NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for teknisk kybernetikk

Eksamensoppgave i TTK4205 Mønstergjenkjenning

Faglig kontakt under eksamen: Idar Dyrdal
Tlf.: 99 57 97 53

Eksamensdato: 15.12.2016
Eksamenstid (fra-til): 09:00-13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D / Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: Bokmål
Antall sider (uten forside): 3
Antall sider vedlegg: 0

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:

1-sidig □ **2-sidig** □

sort/hvit □ **farger** □

skal ha flervalgskjema □

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppg. 1

Innledning

a) Skissér et typisk mønstergjenkjenningssystem, og forklar hva som menes med begrepene *egenskapsuttrekking* og *klassifisering*.

b) Gi et eksempel på et slikt system.

c) Forklar hva som menes med en *beslutningsregel* (desisjonsregel), og gi et eksempel på en slik regel.

d) Forklar hva som menes med *ledet læring*, og nevn noen hovedprinsipper for å komme frem til en beslutningsregel ved ledet læring.

Oppg. 2

Bayesisk beslutningsteori

a) Forklar hva som menes med klassebetinget tetthetsfunksjon, á priori sannsynlighet og á posteriori sannsynlighet, og sett opp *Bayes regel* (Bayes formel) for sammenhengen mellom disse størrelsene.

b) Formulér *minimum-feilrate prinsippet* for klassifisering, og sett opp den tilhørende beslutningsregelen uttrykt ved á posteriori sannsynligheter.

c) I et éndimensjonalt klassifiseringsproblem med to klasser ω_1 og ω_2 er sannsynlighetstetthetsfunksjonene gitt ved de univariate normalfordelingene

$$p(x|\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right], \quad i = 1,2,$$

der μ_1 og μ_2 er forventningsverdiene og σ_1 og σ_2 er standardavvikene til de klassebetingede tetthetsfunksjonene. La klassenes á priori sannsynligheter være gitt ved $P(\omega_1)$ og $P(\omega_2)$. Anta at $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (samme standardavvik for begge klasser), og vis at terskelen x_0 som minimaliserer feilraten kan uttrykkes ved

$$x_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}.$$

d) Lag en skisse som illustrerer feilraten og viser plasseringen av desisjonsgrensen for et tilfelle med like á priori sannsynligheter. Hva er terskelverdien i dette tilfellet?

e) Hva blir terskelverdien, uttrykt ved standardavviket og forventningsverdiene, dersom $P(\omega_1) = 1/4$ og $P(\omega_2) = 3/4$?

Oppg. 3

Diskriminantfunksjoner

a) Hva menes med diskriminantfunksjoner, og hvordan brukes slike funksjoner i forbindelse med klassifisering? Sett opp en generell beslutningsregel uttrykt ved diskriminantfunksjoner.

b) I et *todimensjonalt* klassifiseringsproblem med tre klasser, er klassene antatt å være bivariat normalfordelte slik at de klassebetingede tetthetsfunksjonene er gitt ved

$$p(\boldsymbol{x}|\omega_i) = \frac{1}{2\pi|\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_i)^t\Sigma_i^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_i)\right]$$

for hver klasse ω_i, $i = 1,2,3$. La klassene ha like kovariansmatriser, slik at

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

og la forventningsvektorene være

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\mu}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Utled et sett av diskriminantfunksjoner for dette problemet, med utgangspunkt i minimumfeilrate prinsippet. Anta like á priori sannsynligheter for de tre klassene.

c) Hvilken form har desisjonsgrensene mellom klassene i dette tilfellet, og hvor mange desisjonsregioner gir de opphav til?

d) Bruk diskriminantfunksjonene til å klassifisere et ukjent objekt representert ved egenskapsvektoren

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oppg. 4

Parametriske metoder

a) Beskriv *maksimum-likelihood* (ML) metoden for estimering av parametervektoren $\boldsymbol{\theta}$ i en gitt tetthetsfunksjon $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ ved ledet læring, og vis at estimatet kan finnes ved å løse likningssystemet

$$\sum_{k=1}^{n} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{0}$$

med hensyn på $\boldsymbol{\theta}$, der $\boldsymbol{x}_k$, $k = 1,\ldots,n$ er et sett av treningssampler.

b) Finn ML-estimatet av parameteren θ i Maxwellfordelingen

$$p(x|\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^{3/2}x^2e^{-\theta x^2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \quad \text{der } \theta > 0.$$

La estimatet være basert på et treningssett $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ med n univariate sampler.

c) Gjør kort rede for hva som skiller Bayesisk estimering fra maksimum-likelihood estimering.

Oppg. 5

Ikke-parametriske metoder

a) Beskriv prinsippet for *ikke-parametrisk* tetthetsestimering, og sett opp et estimat for sannsynlighetstettheten i et vilkårlig punkt $\boldsymbol{x}$ i egenskapsrommet, basert på et treningssett med n sampler fra en gitt klasse.

b) Vis hvordan man kan komme frem til *k-nærmeste-nabo* regelen (k-NNR) ved å estimere á posteriori sannsynlighet for hver klasse ved hjelp av treningssampler fra alle klasser i problemet.

c) Formulér *nærmeste-nabo* regelen (NNR), og gi en enkel sammenheng mellom den asymptotiske (Bayesiske) feilraten til NNR og den optimale feilraten.

d) Nevn noen fordeler og ulemper ved ikke-parametriske metoder, sammenliknet med parametriske metoder.