Teleportación de estados cuánticos

Ejemplo de intercambio de entrelazamiento

Daniela Ferreiro Adrián Enríquez Daniel Trujillo

4 de abril de 2022

Consideremos un estado formado por cuatro qubits, $|\beta_{01}\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle$, donde el segundo y tercero pertenecen a Alice, el cuarto a Bob, y el primero podría pertenecer a otra persona. $|\beta_{00}\rangle$ y $\beta_{01}\rangle$ son los siguientes estados de la base de Bell:

$$
\begin{aligned}
|\beta_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
|\beta_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)
\end{aligned}
$$

Los tres últimos qubits cumplen la configuración requerida para realizar la teleportación del primero de ellos a Bob e, intuitivamente, como el qubit teleportado está entrelazado con el primero, es el qubit de Bob el que debería de terminar entrelazado con este. Vamos a aplicar el protocolo paso a paso para ver cómo evoluciona el estado compuesto.

En primer lugar, al estado inicial

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |\beta_{01}\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(|0100\rangle + |0111\rangle - |1000\rangle - |1011\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

se le aplicaría una puerta CNOT en los qubits 2 y 3:

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \Big(\mathbb{1} \otimes \mathcal{U}_{\text{CNOT}} \otimes \mathbb{1}\Big)|\psi_0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(|0110\rangle + |0101\rangle - |1000\rangle - |1011\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

A continuación, se aplicaría una puerta Hadamard en el segundo:

$$
\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= \Big(\mathbb{1} \otimes H \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\Big)|\psi_1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(|0110\rangle + |0101\rangle - |1000\rangle - |1011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |10\rangle + |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |01\rangle \\
&\quad - |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |00\rangle - |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|0010\rangle - |0110\rangle + |0001\rangle - |0101\rangle \\
&\quad - |1000\rangle - |1100\rangle - |1011\rangle - |1111\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

En este punto, Alice mediría sus qubits con la medida asociada a la base canónica. No vamos a mostrar los cálculos pero, como sucede siempre en este protocolo, cada una de las cuatro medidas tiene la misma probabilidad de salir: $\frac{1}{4}$.

En caso de que saliese 00, el estado cambiaría como sigue:

$$
\begin{aligned}
|\psi_3^{00}\rangle &= \frac{1/(2\sqrt{2})}{\sqrt{1/4}}\Big(\mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1}\Big)|\psi_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0001\rangle - |1000\rangle\Big) \\
&= |00\rangle_{23} \otimes |\beta_{01}\rangle_{14}
\end{aligned}
$$

Alice transmitiría el resultado de la medida a Bob, que consiste en 2 bits de información clásica, y Bob sabría que ya tiene el estado teleportado. Se puede apreciar que el estado de los qubits de Alice ha terminado siendo $|00\rangle$, mientras que el de Bob junto con el restante $|\beta_{01}\rangle$.

En caso de que saliese 01, el estado cambiaría como sigue:

$$
\begin{aligned}
|\psi_3^{01}\rangle &= \frac{1/(2\sqrt{2})}{\sqrt{1/4}}\Big(\mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{1}\Big)|\psi_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0010\rangle - |1011\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Alice transmitiría el resultado a Bob, y este sabría que tiene que aplicar una puerta X a su qubit para que tenga el estado teleportado por Alice:

$$
\begin{aligned}
|\psi_4^{01}\rangle &= \Big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes X\Big)|\psi_3^{01}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0011\rangle - |1010\rangle\Big) \\
&= |01\rangle_{23}\otimes|\beta_{01}\rangle_{14}
\end{aligned}
$$

En este caso, el estado de los qubits de Alice ha terminado siendo $|01\rangle$, mientras que el de Bob junto con el restante es de nuevo $|\beta_{01}\rangle$.

El resto de casos serían análogos, dando lugar al mismo resultado: los qubits de Alice terminan con un estado de la base canónica, mientras que el primer qubit junto con el de Bob terminan en el estado entrelazado $|\beta_{01}\rangle$.