TEK5020/9020 – Mønstergjenkjenning
Høsten 2023

Løsningsforslag – Øvingsoppgaver 3

Idar Dyrdal (idar.dyrdal@its.uio.no)

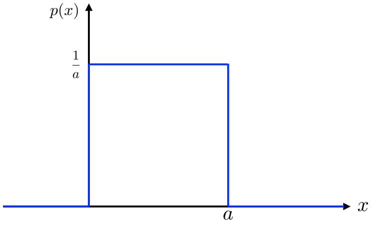
UiO : Institutt for teknologisystemer

23. august 2023

Oppgave 1

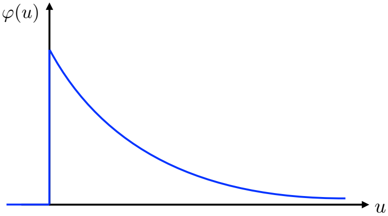
Her er tetthetsfunksjonen gitt ved

$$p(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ \dfrac{1}{a}\,, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0\,, & x > a \end{cases}$$



og vindufunksjonen ved

$$\varphi(u) = \begin{cases} e^{-u} & , \quad u > 0 \\ 0 & , \quad u \leqslant 0 \end{cases}$$



Oppgave 1 (forts.)

Midlere Parzen-estimat er generelt gitt ved

$$\tilde{p}_n(\boldsymbol{x}) = E\left\{p_n(\boldsymbol{x})\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left\{\frac{1}{V_n}\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i}{h_n}\right)\right\} = \int \frac{1}{V_n}\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}}{h_n}\right)p(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

som i denne oppgaven reduseres til

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{ah_n}\int_0^a \varphi\left(\frac{x-v}{h_n}\right)\mathrm{d}v.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
x < 0 \quad &: \quad \tilde{p}_n(x) = 0, \quad \text{siden } \varphi(u) = 0 \text{ for } x \leqslant v,\\
0 \leqslant x \leqslant a \quad &: \quad \tilde{p}_n(x) = \frac{1}{ah_n}\int_0^x e^{-\left(\frac{x-v}{h_n}\right)}\mathrm{d}v = \frac{1}{a}\Big|_0^x e^{\frac{v-x}{h_n}} = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-\frac{x}{h_n}}\right),\\
a < x \quad &: \quad \tilde{p}_n(x) = \frac{1}{ah_n}\int_0^a e^{-\left(\frac{x-v}{h_n}\right)}\mathrm{d}v = \frac{1}{a}\Big|_0^a e^{\frac{v-x}{h_n}} = \frac{1}{a}\left(e^{\frac{a}{h_n}} - 1\right)e^{-\frac{x}{h_n}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 1 (forts.)

Avvik $< 1\%$ over 99% av intervallet $0 \leqslant x \leqslant a$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{p}_n\left(\frac{a}{100}\right) > \left(1 - \frac{1}{100}\right)\frac{1}{a}$$

$$\Downarrow$$

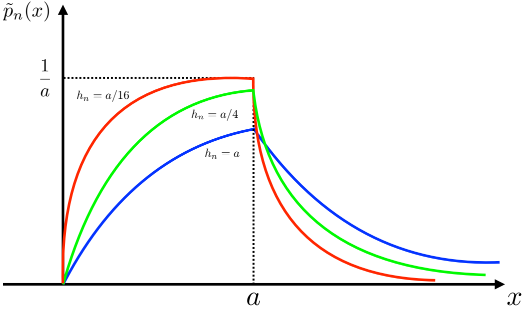
$$\frac{1}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{100h_n}}\right) > \left(1 - \frac{1}{100}\right)\frac{1}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\frac{a}{100h_n}} < \frac{1}{100}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{h_n < \frac{a}{100\ln 100} \approx \frac{a}{461}}}$$



Oppgave 2

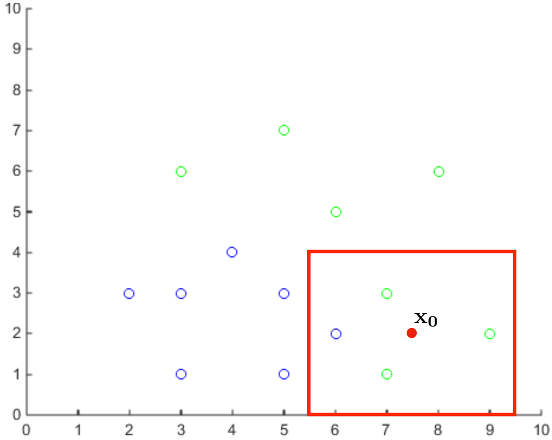
Figuren viser datasettet i oppgaven:

- Blå sirkler er sampler fra ω_1,
- Grønne sirkler er sampler fra ω_2.

Den røde sirkelen er det ukjente samplet i punktet

$$\boldsymbol{x}_0 = [7.5, 2.0]^t,$$

omsluttet av et kvadratisk vindu (i rødt) med side $h = 4$.



Oppgave 2a

Parzen-estimetet av tettheten i $[7.5, 2.0]^t$ skal beregnes for hver av klassene.

Klasse ω_1 har ett sample innenfor regionen (kvadratet med side $h = 4$), mens ω_2 har tre representanter innenfor.

Tetthetsestimatene blir da

$$p_n(\mathbf{x}_0|\omega_1) = \frac{k_n/n}{V_n} = \frac{1/7}{4^2} = \underline{\underline{1/112}}$$

og

$$p_n(\mathbf{x}_0|\omega_2) = \frac{k_n/n}{V_n} = \frac{3/7}{4^2} = \underline{\underline{3/112}}.$$

Oppgave 2b

Det ukjente samplet representert ved egenskapsvektoren $\boldsymbol{x}_0$ skal klassifiseres ved å bruke disse estimatene. Med apriorisannsynlighetene $P(\omega_1) = 0.8$ og $P(\omega_2) = 0.2$ blir estimatene av de a posteriori sannsynlighetene for klassene henholdsvis

$$P_n(\omega_1|\boldsymbol{x}_0) = \frac{p_n(\boldsymbol{x}_0|\omega_1)P(\omega_1)}{p_n(\boldsymbol{x}_0|\omega_1)P(\omega_1) + p_n(\boldsymbol{x}_0|\omega_2)P(\omega_2)} = \frac{(1/112)0.8}{(1/112)0.8 + (3/112)0.2} = \underline{\underline{4/7}}$$

og

$$P_n(\omega_2|\boldsymbol{x}_0) = \frac{p_n(\boldsymbol{x}_0|\omega_2)P(\omega_2)}{p_n(\boldsymbol{x}_0|\omega_1)P(\omega_1) + p_n(\boldsymbol{x}_0|\omega_2)P(\omega_2)} = \frac{(3/112)0.2}{(1/112)0.8 + (3/112)0.2} = \underline{\underline{3/7}}.$$

Samplet klassifiseres derfor til klasse ω_1, siden den estimerte aposteriorisannsynligheten for denne klassen er størst.

Oppgave 3

Treningssettet for det univariate toklasseproblemet består av følgende 5 sampler fra hver klasse:

$$\mathscr{X}_1 = \{1.0, 2.9, 4.2, 5.1, 7.3\} \text{ fra klasse } \omega_1 \text{ og}$$
$$\mathscr{X}_2 = \{5.4, 7.9, 8.8, 9.8, 11.2\} \text{ fra klasse } \omega_2.$$

a) De tre nærmeste samplene til $x_0 = 6.1$ er 5.1 og 7.3 fra ω_1 og 5.4 fra ω_2. Det ukjente samplet representert ved x_0 blir derfor klassifisert til ω_1 med k-NNR (der $k = 3$), siden denne klassen har flest representanter blant de tre nærmeste naboene.

b) Den nærmeste naboen til $x_0 = 6.1$ er samplet 5.4 fra ω_2. NNR vil derfor velge ω_2.