UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Unik4590 - Mønstergjenkjenning
Eksamensdag: 18.12.2017
Tid for eksamen: 09:15 – 13:15
Oppgavesettet er på 4 sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Innledning

a) Forklar kort hva som er målsettingen med mønstergjenkjenning.

b) Nevn noen eksempler på praktisk bruk av mønstergjenkjenning.

c) Forklar kort hva som skiller *beslutningsteoretiske metoder* fra *strukturelle metoder*.

d) Forklar kort hva som er oppgaven til de ulike komponentene i et typisk klassifiseringssystem, og lag en skisse av et slikt system.

Oppgave 2

Bayesisk beslutningsteori

a) Sett opp uttrykket for *betinget risk*, og utled beslutningsregelen som sikrer minimum feilrate ved å gjøre et spesielt valg av de kostnader som inngår i uttrykket.

b) Den multivariate normalfordelingen er gitt ved

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right].$$

Redegjør for størrelsene som inngår, og forklar hva som menes med *Mahalanobisavstand*.

c) I et todimensjonalt treklasseproblem er egenskapsvektorene i hver klasse normalfordelte, med felles kovariansmatrise

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

og forventningsvektorene

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\mu}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Anta at klassene har like apriorisannsynligheter. Klassifisér egenskapsvektoren

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

i henhold til minimum feilrateprinsippet.

d) Lag en figur som viser forventningsvektorene og punktet $\boldsymbol{x}_0$, og skissér desisjonsgrensene og kurver med konstant Mahalanobisavstand omkring hver av forventningsvektorene.

Oppgave 3

Parametriske metoder

a) Redegjør for *maksimum-likelihood* (ML) metoden for estimering av parametervektoren $\boldsymbol{\theta}$ i en gitt tetthetsfunksjon $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ ved ledet læring, og vis at estimatet kan finnes ved å løse likningssystemet

$$\sum_{k=1}^{n} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

med hensyn på $\boldsymbol{\theta}$, der $\boldsymbol{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$ er et sett av treningssampler. Hvilken forutsetning er gjort om disse samplene?

b) Bruk likningssystemet til å finne ML-estimatet av parameteren μ i log-normalfordelingen

$$p(x|\mu) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0,$$

uttrykt ved et sett av univariate (éndimensjonale) treningssampler $x_1, \ldots, x_n$. Parameteren σ i fordelingen antas å være kjent.

c) Gjør kort rede for hva som skiller Bayesisk estimering fra maksimum-likelihood estimering.

Oppgave 4

Ikke-parametriske metoder

a) Beskriv prinsippet for *ikke-parametrisk* tetthetsestimering, og sett opp et estimat for sannsynlighetstettheten i et vilkårlig punkt $\boldsymbol{x}$ i egenskapsrommet, basert på et treningssett med n sampler fra en gitt klasse. Hvilke betingelser må være oppfylt for å oppnå konvergens til den sanne tetthetsfunksjonen?

b) Forklar hva som er forskjellen på *vindumetoden* og *nærmeste-nabo metoden* i ikke-parametrisk estimering, og sett opp estimatet uttrykt ved en vilkårlig vindufunksjon.

c) La treningssettet for et univariat toklasseproblem består av 5 sampler fra hver klasse, der

$$\mathscr{X}_1 = \{1, 3, 4, 6, 7\} \text{ er samplesettet fra klasse } \omega_1 \text{ og}$$
$$\mathscr{X}_2 = \{5, 7, 8, 10, 12\} \text{ er samplesettet fra klasse } \omega_2,$$

og finn de ikke-parametriske estimatene av de klassebetingede tetthetene i punktet $x_0 = 6,5$ med en rektangulær vindufunksjon med side $h = 4$ (i dette tilfelle et intervall på tallinjen med samme bredde).

d) Klassifisér et ukjent sample i punktet x_0 ut fra disse estimatene, når apriorisannsynlighetene for klassene antas å være like.

e) Nevn noen fordeler og ulemper ved ikke-parametriske metoder, sammenliknet med parametriske metoder.

Oppgave 5

Lineære diskriminantfunksjoner

a) Hva menes med diskriminantfunksjoner, og hvordan brukes slike funksjoner i forbindelse med klassifisering? Sett opp en generell beslutningsregel uttrykt ved diskriminantfunksjoner.

b) Sett opp en lineær diskriminantfunksjon for toklasseproblemet, og forklar størrelsene som inngår.

c) Forklar hvordan man kan trene opp en vektvektor ved hjelp av gradientsøk, og sett opp *fast inkrement regelen*.

d) Se på et tilfelle der treningssettet består av samplene

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ fra } \omega_1 \text{ og } \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ fra } \omega_2.$$

Overfør disse samplene til det utvidede egenskapsrommet, og bruk fast inkrement regelen til å finne en løsningsvektor. Sett startverdien for den utvidede vektvektoren til $\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{0}$.

e) Lag en figur som viser samplene $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_4$ og den separerende linjen i planet.