Numero cromático

Claudia Puentes

December 2024

Introducción

El problema del **Número Cromático** consiste en determinar el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo $G = (V, E)$, de manera que:

1. Cada vértice tenga un color.
2. Dos vértices conectados por una arista no compartan el mismo color.

Para demostrar que este problema es **NP-Completo**, seguimos estos pasos:

1. **El problema está en NP:** Mostramos que, dado una asignación de colores a los vértices, podemos verificar en tiempo polinomial si es válido.
2. **El problema es NP-Hard:** Mostramos que un problema NP-Hard conocido (3-SAT) puede reducirse al Número Cromático en tiempo polinomial.

1. Mostrar que el problema está en NP

El problema pertenece a la clase NP si, dado una asignación de colores a sus vértices, es posible verificar que esta solución es válida en tiempo polinomial.
Supongamos que la asignación especifica un conjunto de k colores y asigna un color $c(v)$ a cada vértice v.

Para verificar si es válida:

1. Recorremos todas las aristas (u, v) del grafo.
2. Para cada arista, comprobamos si $c(u) \neq c(v)$. Si todas las aristas cumplen esta condición, entonces el certificado es válido.

Este procedimiento tiene un costo de $O(|E|)$, donde $|E|$ es el número de aristas del grafo. Como este tiempo es polinomial respecto al tamaño del grafo, el problema está en NP.

2. El Problema del Número Cromático es NP-Hard

Para demostrar que es NP-Hard, reducimos el problema **3-SAT** (que es NP-Completo) al problema del Número Cromático. Mostraremos cómo construir un grafo G tal que determinar el número cromático de G sea equivalente a resolver la instancia de 3-SAT.

Definición del Problema 3-SAT

En 3-SAT, se nos da una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva (CNF), donde hay m cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_m$, y cada cláusula tiene exactamente 3 literales. El objetivo es determinar si existe una asignación de verdad a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que haga que toda la fórmula sea verdadera.

Reducción de 3-SAT al Número Cromático

Para cada vértice $v \in V$ del grafo y cada color $c \in \{1, 2, 3\}$ (asumiendo que queremos verificar si $k = 3$ es suficiente), definimos variables lógicas $x_{v,c}$, donde:

- $x_{v,c} = 1$: Indica que el vértice v está coloreado con el color c.
- $x_{v,c} = 0$: Indica que el vértice v no está coloreado con el color c.

Estas variables son la base para capturar las asignaciones de colores a los vértices, respetando las reglas del problema.

Construcción de la Fórmula 3-SAT

La fórmula se construye para garantizar que:

1. Cada vértice esté coloreado.
2. Cada vértice tenga como máximo un color.
3. Dos vértices adyacentes no compartan el mismo color.

(a) Cada vértice debe tener al menos un color. Esta condición asegura que cada vértice esté coloreado con al menos un color de los $k = 3$ disponibles. Esto se expresa mediante la disyunción de las variables $x_{v,1}, x_{v,2}, x_{v,3}$ para cada vértice $v \in V$:

$$\bigvee_{c=1}^{3} x_{v,c}, \quad \forall v \in V$$

Esto significa que al menos una de las variables $x_{v,1}, x_{v,2}, x_{v,3}$ debe ser verdadera para cada vértice v.

(b) Cada vértice puede tener como máximo un color. Esta condición asegura que un vértice no pueda estar coloreado con más de un color simultáneamente. Si $x_{v,c} = 1$, entonces $x_{v,c'} = 0$ para todos los $c' \neq c$. Esto se expresa como:

$$\bigwedge_{1 \le c < c' \le 3} (\neg x_{v,c} \vee \neg x_{v,c'}), \quad \forall v \in V$$

Esto garantiza que no haya dos colores simultáneos para un vértice.

(c) Vértices adyacentes no pueden compartir el mismo color. Esta condición asegura que dos vértices u y v, conectados por una arista $(u, v) \in E$, no tengan el mismo color. Esto se traduce en:

$$\bigwedge_{c=1}^{3} (\neg x_{u,c} \vee \neg x_{v,c}), \quad \forall (u, v) \in E$$

Para cada color c, la cláusula asegura que si u tiene el color c, entonces v no puede tenerlo, y viceversa.

Si $x_{u,1} = 1$ y $x_{v,1} = 1$, entonces u y v comparten el mismo color, lo cual viola las reglas del problema. Estas cláusulas prohíben explícitamente tal asignación.

Correctitud de la Reducción

(a) Satisfacibilidad implica coloreo: Si la fórmula 3-SAT es satisfactoria, esto significa que existe una asignación de verdad para las variables $x_{v,c}$ que cumple todas las cláusulas. Esto garantiza que:

- Cada vértice tiene exactamente un color, porque satisface las cláusulas (a) y (b).
- Los vértices adyacentes tienen colores diferentes, porque satisface la cláusula (c).

Por lo tanto, esta asignación de verdad se traduce directamente en una solución válida al problema del Número Cromático con $k = 3$ colores.

(b) Coloreo implica satisfacibilidad: Si el grafo puede ser coloreado con $k = 3$ colores, podemos construir una asignación válida de las variables $x_{v,c}$ que satisface todas las cláusulas. Si el vértice v tiene el color c, entonces asignamos $x_{v,c} = 1$ y $x_{v,c'} = 0$ para todos $c' \neq c$. Esto satisface todas las cláusulas de la fórmula SAT, ya que cada vértice tiene un color y los vértices adyacentes no comparten color.

Garantía del Mínimo Número de Colores

La reducción del problema 3-SAT asegura que el número mínimo de colores necesarios para colorear el grafo permanece consistente con la representación en la fórmula lógica. Esto se logra por las siguientes razones: Esto se logra por las siguientes razones:

(a) Si la fórmula 3-SAT es satisfactoria con $k = 3$:

- Cuando la fórmula SAT es satisfactoria, existe una asignación de colores a los vértices que cumple todas las restricciones:
  - Cada vértice tiene exactamente un color.
  - Dos vértices adyacentes tienen colores distintos.
- Esto significa que podemos colorear el grafo utilizando exactamente 3 colores. La satisfacción de la fórmula refleja directamente que $k = 3$ es suficiente.

(b) Si la fórmula 3-SAT no es satisfactoria con $k = 3$:

- Cuando la fórmula no es satisfactoria, no existe una asignación de colores que cumpla con las restricciones utilizando solo $k = 3$ colores.
- Esto significa que el grafo no puede ser coloreado con 3 colores y, por lo tanto, necesitamos $k > 3$.

Caso 1: Si $k = 3$ no es suficiente

- Supongamos que $k = 3$ no es suficiente para colorear el grafo generado. Esto implica que existe al menos un conflicto en las restricciones:
  1. **Conflicto en los triángulos:**
     * Si ningún literal en un triángulo puede ser verdadero simultáneamente con los literales de otros triángulos debido a las restricciones globales, entonces no hay una asignación de colores que satisfaga las restricciones de que:
       · Los vértices adyacentes tengan colores diferentes.
       · Al menos un literal por cláusula sea verdadero.
  2. **Conflicto en las conexiones entre literales opuestos:**
     * Dado que x_i y $\neg x_i$ están conectados por una arista, deben tener colores diferentes. Si $k = 3$, esto puede forzar conflictos globales porque los colores disponibles no son suficientes para resolver todos los triángulos sin reutilizar colores que generen conflictos en las aristas.

Caso 2: Si $k > 3$, el grafo puede ser coloreado

- Cuando incrementamos k a $k > 3$, agregamos un nuevo color disponible, lo que permite resolver los conflictos en los siguientes escenarios:
  1. **Triángulos independientes:**
     * Cada triángulo (cláusula) puede usar un color adicional para resolver sus restricciones internas, asegurando que al menos un literal sea verdadero y que los vértices adyacentes tengan colores diferentes.
  2. **Conflictos entre triángulos y literales opuestos:**
     * Con un color adicional, los conflictos globales entre x_i y $\neg x_i$, así como entre triángulos que comparten literales, pueden resolverse.
  3. **Propagación global del coloreo:**
     * El nuevo color permite asignar colores diferentes a los literales opuestos y a los vértices de los triángulos sin violar las restricciones del problema.

(c) Por qué no se puede usar menos de $k = 3$:

- El diseño de las cláusulas obliga a que:
  1. Cada vértice tenga un color.
  2. Dos vértices adyacentes no compartan el mismo color.
- Si intentamos colorear con menos de $k = 3$ colores, no podemos satisfacer todas las cláusulas simultáneamente, ya que:
  - Para cada vértice v, al menos uno de los colores debe ser verdadero:

$$x_{v,1} \lor x_{v,2} \lor x_{v,3}.$$

  - Para cada par de vértices adyacentes, sus colores deben ser diferentes:

$$\neg x_{u,c} \lor \neg x_{v,c}.$$

- Reducir el número de colores por debajo de $k = 3$ genera conflictos en las cláusulas, haciendo que la fórmula no sea satisfactoria.

Demostración:

1. Supongamos que $k = 2$:
   - Intentamos colorear el grafo con 2 colores. Esto implica que cada vértice solo puede estar asignado a $x_{v,1}$ o $x_{v,2}$.
   - Sin embargo, si el grafo tiene un triángulo (tres vértices completamente conectados), los tres vértices necesitarían tener colores distintos para satisfacer las restricciones, lo cual no es posible con $k = 2$.

Por lo tanto, la reducción garantiza que el número mínimo de colores necesario k se preserva.

Conclusión

1. El problema del Número Cromático pertenece a NP, ya que podemos verificar en tiempo polinomial si una asignación de colores es válida.
2. El problema del Número Cromático es NP-Hard, ya que hemos reducido 3-SAT al Número Cromático en tiempo polinomial.

Por lo tanto, el problema del Número Cromático es **NP-Completo**.