Notatki - Matematyka

Adrian Startek

Studia I stopnia

Spis treści

Część I

Semestr I

Rozdział 1

Elementy logiki i teorii mnogości

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1.1. *Zdanie logiczne: zdanie, któremu można przyporządkować wartość logiczną "prawda"(1) lub "fałsz"(0).*

Definicja 1.1.2. *Tautologia: zdanie logiczne, które zawsze jest prawdziwe.*

Definicja 1.1.3. *Funkcja zdaniowa $\phi(x)$: wyrażenie, które po podstawieniu konkretnej wartości x staje się zdaniem logicznym.*

Definicja 1.1.4. *Para uporządkowana (x,y): zbiór $\{\{x\},\{x,y\}\}$. Elementem pierwszym w parze jest ten, który jest elementem obu zbiorów, co jednoznacznie określa kolejność.*

1.1.1 Zbiory liczbowe

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczwistych

Fakt należenia elementu x do zbioru A oznacza się przez $x \in A$. Analogicznie, "x nie należy do zbioru A" ocznacza się $x \notin A$.

Zbiór można definiować podając jego elementy wprost: $A = \{a, b, c\}$ lub zadając warunek na przynależność elementów do zbioru: $A = \{x \in X : \phi(x)\}$.

1.1.2 Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny. Wyrażenie "dla każdego x należącego do X zachodzi $\phi(x)$" oznacza się: $\forall_{x \in X}\, \phi(x)$

Kwantyfikator szczególny. Wyrażenie "istnieje x należący do X, dla którego zachodzi $\phi(x)$" oznacza się: $\exists_{x \in X}\, \phi(x)$

Zaprzeczenia kwantyfikatorów. Zachodzi:

$$\neg[\forall_{x \in \mathbb{R}}\, \phi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}}\, \neg\phi(x)$$

$$\neg[\exists_{x \in \mathbb{R}}\, \phi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}}\, \neg\phi(x)$$

$$\neg[\forall_{x \in \mathbb{R}}\, \phi(x) \vee \psi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}}\, \neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)$$

$$\neg[\exists_{x \in \mathbb{R}}\, \phi(x) \wedge \psi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}}\, \neg\phi(x) \vee \neg\psi(x)$$

1.2 Rachunek zdań logicznych

1.2.1 Ważniejsze operacje na zdaniach

Negacja Wartością negacji zdania logicznego jest wartość odwrotna do wartości tego zdania (tabela 1.1).

Tabela 1.1: Negacja

p	$\neg p$
0	1
1	0

Alternatywa Alternatywa przyjmuje wartość "prawda", jeśli co najmniej jedno ze zdań jest prawdziwe (tabela 1.2).

Tabela 1.2: Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela 1.3: Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Koniunkcja Koniunkcja przyjmuje wartość "prawda", tylko jeśli oba zdania są prawdziwe (tabela 1.3).

Implikacja Implikacja ($p \Longrightarrow q$) jest prawdziwa, jeśli zarówno poprzednik (p) jak i następnik (q) są prawdziwe lub **poprzednik jest fałszywy (z fałszu wynika wszystko)**. (tabela 1.4)

Tabela 1.4: Implikacja

p	q	$p \Longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Równoważność Równoważność przyjmuje wartość "prawda" jeśli oba zdania mają tą samą wartość (tabela 1.5).

Tabela 1.5: Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Kreska Sheffera (NAND) Zaprzeczenie koniunkcji (tabela 1.6).

NOR Zaprzeczenie alternatywy (tabela 1.7).

Twierdzenie 1.2.1. *Za pomocą **NAND** lub **NOR** można wyrazić wszystkie inne funktory.*

Tabela 1.6: NAND

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela 1.7: NOR

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1.2.2 Ważniejsze tautologie

$$p \implies p \qquad \text{(prawo tożsamości)}$$

$$p \implies (q \implies p) \qquad \text{(prawo symplifikacji)}$$

$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p) \qquad \text{(prawo podwójnej negacji)}$$

$$p \vee \neg p \qquad \text{(prawo wyłączonego środka)}$$

$$(\neg p \implies p) \implies p$$

$$\neg p \implies (p \implies q) \qquad \text{(prawo Dunsa Szkota)}$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \qquad \text{(prawo De Morgana)}$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \qquad \text{(prawo De Morgana)}$$

$$\neg(p \implies q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$$

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

1.3 Rachunek zbiorów

1.3.1 Operacje i zależności

Zawieranie. Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B), ozn. $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall_{x \in A}\, x \in B$$

Równość. Zbiory A i B są równe, jeśli są one nawzajem swoimi podzbiorami:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Działania na zbiorach. Definiuje się działania:

$$A \cup B = \{\, x : x \in A \vee x \in B \,\} \qquad \text{(Suma zbiorów)}$$

$$A \cap B = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\} \qquad \text{(Iloczyn zbiorów)}$$

$$A \setminus B = \{\, x : x \in A \wedge x \notin B \,\} \qquad \text{(Różnica zbiorów)}$$

$$A \times B = \{\, (a, b) : a \in A, b \in B \,\} \qquad \text{(Iloczyn kartezjański)}$$

Dopełnienie zbioru.

Definicja 1.3.1. *Dopełnieniem zbioru $A \subset C$ do zbioru C nazywa się zbiór wszystkich elementów należących do C, które nie należą do A:*

$$\setminus A = \{\, x \in C : x \notin A \,\}$$

Własności dopełnienia. Niech $A \subset X$, $B \subset X$. Wtedy:

$$\setminus(\, A \cup B \,) = (\, \setminus A \,) \cap (\, \setminus B \,)$$

$$\setminus(\, A \cap B \,) = (\, \setminus A \,) \cup (\, \setminus B \,)$$

$$\setminus(\, \setminus A \,) = A$$

1.3.2 Relacje

Definicja 1.3.2. *Relacją nazywa się dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego skończonej liczby zbiorów.*

Niech R będzie relacją zadaną na $X \times X$ (tj. R jest relacją dwuargumentową, która przyjmuje za argumenty elementy X). Dodatkowo, niech xRy oznacza wyrażenie "pomiędzy x a y zachodzi relacja R". Wtedy:

R jest relacją zwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X}\; xRx$

R jest relacją przeciwzwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X}\; \neg(\, xRx \,)$

R jest relacją symetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\; (\, xRy \Longrightarrow yRx \,)$

R jest relacją słabo antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\; (\, xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y \,)$

R jest relacją antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\; (\, xRy \Longrightarrow \neg(\, yRx \,)\,)$

R jest relacją przechodnią $\Leftrightarrow \forall_{x,y,z \in X}\; (\, xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz \,)$

R jest relacją spójną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\; (\, xRy \vee yRx \vee y = x \,)$

Rozdział 2

Algebra liniowa

2.1 Działanie, grupa, ciało

Definicja 2.1.1. *Niech G będzie dowolnym zbiorem.* ***Działaniem*** *(dwuargumentowym) w zbiorze G nazywamy dowolne odwzorowanie $f : G \times G \to G$.*

Definicja 2.1.2. *Zbiór G z określonym działaniem $\circ$ - parę $(G, \circ)$ nazwiemy grupą, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. *Działanie $\circ$ jest łączne:*

$$\forall_{a,b,c \in G} \left[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \right]$$

2. *Istnieje element neutralny e:*

$$\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} (a \circ e = e \circ a = a)$$

3. *Dla każdego elementu a istnieje element odwrotny a^{-1}:*

$$\forall_{a \in G} \exists_{a^{-1} \in G} (a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$$

Jeżeli działanie $\circ$ jest dodatkowo przemienne, to $(G, \circ)$ nazwiemy ***grupą przemienną*** *lub* ***Abelową*** *(Niels Henrik Abel - matematyk norweski). Opuszczając natomiast warunek 3 (istnienie elementu odwrotnego) otrzymamy definicję struktury ogólniejszej, zwanej* ***półgrupą****.*

Twierdzenie 2.1.1. *Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą, to isteniej dokładnie 1 element neutralny.*

Dowód. Załóżmy, że $e, e' \in G$ są elementami neutralnymi. Wtedy:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e'$$

Co prowadzi do sprzeczności. □

Twierdzenie 2.1.2. *Jeśli g i h są elementami grupy spełniającymi $g \circ h = e$, to są one wzajemnie odwrotne.*

Twierdzenie 2.1.3. *Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą oraz $a \in G$ to istnieje dokładnie jeden element odwrotny a^{-1}.*

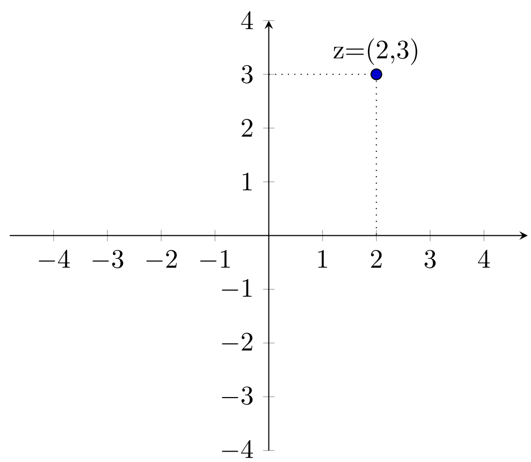
Definicja 2.1.3. *Zbiór G z określonymi działaniami "mnożenia" $\odot$ i "dodawania" $\oplus$ - trójkę $(G, \odot, \oplus)$ - nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są warunki:*

1. *Oba działania są przemienne:*
$$\forall_{a,b \in G}\,(a \oplus b = b \oplus a)$$
$$\forall_{a,b \in G}\,(a \odot b = b \odot a)$$
2. *Oba działania są łączne:*
$$\forall_{a,b,c \in G}\,[(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)]$$
$$\forall_{a,b,c \in G}\,[(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)]$$
3. *Istnieje element neutralny dodawania ("zero" $\mathbb{0}$) oraz element neutralny mnożenia ("jeden" $\mathbb{1}$)*
4. *Dla każdego elementu zbioru G istnieje element odwrotny względem dodawania:*
$$\forall_{a \in G}\,(a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = \mathbb{0})$$
Dla każdego elementu, poza elementem neutralnym dodawania, istnieje element odwrotny względem mnożenia:
$$\forall_{a \in G, a \neq \mathbb{0}}\,(a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = \mathbb{1})$$
5. *Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania:*
$$\forall_{a,b,c \in G}\,[a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)]$$
6. *Elementy neutralne działań są od siebie różne:*
$$\mathbb{0} \neq \mathbb{1}$$

2.1.1 Liczby zespolone

Definicja 2.1.4. *Niech $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Określmy działania $\oplus, \odot$:*
$$\oplus : (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$\odot : (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
Trójkę $(G, \oplus, \odot)$ nazywamy ciałem liczb zespolonych.

Rysunek 2.1: Liczba zespolona jako punkt na płaszczyźnie



Postać kartezjańska. Liczby zespolone posiadają naturalną interpretację geometryczną. Są one parami (uporządkowanymi) liczb rzeczywistych, więc można im przypisać punkty na płaszczyźnie. Liczbie $z = (a, b), z \in \mathbb{C}$ odpowiada punkt o odciętej a i rzędnej b (rysunek 2.1). Płaszczyznę, na której w ten sposób przedstawiamy liczby zespolone nazywamy **płaszczyzną Gaussa**.

Postać kanoniczna. Podzbiór ciała $\mathbb{C}$ złożony z liczb postaci $(x, 0), x \in \mathbb{R}$, również jest ciałem. Odwzorowanie $x \to (x, 0)$ z $\mathbb{R}$ w rozważany podzbiór $\mathbb{C}$ zadaje izomorfizm ciał. Pozwala to na wprowadzenie utożsamienia $(x, 0) \equiv x$. Wprowadźmy oznaczenie $i := (0, 1)$ i nazwijmy ten element **jednostką urojoną**. Łatwo sprawdzić, że:

$$i^2 = (-1, 0) \equiv -1$$

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$ można przedstawić w postaci:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \equiv a + bi$$

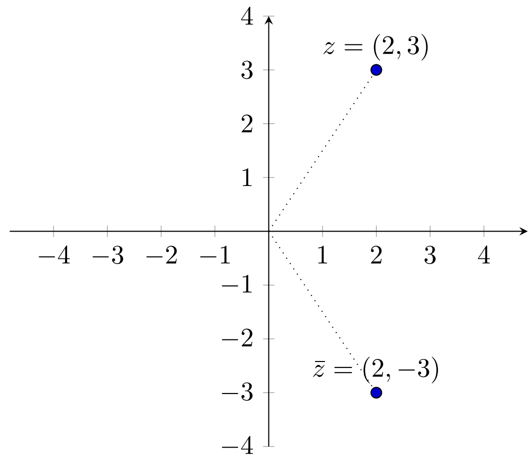
Zapis liczby zespolonej z w postaci $z = a+bi$ nazywamy **postacią kanoniczną**. Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej i oznaczamy $\Re z$ (lub $Re(z)$). Analogicznie, liczbę $b \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią urojoną** i oznaczamy $\Im z$ (lub $Im(z)$).

Definicja 2.1.5. ***Liczbą sprzężoną*** *do liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę*

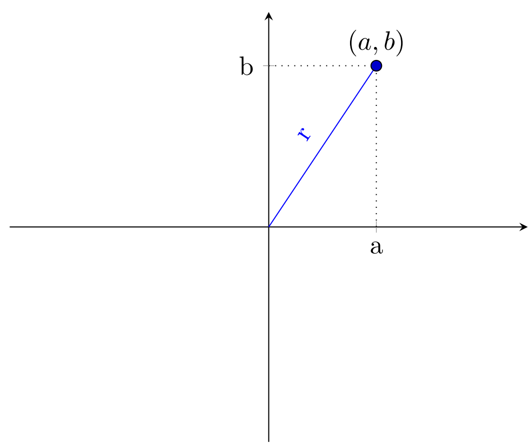
$$\bar{z} = a - bi$$

W interpretacji geometrycznej liczba sprzężona $\bar{z}$ jest odbiciem liczby z względem osi odciętych (rysunek 2.2).

Rysunek 2.2: Interpretacja geometryczna liczby sprzężonej



Rysunek 2.3: Moduł liczby zespolonej



Postać trygonometryczna. Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną.

Definicja 2.1.6. ***Modułem*** *liczby zespolonej z nazywamy liczbę*

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moduł można interpretować jako długość odcinka pomiędzy początkiem układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zespoloną (rysunek 2.3). Niech φ będzie kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą a odcinkiem łączącym początek układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zezpoloną. Zachodzi wtedy:

$$r = |z|$$

$$sin\varphi = \frac{b}{|z|} \Longrightarrow b = |z|sin\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{a}{|z|} \Longrightarrow a = |z|cos\varphi$$

Wynika z tego możliwość przedstawienia liczby zespolonej $z = a + bi$ w postaci:

$$z = a + bi = |z|cos\varphi + i|z|sin\varphi = |z|(cos\varphi + i\,sin\varphi)$$

Twierdzenie 2.1.4. *Niech $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(cos\varphi + i\,sin\varphi)$. Zachodzi:*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + i\,sin(n\varphi))$$

Twierdzenie 2.1.5. *Niech $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$, $z = |z|(cos\varphi + i\,sin\varphi)$. Istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z. k-ty pierwiastek dany jest wzorem:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k \in \langle 0; n-1\rangle, k \in \mathbb{N}$$

Dowód. Niech $w = |w|(cos\alpha + i\,sin\alpha)$ będzie pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z. Zatem:

$$w^n = z$$

$$w^n = |w|^n(cos\,n\alpha + i\,sin\,n\alpha) = |z|(cos\varphi + i\,sin\varphi)$$

$$|w|^n = |z| \Longrightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$n\alpha = \varphi + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

□

2.2 Przestrzenie liniowe

Definicja 2.2.1. *Niech będzie dane ciało K oraz niepusty zbiór V z określonymi dwoma działaniami:*

$$\oplus : V \times V \ni (\,x, y\,) \to x \oplus y \in V \qquad \text{(dodawanie)}$$

$$\odot : K \times V \ni (\,\lambda, x\,) \to \lambda \odot x \in V \qquad \text{(mnożenie przez element ciała)}$$

*Strukturę $(\,V, K, \oplus, \odot)$ nazwiemy **przestrzenią wektorową** (lub **liniową**) nad ciałem K, jeśli spełnione są warunki:*

1. *$(\,V, \oplus\,)$ jest grupą abelową*

2. $\forall_{x \in V}$:

$$1 \odot x = x$$

3. $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha, \beta \in K}$:

$$\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha\beta) \odot x \qquad \text{(prawo łączności)}$$

4. $\forall_{x,y \in V} \forall_{\alpha, \beta \in K}$:

$$(\alpha+\beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x \quad \text{(rozdzielność dodawania względem mnożenia)}$$

5. $\forall_{x,y \in V} \forall_{\alpha \in K}$:

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y \quad \text{(rozdzielność mnożenia względem dodawania)}$$

Elementy zbioru V nazywamy ***wektorami****, a ciała K* ***skalarami****.*

Twierdzenie 2.2.1. *Jeśli V jest przestrzenią liniową nad K, to dla każdego $v \in V$, $\alpha \in K$ zachodzi:*

1. $0 \odot v = \mathbb{O}$

2. $\alpha \odot \mathbb{O} = \mathbb{O}$

3. $\alpha \odot v = \mathbb{O} \Longrightarrow \alpha = 0 \vee v = \mathbb{O}$

Dowód. Kolejno:

1.

$$1 \odot v = (1 + 0) \odot v = 1 \odot v \oplus 0 \odot v$$
$$1 \odot v - 1 \odot v = (1 \odot v - 1 \odot v) \oplus 0 \odot v$$
$$\mathbb{O} = 0 \odot v$$

2.

$$\alpha \odot \mathbb{O} = \alpha(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) = \alpha \odot \mathbb{O} \oplus \alpha \odot \mathbb{O}$$
$$\alpha \odot \mathbb{O} - \alpha \odot \mathbb{O} = (\alpha \odot \mathbb{O} - \alpha \odot \mathbb{O}) \oplus \alpha \odot \mathbb{O}$$
$$\mathbb{O} = \alpha \odot \mathbb{O}$$

3.

$$\alpha \odot v = \mathbb{O}$$

Wystarczy pokazać, że jeśli $\alpha \neq 0$, to $v = \mathbb{O}$

$$\exists_{\alpha^{-1} \in K}\, \alpha\alpha^{-1} = 1$$
$$\alpha \odot v = \mathbb{O}$$
$$\alpha\alpha^{-1} \odot v = \alpha^{-1} \odot \mathbb{O}$$
$$1 \odot v = \mathbb{O}$$
$$v = \mathbb{O}$$

□

Definicja 2.2.2. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $W \subset V$ nazywamy* ***podprzestrzenią liniową*** *przestrzeni V, jeśli W również jest przestrzenią liniową nad ciałem K.*

Twierdzenie 2.2.2. *Podzbiór $W \subset V$ jest podprzestrzenią, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:*

$$\forall_{v_1,v_2 \in W}\, v_1 \oplus v_2 \in W$$

$$\forall_{\alpha \in K, v \in W}\, \alpha \odot v \in W$$

Twierdzenie 2.2.3. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, oraz niech $\{W_s\}$ będzie rodziną podprzestrzeni V. Wtedy:*

$$W = \bigcap_s W_s$$

jest podprzestrzenią liniową V.

Dowód. Niech $v_1, v_2 \in W$

$$v_1, v_2 \in W \Longrightarrow v_1, v_2 \in \bigcap_s W_s \Longrightarrow \forall_s v_1, v_2 \in W_s \Longrightarrow \forall_s v_1 \oplus v_2 \in W_s$$

$$\Longrightarrow v_1 \oplus v_2 \in \bigcap_s W_s \Leftrightarrow v_1 \oplus v_2 \in W$$

Niech $v \in W, \alpha \in K$

$$v \in W \Longrightarrow \forall_s v \in W_s \Longrightarrow \forall_s \alpha \odot v \in W_s \Longrightarrow \alpha \odot v \in W$$

□

Definicja 2.2.3. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Weźmy układ wektorów $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Wektor*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

nazywamy ***kombinacją liniową*** *wektorów $v_1, \ldots, v_n$.*

Definicja 2.2.4. ***Powłoką liniową*** *podzbioru $M \subset V$ (gdzie V jest przestrzenią liniową) nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z M i oznaczamy L(M).*

Twierdzenie 2.2.4. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $M \subset V$ będzie podprzestrzenią. Powłoka liniowa L(M) jest podprzestrzenią liniową V.*

Dowód.

$$v_1, v_2 \in L(M) \Longrightarrow$$

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n,\ w_i \in M$$
$$v_2 = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n,\ u_i \in M$$
$$v_1 + v_2 = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n + \beta_1 u_1 \ldots \beta_n u_n$$

zatem $v_1 + v_2$ jest kombinacją liniową wektorów $w_1, \ldots, w_n, u_1, \ldots, u_n \in M$, czyli $v_1 + v_2 \in M$.
Niech $\alpha \in K, v \in L(M), v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$

$$\alpha v = \alpha(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha\alpha_n v_n \in L(M)$$

□

Twierdzenie 2.2.5. *L(M) jest najmniejszą (w sensie zawierania zbiorów) podprzestrzenią V zawierającą M (jeżeli $W \subset V$ jest podprzestrzenią liniową V, taką że $M \subset W$, to $L(M) \subset W$).*

Dowód. Weźmy zbiór wszystkich podprzestrzeni liniowych zawierających M:

$$\{W_s : s \in S\}$$

Niech

$$\overline{W} = \bigcap_s W_s$$

Z twierdzenia 2.2.3 $\overline{W}$ jest podprzestrzenią. Zauważmy: $\forall_s \overline{W} \subset W_s$. Pokażmy, że $\overline{W} = L(M)$, czyli $\overline{W} \subset L(M) \wedge L(M) \subset \overline{W}$.

1. $\overline{W} \subset L(M)$. Skoro $\{W_s\}$ zawiera wszystkie podprzestrzenie zawierające M, to:

$$\exists_{s_0 \in S} W_{s_0} = L(M)$$

2. $L(M) \subset \overline{W}$. Niech $v \in L(M)$, wtedy:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ v_i \in M$$

$$\forall_s\, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in W_s \Longrightarrow \forall_s\, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in \bigcap_s W_s \Longrightarrow v \in \overline{W}$$

□

Rozdział 3

Analiza matematyczna

Dodatek A

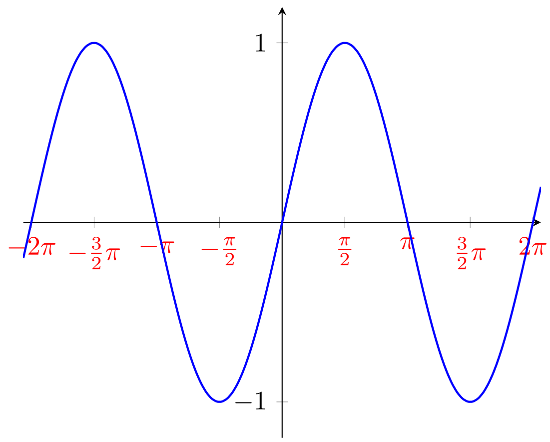
Przegląd ważniejszych funckji

A.1 Funkcje trygonometryczne

Tabela A.1: Własności funkcji trygonometrycznych ($k \in \mathbb{Z}$)

Funckja	$sin\varphi$	$cos\varphi$	$tg\varphi$	$ctg\varphi$
Dziedzina	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$
Przeciwdziedzina	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ekstrema	1: $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ -1: $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$	1: $\{2k\pi\}$ -1: $\{\pi + 2k\pi\}$	-	-
Miejsca zerowe	$\{k\pi\}$	$\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$	$\{k\pi\}$	$\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$
Parzystość	nieparzysta	parzysta	nieparzysta	nieparzysta
Ciągłość	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

Rysunek A.1: Wykres $sin\varphi$



Rysunek A.2: Wykres $cos\varphi$

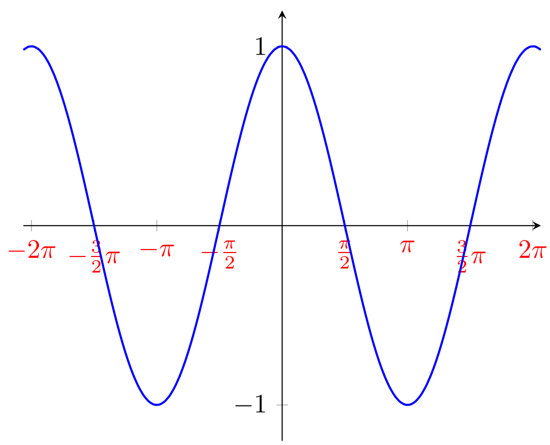
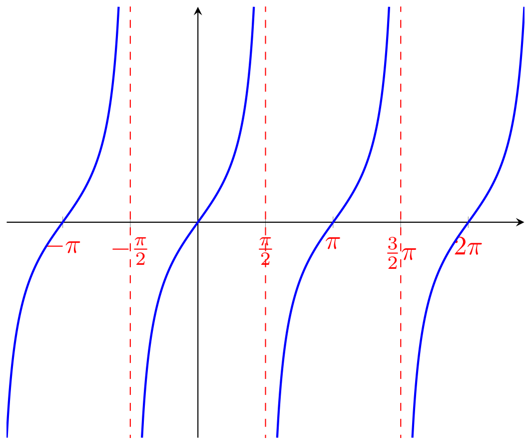


Tabela A.2: Wzory redukcyjne funkcji trygonometrycznych

	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		III ćwiartka	
φ	$90° - \alpha$ $\frac{\pi}{2} - \alpha$	$90° + \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$	$180° - \alpha$ $\pi - \alpha$	$180° + \alpha$ $\pi + \alpha$	$270° - \alpha$ $\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$270° + \alpha$ $\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$360° - \alpha$ $2\pi - \alpha$
$sin\varphi$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\varphi$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$
$tg\varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Rysunek A.3: Wykres $tg\varphi$



Rysunek A.4: Wykres $ctg\varphi$

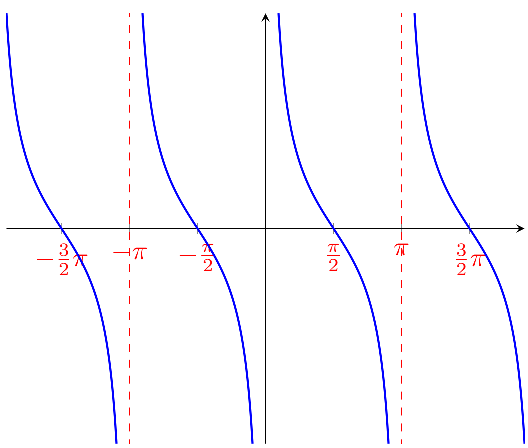


Tabela A.3: Wartości funkcji trygonometrycznych ważniejszych kątów

φ deg	φ rad	$sin\varphi$	$cos\varphi$	$tg\varphi$	$ctg\varphi$
$0°$	0	0	1	0	-
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0
$180°$	π	0	-1	0	-
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1	0
$360°$	2π	0	1	0	-

Skorowidz