Eksamen Unik4590/TTK4205 14.12.2010

Oppgave 1: Innledning

Se lærebok.

Oppgave 2: Bayesisk desisjonsteori

a) Et naturlig valg for diskriminantfunksjonene er:

$$g_i(\bar{x}) = \ln P(w_i|\bar{x}) = \ln p(\bar{x}|w_i) + \ln P(w_i), \quad i=1,\dots$$

Her er:

$$c = 3, \quad p(\bar{x}|w_i) = N(\bar{\mu}_i, \Sigma) \text{ der } \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mu}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$P(w_1) = P(w_2) = P(w_3) = \frac{1}{3}.$$

Da blir:

$$g_i(\bar{x}) = \ln\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{\mu}_i)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\bar{\mu}_i)}\right] + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{\mu}_i)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\bar{\mu}_i) - \frac{d}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma| + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

De tre siste leddene kan fjernes, slik at diskriminantfunksjonene blir:

$$g_i(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{\mu}_i)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\bar{\mu}_i) \qquad , i=1,\dots,3$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\bar{x}^t\Sigma^{-1}\bar{x} - 2\bar{\mu}_i^t\Sigma^{-1}\bar{x} + \bar{\mu}_i^t\Sigma^{-1}\bar{\mu}_i\right]$$

Fjerner kvadratleddet slik at:

$$g_i(\bar{x}) = \bar{\mu}_i^t\Sigma^{-1}\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{\mu}_i^t\Sigma^{-1}\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_i^t\Sigma^{-1}\left(\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{\mu}_i\right), \quad i=1,2,3$$

Σ^{-1} finnes ved å løse likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ som gir $a = \frac{3}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$ og $c = \frac{2}{5}$

Innsetting for Σ^{-1} og forventningsvektorene gir da:

$$g_1(\bar{x}) = [1, 1] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \left(\bar{x} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{5}[2, 1]\bar{x} - \frac{3}{10}}}$$

$$g_2(\bar{x}) = [2, 3] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \left(\bar{x} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{5}[3, 4]\bar{x} - \frac{9}{5}}}$$

$$g_3(\bar{x}) = [-1, 2] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \left(\bar{x} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{[-1, 1]\bar{x} - \frac{3}{2}}}$$

b)

Ukjent objekt gitt ved $\bar{x} = [1.6, 2.5]^t$.

Innsetting i diskriminantfunksjonene gir:

$$g_1(\bar{x}) = \frac{1}{5}[2, 1]\begin{bmatrix} 1.6 \\ 2.5 \end{bmatrix} - \frac{3}{10} = \underline{\underline{0.84}}$$

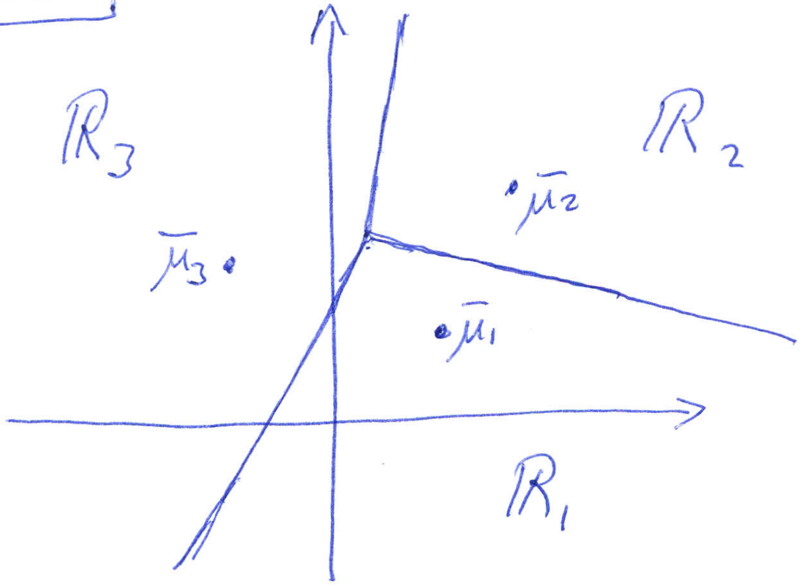
$$g_2(\bar{x}) = \frac{1}{5}[3, 4]\begin{bmatrix} 1.6 \\ 2.5 \end{bmatrix} - \frac{9}{5} = \underline{\underline{1.16}}$$

$$g_3(\bar{x}) = [-1, 1]\begin{bmatrix} 1.6 \\ 2.5 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} = \underline{\underline{-0.6}}$$

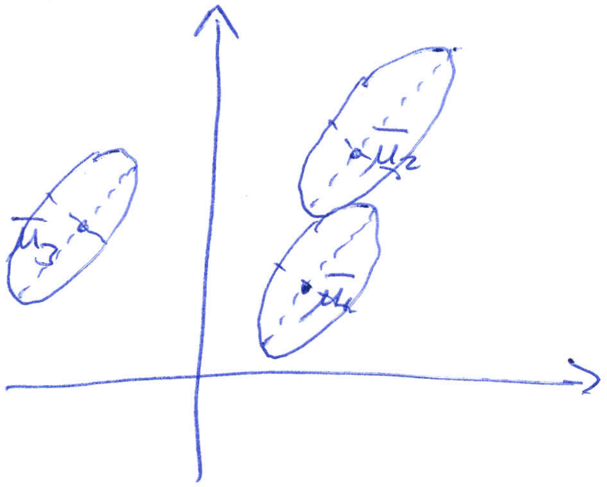
Her er $g_2(\bar{x})$ størst, slik at $\bar{x}$ blir klassifisert til $\underline{\underline{\omega_2}}$.

c) Diskriminantfunksjonene er lineære. Desisjonsgrensene består da generelt av hyperplan, og i dette tilfellet av rette linjer (siden egenskapsrommet er todimensjonalt). Desisjonsgrensene er her stykkevis lineære, siden det er flere enn to klasser.

2d)

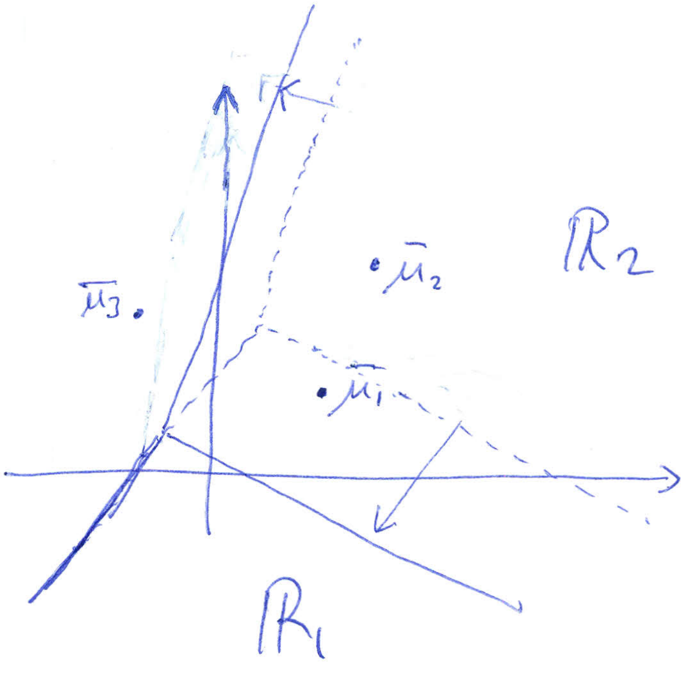


e)



Siden kovariansmatrisene er like, vil ellipsene for konstant Mahalanobisavstand ha samme størrelse og orientering (omtrent som i skissen). Den store halvaksen $\bar{a}_1$ kan eventuelt finnes ved å løse egenverdiproblemet $\Sigma \bar{a}_1 = \lambda_1 a_1$. Dette gir $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ og $\bar{a}_1 = \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^t$.

f)



Desisjonsgrensene mellom ω_2 og de andre klassene parallellforskyves vekk fra $\bar\mu_2$, slik at $\mathbb{R}_2$ vokser på bekostning av $\mathbb{R}_1$ og $\mathbb{R}_3$. Dette fordi $P(\omega_2)$ er større enn for ω_1 og ω_2. Grensen mellom $\mathbb{R}_1$ og $\mathbb{R}_2$ er uendret, siden $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ også i dette tilfellet.

Oppgave 3: Parameterestimering

a) Se læreboka.

b) Tetthetsfunksjonen er gitt ved:

$$p(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} u(x)$$

der θ er den ukjente parameteren og funksjonen $u(x)$ er gitt ved:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Treningssettet er gitt ved $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Log-likelihood funksjonen blir da:

$$\mathcal{L}(\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} p(x_k|\theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln p(x_k|\theta)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ 2\ln\theta + \ln x_k - \theta x_k + \ln u(x_k) \right\}$$

Gradienten blir da:

$$\nabla_\theta \mathcal{L}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{\theta} - x_k \right\} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

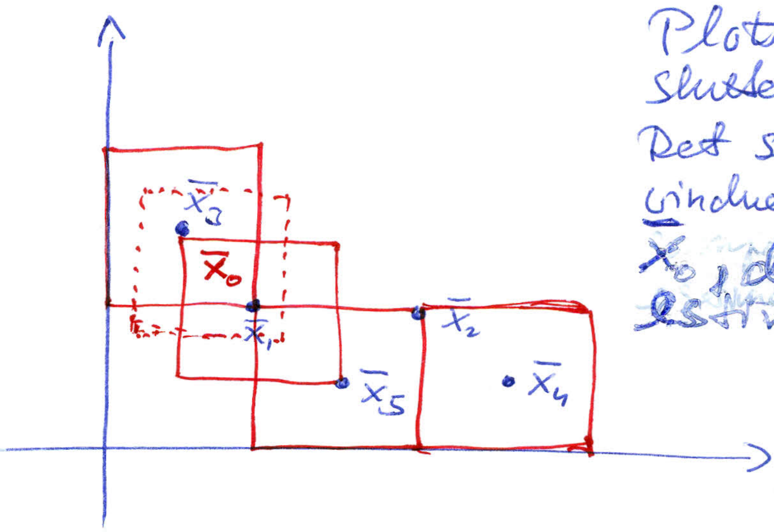
Maksimum likelihood løsningen finnes ved å sette gradienten lik null, dvs:

$$\frac{2n}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

Oppgave 4: Ikkeparametriske metoder

a) Se lærebok.

b)



Plott av samplene, omsluttet av vindu med side = 1. Det stiplede kvadratet er vinduet omkring punktet $\bar{x}_0$, der tettheten skal estimeres.

c) Tetthetsestimatet er generelt gitt ved:

$$p_n(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{V_n}\varphi\left(\frac{\bar{x}-\bar{x}_k}{h}\right)$$

Her vindusfunksjonen $\varphi(\bar{u}) = 1$ innenfor en hyperkube med side h. Her er $d=2$ og $V_n = h^2 = 1$.

Tetthetsestimatet i $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix}0.7\\1.3\end{bmatrix}$ blir da:

$$p_5(\bar{x}_0) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}\varphi(\bar{x}_0-\bar{x}_k) = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

siden det er to sampler fra treningssettet innenfor det stiplede vinduet omkring $\bar{x}_0$ i figuren ovenfor.

d) Med $h = 0.5$ blir $V_n = h^2 = 0.25$. Kun $\bar{x}_3$ faller innenfor et vindu med denne størrelsen omkring $\bar{x}_0$. Tetthetsestimatet blir da:

$$p_5(\bar{x}_0) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{V_n}\cdot 1 = \frac{4}{5} = \underline{\underline{0{,}8}}$$

e) Se eksempel i lærebok, f.eks. $\varphi(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Oppgave 5: klyngeanalyse

a) Se lærebok.

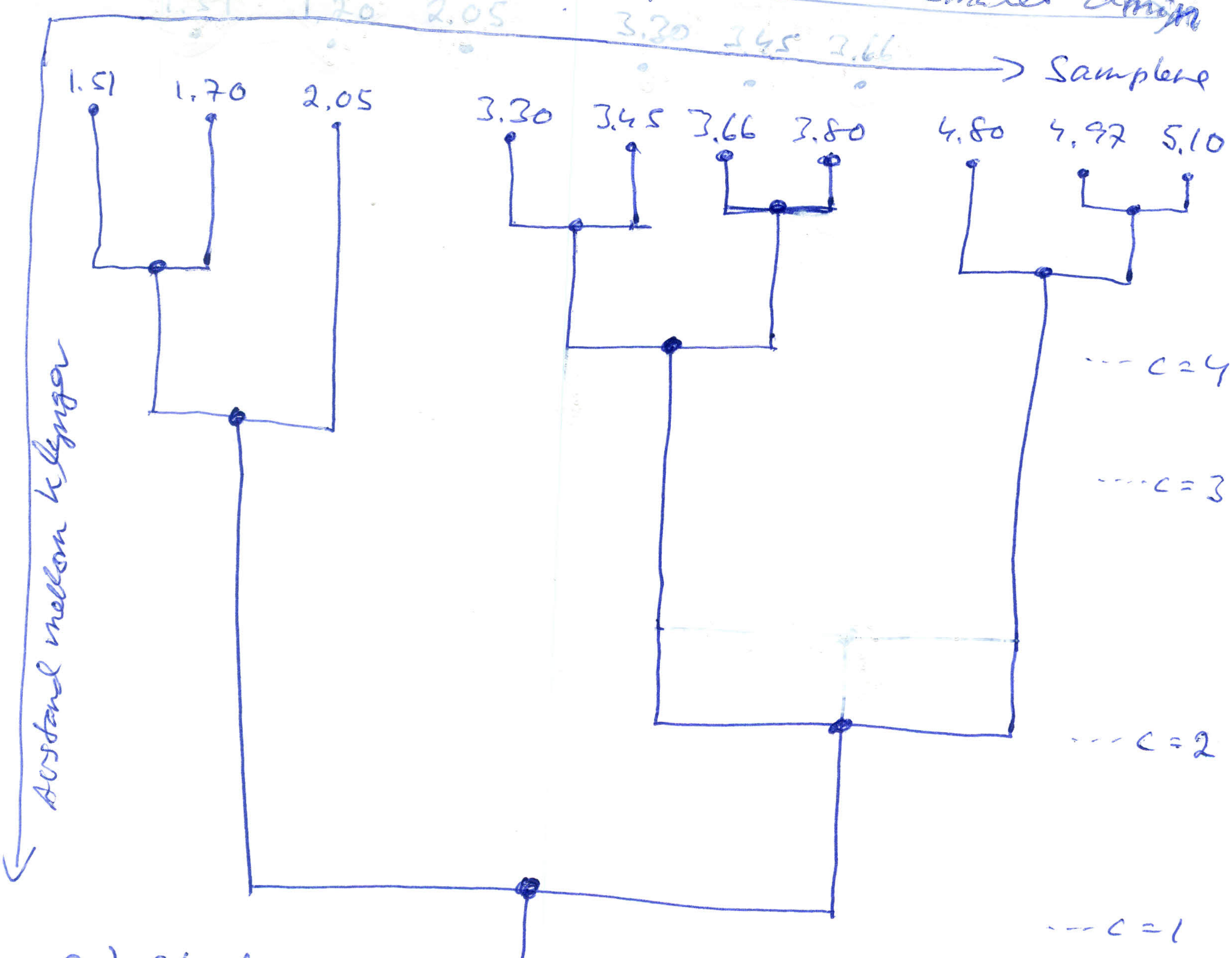
b) — " — .

c) Eksempel på avstandsmål:

$$d_{min}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) = \min_{\substack{\bar{x} \in \mathcal{X}_i \\ \bar{x}' \in \mathcal{X}_j}} \|\bar{x} - \bar{x}'\|$$

Avstandsmålet d_{max} er et annet eksempel.

d) Dendrogram basert på avstandsmålet d_{min}



e) Stort sprang mellom c=2 og c=3 tyder på at <u>tre</u> klynger er et rimelig antall her.