Notatki - Matematyka

Adrian Startek

Studia I stopnia

Spis treści

I Semestr I **1**

1 Elementy logiki i teorii mnogości **3**

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia . . . 3

1.1.1 Zbiory liczbowe . . . 3

1.1.2 Kwantyfikatory . . . 4

1.2 Rachunek zdań logicznych . . . 4

1.2.1 Ważniejsze operacje na zdaniach . . . 4

1.2.2 Ważniejsze tautologie . . . 6

1.3 Rachunek zbiorów . . . 6

1.3.1 Operacje i zależności . . . 6

1.3.2 Relacje . . . 7

2 Algebra liniowa **9**

2.1 Działanie, grupa, ciało . . . 9

2.1.1 Liczby zespolone . . . 10

3 Analiza matematyczna **15**

Część I

Semestr I

Rozdział 1

Elementy logiki i teorii mnogości

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1.1. *Zdanie logiczne: zdanie, któremu można przyporządkować wartość logiczną "prawda"(1) lub "fałsz"(0).*

Definicja 1.1.2. *Tautologia: zdanie logiczne, które zawsze jest prawdziwe.*

Definicja 1.1.3. *Funkcja zdaniowa $\phi(x)$: wyrażenie, które po podstawieniu konkretnej wartości x staje się zdaniem logicznym.*

Definicja 1.1.4. *Para uporządkowana (x,y): zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Elementem pierwszym w parze jest ten, który jest elementem obu zbiorów, co jednoznacznie określa kolejność.*

1.1.1 Zbiory liczbowe

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczwistych

Fakt należenia elementu x do zbioru A oznacza się przez $x \in A$. Analogicznie, "x nie należy do zbioru A" ocznacza się $x \notin A$.

Zbiór można definiować podając jego elementy wprost: $A = \{a, b, c\}$ lub zadając warunek na przynależność elementów do zbioru: $A = \{x \in X : \phi(x)\}$.

1.1.2 Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny. Wyrażenie "dla każdego x należącego do X zachodzi $\phi(x)$" oznacza się: $\forall_{x\in X}\ \phi(x)$

Kwantyfikator szczególny. Wyrażenie "istnieje x należący do X, dla którego zachodzi $\phi(x)$" oznacza się: $\exists_{x\in X}\ \phi(x)$

Zaprzeczenia kwantyfikatorów. Zachodzi:

$$\neg[\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x)$$

$$\neg[\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x)$$

$$\neg[\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x) \vee \psi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)$$

$$\neg[\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x) \wedge \psi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x) \vee \neg\psi(x)$$

1.2 Rachunek zdań logicznych

1.2.1 Ważniejsze operacje na zdaniach

Negacja Wartością negacji zdania logicznego jest wartość odwrotna do wartości tego zdania (tabela 1.1).

Tabela 1.1: Negacja

p	$\neg p$
0	1
1	0

Alternatywa Alternatywa przyjmuje wartość "prawda", jeśli co najmniej jedno ze zdań jest prawdziwe (tabela 1.2).

Tabela 1.2: Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela 1.3: Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Koniunkcja Koniunkcja przyjmuje wartość ”prawda”, tylko jeśli oba zdania są prawdziwe (tabela 1.3).

Implikacja Implikacja ($p \Longrightarrow q$) jest prawdziwa, jeśli zarówno poprzednik (p) jak i następnik (q) są prawdziwe lub **poprzednik jest fałszywy (z fałszu wynika wszystko)**. (tabela 1.4)

Tabela 1.4: Implikacja

p	q	$p \Longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Równoważność Równoważność przyjmuje wartość ”prawda” jeśli oba zdania mają tą samą wartość (tabela 1.5).

Tabela 1.5: Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Kreska Sheffera (NAND) Zaprzeczenie koniunkcji (tabela 1.6).

NOR Zaprzeczenie alternatywy (tabela 1.7).

Twierdzenie 1.2.1. *Za pomocą **NAND** lub **NOR** można wyrazić wszystkie inne funktory.*

Tabela 1.6: NAND

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela 1.7: NOR

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1.2.2 Ważniejsze tautologie

$$p \implies p \qquad \text{(prawo tożsamości)}$$

$$p \implies (q \implies p) \qquad \text{(prawo symplifikacji)}$$

$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p) \qquad \text{(prawo podwójnej negacji)}$$

$$p \vee \neg p \qquad \text{(prawo wyłączonego środka)}$$

$$(\neg p \implies p) \implies p$$

$$\neg p \implies (p \implies q) \qquad \text{(prawo Dunsa Szkota)}$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \qquad \text{(prawo De Morgana)}$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \qquad \text{(prawo De Morgana)}$$

$$\neg(p \implies q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$$

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

1.3 Rachunek zbiorów

1.3.1 Operacje i zależności

Zawieranie. Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B), ozn. $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall_{x \in A}\, x \in B$$

Równość. Zbiory A i B są równe, jeśli są one nawzajem swoimi podzbiorami:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Działania na zbiorach. Definiuje się działania:

$$A \cup B = \{\, x : x \in A \vee x \in B \,\} \tag{Suma zbiorów}$$

$$A \cap B = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\} \tag{Iloczyn zbiorów}$$

$$A \setminus B = \{\, x : x \in A \wedge x \notin B \,\} \tag{Różnica zbiorów}$$

$$A \times B = \{\, (a,b) : a \in A, b \in B \,\} \tag{Iloczyn kartezjański}$$

Dopełnienie zbioru.

Definicja 1.3.1. *Dopełnieniem zbioru $A \subset C$ do zbioru C nazywa się zbiór wszystkich elementów należących do C, które nie należą do A:*

$$\setminus A = \{\, x \in C : x \notin A \,\}$$

Własności dopełnienia. Niech $A \subset X$, $B \subset X$. Wtedy:

$$\setminus(\, A \cup B\,) = (\, \setminus A\,) \cap (\, \setminus B\,)$$

$$\setminus(\, A \cap B\,) = (\, \setminus A\,) \cup (\, \setminus B\,)$$

$$\setminus(\, \setminus A\,) = A$$

1.3.2 Relacje

Definicja 1.3.2. *Relacją nazywa się dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego skończonej liczby zbiorów.*

Niech R będzie relacją zadaną na $X \times X$ (tj. R jest relacją dwuargumentową, która przyjmuje za argumenty elementy X). Dodatkowo, niech xRy oznacza wyrażenie "pomiędzy x a y zachodzi relacja R". Wtedy:

R jest relacją zwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X}\, xRx$

R jest relacją przeciwzwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X}\, \neg(\, xRx\,)$

R jest relacją symetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, (\, xRy \Longrightarrow yRx\,)$

R jest relacją słabo antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, (\, xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y\,)$

R jest relacją antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, (\, xRy \Longrightarrow \neg(\, yRx\,)\,)$

R jest relacją przechodnią $\Leftrightarrow \forall_{x,y,z \in X}\, (\, xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz\,)$

R jest relacją spójną $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, (\, xRy \vee yRx \vee y = x\,)$

Rozdział 2

Algebra liniowa

2.1 Działanie, grupa, ciało

Definicja 2.1.1. *Niech G będzie dowolnym zbiorem.* ***Działaniem*** *(dwuargumentowym) w zbiorze G nazywamy dowolne odwzorowanie $f : G \times G \to G$.*

Definicja 2.1.2. *Zbiór G z określonym działaniem $\circ$ - parę $(G, \circ)$ nazwiemy grupą, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. *Działanie $\circ$ jest łączne:*

$$\forall_{a,b,c\in G} \, [\, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \,]$$

2. *Istnieje element neutralny e:*

$$\exists_{e\in G} \, \forall_{a\in G} \, (a \circ e = e \circ a = a)$$

3. *Dla każdego elementu a istnieje element odwrotny a^{-1}:*

$$\forall_{a\in G} \, \exists_{a^{-1}\in G} \, (a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$$

Jeżeli działanie $\circ$ jest dodatkowo przemienne, to $(G, \circ)$ nazwiemy ***grupą przemienną*** *lub* ***Abelową*** *(Niels Henrik Abel - matematyk norweski). Opuszczając natomiast warunek 3 (istnienie elementu odwrotnego) otrzymamy definicję struktury ogólniejszej, zwanej* ***półgrupą****.*

Twierdzenie 2.1.1. *Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą, to isteniej dokładnie 1 element neutralny.*

Dowód. Załóżmy, że $e, e' \in G$ są elementami neutralnymi. Wtedy:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e'$$

Co prowadzi do sprzeczności. □

Twierdzenie 2.1.2. *Jeśli g i h są elementami grupy spełniającymi $g \circ h = e$, to są one wzajemnie odwrotne.*

Twierdzenie 2.1.3. *Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą oraz $a \in G$ to istnieje dokładnie jeden element odwrotny a^{-1}.*

Definicja 2.1.3. *Zbiór G z określonymi działaniami "mnożenia" $\odot$ i "dodawania" $\oplus$ - trójkę $(G, \odot, \oplus)$ - nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są warunki:*

1. *Oba działania są przemienne:*

$$\forall_{a,b \in G} (a \oplus b = b \oplus a)$$

$$\forall_{a,b \in G} (a \odot b = b \odot a)$$

2. *Oba działania są łączne:*

$$\forall_{a,b,c \in G} [(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)]$$

$$\forall_{a,b,c \in G} [(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)]$$

3. *Istnieje element neutralny dodawania ("zero" $\mathbb{0}$) oraz element neutralny mnożenia ("jeden" $\mathbb{1}$)*

4. *Dla każdego elementu zbioru G istnieje element odwrotny względem dodawania:*

$$\forall_{a \in G} (a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = \mathbb{0})$$

Dla każdego elementu, poza elementem neutralnym dodawania, istnieje element odwrotny względem mnożenia:

$$\forall_{a \in G, a \neq \mathbb{0}} (a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = \mathbb{1})$$

5. *Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania:*

$$\forall_{a,b,c \in G} [a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)]$$

6. *Elementy neutralne działań są od siebie różne:*

$$\mathbb{0} \neq \mathbb{1}$$

2.1.1 Liczby zespolone

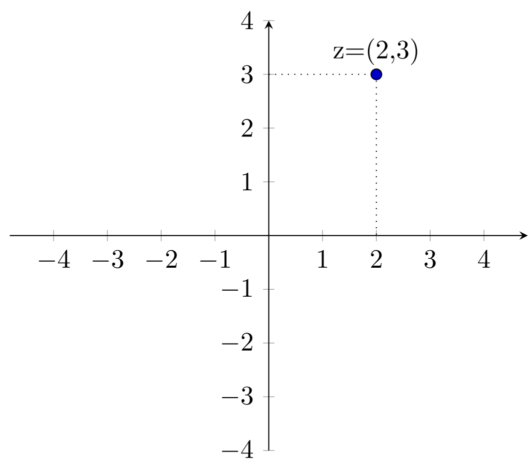
Definicja 2.1.4. *Niech $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Określmy działania $\oplus, \odot$:*

$$\oplus : (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\odot : (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Trójkę $(G, \oplus, \odot)$ nazywamy ciałem liczb zespolonych.

Postać kartezjańska. Liczby zespolone posiadają naturalną interpretację geometryczną. Są one parami (uporządkowanymi) liczb rzeczywistych, więc można im przypisać punkty na płaszczyźnie. Liczbie $z = (a, b), z \in \mathbb{C}$ odpowiada punkt o odciętej a i rzędnej b. Płaszczyznę, na której w ten sposób przedstawiamy liczby zespolone nazywamy **płaszczyzną Gaussa**.



Postać kanoniczna. Podzbiór ciała $\mathbb{C}$ złożony z liczb postaci $(x, 0), x \in \mathbb{R}$, również jest ciałem. Odwzorowanie $x \to (x, 0)$ z $\mathbb{R}$ w rozważany podzbiór $\mathbb{C}$ zadaje izomorfizm ciał. Pozwala to na wprowadzenie utożsamienia $(x, 0) \equiv x$. Wprowadźmy oznaczenie $i := (0, 1)$ i nazwijmy ten element **jednostką urojoną**. Łatwo sprawdzić, że:

$$i^2 = (-1, 0) \equiv -1$$

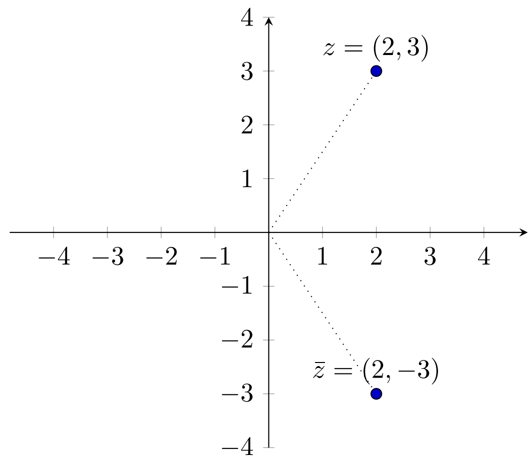
Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$ można przedstawić w postaci:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \equiv a + bi$$

Zapis liczby zespolonej z w postaci $z = a+bi$ nazywamy **postacią kanoniczną**. Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej i oznaczamy $\Re z$ (lub $Re(z)$). Analogicznie, liczbę $b \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią urojoną** i oznaczamy $\Im z$ (lub $Im(z)$).

Definicja 2.1.5. ***Liczbą sprzężoną*** *do liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę*

$$\bar{z} = a - bi$$



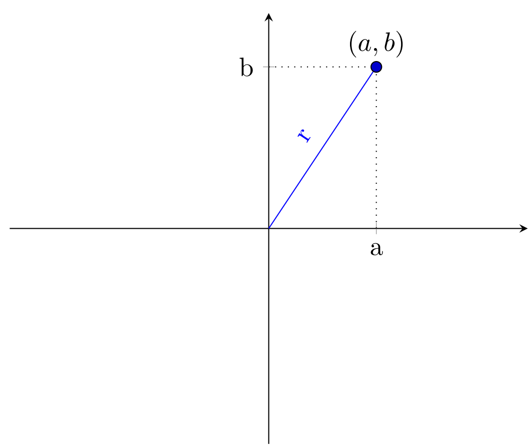
W interpretacji geometrycznej liczba sprzężona $\bar{z}$ jest odbiciem liczby z względem osi odciętych.

Postać trygonometryczna. Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną.

Definicja 2.1.6. ***Modułem*** *liczby zespolonej nazywamy liczbę*

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moduł można interpretować jako długość odcinka pomiędzy początkiem układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zespoloną.



Niech φ będzie kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą a odcinkiem łączącym początek układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zespoloną. Zachodzi wtedy:

$$r = |z|$$

$$sin\varphi = \frac{b}{|z|} \Longrightarrow b = |z|sin\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{a}{|z|} \Longrightarrow a = |z|cos\varphi$$

Wynika z tego możliwość przedstawienia liczby zespolonej $z = a + bi$ w postaci:

$$z = a + bi = |z|cos\varphi + i|z|sin\varphi = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$$

Twierdzenie 2.1.4. *Niech $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$. Zachodzi:*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\, z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + i\, sin(n\varphi))$$

Twierdzenie 2.1.5. *Niech $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$, $z = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$. Istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z. k-ty pierwiastek dany jest wzorem:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\, sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k \in \langle 0; n-1\rangle, k \in \mathbb{N}$$

Dowód. Niech $w = |w|(cos\alpha + i\, sin\alpha)$ będzie pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z. Zatem:

$$w^n = z$$

$$w^n = |w|^n(cos\, n\alpha + i\, sin\, n\alpha) = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$$

$$|w|^n = |z| \Longrightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$n\alpha = \varphi + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

□

Rozdział 3

Analiza matematyczna