1 Exact Cover

Dado un conjunto X y una colección S de subconjuntos de X, el problema consiste en determinar si existe una subcolección $S' \subseteq S$ tal que cada elemento de X aparezca exactamente una vez en los subconjuntos de S'

Reducción de Número Cromático a Exact Cover

Sea el problema Número Cromático, cuya entrada es un grafo $G = (V, E)$. Para cada vértice $v \in V$, creamos un conjunto $S_{vc} = \{(v, c)\} \, \forall c \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$, donde asociamos todos los posibles colores a cada vértice v. Para cada arista $(u, v) \in E$, creamos un conjunto $S_{uvc} = \{(v, c), (c, u)\}$ con $c \in \{1, 2, \ldots, k\}$, lo cual nos garantiza que u y v no tienen el mismo color.

- Para crear la colección S, es suficiente pasar una única vez por cada vértice y arista, por lo que se puede hacer en $O(|V| + |E|)$.
- Si existe una solución válida para el problema Número Cromático, donde k es el número cromático de G, entonces existe una solución válida para el problema Exact Cover, ya que un elemento del cover debe ser o una coloracion de un vértice S_{vc} o una restricción de una arista S_{uvc}.
- Si existe una solución válida para el problema Exact Cover, entonces se puede probar que define una coloración válida para G, verificando que cada subconjunto de S' pertenece a un S asociado a una coloración válida.

Luego una instancia de Exact Cover para $X = V$ y la coleccion $S = \{S_{vc} \mid v \in V\} \cup \{S_{uvc} \mid (u, v) \in E\}$. Por tanto, Número Cromático $<=_m$ Exact Cover, luego Exact Cover es **NP-Hard**.

Verificación de Exact Cover en tiempo polinomial

Sea $S' \subseteq S$ una subcolección de S, y X el conjunto universo de elementos. Para cada $S_i \in S'$, tomamos cada elemento $s \in S_i$ y lo marcamos como encontrado, si en algún momento, el elemento s ya se encuentra marcado, la solución no es válida. Si al finalizar el proceso, todos los elementos de X han sido marcados, la solución es válida. En otro caso, la solución no lo es. Si se garantiza que la verificacion de que un elemento ya ha sido marcado se puede hacer en tiempo constante, entonces la verificacion de la solución es polinomial. Por tanto, Exact Cover $\in$ **NP**.

Conclusión

Como Exact Cover es **NP-Hard** y Exact Cover $\in$ **NP**, entoncesExact Cover es **NP-Completo**.

2 Numero Cromático

El número cromático de un grafo es el número mínimo de colores necesarios para colorear los vértices del grafo de manera que dos vértices adyacentes no compartan el mismo color. Hallar el número cromático en un grafo.

Reducción de 3-SAT a Número Cromático

Sea el problema 3-SAT, cuya entrada es una fórmula booleana en forma normal conjuntiva con exactamente 3 literales por cláusula. Definimos un nodo V_c, el cual será el nodo central de nuestro grafo G. Por cada variable x_i de la fórmula y su negación $\neg x_i$, creamos un subgrafo C_3 cuyos vértices son $x_i, \neg x_i$ y V_c. Luego nuestro grafo G será la unión de todos los subgrafos C_3 para cada variable x_i de la fórmula. Definimos la función de coloración $f : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que V es el conjunto de vértices de G y k es el número cromático de G y k el número cromático.

Caso base $k = 3$

Si definimos $\forall x_i, \neg x_i \in V,\ f(x_i) = 1,\ f(\neg x_i) = 2$ y $f(V_c) = 3$, entonces f es una función de coloración válida para G y $k = 3$, ya que cada subgrafo C_3 tiene solamente al vértice V_c en común y es conocido que un grafo C_3 es 3-coloreable.

Caso general $k > 3$

Si partimos de una instancia de un grafo 3 coloreable, agregamos $k - 3$ vértices, donde cada uno esta asociado a $c \in \{4, 5, \ldots, k\}$ y conectado a todos los restantes vértices de G. El grafo resultante es k-coloreable, pues cada subgrafo C_3 esta conectado a cada uno de los nuevos $k - 3$ vértices, los cuales estan coloreados con colores distintos.

- El grafo G se puede construir en tiempo polinomial, pues se recorre cada variable y se crea un subgrafo C_3 para cada una. Luego se realizan $(k-3) \times |V|$ operaciones para agregar los nodos faltantes.

- Si la fórmula es válida, entonces se puede probar que define una coloración válida para G, por lo probado anteriormente.

- Si existe una coloración válida, se puede probar que define una fórmula válida extrayendo los vértices que forman los subgrafos C_3 y asignandolos a una cláusula de la forma correcta.

Por tanto, 3-SAT $<=_m$ Número Cromático, luego Número Cromático es **NP-Hard**.

Verificación de Número Cromático en tiempo polinomial (Variante de decisión)

Dados el grafo $G = (V, E)$ y un entero k, por cada $v \ inV$ se le asigna un color $c \in \{1, 2, \dots, k\}$ y a cada uno de sus vértices adyacentes se les asigna un color distinto. Si en algún momento, se debe utilizar un $c > k$, el grafo no es k-coloreable. En otro caso, el grafo es k-coloreable. Esto tiene un costo de $O(|V| + |E|)$. Por tanto, la variante de decisión de Número Cromático $\in$ **NP**.

Conclusión

Como Número Cromático es **NP-Hard** y su variante de decisión $\in$ **NP**, entonces la variante de decisión de Número Cromático es **NP-Completo**.

3 Retroalimentación de Vértices

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de vértices es un subconjunto de vértices $F \subseteq V$ tal que al eliminar todos los vértices en F (y sus aristas incidentes), el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido). El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo.

Reducción de Vertex Cover a Retroalimentación de Vértices

Sea el problema Vertex Cover, cuya entrada es un grafo $G = (V, E)$. Definimos la entrada de Retroalimentación de Vértices como $G' = (V', E')$, donde:

- $V' = V$
- $E' = E \cup \{(u, v) | u, v \in V \wedge (u, v) \notin E\}$
- G' un grafo completo, ya que en E' se agregan a E las aristas faltantes.

Como Vertex Cover nos devuelve un conjunto mínimo de vértices V_c que cubren todas las aristas de G, si eliminamos V_c de G', el grafo resultante no contiene ciclos, por lo que V_c es un conjunto mínimo de retroalimentación de vértices de G'. Supongamos que V_c no es un conjunto mínimo de retroalimentación de vértices de G', entonces existe un conjunto $V_f \subset V_c$ tal que V_f es un conjunto de retroalimentación de vértices de G' y $|V_f| < |V_c|$. Luego sea v_c tal que $v_c \in V_f \wedge v_c \notin V_c$. Como G' es completo, v_c pertenece a un 3-clique contenido en G'. Luego, como el no pertenece a V_c, al menos 2 de sus vértices adyacentes deben pertenecer a V_c, pues es un Vertex Cover. Pero si v_c perteneciera a V_c, entonces $V_c' = V_c \cup \{v_c\}$ es un Vertex Cover de G, lo cual contradice que V_c es mínimo. Por tanto, V_c es un conjunto mínimo de retroalimentación de vértices de G'.

- El grafo G' se construye en tiempo $O(|V|^2)$, pues es un grafo completo.
- Si tenemos el conjunto V_c que es un Vertex Cover de G, entonces eliminando los $v \in V_c$ en G', podemos verificar que el grafo resultante efectivamente no contiene ciclos.
- Si tenemos un conjunto V_f que es de retroalimentación en G' y mínimo, podemos conformar un grafo G a partir de V_f, tal que V_f es un Vertex Cover mínimo en G.

Por tanto, Vertex Cover $<=_m$ Retroalimentación de Vértices, luego Retroalimentación de Vértices es **NP-Hard**.