Ejercicios de computación cuántica

Adrián Enríquez Ballester

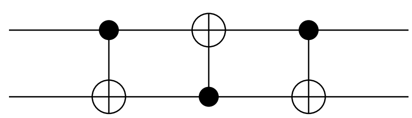
2 de abril de 2022

Ejercicio 1

La puerta SWAP para 2 qubits se define como SWAP $|x\rangle|y\rangle = |y\rangle|x\rangle$. Escribir la puerta SWAP como un circuito cuántico que involucre solo puertas CNOT.

Respuesta

El diagrama del circuito es



que ha sido generado utilizando Quipper con el siguiente código:

```
print_simple PDF $ do \(x, y) ->
  controlled_not_at y x
  controlled_not_at x y
  controlled_not y x
```

Sean $|\varphi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ dos qubits arbitrarios, veamos cómo actúa el circuito sobre ellos. El resultado de aplicar la primera puerta CNOT sería

$$\begin{aligned}
|\psi_{\mathrm{I}}\rangle &= \mathcal{U}_{\mathrm{CNOT}}|\varphi_1\varphi_2\rangle \\
&= \mathcal{U}_{\mathrm{CNOT}}\Big((a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)\Big) \\
&= \mathcal{U}_{\mathrm{CNOT}}\Big(a|0\rangle \otimes c|0\rangle + a|0\rangle \otimes d|1\rangle + b|1\rangle \otimes c|0\rangle + b|1\rangle \otimes d|1\rangle\Big) \\
&= a|0\rangle \otimes c|0\rangle + a|0\rangle \otimes d|1\rangle + b|1\rangle \otimes c|1\rangle + b|1\rangle \otimes d|0\rangle
\end{aligned}$$

A continuación, al estado anterior se le aplicaría otra puerta CNOT pero con las entradas intercambiadas:

$$
\begin{aligned}
|\psi_{\mathrm{II}}\rangle &= \mathcal{U}'_{\mathrm{CNOT}}|\psi_{\mathrm{I}}\rangle \\
&= \mathcal{U}'_{\mathrm{CNOT}}\Big(a|0\rangle \otimes c|0\rangle + a|0\rangle \otimes d|1\rangle + b|1\rangle \otimes c|1\rangle + b|1\rangle \otimes d|0\rangle\Big) \\
&= a|0\rangle \otimes c|0\rangle + a|1\rangle \otimes d|1\rangle + b|0\rangle \otimes c|1\rangle + b|1\rangle \otimes d|0\rangle
\end{aligned}
$$

Por último, se aplicaría de nuevo otra puerta CNOT:

$$
\begin{aligned}
|\psi_{\mathrm{III}}\rangle &= \mathcal{U}_{\mathrm{CNOT}}|\psi_{\mathrm{II}}\rangle \\
&= \mathcal{U}_{\mathrm{CNOT}}\Big(a|0\rangle \otimes c|0\rangle + a|1\rangle \otimes d|1\rangle + b|0\rangle \otimes c|1\rangle + b|1\rangle \otimes d|0\rangle\Big) \\
&= a|0\rangle \otimes c|0\rangle + a|1\rangle \otimes d|0\rangle + b|0\rangle \otimes c|1\rangle + b|1\rangle \otimes d|1\rangle
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta este resultado general, y que $|a|^2+|b|^2 = 1$ y $|c|^2+|d|^2 = 1$, la puerta actúa de la siguiente manera sobre la base canónica:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathrm{SWAP}}|00\rangle &= |00\rangle \qquad (a=1, c=1) \\
\mathcal{U}_{\mathrm{SWAP}}|01\rangle &= |10\rangle \qquad (a=1, c=0) \\
\mathcal{U}_{\mathrm{SWAP}}|10\rangle &= |01\rangle \qquad (a=0, c=1) \\
\mathcal{U}_{\mathrm{SWAP}}|11\rangle &= |11\rangle \qquad (a=0, c=0)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Supongamos que queremos factorizar el número $M = 33$ con el algoritmo de Shor.

(a) ¿Qué valor elegimos para m, el número de qubits del primer registro?

(b) Supongamos que elegimos aleatoriamente $a = 2$. Calcular con el ordenador o una calculadora cuál es el período r de $f(x) = a^x \bmod M$.

(c) Supongamos que, tras realizar la QFT y medir, el resultado es $c = 614$. ¿Es este un c de los que llamamos "buenos"?

Respuesta

En este registro queremos poder codificar en binario el número $M^2 = 1089$. Como $2^{10} - 1 < 1089 < 2^{11} - 1$, elegiremos 11 qubits.

En cuanto al período de f, vamos a utilizar GHCi para calcular los primeros valores de la función:

```
f x = 2 ^ x `mod` 33
take 40 . map f $ [0..]
```

```
[1,2,4,8,16,32,31,29,25,17,1,2,4,8,16,32,31,29,25,17,1,2,4,8,16,32,
31,29,25,17,1,2,4,8,16,32,31,29,25,17]
```

Observando el resultado se puede apreciar un patrón de longitud 10 que parece repetirse indefinidamente, por lo que vamos a considerar que el período de f es $r = 10$.

Por último, vamos a intentar encontrar un j para el que c cumple la condición de ser "bueno". Empezamos a probar todos los números naturales desde 0:

```
check j = abs (614 - j * ((2 ** 11) / 10)) <= 1 / 2
head . filter check $ [0..]
```

```
3
```

Para $j = 3$ se cumple la condición, por lo que 614 es un "c bueno".

Ejercicio 3

Para un sistema de 3 qubits, escribir el estado $\mathcal{U}_{\mathrm{QFT}}|3\rangle$ como un producto tensorial de tres estados de un qubit, cada uno de ellos de la forma $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i z}|1\rangle)$ para ciertos z.

Respuesta

Por una parte, el estado tras aplicar la puerta QFT sería

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathrm{QFT}}|3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^3}} \sum_{c=0}^{2^3-1} e^{2\pi i 3c/2^3}|c\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2\pi i 3/8}|1\rangle + e^{2\pi i 6/8}|2\rangle + e^{2\pi i 9/8}|3\rangle + e^{2\pi i 12/8}|4\rangle \\
&\quad + e^{2\pi i 15/8}|5\rangle + e^{2\pi i 18/8}|6\rangle + e^{2\pi i 21/8}|7\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Por otra, este estado pretende ser expresado como

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i z_1}|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i z_2}|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i z_3}|1\rangle) \\
=&\frac{1}{\sqrt{2}^3}\Big(|000\rangle + e^{2\pi i z_3}|001\rangle + e^{2\pi i z_2}|010\rangle + e^{2\pi i z_2}e^{2\pi i z_3}|011\rangle + e^{2\pi i z_1}|100\rangle \\
&+ e^{2\pi i z_1}e^{2\pi i z_3}|101\rangle + e^{2\pi i z_1}e^{2\pi i z_2}|110\rangle + e^{2\pi i z_1}e^{2\pi i z_2}e^{2\pi i z_3}|111\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

para ciertos z_1, z_2 y z_3. Si se considera que todos ellos son números reales, los productos de la forma $e^{2\pi i x}e^{2\pi i y}$ equivalen a $e^{2\pi i(x+y)}$. Teniendo además en cuenta el número en decimal representado por las etiquetas de los qubits, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2\pi i z_3}|1\rangle + e^{2\pi i z_2}|2\rangle + e^{2\pi i (z_2+z_3)}|3\rangle + e^{2\pi i z_1}|4\rangle$$
$$+ e^{2\pi i (z_1+z_3)}|5\rangle + e^{2\pi i (z_1+z_2)}|6\rangle + e^{2\pi i (z_1+z_2+z_3)}|7\rangle\Big)$$

Esta tiene la misma forma que el estado que queremos representar por lo que, igualando las subexpresiones que involucran a los z_i, obtenemos el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
z_3 &= 3/8 \\
z_2 &= 6/8 \\
z_2 + z_3 &= 9/8 \\
z_1 &= 12/8 \\
z_1 + z_3 &= 15/8 \\
z_1 + z_2 &= 18/8 \\
z_1 + z_2 + z_3 &= 21/8
\end{aligned}$$

cuya solución es $z_1 = 3/2$, $z_2 = 3/4$ y $z_3 = 3/8$, dando lugar a la siguiente expresión final:

$$\mathcal{U}_{\mathrm{QFT}}|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 3/2}|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 3/4}|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 3/8}|1\rangle)$$