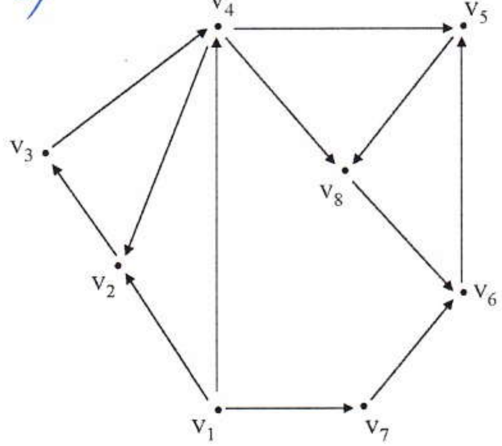
CAMINO EULERIANO ABIERTO : $c \to d \to e \to a \to b \to c \to a \to d$

b) El grafo es débilmente conexo y se cumple que el grado de entrada y salida coincide en cada uno de sus vértices. Por tanto, el grafo es euleriano, es decir, tiene un camino euleriano cerrado.

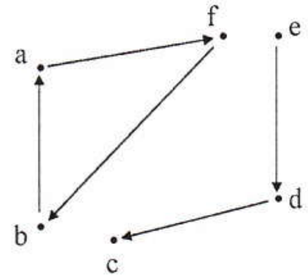
CAMINO EULERIANO CERRADO: $a \to e \to d \to c \to a \to f \to d \to b \to a$

4. Calcula las componentes débilmente conexas y fuertemente conexas de cada uno de los siguientes grafos

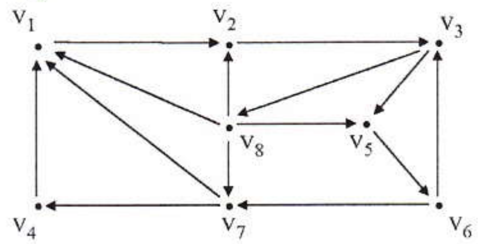
a)



b)



c)



a) Es débilmente conexo, su única componente débilmente conexa es $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

No es fuertemente conexo, tiene 4 componentes fuertemente conexas: $CF_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $CF_2 = \{v_1\}$, $CF_3 = \{v_5, v_6, v_8\}$ y $CF_4 = \{v_7\}$

b) No es debilmente conexo, tiene 2 componentes débilmente conexas: $CD_1 = \{a, b, f\}$ $CD_2 = \{c, d, e\}$

No es fuertemente conexo tiene 4 comp. fuertemente conexas.
$CF_1 = \{a, b, f\}$, $CF_2 = \{c\}$, $CF_3 = \{d\}$ y $CF_4 = \{e\}$

c) Es débilmente conexo y fuertemente conexo, por tanto

$CF = CD = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$