

1 Exact Cover

Dado un conjunto X y una colección S de subconjuntos de X , el problema consiste en determinar si existe una subcolección $S' \subseteq S$ tal que cada elemento de X aparezca exactamente una vez en los subconjuntos de S'

Reducción de Número Cromático a Exact Cover

Sea el problema Número Cromático, cuya entrada es un grafo $G = (V, E)$. Para cada vértice $v \in V$, creamos un conjunto $S_{vc} = \{(v, c) \mid \forall c \in \{1, 2, \dots, k\}\}$, donde asociamos todos los posibles colores a cada vértice v . Para cada arista $(u, v) \in E$, creamos un conjunto $S_{uv} = \{(v, c), (c, u)\}$ con $c \in \{1, 2, \dots, k\}$, lo cual nos garantiza que u y v no tienen el mismo color.

- Para crear la colección S , es suficiente pasar una única vez por cada vértice y arista, por lo que se puede hacer en $O(|V| + |E|)$.
- Si existe una solución válida para el problema Número Cromático, donde k es el número cromático de G , entonces existe una solución válida para el problema Exact Cover, ya que un elemento del cover debe ser o una coloración de un vértice S_{vc} o una restricción de una arista S_{uv} .
- Si existe una solución válida para el problema Exact Cover, entonces se puede probar que define una coloración válida para G , verificando que cada subconjunto de S' pertenece a un S asociado a una coloración válida.

Luego una instancia de Exact Cover para $X = V$ y la colección $S = \{S_{vc} \mid v \in V\} \cup \{S_{uv} \mid (u, v) \in E\}$. Por tanto, Número Cromático \leq_m Exact Cover, luego Exact Cover es **NP-Hard**.

Verificación de Exact Cover en tiempo polinomial

Sea $S' \subseteq S$ una subcolección de S , y X el conjunto universo de elementos. Para cada $S_i \in S'$, tomamos cada elemento $s \in S_i$ y lo marcamos como encontrado, si en algún momento, el elemento s ya se encuentra marcado, la solución no es válida. Si al finalizar el proceso, todos los elementos de X han sido marcados, la solución es válida. En otro caso, la solución no lo es. Si se garantiza que la verificación de que un elemento ya ha sido marcado

se puede hacer en tiempo constante, entonces la verificación de la solución es polinomial. Por tanto, Exact Cover $\in \mathbf{NP}$.

Conclusión

Como Exact Cover es **NP-Hard** y Exact Cover $\in \mathbf{NP}$, entonces Exact Cover es **NP-Completo**.

2 Numero Cromático

El número cromático de un grafo es el número mínimo de colores necesarios para colorear los vértices del grafo de manera que dos vértices adyacentes no compartan el mismo color. Hallar el número cromático en un grafo.

Reducción de 3-SAT a Número Cromático

Sea el problema 3-SAT, cuya entrada es una fórmula booleana en forma normal conjuntiva con exactamente 3 literales por cláusula. Definimos un nodo V_c , el cual será el nodo central de nuestro grafo G . Por cada variable x_i de la fórmula y su negación $\neg x_i$, creamos un subgrafo C_3 cuyos vértices son x_i , $\neg x_i$ y V_c . Luego nuestro grafo G será la unión de todos los subgrafos C_3 para cada variable x_i de la fórmula. Definimos la función de coloración $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que V es el conjunto de vértices de G y k es el número cromático de G y k el número cromático.

Caso base $k = 3$

Si definimos $\forall x_i, \neg x_i \in V$, $f(x_i) = 1$, $f(\neg x_i) = 2$ y $f(V_c) = 3$, entonces f es una función de coloración válida para G y $k = 3$, ya que cada subgrafo C_3 tiene solamente al vértice V_c en común y es conocido que un grafo C_3 es 3-coloreable.

Caso general $k > 3$

Si partimos de una instancia de un grafo 3 coloreable, agregamos $k - 3$ vértices, donde cada uno está asociado a $c \in \{4, 5, \dots, k\}$ y conectado a todos los restantes vértices de G . El grafo resultante es k -coloreable, pues cada subgrafo C_3 está conectado a cada uno de los nuevos $k - 3$ vértices, los cuales están coloreados con colores distintos.

- El grafo G se puede construir en tiempo polinomial, pues se recorre cada variable y se crea un subgrafo C_3 para cada una. Luego se realizan $(k - 3) \times |V|$ operaciones para agregar los nodos faltantes.
- Si la fórmula es válida, entonces se puede probar que define una coloración válida para G , por lo probado anteriormente.
- Si existe una coloración válida, se puede probar que define una fórmula válida extrayendo los vértices que forman los subgrafos C_3 y asignándolos a una cláusula de la forma correcta.

Por tanto, $3\text{-SAT} \leq_m \text{Número Cromático}$, luego Número Cromático es **NP-Hard**.

Verificación de Número Cromático en tiempo polinomial (Variante de decisión)

Dados el grafo $G = (V, E)$ y un entero k , por cada $v \in V$ se le asigna un color $c \in \{1, 2, \dots, k\}$ y a cada uno de sus vértices adyacentes se les asigna un color distinto. Si en algún momento, se debe utilizar un $c > k$, el grafo no es k -coloreable. En otro caso, el grafo es k -coloreable. Esto tiene un costo de $O(|V| + |E|)$. Por tanto, la variante de decisión de Número Cromático $\in \text{NP}$.

Conclusión

Como Número Cromático es **NP-Hard** y su variante de decisión $\in \text{NP}$, entonces la variante de decisión de Número Cromático es **NP-Completo**.