Clique Cover

Claudia Puentes

December 2024

Demostración de que el problema de Cobertura de Clique es NP-Completo

El problema de Cobertura de Clique consiste en determinar el número mínimo de cliques necesarios para cubrir todas las aristas de un grafo $G = (V, E)$. Un clique es un subconjunto de vértices tal que todos los pares de vértices en el subconjunto están conectados directamente por una arista.

Para demostrar que este problema es NP-Completo, debemos cumplir dos condiciones: 1. El problema está en NP: probar que una solución candidata puede verificarse en tiempo polinomial. 2. El problema es NP-Hard: probar que cualquier problema en NP puede ser reducido al problema de Cobertura de Clique en tiempo polinomial.

A continuación, veremos cada paso en detalle.

Primero, verificamos que el problema está en NP. Dado un grafo $G = (V, E)$, necesitamos verificar si un conjunto dado de cliques $C_1, C_2, \ldots, C_k$ cubre todas las aristas de G. Esto implica dos pasos: Para cada C_i, comprobamos que todos los pares de vértices dentro del conjunto están conectados por una arista en G. Esta verificación puede realizarse en $O(|C_i|^2)$ por clique, usando una matriz de adyacencia o lista de adyacencia. Verificamos que todas las aristas de G están cubiertas, recorremos cada arista $(u, v) \in E$ y verificamos si pertenece a al menos uno de los cliques, el chequeo de cobertura de aristas es en $O(|E| \cdot k)$. Por lo tanto, el tiempo total es polinomial, lo que demuestra que el problema pertenece a NP.

Ahora, probamos que el problema es NP-Hard mediante una reducción desde Vertex Cover, que es NP-Hard. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero k, Vertex Cover busca un conjunto $S \subseteq V$ de tamaño k tal que cada arista $(u, v) \in E$ tiene al menos un extremo en S. Reducimos este problema al problema de Cobertura de Clique construyendo el grafo complementario $\bar{G}$, donde $V' = V$, los vértices de $\bar{G}$ son los mismos que los de G y $(u, v) \in \bar{E} \iff (u, v) \notin E$.

Los vértices no cambian entre G y $\bar{G}$ porque queremos mantener la correspondencia entre las soluciones de Vertex Cover en G y las soluciones de Cobertura de Clique en $\bar{G}$. Invertir las aristas asegura que cualquier conjunto independiente en G (un conjunto de vértices sin aristas entre ellos) se transforme en un clique completo en $\bar{G}$. Esto es clave para la reducción, ya que los conjuntos independientes en G son complementarios a los Vertex Covers.

Ahora mostramos cómo las soluciones del problema de Vertex Cover en G se traducen directamente a soluciones del problema de Cobertura de Clique en $\bar{G}$.

Vertex Cover en G: Sea $S \subseteq V$ un Vertex Cover de tamaño k en G significa que S contiene al menos uno de los extremos de cada arista de G.

Conjunto independiente en G: Los vértices que no están en S, es decir, $V - S$, forman un conjunto independiente en G, ya que ninguna arista en G puede conectar dos vértices fuera de S.

Clique en $\bar{G}$: En el grafo complementario $\bar{G}$, el conjunto $V - S$ se convierte en un clique completo porque todas las posibles aristas entre estos vértices existen en $\bar{G}$.

Cobertura de Clique en $\bar{G}$: Resolver el problema de Vertex Cover en G para un conjunto S de tamaño k es equivalente a encontrar $|V| - k$ cliques en $\bar{G}$. Los $|V| - k$ vértices de $V - S$ forman un clique en $\bar{G}$. Las aristas restantes en $\bar{G}$ (entre los vértices de S) pueden cubrirse usando cliques adicionales.

Si k es el tamaño mínimo de un Vertex Cover en G, el número mínimo de cliques necesarios para cubrir $\bar{G}$ es exactamente $|V| - k$. Esto establece una correspondencia directa entre las soluciones de ambos problemas.

La construcción del complemento $\bar{G}$ a partir de G se realiza en tiempo polinomial. Para un grafo con $n = |V|$ vértices y $m = |E|$ aristas, construir $\bar{G}$ implica verificar todas las parejas de vértices (u, v) y agregar (u, v) a $\bar{E}$ si $(u, v) \notin E$. Esto toma tiempo $O(n^2)$, ya que el número de pares de vértices es $n2$. Construir $\bar{G}$ es eficiente y polinomial con respecto al número de vértices n.

Demostración de que no puede existir una cantidad menor a $|V| - k$
Supongamos que podemos cubrir $\bar{G}$ con menos de $|V| - k$ cliques. Esto implicaría que existe un conjunto $S \subseteq V$ tal que los vértices en $V - S$ forman un clique en $\bar{G}$ y las aristas restantes se cubren con menos de k cliques adicionales. En G, esto implica que los $|V| - S$ vértices no forman un conjunto independiente completo, lo cual contradice la definición de S como un Vertex Cover mínimo, si fuera posible usar menos de $|V| - k$ cliques en $\bar{G}$, entonces S no sería un Vertex Cover mínimo en G. Por lo tanto, el número mínimo de cliques para cubrir $\bar{G}$ es exactamente $|V| - k$. Hemos demostrado que resolver el problema de Cobertura de Clique en $\bar{G}$ es equivalente a resolver Vertex Cover en G. El número mínimo de cliques necesarios en $\bar{G}$ es $|V| - k$, y no puede ser menor debido a la correspondencia directa entre cliques en $\bar{G}$ y conjuntos independientes en G. Por lo tanto, el problema de Cobertura de Clique es al menos tan difícil como Vertex Cover y, dado que Vertex Cover es NP-Hard y Cobertura de

Clique que pertenece a NP (puede verificarse en tiempo polinomial), concluimos que Cobertura de Clique es NP-completo.