Notatki: Elementy logiki i teorii mnogości

Adrian Startek

7 października 2018

1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1. *Zdanie logiczne: zdanie, któremu można przyporządkować wartość logiczną "prawda"(1) lub "fałsz"(0).*

Definicja 1.2. *Tautologia: zdanie logiczne, które zawsze jest prawdziwe.*

Definicja 1.3. *Funkcja zdaniowa $\phi(x)$: wyrażenie, które po podstawieniu konkretnej wartości x staje się zdaniem logicznym.*

Definicja 1.4. *Para uporządkowana (x,y): zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Elementem pierwszym w parze jest ten, który jest elementem obu zbiorów, co jednoznacznie określa kolejność.*

1.1 Oznaczenia zbiorów liczbowych

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczwistych

1.2 Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny. Wyrażenie "dla każdego x należącego do X zachodzi $\phi(x)$" oznacza się: $\forall_{x\in X}\ \phi(x)$

Kwantyfikator szczególny. Wyrażenie "istnieje x należący do X, dla którego zachodzi $\phi(x)$" oznacza się: $\exists_{x\in X}\ \phi(x)$

Zaprzeczenia kwantyfikatorów. Zachodzi:
$\neg[\,\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x)\,] \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x)$
$\neg[\,\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x)\,] \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x)$
$\neg[\,\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x) \vee \psi(x)\,] \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)$
$\neg[\,\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \phi(x) \wedge \psi(x)\,] \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\phi(x) \vee \neg\psi(x)$

2 Rachunek zdań logicznych

2.1 Ważniejsze operacje na zdaniach

Negacja Wartością negacji zdania logicznego jest wartość odwrotna do wartości tego zdania.

Tabela 1: Negacja

p	$\neg p$
0	1
1	0

Alternatywa Alternatywa przyjmuje wartość "prawda", jeśli co najmniej jedno ze zdań jest prawdziwe.

Tabela 2: Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Koniunkcja Koniunkcja przyjmuje wartość "prawda", tylko jeśli oba zdania są prawdziwe.

Tabela 3: Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implikacja Implikacja ($p \implies q$) jest prawdziwa, jeśli zarówno poprzednik (p) jak i następnik (q) są prawdziwe lub **poprzednik jest fałszywy (z fałszu wynika wszystko)**.

Tabela 4: Implikacja

p	q	$p \Longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Równoważność Równoważność przyjmuje wartość ”prawda” jeśli oba zdania mają tą samą wartość.

Tabela 5: Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Kreska Sheffera (NAND) Zaprzeczenie koniunkcji.

Tabela 6: NAND

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR Zaprzeczenie alternatywy.

Tabela 7: NOR

p	q	$pNORq$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Twierdzenie 2.1. *Za pomocą **NAND** lub **NOR** można wyrazić wszystkie inne funktory.*

2.2 Ważniejsze tautologie

$p \Longrightarrow p$ - prawo tożsamości
$p \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$ -prawo symplifikacji
$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$ - prawo podwójnej negacji
$p \vee \neg p$ - prawo wyłączonego środka
$(\neg p \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$
$\neg p \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$ - prawo Dunsa Szkota
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ - prawo De Morgana
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ - prawo De Morgana
$\neg(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$
$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

3 Rachunek zbiorów

3.1 Oznaczenia i definicje

Fakt należenia elementu x do zbioru A oznacza się przez $x \in A$. Analogicznie, "x nie należy do zbioru A" ocznacza się $x \notin A$.

Zbiór można definiować podając jego elementy wprost: $A = \{a, b, c\}$ lub zadając warunek na przynależność elementów do zbioru: $A = \{x \in X : \phi(x)\}$.

3.2 Operacje i zależności

Zawieranie. Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B), ozn. $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B:
$A \subset B \Leftrightarrow \forall_{x \in A}\, x \in B$

Równość. Zbiory A i B są równe, jeśli są one nawzajem swoimi podzbiorami:
$A = B \Leftrightarrow A \in B \wedge B \in A$

Działania na zbiorach. Definiuje się działania:
Suma zbiorów $A \cup B = \{\, x : x \in A \vee x \in B \,\}$
Iloczyn zbiorów $A \cap B = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\}$
Różnica zbiorów $A \setminus B = \{\, x : x \in A \wedge x \notin B \,\}$
Iloczyn kartezjański $A \times B = \{\, (a, b) : a \in A, b \in B \,\}$

Dopełnienie zbioru.

Definicja 3.1. *Dopełnieniem zbioru $A \subset C$ do zbioru C nazywa się zbiór wszystkich elementów należących do C, które nie należą do A:*
$\setminus A = \{\, x \in C : x \notin A \,\}$

Własności dopełnienia. Niech $A \subset X$, $B \subset X$. Wtedy:
$\setminus(\, A \cup B \,) = (\, \setminus A \,) \cap (\, \setminus B \,)$
$\setminus(\, A \cap B \,) = (\, \setminus A \,) \cup (\, \setminus B \,)$
$\setminus(\, \setminus A \,) = A$

3.3 Relacje.

Definicja 3.2. *Relacją nazywa się dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego skończonej liczby zbiorów.*

Niech R będzie relacją zadaną na $X \times X$ (tj. R jest relacją dwuargumentową, która przyjmuje za argumenty elementy X). Dodatkowo, niech xRy oznacza wyrażenie "pomiędzy x a y zachodzi relacja R". Wtedy:

R jest relacją zwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x \in X}\, xRx$

R jest relacją przeciwzwrotną $\Leftrightarrow \forall_{x\in X} \neg(xRx)$

R jest relacją symetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y\in X} (xRy \Longrightarrow yRx)$

R jest relacją słabo antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y\in X} (xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y)$

R jest relacją antysymetryczną $\Leftrightarrow \forall_{x,y\in X} (xRy \Longrightarrow \neg(yRx))$

R jest relacją przechodnią $\Leftrightarrow \forall_{x,y,z\in X} (xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz)$

R jest relacją spójną $\Leftrightarrow \forall_{x,y\in X} (xRy \vee yRx \vee y = x)$