

Notatki - Matematyka

Adrian Startek

Studia I stopnia

Spis treści

Część I

Semestr I

Rozdział 1

Elementy logiki i teorii mnogości

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1.1. *Zdanie logiczne: zdanie, któremu można przyporządkować wartość logiczną "prawda"(1) lub "fałsz"(0).*

Definicja 1.1.2. *Tautologia: zdanie logiczne, które zawsze jest prawdziwe.*

Definicja 1.1.3. *Funkcja zdaniowa $\phi(x)$: wyrażenie, które po podstawieniu konkretnej wartości x staje się zdaniem logicznym.*

Definicja 1.1.4. *Para uporządkowana (x,y) : zbiór $\{\{x\},\{x,y\}\}$. Elementem pierwszym w parze jest ten, który jest elementem obu zbiorów, co jednoznacznie określa kolejność.*

1.1.1 Zbiory liczbowe

\mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych

\mathbb{Z} - zbiór liczb całkowitych

\mathbb{Q} - zbiór liczb wymiernych

\mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych

Fakt należenia elementu x do zbioru A oznacza się przez $x \in A$. Analogicznie, "x nie należy do zbioru A " oznacza się $x \notin A$.

Zbiór można definiować podając jego elementy wprost: $A = \{a, b, c\}$ lub zadając warunek na przynależność elementów do zbioru: $A = \{x \in X : \phi(x)\}$.

1.1.2 Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny. Wyrażenie "dla każdego x należącego do X zachodzi $\phi(x)$ " oznacza się: $\forall_{x \in X} \phi(x)$

Kwantyfikator szczególny. Wyrażenie "istnieje x należący do X , dla którego zachodzi $\phi(x)$ " oznacza się: $\exists_{x \in X} \phi(x)$

Zaprzeczenia kwantyfikatorów. Zachodzi:

$$\neg[\forall_{x \in \mathbb{R}} \phi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x)$$

$$\neg[\exists_{x \in \mathbb{R}} \phi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x)$$

$$\neg[\forall_{x \in \mathbb{R}} \phi(x) \vee \psi(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)$$

$$\neg[\exists_{x \in \mathbb{R}} \phi(x) \wedge \psi(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \neg\phi(x) \vee \neg\psi(x)$$

1.2 Rachunek zdań logicznych

1.2.1 Ważniejsze operacje na zdaniach

Negacja Wartością negacji zdania logicznego jest wartość odwrotna do wartości tego zdania.

Tabela 1.1: Negacja

p	$\neg p$
0	1
1	0

Alternatywa Alternatywa przyjmuje wartość "prawda", jeśli co najmniej jedno ze zdań jest prawdziwe.

Tabela 1.2: Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela 1.3: Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Koniunkcja Koniunkcja przyjmuje wartość "prawda", tylko jeśli oba zdania są prawdziwe.

Implikacja Implikacja ($p \implies q$) jest prawdziwa, jeśli zarówno poprzednik (p) jak i następnik (q) są prawdziwe lub **poprzednik jest fałszywy (z fałszu wynika wszystko)**.

Tabela 1.4: Implikacja

p	q	$p \implies q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Równoważność Równoważność przyjmuje wartość "prawda" jeśli oba zdania mają tę samą wartość.

Tabela 1.5: Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Kreska Sheffera (NAND) Zaprzeczenie koniunkcji.

NOR Zaprzeczenie alternatywy.

Twierdzenie 1.2.1. *Za pomocą **NAND** lub **NOR** można wyrazić wszystkie inne funktory.*

Tabela 1.6: NAND

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela 1.7: NOR

p	q	$p \text{ NOR } q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1.2.2 Ważniejsze tautologie

$$p \implies p \quad \text{(prawo tożsamości)}$$

$$p \implies (q \implies p) \quad \text{(prawo symplifikacji)}$$

$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p) \quad \text{(prawo podwójnej negacji)}$$

$$p \vee \neg p \quad \text{(prawo wyłączonego środka)}$$

$$(\neg p \implies p) \implies p$$

$$\neg p \implies (p \implies q) \quad \text{(prawo Dunsza Szkota)}$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \quad \text{(prawo De Morgana)}$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \quad \text{(prawo De Morgana)}$$

$$\neg(p \implies q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$$

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

1.3 Rachunek zbiorów

1.3.1 Operacje i zależności

Zawieranie. Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B), ozn. $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall_{x \in A} x \in B$$

Równość. Zbiory A i B są równe, jeśli są one nawzajem swoimi podzbiórami:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Działania na zbiorach. Definiuje się działania:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad (\text{Suma zbiorów})$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \quad (\text{Iloczyn zbiorów})$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad (\text{Różnica zbiorów})$$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad (\text{Iloczyn kartezjański})$$

Dopełnienie zbioru.

Definicja 1.3.1. Dopełnieniem zbioru $A \subset C$ do zbioru C nazywa się zbiór wszystkich elementów należących do C , które nie należą do A :

$$\setminus A = \{x \in C : x \notin A\}$$

Własności dopełnienia. Niech $A \subset X, B \subset X$. Wtedy:

$$\setminus(A \cup B) = (\setminus A) \cap (\setminus B)$$

$$\setminus(A \cap B) = (\setminus A) \cup (\setminus B)$$

$$\setminus(\setminus A) = A$$

1.3.2 Relacje.

Definicja 1.3.2. Relacją nazywa się dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego skończonej liczby zbiorów.

Niech R będzie relacją zadaną na $X \times X$ (tj. R jest relacją dwuargumentową, która przyjmuje za argumenty elementy X). Dodatkowo, niech xRy oznacza wyrażenie "pomiędzy x a y zachodzi relacja R ". Wtedy:

$$R \text{ jest relacją zwrotną} \Leftrightarrow \forall_{x \in X} xRx$$

$$R \text{ jest relacją przeciwzwrotną} \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \neg(xRx)$$

$$R \text{ jest relacją symetryczną} \Leftrightarrow \forall_{x, y \in X} (xRy \Rightarrow yRx)$$

$$R \text{ jest relacją słabo antysymetryczną} \Leftrightarrow \forall_{x, y \in X} (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$

$$R \text{ jest relacją antysymetryczną} \Leftrightarrow \forall_{x, y \in X} (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$$

$$R \text{ jest relacją przechodnią} \Leftrightarrow \forall_{x, y, z \in X} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

$$R \text{ jest relacją spójną} \Leftrightarrow \forall_{x, y \in X} (xRy \vee yRx \vee x = y)$$

Rozdział 2

Algebra liniowa

2.1 Działanie, grupa, ciało

Definicja 2.1.1. Niech G będzie dowolnym zbiorem. **Działaniem** (dwuargumentowym) w zbiorze G nazywamy dowolne odwzorowanie $f : G \times G \rightarrow G$.

Definicja 2.1.2. Zbiór G z określonym działaniem \circ - parę (G, \circ) nazwiemy grupą, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Działanie \circ jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in G} [(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$$

2. Istnieje element neutralny e :

$$\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} (a \circ e = e \circ a = a)$$

3. Dla każdego elementu a istnieje element odwrotny a^{-1} :

$$\forall_{a \in G} \exists_{a^{-1} \in G} (a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$$

Jeżeli działanie \circ jest dodatkowo przemienne, to (G, \circ) nazwiemy **grupą przemenną** lub **Abelową** (Niels Henrik Abel - matematyk norweski). Opuszczając natomiast warunek 3 (istnienie elementu odwrotnego) otrzymamy definicję struktury ogólniejszej, zwanej **półgrupą**.

Twierdzenie 2.1.1. Jeśli (G, \circ) jest grupą, to istnieje dokładnie 1 element neutralny.

Dowód. Załóżmy, że $e, e' \in G$ są elementami neutralnymi. Wtedy:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e'$$

Co prowadzi do sprzeczności. □

Twierdzenie 2.1.2. *Jeśli g i h są elementami grupy spełniającymi $g \circ h = e$, to są one wzajemnie odwrotne.*

Twierdzenie 2.1.3. *Jeśli (G, \circ) jest grupą oraz $a \in G$ to istnieje dokładnie jeden element odwrotny a^{-1} .*

Definicja 2.1.3. *Zbiór G z określonymi działaniami "mnożenia" \odot i "dodawania" \oplus - trójkę (G, \odot, \oplus) - nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są warunki:*

1. *Oba działania są przemienne:*

$$\forall_{a,b \in G} (a \oplus b = b \oplus a)$$

$$\forall_{a,b \in G} (a \odot b = b \odot a)$$

2. *Oba działania są łączne:*

$$\forall_{a,b,c \in G} [(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)]$$

$$\forall_{a,b,c \in G} [(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)]$$

3. *Istnieje element neutralny dodawania ("zero" $\mathbf{0}$) oraz element neutralny mnożenia ("jeden" $\mathbf{1}$)*

4. *Dla każdego elementu zbioru G istnieje element odwrotny względem dodawania:*

$$\forall_{a \in G} (a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = \mathbf{0})$$

Dla każdego elementu, poza elementem neutralnym dodawania, istnieje element odwrotny względem mnożenia:

$$\forall_{a \in G, a \neq \mathbf{0}} (a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = \mathbf{1})$$

5. *Zachodzi rozdzielnosc mnożenia względem dodawania:*

$$\forall_{a,b,c \in G} [a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)]$$

6. *Elementy neutralne działań są od siebie różne:*

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$$

2.1.1 Liczby zespolone

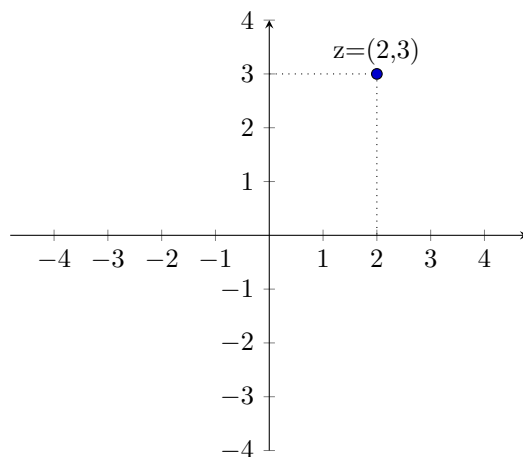
Definicja 2.1.4. *Niech $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Określmy działania \oplus, \odot :*

$$\oplus : (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\odot : (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Trójkę (G, \oplus, \odot) nazywamy ciałem liczb zespolonych.

Postać kartezjańska. Liczby zespolone posiadają naturalną interpretację geometryczną. Są one parami (uporządkowanymi) liczb rzeczywistych, więc można im przypisać punkty na płaszczyźnie. Liczbie $z = (a, b)$, $z \in \mathbb{C}$ odpowiada punkt o odciętej a i rzędnej b . Płaszczyznę, na której w ten sposób przedstawiamy liczby zespolone nazywamy **płaszczyzną Gaussa**.



Postać kanoniczna. Podzbiór ciała \mathbb{C} złożony z liczb postaci $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, również jest ciałem. Odwzorowanie $x \rightarrow (x, 0)$ z \mathbb{R} w rozważany podzbiór \mathbb{C} zadaje izomorfizm ciał. Pozwala to na wprowadzenie utożsamienia $(x, 0) \equiv x$. Wprowadźmy oznaczenie $i := (0, 1)$ i nazwijmy ten element **jednostką urojoną**. Łatwo sprawdzić, że:

$$i^2 = (-1, 0) \equiv -1$$

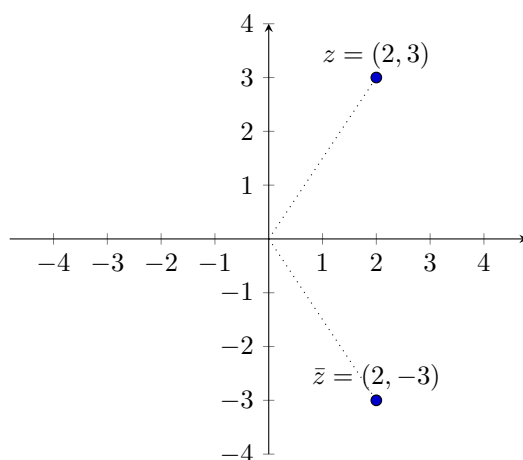
Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$ można przedstawić w postaci:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \equiv a + bi$$

Zapis liczby zespolonej z w postaci $z = a + bi$ nazywamy **postacią kanoniczną**. Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej i oznaczamy $\Re z$ (lub $\operatorname{Re}(z)$). Analogicznie, liczbę $b \in \mathbb{R}$ nazywamy **częścią urojoną** i oznaczamy $\Im z$ (lub $\operatorname{Im}(z)$).

Definicja 2.1.5. *Liczbą sprzężoną do liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę*

$$\bar{z} = a - bi$$



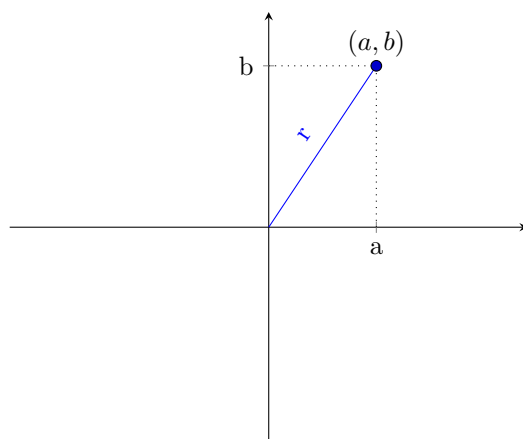
W interpretacji geometrycznej liczba sprzężona \bar{z} jest odbiciem liczby z względem osi odciętych.

Postać trygonometryczna. Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną.

Definicja 2.1.6. *Modułem liczby zespolonej nazywamy liczbę*

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moduł można interpretować jako długość odcinka pomiędzy początkiem układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zespoloną.



Niech φ będzie kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą a odcinkiem łączącym początek układu współrzędnych a punktem reprezentującym liczbę zespoloną. Zachodzi wtedy:

$$r = |z|$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} \implies b = |z| \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \implies a = |z| \cos \varphi$$

Wynika z tego możliwość przedstawienia liczby zespolonej $z = a + bi$ w postaci:

$$z = a + bi = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Twierdzenie 2.1.4. Niech $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Zachodzi:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Twierdzenie 2.1.5. Niech $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Istnieje dokładnie n pierwiastków n -tego stopnia z liczby z . k -ty pierwiastek dany jest wzorem:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k \in \langle 0; n-1 \rangle, k \in \mathbb{N}$$

Dowód. Niech $w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ będzie pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby z . Zatem:

$$w^n = z$$

$$w^n = |w|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$|w|^n = |z| \implies |w| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$n\alpha = \varphi + 2k\pi \implies \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

□

Rozdział 3

Analiza matematyczna