Notatki: Algebra liniowa

Adrian Startek

17 października 2018

1 Działanie, grupa, ciało

Definicja 1.1. *Niech G będzie dowolnym zbiorem.* ***Działaniem*** *(dwuargumentowym) w zbiorze G nazywamy dowolne odwzorowanie $f : G \times G \to G$.*

Definicja 1.2. *Zbiór G z określonym działaniem $\circ$ - parę $(G, \circ)$ nazwiemy grupą, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. *Działanie $\circ$ jest łączne:*

$$\forall_{a,b,c \in G} \left[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \right]$$

2. *Istnieje element neutralny e:*

$$\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} (a \circ e = e \circ a = a)$$

3. *Dla każdego elementu a istnieje element odwrotny a^{-1}:*

$$\forall_{a \in G} \exists_{a^{-1} \in G} (a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$$

Jeżeli działanie $\circ$ jest dodatkowo przemienne, to $(G, \circ)$ nazwiemy ***grupą przemienną*** *lub* ***Abelową*** *(Niels Henrik Abel - matematyk norweski). Opuszczając natomiast warunek 3 (istnienie elementu odwrotnego) otrzymamy definicję struktury ogólniejszej, zwanej* ***półgrupą****.*

Twierdzenie 1.1. *Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą, to isteniej dokładnie 1 element neutralny.*

Dowód. Załóżmy, że $e, e' \in G$ są elementami neutralnymi. Wtedy:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e'$$

Co prowadzi do sprzeczności. □

Twierdzenie 1.2. *Jeśli g i h są elementami grupy spełniającymi $g \circ h = e$, to są one wzajemnie odwrotne.*

Twierdzenie 1.3. *Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą oraz $a \in G$ to istnieje dokładnie jeden element odwrotny a^{-1}.*

Definicja 1.3. *Zbiór G z określonymi działaniami "mnożenia" $\odot$ i "dodawania" $\oplus$ - trójkę $(G, \odot, \oplus)$ - nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są warunki:*

1. *Oba działania są przemienne:*

$$\forall_{a,b \in G} (a \oplus b = b \oplus a)$$

$$\forall_{a,b \in G} (a \odot b = b \odot a)$$

2. *Oba działania są łączne:*

$$\forall_{a,b,c\in G}\,[\,(\,a \oplus b\,) \oplus c = a \oplus (\,b \oplus c\,)\,]$$

$$\forall_{a,b,c\in G}\,[\,(\,a \odot b\,) \odot c = a \odot (\,b \odot c\,)\,]$$

3. *Istnieje element neutralny dodawania ("zero" $\mathbb{O}$) oraz element neutralny mnożenia ("jeden" $\mathbb{1}$)*

4. *Dla każdego elementu zbioru G istnieje element odwrotny względem dodawania:*

$$\forall_{a\in G}\,(\,a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = \mathbb{O}\,)$$

Dla każdego elementu, poza elementem neutralnym dodawania, istnieje element odwrotny względem mnożenia:

$$\forall_{a\in G, a\neq \mathbb{O}}\,(\,a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = \mathbb{1}\,)$$

5. *Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania:*

$$\forall_{a,b,c\in G}\,[\,a \odot (\,b \oplus c\,) = (\,a \odot b\,) \oplus (\,a \odot c\,)\,]$$

6. *Elementy neutralne działań są od siebie różne:*

$$\mathbb{O} \neq \mathbb{1}$$

1.1 Liczby zespolone

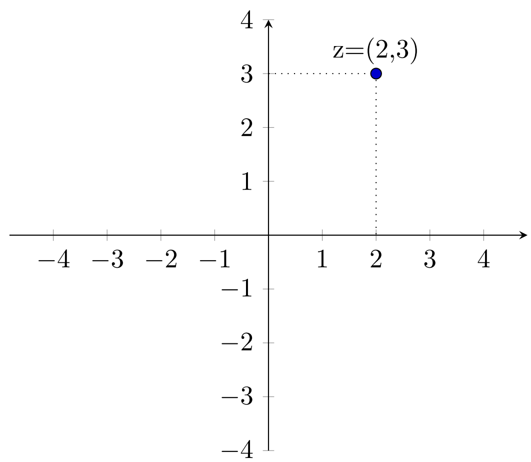
Definicja 1.4. *Niech $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Określmy działania $\oplus, \odot$:*

$$\oplus : (\,a, b\,) \oplus (\,c, d\,) = (\,a + c, b + d\,)$$

$$\odot : (\,a, b\,) \odot (\,c, d\,) = (\,ac - bd, ad + bc\,)$$

Trójkę $(\,G, \oplus, \odot\,)$ nazywamy ciałem liczb zespolonych.

Postać kartezjańska. Liczby zespolone posiadają naturalną interpretację geometryczną. Są one parami (uporządkowanymi) liczb rzeczywistych, więc można im przypisać punkty na płaszczyźnie. Liczbie $z = (\,a, b\,), z \in \mathbb{C}$ odpowiada punkt o odciętej a i rzędnej b. Płaszczyznę, na której w ten sposób przedstawiamy liczby zespolone nazywamy **płaszczyzną Gaussa**.



Postać kanoniczna. Podzbiór ciała $\mathbb{C}$ złożony z liczb postaci $(x, 0), x \in \mathbb{R}$, również jest ciałem. Odwzorowanie $x \to (x, 0)$ z $\mathbb{R}$ w rozważany podzbiór $\mathbb{C}$ zadaje izomorfizm ciał. Pozwala to na wprowadzenie utożsamienia $(x, 0) \equiv x$. Wprowadźmy oznaczenie $i := (0, 1)$ i nazwijmy ten element **jednostką urojoną**. Łatwo sprawdzić, że:

$$i^2 = (-1, 0) \equiv -1$$

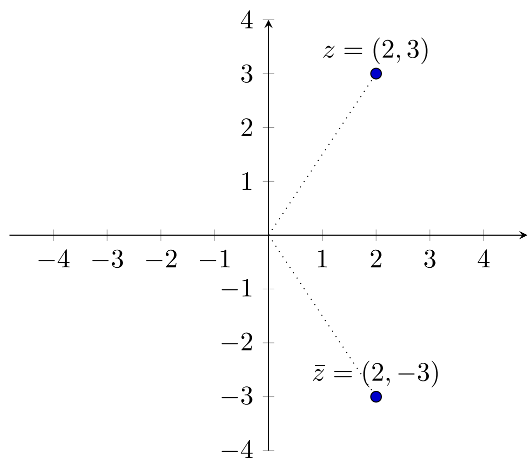
Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$ można przedstawić w postaci:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \equiv a + bi$$

Zapis liczby zespolonej z w postaci $z = a+bi$ nazywamy **postacią kanoniczną**. Liczbę $ain\mathbb{R}$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej i oznaczamy $\Re z$ (lub $Re(z)$). Analogicznie, liczbę $b \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią urojoną** i oznaczamy $\Im z$ (lub $Im(z)$).

Definicja 1.5. ***Liczbą sprzężoną*** *do liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę*

$$\bar{z} = a - bi$$



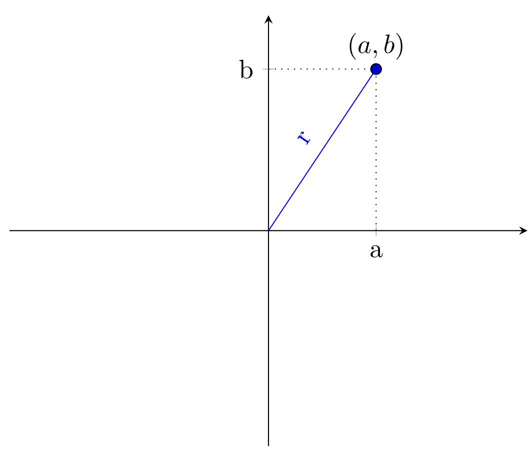
W interpretacji geometrycznej liczba sprzężona $\bar{z}$ jest odbiciem liczby z względem osi odciętych.

Postać trygonometryczna. Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną.

Definicja 1.6. ***Modułem*** *liczby zespolonej nazywamy liczbę*

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moduł można interpretować jako długość odcinka pomiędzy początkiem układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zespoloną.



Niech φ będzie kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą a odcinkiem łączącym początek układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zezpoloną. Zachodzi wtedy:

$$r = |z|$$

$$sin\varphi = \frac{b}{|z|} \Longrightarrow b = |z|sin\varphi$$
$$cos\varphi = \frac{a}{|z|} \Longrightarrow a = |z|cos\varphi$$

Wynika z tego możliwość przedstawienia liczby zespolonej $z = a + bi$ w postaci:

$$z = a + bi = |z|cos\varphi + i|z|sin\varphi = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$$

Twierdzenie 1.4. *Niech $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$. Zachodzi:*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + i\, sin(n\varphi))$$

Twierdzenie 1.5. *Niech $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$, $z = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$. Istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z. k-ty pierwiastek dany jest wzorem:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\, sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k \in \langle 0; n-1\rangle, k \in \mathbb{N}$$

Dowód. Niech $w = |w|(cos\alpha + i\, sin\alpha)$ będzie pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z. Zatem:

$$w^n = z$$
$$w^n = |w|^n(cos\, n\alpha + i\, sin\, n\alpha) = |z|(cos\varphi + i\, sin\varphi)$$
$$|w|^n = |z| \Longrightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$n\alpha = \varphi + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

□