Ejercicios de introducción a la física cuántica

Adrián Enríquez Ballester

2 de abril de 2022

Ejercicio 1

Demostrar que una matriz normal U es unitaria si y sólo si existe una matriz hermítica H tal que $U = \exp(iH)$.

Respuesta

Para demostrar la primera implicación, supongamos que U es unitaria. Como esta es normal, sea n el número de columnas de U, existe una base $\{v_j\}_{j=1}^n$ ortonormal de $\mathbb{C}^n$ donde cada v_j es un autovector con autovalor λ_j de U, y por tanto

$$U = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |v_j\rangle\langle v_j|$$

Sea H la matriz definida como

$$H \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(\lambda_j)}{i} |v_j\rangle\langle v_j|$$

podemos comprobar que

$$\exp(iH) = \sum_{j=1}^{n} e^{i\ln(\lambda_j)/i} |v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{j=1}^{n} e^{\ln(\lambda_j)} |v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |v_j\rangle\langle v_j| = U$$

por lo que sólo quedaría verificar que H es hermítica.

Sabemos que $\ln(\lambda_j) = \ln(|\lambda_j|) + i\theta_j$ para un valor $\theta_j \in (-\pi, \pi]$, y también que U es normal y por tanto sus autovalores han de tener módulo 1, lo cual implica que

$$\frac{\ln(\lambda_j)}{i} = \frac{\ln(|\lambda_j|) + i\theta_j}{i} = \frac{\ln(1) + i\theta_j}{i} = \frac{i\theta_j}{i} = \theta_j$$

y, al tratarse de valores en $\mathbb{R}$, permite comprobar que H es hermítica:

$$H^\dagger = \sum_{j=1}^{n} \overline{\theta_j}(|v_j\rangle\langle v_j|)^\dagger = \sum_{j=1}^{n} \theta_j |v_j\rangle\langle v_j| = H$$

En cuanto a la implicación restante, supongamos que existe una matriz H hermítica tal que $U = \exp(iH)$.

El hecho de que H sea hermítica implica que también es normal, por lo que existe una base $\{v_j\}_{j=1}^n$ ortonormal de $\mathbb{C}^n$ donde cada v_j es un autovector con autovalor θ_j de H, y por tanto

$$H = \sum_{j=1}^{n} \theta_j |v_j\rangle\langle v_j|$$

Además, como H es hermítica, sabemos que cada uno de estos autovalores θ_j ha de estar en $\mathbb{R}$. También tenemos que

$$U = \exp(iH) = \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j} |v_j\rangle\langle v_j|$$

con lo cual podemos proceder a comprobar que U es unitaria:

$$\begin{aligned}
UU^\dagger &= \Big(\sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j} |v_j\rangle\langle v_j|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{e^{i\theta_k}} (|v_k\rangle\langle v_k|)^\dagger\Big) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} e^{i\theta_j}\overline{e^{i\theta_k}} |v_j\rangle\langle v_j|v_k\rangle\langle v_k| \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} e^{i\theta_j}\overline{e^{i\theta_k}} |v_j\rangle\delta_{jk}\langle v_k| \\
&= \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\overline{e^{i\theta_j}} |v_j\rangle\langle v_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |e^{i\theta_j}|^2 |v_j\rangle\langle v_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |v_j\rangle\langle v_j| \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

puesto que para cada j se cumple $|e^{i\theta_j}|^2 = |\cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j)|^2 = \cos^2(\theta_j) + \sin^2(\theta_j) = 1$.

Ejercicio 2

¿Cuál es la probabilidad de obtener cada salida, y el estado después de la medida si el estado inicial (de dos partes A y B) es $|\Phi_+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, y tanto Alice como Bob miden en la base $|+\rangle$, $|-\rangle$?

Respuesta

Las matrices con las que se está midiendo en el sistema compuesto son:

$$\begin{aligned} P_{++} &= |+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+| \\ P_{--} &= |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| \\ P_{+-} &= |+\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| \\ P_{-+} &= |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle+| \end{aligned}$$

Al tratarse de medidas proyectivas, podemos calcular la probabilidad de que salga ++ como

$$\begin{aligned} \text{p}(++) &= \langle\Phi_+|P_{++}|\Phi_+\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle00| + \langle11|\Big)P_{++}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle00|P_{++}|00\rangle + \langle00|P_{++}|11\rangle + \langle11|P_{++}|00\rangle + \langle11|P_{++}|11\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} \langle00|P_{++}|00\rangle &= \langle0|+\rangle\langle+|0\rangle \otimes \langle0|+\rangle\langle+|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\ \langle00|P_{++}|11\rangle &= \langle0|+\rangle\langle+|1\rangle \otimes \langle0|+\rangle\langle+|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\ \langle11|P_{++}|00\rangle &= \langle1|+\rangle\langle+|0\rangle \otimes \langle1|+\rangle\langle+|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\ \langle11|P_{++}|11\rangle &= \langle1|+\rangle\langle+|1\rangle \otimes \langle1|+\rangle\langle+|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En caso de que saliese ++, el estado final sería

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{P_{++}|\Phi_+\rangle}{\sqrt{p(++)}} \\
&= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}P_{++}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= \Big(|+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+|\Big)|00\rangle + \Big(|+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+|\Big)|11\rangle \\
&= \Big(|+\rangle\langle+|0\rangle \otimes |+\rangle\langle+|0\rangle\Big) + \Big(|+\rangle\langle+|1\rangle \otimes |+\rangle\langle+|1\rangle\Big) \\
&= \Big(|+\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes |+\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(|+\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes |+\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}|++\rangle + \frac{1}{2}|++\rangle \\
&= |++\rangle
\end{aligned}
$$

Por otra parte, la probabilidad de que salga $--$ es

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}(--) &= \langle\Phi_+|P_{--}|\Phi_+\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00| + \langle 11|\Big)P_{--}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|P_{--}|00\rangle + \langle 00|P_{--}|11\rangle + \langle 11|P_{--}|00\rangle + \langle 11|P_{--}|11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
\langle 00|P_{--}|00\rangle &= \langle 0|-\rangle\langle -|0\rangle \otimes \langle 0|-\rangle\langle -|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\
\langle 00|P_{--}|11\rangle &= \langle 0|-\rangle\langle -|1\rangle \otimes \langle 0|-\rangle\langle -|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4} \\
\langle 11|P_{--}|00\rangle &= \langle 1|-\rangle\langle -|0\rangle \otimes \langle 1|-\rangle\langle -|0\rangle = (-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes (-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\
\langle 11|P_{--}|11\rangle &= \langle 1|-\rangle\langle -|1\rangle \otimes \langle 1|-\rangle\langle -|1\rangle = (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

El estado final en este caso sería

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{P_{--}|\Phi_+\rangle}{\sqrt{p(--)}} \\
&= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}P_{--}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= \Big(|-\rangle\langle -| \otimes |-\rangle\langle -|\Big)|00\rangle + \Big(|-\rangle\langle -| \otimes |-\rangle\langle -|\Big)|11\rangle \\
&= \Big(|-\rangle\langle -|0\rangle \otimes |-\rangle\langle -|0\rangle\Big) + \Big(|-\rangle\langle -|1\rangle \otimes |-\rangle\langle -|1\rangle\Big) \\
&= \Big(|-\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes |-\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(|-\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes |-\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}})\Big) \\
&= \frac{1}{2}|--\rangle + \frac{1}{2}|--\rangle \\
&= |--\rangle
\end{aligned}
$$

Por último, en cuanto al resto de medidas, ambas tienen probabilidad nula de salir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}(+-) &= \langle\Phi_+|P_{+-}|\Phi_+\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00| + \langle 11|\Big)P_{+-}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|P_{+-}|00\rangle + \langle 00|P_{+-}|11\rangle + \langle 11|P_{+-}|00\rangle + \langle 11|P_{+-}|11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) \\
&= 0 \\
\mathrm{p}(-+) &= \langle\Phi_+|P_{-+}|\Phi_+\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00| + \langle 11|\Big)P_{-+}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|P_{-+}|00\rangle + \langle 00|P_{-+}|11\rangle + \langle 11|P_{-+}|00\rangle + \langle 11|P_{-+}|11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
\langle 00|P_{+-}|00\rangle &= \langle 0|+\rangle\langle +|0\rangle \otimes \langle 0|-\rangle\langle -|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\
\langle 00|P_{+-}|11\rangle &= \langle 0|+\rangle\langle +|1\rangle \otimes \langle 0|-\rangle\langle -|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{4} \\
\langle 11|P_{+-}|00\rangle &= \langle 1|+\rangle\langle +|0\rangle \otimes \langle 1|-\rangle\langle -|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes (-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \\
\langle 11|P_{+-}|11\rangle &= \langle 1|+\rangle\langle +|1\rangle \otimes \langle 1|-\rangle\langle -|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\langle 00|P_{-+}|00\rangle &= \langle 0|-\rangle\langle -|0\rangle \otimes \langle 0|+\rangle\langle +|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \\
\langle 00|P_{-+}|11\rangle &= \langle 0|-\rangle\langle -|1\rangle \otimes \langle 0|+\rangle\langle +|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \\
\langle 11|P_{-+}|00\rangle &= \langle 1|-\rangle\langle -|0\rangle \otimes \langle 1|+\rangle\langle +|0\rangle = (-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \\
\langle 11|P_{-+}|11\rangle &= \langle 1|-\rangle\langle -|1\rangle \otimes \langle 1|+\rangle\langle +|1\rangle = (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Partiendo del estado de dos partes A y B, $|\Phi_+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, encontrar unitarias locales de Alice que lo transformen en cada uno de los otros elementos de la base de Bell.

Respuesta

Sea U una matriz unitaria, el resultado de aplicarla localmente para Alice se calcularía como

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle = \Big(U \otimes \mathbb{1}\Big)|\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(U \otimes \mathbb{1}\big)|00\rangle + \big(U \otimes \mathbb{1}\big)|11\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(U|0\rangle \otimes \mathbb{1}|0\rangle + U|1\rangle \otimes \mathbb{1}|1\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(U|0\rangle \otimes |0\rangle + U|1\rangle \otimes |1\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Si queremos que el estado final sea $|\Phi_+\rangle$, se debería de cumplir lo siguiente:

$$
U|0\rangle \otimes |0\rangle + U|1\rangle \otimes |1\rangle = |00\rangle + |11\rangle
$$

Es decir,

$$\begin{cases} U|0\rangle = |0\rangle \\ U|1\rangle = |1\rangle \end{cases}$$

y sabemos que la matriz identidad $\mathbb{1}$ es unitaria y lo cumple.

Por otra parte, si queremos que el estado final sea Φ_-, se debería de cumplir lo siguiente:

$$U|0\rangle \otimes |0\rangle + U|1\rangle \otimes |1\rangle = |00\rangle - |11\rangle$$

Es decir,

$$\begin{cases} U|0\rangle = |0\rangle \\ U|1\rangle = -|1\rangle \end{cases}$$

lo cual, si expresamos la matriz U como $(u_{ij})_{i,j=1}^2$ y desarrollamos las ecuaciones, determina U como la matriz de Pauli σ_z.

Por otra parte, si queremos que el estado final sea Ψ_+, se debería de cumplir lo siguiente:

$$U|0\rangle \otimes |0\rangle + U|1\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle + |10\rangle$$

Es decir,

$$\begin{cases} U|0\rangle = |1\rangle \\ U|1\rangle = |0\rangle \end{cases}$$

lo cual, si expresamos de nuevo la matriz U como $(u_{ij})_{i,j=1}^2$ y desarrollamos las ecuaciones, determina U como la matriz de Pauli σ_x.

Por último, si queremos que el estado final sea Ψ_-, se debería de cumplir lo siguiente:

$$U|0\rangle \otimes |0\rangle + U|1\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle - |10\rangle$$

Es decir,

$$\begin{cases} U|0\rangle = -|1\rangle \\ U|1\rangle = |0\rangle \end{cases}$$

lo cual, si expresamos de nuevo la matriz U como $(u_{ij})_{i,j=1}^2$ y desarrollamos las ecuaciones, determina U como la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Tenemos un sistema de tres qubits (1, 2 y 3), que está en el estado inicial $|0\rangle_1 \otimes |\Phi_+\rangle_{23}$. Supongamos que Alice tiene los qubits 1 y 2 y mide ese sistema formado por dos qubits en la base de Bell. (Bob tiene el qubit 3 pero no hace nada). ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada salida, y el estado final después de la medida?

Respuesta

Las matrices con las que mide Alice son

$$
\begin{aligned}
P_{\Phi_+} &= |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \\
P_{\Phi_-} &= |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
P_{\Psi_+} &= |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \\
P_{\Psi_-} &= |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|
\end{aligned}
$$

y, como sabemos que la base de Bell es ortonormal, podemos calcular la probabilidad de que salga Φ_+ como

$$
\begin{aligned}
p(\Phi_+) &= \Big(\langle 0| \otimes \langle\Phi_+|\Big)\Big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000| + \langle 011|\Big)\Big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000|\big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 000|\big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle \\
&\qquad + \langle 011|\big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 011|\big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|00\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 00|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|01\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|1\rangle \\
&\qquad + \langle 01|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|00\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 01|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|01\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} \otimes 1 + 0 + 0 + 0\Big) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi_+|00\rangle = \langle 00|\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 00|00\rangle + \langle 00|11\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\langle\Phi_+|01\rangle = \langle 01|\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 01|00\rangle + \langle 01|11\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0+0) = 0
\end{aligned}
$$

El estado final en caso de que salga Φ_+ es

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{\Big(P_{\Phi_+} \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big)}{\sqrt{p(\Phi_+)}} \\
&= \sqrt{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|00\rangle \otimes \mathbb{1}|0\rangle + |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|01\rangle \otimes \mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_+\rangle \otimes |0\rangle + 0\Big) \\
&= |\Phi_+\rangle \otimes |0\rangle
\end{aligned}
$$

La probabilidad de que salga Φ_- es

$$
\begin{aligned}
p(\Phi_-) &= \Big(\langle 0| \otimes \langle\Phi_+|\Big)\Big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000| + \langle 011|\Big)\Big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000|\big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 000|\big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle \\
&\qquad + \langle 011|\big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 011|\big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|00\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 00|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|01\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|1\rangle \\
&\qquad + \langle 01|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|00\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 01|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|01\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} \otimes 1 + 0 + 0 + 0\Big) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi_-|00\rangle = \langle 00|\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 00|00\rangle - \langle 00|11\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\langle\Phi_-|01\rangle = \langle 01|\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 01|00\rangle - \langle 01|11\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0-0) = 0
\end{aligned}
$$

El estado final en caso de que salga Φ_- es

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{\Big(P_{\Phi_-} \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big)}{\sqrt{p(\Phi_-)}} \\
&= \sqrt{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|00\rangle \otimes \mathbb{1}|0\rangle + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|01\rangle \otimes \mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_-\rangle \otimes |0\rangle + 0\Big) \\
&= |\Phi_-\rangle \otimes |0\rangle
\end{aligned}
$$

La probabilidad de que salga Ψ_+ es

$$
\begin{aligned}
p(\Psi_+) &= \Big(\langle 0| \otimes \langle\Phi_+|\Big)\Big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000| + \langle 011|\Big)\Big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000|\big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 000|\big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle \\
&\qquad + \langle 011|\big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 011|\big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|00\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 00|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|01\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|1\rangle \\
&\qquad + \langle 01|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|00\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 01|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|01\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \otimes 1\Big) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi_+|00\rangle = \langle 00|\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 00|01\rangle + \langle 00|10\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0+0) = 0 \\
\langle\Psi_+|01\rangle = \langle 01|\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 01|01\rangle + \langle 01|10\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

El estado final en caso de que salga Ψ_+ es

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{\Big(P_{\Psi_+} \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big)}{\sqrt{p(\Psi_+)}} \\
&= \sqrt{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|00\rangle \otimes \mathbb{1}|0\rangle + |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|01\rangle \otimes \mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_+\rangle \otimes |1\rangle\Big) \\
&= |\Psi_+\rangle \otimes |1\rangle
\end{aligned}
$$

Por último, la probabilidad de que salga Ψ_- es

$$
\begin{aligned}
p(\Psi_-) &= \Big(\langle 0| \otimes \langle\Phi_+|\Big)\Big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000| + \langle 011|\Big)\Big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 000|\big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 000|\big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle \\
&\qquad + \langle 011|\big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \langle 011|\big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|00\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 00|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|01\rangle \otimes \langle 0|\mathbb{1}|1\rangle \\
&\qquad + \langle 01|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|00\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|0\rangle + \langle 01|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|01\rangle \otimes \langle 1|\mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \otimes 1\Big) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi_-|00\rangle = \langle 00|\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 00|01\rangle - \langle 00|10\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0-0) = 0 \\
\langle\Psi_-|01\rangle = \langle 01|\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 01|01\rangle - \langle 01|10\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-0) = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

El estado final en caso de que salga Ψ_- es

$$
\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{\Big(P_{\Psi_-} \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle\Big)}{\sqrt{p(\Psi_-)}} \\
&= \sqrt{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\Big)\Big(|000\rangle + |011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|000\rangle + \big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \otimes \mathbb{1}\big)|011\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|00\rangle \otimes \mathbb{1}|0\rangle + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|01\rangle \otimes \mathbb{1}|1\rangle\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_-\rangle \otimes |1\rangle\Big) \\
&= |\Psi_-\rangle \otimes |1\rangle
\end{aligned}
$$