

Notatki: Elementy logiki i teorii mnogości

Adrian Startek

10 października 2018

1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1. *Zdanie logiczne:* zdanie, któremu można przyporządkować wartość logiczną "prawda"(1) lub "fałsz"(0).

Definicja 1.2. *Tautologia:* zdanie logiczne, które zawsze jest prawdziwe.

Definicja 1.3. *Funkcja zdaniowa $\phi(x)$:* wyrażenie, które po podstawieniu konkretnej wartości x staje się zdaniem logicznym.

Definicja 1.4. *Para uporządkowana (x,y) :* zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Elementem pierwszym w parze jest ten, który jest elementem obu zbiorów, co jednoznacznie określa kolejność.

1.1 Oznaczenia zbiorów liczbowych

\mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych

\mathbb{Z} - zbiór liczb całkowitych

\mathbb{Q} - zbiór liczb wymiernych

\mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych

1.2 Kwantyfikatory

Kwentyfikator ogólny. Wyrażenie "dla każdego x należącego do X zachodzi $\phi(x)$ " oznacza się: $\forall_{x \in X} \phi(x)$

Kwentyfikator szczególny. Wyrażenie "istnieje x należący do X , dla którego zachodzi $\phi(x)$ " oznacza się: $\exists_{x \in X} \phi(x)$

Zaprzeczenia kwantyfikatorów. Zachodzi:

$$\neg[\forall_{x \in \mathbb{R}} \phi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x)$$

$$\neg[\exists_{x \in \mathbb{R}} \phi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x)$$

$$\neg[\forall_{x \in \mathbb{R}} \phi(x) \vee \psi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)$$

$$\neg[\exists_{x \in \mathbb{R}} \phi(x) \wedge \psi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x) \vee \neg\psi(x)$$

2 Rachunek zdań logicznych

2.1 Ważniejsze operacje na zdaniach

Negacja Wartością negacji zdania logicznego jest wartość odwrotna do wartości tego zdania.

Tabela 1: Negacja

p	$\neg p$
0	1
1	0

Alternatywa Alternatywa przyjmuje wartość "prawda", jeśli co najmniej jedno ze zdań jest prawdziwe.

Tabela 2: Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Koniunkcja Koniunkcja przyjmuje wartość "prawda", tylko jeśli oba zdania są prawdziwe.

Tabela 3: Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implikacja Implikacja ($p \implies q$) jest prawdziwa, jeśli zarówno poprzednik (p) jak i następnik (q) są prawdziwe lub **poprzednik jest fałszywy (z fałszu wynika wszystko)**.

Tabela 4: Implikacja

p	q	$p \implies q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Równoważność Równoważność przyjmuje wartość "prawda" jeśli oba zdania mają tę samą wartość.

Tabela 5: Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Kreska Sheffera (NAND) Zaprzeczenie koniunkcji.

Tabela 6: NAND

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR Zaprzeczenie alternatywy.

Tabela 7: NOR

p	q	$p \text{ NOR } q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Twierdzenie 2.1. *Za pomocą **NAND** lub **NOR** można wyrazić wszystkie inne funktory.*

2.2 Ważniejsze tautologie

$p \implies p$ - prawo tożsamości

$p \implies (q \implies p)$ - prawo symplifikacji

$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$ - prawo podwójnej negacji

$p \vee \neg p$ - prawo wyłączonego środka

$(\neg p \implies p) \implies p$

$\neg p \implies (p \implies q)$ - prawo Dunsza Szkota

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ - prawo De Morgana

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ - prawo De Morgana

$\neg(p \implies q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$

$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

3 Rachunek zbiorów

3.1 Oznaczenia i definicje

Fakt należenia elementu x do zbioru A oznacza się przez $x \in A$. Analogicznie, "x nie należy do zbioru A " oznacza się $x \notin A$.

Zbiór można definiować podając jego elementy wprost: $A = \{a, b, c\}$ lub zadając warunek na przynależność elementów do zbioru: $A = \{x \in X : \phi(x)\}$.

3.2 Operacje i zależności

Zawieranie. Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B), ozn. $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B :
 $A \subset B \Leftrightarrow \forall_{x \in A} x \in B$

Równość. Zbiory A i B są równe, jeśli są one nawzajem swoimi podzbiarami:
 $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Działania na zbiorach. Definiuje się działania:

Suma zbiorów $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Iloczyn zbiorów $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Różnica zbiorów $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Iloczyn kartezjański $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Dopełnienie zbioru.

Definicja 3.1. Dopełnieniem zbioru $A \subset C$ do zbioru C nazywa się zbiór wszystkich elementów należących do C , które nie należą do A :

$$\setminus A = \{x \in C : x \notin A\}$$

Własności dopełnienia. Niech $A \subset X, B \subset X$. Wtedy:

$$\setminus(A \cup B) = (\setminus A) \cap (\setminus B)$$

$$\setminus(A \cap B) = (\setminus A) \cup (\setminus B)$$

$$\setminus(\setminus A) = A$$

3.3 Relacje.

Definicja 3.2. Relacją nazywa się dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego skończonej liczby zbiorów.

Niech R będzie relacją zadaną na $X \times X$ (tj. R jest relacją dwuargumentową, która przyjmuje za argumenty elementy X). Dodatkowo, niech xRy oznacza wyrażenie "pomiędzy x a y zachodzi relacja R ". Wtedy:

R jest relacją zwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X} xRx$

R jest relacją przeciwzrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X} \neg (xRx)$

R jest relacją symetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} (xRy \Rightarrow yRx)$

R jest relacją słabo antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$

R jest relacją antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$

R jest relacją przechodnią $\Leftrightarrow \forall_{x,y,z \in X} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

R jest relacją spójną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} (xRy \vee yRx \vee x = y)$