TEK5020/9020 – Mønstergjenkjenning
Høsten 2023

Løsningsforslag – Øvingsoppgaver 4

Idar Dyrdal (idar.dyrdal@its.uio.no)

UiO : Institutt for teknologisystemer

23. august 2023

Oppgave 1

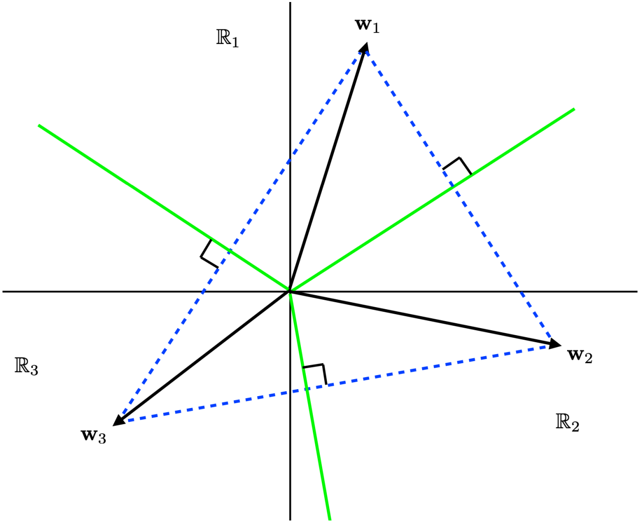
- Diskriminantfunksjonene i problemet med tre klasser er lineære, dvs, på formen

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_i^t \boldsymbol{x} + w_{i0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

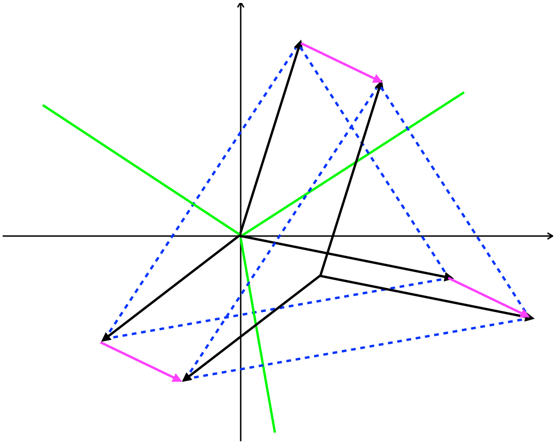
- I denne oppgaven settes skalarvektene til null, dvs.

$$w_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

- Dimensjonen på egenskapsrommet er $d = 2$.



Oppgave 1 (forts.)



En konstant vektor som tillegg til vektvektoren gir en translasjon av triangelet, mens hyperplanene forblir uendret.

Oppgave 2

I oppgaveteksten er diskriminantfunksjonene oppgitt:

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^t\boldsymbol{x} + w_{i0}, \quad i = 1, \ldots, c,$$

og punktene $\boldsymbol{x}_1$ og $\boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{x}_1 \in \mathscr{R}_i \Rightarrow g_i(\boldsymbol{x}_1) > g_j(\boldsymbol{x}_1), j \neq i,$$

$$\boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{R}_i \Rightarrow g_i(\boldsymbol{x}_2) > g_j(\boldsymbol{x}_2), j \neq i.$$

For et punkt $\boldsymbol{x}_3$ på linjen mellom $\boldsymbol{x}_1$ og $\boldsymbol{x}_2$ gjelder da

$$\begin{aligned}
g_i(\boldsymbol{x}_3) &= g_i(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2), \quad \text{der} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\
&= \lambda g_i(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)g_i(\boldsymbol{x}_2), \quad \text{siden} \quad g_i(\boldsymbol{x}) \quad \text{er lineær} \\
&> \lambda g_j(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)g_j(\boldsymbol{x}_2), \quad \text{der} \quad j \neq i \\
&= g_j(\boldsymbol{x}_3) \Rightarrow \boldsymbol{x}_3 \in \mathscr{R}_i,
\end{aligned}$$

hvilket skulle bevises.

Oppgave 3

Kriteriefunksjonen er

$$J_q(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathscr{Y}(\boldsymbol{a})} (\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{y} - b)^2 \quad \text{der} \quad \mathscr{Y}(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{y} \leq b\},$$

og den tilhørende gradienten blir

$$\nabla J_q(\boldsymbol{a}) = 2 \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathscr{Y}(\boldsymbol{a})} (\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{y} - b)\boldsymbol{y}.$$

Hvis

$$\mathscr{Y}(\boldsymbol{a}_k) = \{\boldsymbol{y}_1\} \quad \text{dvs. bare ett feilklassifisert sample ved iterasjon nr. } k,$$

blir gradienten

$$\nabla J_q(\boldsymbol{a}_k) = 2(\boldsymbol{a}_k^t \boldsymbol{y}_1 - b)\boldsymbol{y}_1.$$

Oppgave 3 (forts.)

Komponentene i matrisen D blir da

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \frac{\partial^2 J_q(\boldsymbol{a}_k)}{\partial a_i \partial a_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial a_i}\left[\frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathscr{Y}(\boldsymbol{a}_k)}(\boldsymbol{a}_k^t\boldsymbol{y}-b)^2\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial a_i}\left[2(\boldsymbol{a}_k^t\boldsymbol{y}_1-b)y_{1j}\right] \\
&= 2y_{1i}y_{1j},
\end{aligned}$$

slik at D kan skrives som

$$D = 2\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1^t.$$

Oppgave 3 (forts.)

Oppdateringen i iterasjonsprosessen blir da

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \boldsymbol{a}_k - \rho_k \nabla J_q(\boldsymbol{a}_k),$$

der det optimale inkrementet er gitt ved

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{||\nabla J_q||^2}{\nabla J_q^t D \nabla J_q} = \frac{4(\boldsymbol{a}_k^t \boldsymbol{y}_1 - b)^2 ||\boldsymbol{y}_1||^2}{2(\boldsymbol{a}_k^t \boldsymbol{y}_1 - b)\boldsymbol{y}_1^t (2\boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_1^t) 2(\boldsymbol{a}_k^t \boldsymbol{y}_1 - b)\boldsymbol{y}_1} \\ &= \frac{||\boldsymbol{y}_1||^2}{2\boldsymbol{y}_1^t \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_1^t \boldsymbol{y}_1} = \frac{1}{2||\boldsymbol{y}_1||^2},\end{aligned}$$

slik at

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \boldsymbol{a}_k - \frac{2(\boldsymbol{a}_k^t \boldsymbol{y}_1 - b)\boldsymbol{y}_1}{2||\boldsymbol{y}_1||^2} = \boldsymbol{a}_k + \frac{(b - \boldsymbol{a}_k^t \boldsymbol{y}_1)}{||\boldsymbol{y}_1||^2}\boldsymbol{y}_1,$$

som oppgaven spurte etter.

Oppgave 4

Treningssettet består av fire univariate sampler fra to klasser ω_1 og ω_2:

$$\mathscr{X} = \{\underbrace{1, 2}_{\omega_1}, \underbrace{6, 8}_{\omega_2}\}.$$

I det utvidede egenskapsrommet kan treningssettet skrives som

$$\mathscr{Y} = \left\{ \underset{\boldsymbol{y}_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}, \underset{\boldsymbol{y}_2}{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}, \underset{\boldsymbol{y}_3}{\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}}, \underset{\boldsymbol{y}_4}{\begin{bmatrix}-1\\-8\end{bmatrix}} \right\}.$$

Iterasjonsprosessen

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_0^t\boldsymbol{y}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{feil}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_1^t\boldsymbol{y}_3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{feil}$$

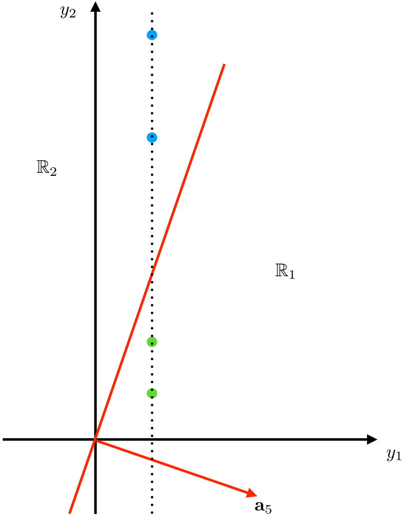
$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_2^t\boldsymbol{y}_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{feil}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_3^t\boldsymbol{y}_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{feil}$$

$$\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_4^t\boldsymbol{y}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{feil}$$

$$\boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}}$$

Oppgave 4 (forts.)



Oppgave 5

Skal her brukes samme datasett som i oppgave 4. Oppgaven består i å finne vektvektoren ***a*** gitt som løsningen av minste kvadraters problem ved

$$\boldsymbol{a} = Y^{\dagger}\boldsymbol{b}$$

der

$Y^{\dagger} = (Y^t Y)^{-1} Y^t$ er den pseudoinverse av samplematrisen Y.

I denne oppgaven lar vi ***b*** være en vektor av enere.

Oppgaven kan enkelt løses ved hjelp av f.eks. Matlab.

Samplematrisen dannes da ved kommandoen

```
Y=[1 1; 1 2; -1 -6; -1 -8].
```

Oppgave 5 (forts.)

Dette gir

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{bmatrix},$$

der fortegnet på samplene fra ω_2 er snudd. Den pseudoinverse finnes ved

Ydagg=inv(transpose(Y)*Y)*transpose(Y),

som gir

$$Y^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0.671756 & 0.541985 & -0.022901 & 0.236641 \\ -0.099237 & -0.068702 & -0.053435 & -0.114504 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 (forts.)

Definerer i tillegg vektoren $\boldsymbol{b}$ ved

```
b=[1;1;1;1],
```

som gir

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs. samme positive verdi for alle sampler.

Oppgave 5 (forts.)

Vektvektoren blir derved

$$\boldsymbol{a} = Y^{\dagger}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1.42748 \\ -0.33588 \end{bmatrix}.$$

Toklasse diskriminantfunksjonen for alle sampler kan nå enkelt beregnes ved å multiplisere samplene med vektvektoren

$$Y\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1.09160 \\ 0.75573 \\ 0.58779 \\ 1.25954 \end{bmatrix}.$$

dvs. kun positive verdier.

Oppgave 5 (forts.)

Alle fire sampler er da riktig klassifisert og settet er lineært separabelt med $\boldsymbol{a}$ som løsningsvektor.

Terskelen i x-rommet kan nå finnes ved å løse likningen

$$g(x) = \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{y} = a_2 x + a_1 = 0,$$

som i Matlab kan finnes ved

x0=-a(1)/a(2).

der x_0 er terskelen mellom klassene på x-aksen. Resultatet blir

$$x_0 = 4.2500.$$