Øvingsoppgaver
TEK5020/9020 – Mønstergjenkjenning
Del 1 – Beslutningsteori

Høsten 2023

Oppgave 1

a) I mange mønstergjenkjenningsproblemer er det ønskelig å enten foreta en klassifisering til en av c mulige klasser, eller å betrakte objektet som ugjenkjennelig og *forkaste* det. Hvis kostnaden ved å forkaste ikke er for høy, kan dette være det mest ønskelige alternativet. La kostfunksjonen være gitt ved

$$\lambda(\alpha_i|\omega_j) = \begin{cases} 0 & i = j \quad i, j = 1, \ldots, c \\ \lambda_r & i = c+1 \\ \lambda_s & \text{ellers,} \end{cases}$$

der λ_r er kostnaden ved å velge handling $c+1$ (forkasting) og λ_s er kostnaden ved feilklassifisering. Vis at minimum risk oppnås ved å velge ω_i dersom $P(\omega_i|\boldsymbol{x}) \geq P(\omega_j|\boldsymbol{x})$ for alle j og $P(\omega_i|\boldsymbol{x}) \geq 1 - \lambda_r/\lambda_s$, og forkast ellers. Hva skjer hvis $\lambda_r = 0$? Hva skjer dersom $\lambda_r > \lambda_s$?

Oppgave 2

Anta en multivariat normalfordeling der $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$ og $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$. Vis at fordelingen kan skrives som

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{d} \sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right]$$

Beskriv konturene med konstant tetthet og sett opp et uttrykk for Mahalanobisavstanden mellom $\boldsymbol{x}$ og forventningsvektoren $\boldsymbol{\mu}$.

Oppgave 3

La fordelingsfunksjonene for et d-dimensjonalt toklasseproblem med a posteriori sannsynlighetene $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2$ være gitt ved

$$p(\boldsymbol{x}|\omega_i) \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \sigma^2 I).$$

Vis at den minimale feilraten kan skrives som

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u,$$

der $a = ||\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1||/2\sigma$. La $\boldsymbol{\mu}_1 = 0$ og $\boldsymbol{\mu}_2 = (\mu, \ldots, \mu)^t$, og bruk ulikheten

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2/2} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-a^2/2}$$

til å vise at P_e går mot null når d går mot uendelig. Uttrykk resultatet med ord.

Oppgave 4

La fordelingsfunksjonene i et d-dimensjonalt toklasseproblem med vilkårlige a priori sannsynligheter være gitt ved $p(\boldsymbol{x}|\omega_i) \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma)$ (dvs. felles kovariansmatrise). Den kvadrerte Mahalanobisavstanden er gitt ved

$$r_i^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^t \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i).$$

a) Vis at gradienten til r_i^2 er gitt ved

$$\nabla r_i^2 = 2\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i).$$

b) Vis at ∇r_i^2 har samme orientering i alle punkt på en hvilken som helst linje gjennom $\boldsymbol{\mu}_i$.
c) Vis at ∇r_1^2 og ∇r_2^2 peker i motsatt retning i alle punkt langs linjen fra $\boldsymbol{\mu}_1$ til $\boldsymbol{\mu}_2$.
d) Vis at det optimalt separerende hyperplanet er tangent til ellipsoidene med konstant tetthet i punktet der det separerende hyperplanet skjærer linjen fra $\boldsymbol{\mu}_1$ til $\boldsymbol{\mu}_2$.

Oppgave 5

La komponentene i egenskapsvektoren $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)^t$ være binære (1 eller 0). La $P(\omega_j)$ være a priori sannsynlighet for klasse ω_j, der $j = 1, \ldots, c$, og la p_{ij} være sannsynligheten for at egenskap x_i skal være lik 1 gitt at klassen er ω_j, dvs.:

$$p_{ij} = P(x_i = 1|\omega_j), i = 1, \ldots, d, \; j = 1, \ldots, c,$$

der komponentene x_i er stokastisk uavhengige for alle $\boldsymbol{x}$ i ω_j. Vis at minimum feilrate oppnås ved følgende beslutningsregel:

Velg ω_k hvis $g_k(\boldsymbol{x}) \geq g_j(\boldsymbol{x}) \forall j$ der

$$g_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^d x_i \ln\left(\frac{p_{ij}}{1 - p_{ij}}\right) + \sum_{i=1}^d \ln(1 - p_{ij}) + \ln P(\omega_j).$$