# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

**Eksamen i: TEK5020 - Mønstergjenkjenning**
**Eksamensdag: 2.12.2019**
**Tid for eksamen: 09:15 – 13:15**
**Oppgavesettet er på 4 sider**
**Vedlegg: Ingen**
**Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.**

*Kontroller at oppgavesettet er komplett*
*før du begynner å besvare spørsmålene.*

**Oppgave 1**

Innledning

a) Beskriv et typisk mønstergjenkjenningssystem og forklar hva som menes med begrepene *egenskapsuttrekking* og *klassifisering*.

b) Forklar hva som menes med begrepene *ledet læring* og *ikke-ledet læring*, og gjør rede for i hvilke situasjoner man bruker den ene eller andre fremgangsmåten.

c) Forklar hva som menes med en *beslutningsregel* (desisjonsregel) og gi et eksempel på en slik regel.

d) Nevn noen hovedprinsipper som kan brukes for å komme frem til en beslutningsregel ved ledet læring.

**Oppgave 2**

Beslutningsteori

a) Sett opp *Bayes regel* (Bayes formel) for aposteriori sannsynlighet og forklar størrelsene som inngår.

b) Formulér *minimum-feilrate* prinsippet for klassifisering.

c) I et univariat (éndimensjonalt) toklasseproblem (der antall klasser $c = 2$) er sannsynlighetstetthetsfunksjonene gitt ved de univariate normalfordelingene $N(0, \sigma^2)$ for klasse $\omega_1$ og $N(1, \sigma^2)$ for $\omega_2$. Videre er klassenes apriori sannsynligheter gitt ved $P(\omega_1)$ og $P(\omega_2)$. Vis at terskelen $x_0$ som minimaliserer feilraten kan uttrykkes ved

$$x_0 = \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}.$$

d) Lag en skisse som illustrerer feilraten og viser plasseringen av desisjonsgrensen for et tilfelle med like apriori sannsynligheter. Hva er terskelverdien i dette tilfellet?

e) Hva blir terskelen $x_0$, uttrykt ved standardavviket $\sigma$, dersom $P(\omega_1) = 1/3$ og $P(\omega_2) = 2/3$?

**Oppgave 3**

Parametriske metoder

a) Beskriv *maksimum-likelihood* (ML) metoden for estimering av parametervektoren $\boldsymbol{\theta}$ i en gitt tetthetsfunksjon $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ ved ledet læring, og vis at estimatet kan finnes ved å løse likningssystemet

$$\sum_{k=1}^{n} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

med hensyn på $\boldsymbol{\theta}$, der $\boldsymbol{x}_k$, $k = 1,\ldots,n$ er egenskapsvektorene i treningssettet.

b) Finn ML-estimatet av parameteren $\theta$ i den univariate eksponentialfordelingen gitt ved

$$p(x|\theta) = \begin{cases} \theta\, \mathrm{e}^{-\theta x} & x \geq 0 \\ 0 & \textit{ellers}, \end{cases}$$

der $\theta > 0$ og treningssettet er gitt ved $\mathscr{X} = \{x_1,\ldots,x_n\}$.

**Oppgave 4**

Diskriminantfunksjoner

a) Hva menes med diskriminantfunksjoner, og hvordan brukes slike funksjoner i forbindelse med klassifisering?

b) I et todimensjonalt klassifiseringsproblem med tre klasser, er de klassebetingede tetthetsfunksjonene antatt å være multivariate normalfordelinger

$$p(\boldsymbol{x}|\omega_i) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_i)^t \Sigma_i^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_i)\right], \quad i = 1,2,3.$$

Anta videre at kovariansmatrisene er like for alle klasser, dvs. $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma$, der

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

og at forventningsvektorene for klassene er

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\mu}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Utled et sett av diskriminantfunksjoner for dette problemet. Ta utgangspunkt i minimum-feilrate prinsippet og anta like apriori sannsynligheter for de tre klassene.

c) Hvorfor er diskriminantfunksjonene *lineære* i dette tilfellet, og hvor mange desisjonsregioner gir de opphav til?

d) Bruk diskriminantfunksjonene til å klassifisere et ukjent objekt representert ved egenskapsvektoren

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 5**

Ikke-parametriske metoder

a) Beskriv prinsippet for *ikke-parametrisk* tetthetsestimering og sett opp et estimat for sannsynlighetstettheten i et vilkårlig punkt $\boldsymbol{x}$ i egenskapsrommet, basert på et treningssett med $n$ egenskapsvektorer trukket fra den klassen tettheten skal estimeres for.

b) Gjør rede for hvordan slike estimater kan brukes til klassifisering av ukjente sampler, og nevn to hovedtyper av metoder.

c) Beskriv *nærmeste-nabo regelen* (NNR) og *k-nærmeste-nabo regelen* (k-NNR) for klassifisering.

d) For et todimensjonalt klassifiseringsproblem med tre klasser $\omega_1$, $\omega_2$ og $\omega_3$ er treningssettet gitt ved

$$\mathscr{X}_1 = \left\{ \begin{bmatrix}1\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} \right\} \quad \text{(egenskapsvektorer fra } \omega_1\text{)},$$

$$\mathscr{X}_2 = \left\{ \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix} \right\} \quad \text{(egenskapsvektorer fra } \omega_2\text{)}$$

og

$$\mathscr{X}_3 = \left\{ \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} \right\} \quad \text{(egenskapsvektorer fra } \omega_3\text{)}.$$

Bruk NNR til å klassifisere et ukjent objekt i punktet $[4,6]^t$ i egenskapsrommet. Hva blir resultatet med k-NNR der $k = 3$? Bruk Euclidsk avstand i egenskapsrommet.

e) Gi en kortfattet redegjørelse for fordeler og ulemper ved ikke-parametriske metoder.