Conjunto Dominante

Claudia Puentes

December 2024

Introducción

En un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de vértices $D \subseteq V$ es un conjunto dominante si cada vértice de V que no está en D es adyacente a al menos un vértice en D.
Una partición de los vértices V en k conjuntos $D_1, D_2, ..., D_k$ es una partición domática si cada D_i (para $i = 1, 2, ..., k$) es un conjunto dominante. El número dominante es la cardinalidad del menor conjunto dominante de G.

El problema consiste en hallar el número dominante de G, es decir, un **conjunto dominante mínimo**, un conjunto D de menor tamaño que domine a todos los vértices.

Para demostrar que este problema es NP-Completo, debemos cumplir que el problema está en NP, es decir, que una solución candidata puede verificarse en tiempo polinomial, y que el problema es NP-Hard, lo que significa que cualquier problema en NP puede reducirse a este en tiempo polinomial. Además, se debe establecer que el problema de encontrar un conjunto dominante mínimo es tan difícil como un problema NP-completo conocido, en este caso **Vertex Cover**, mediante una reducción polinomial clara y detallada.

Definiciones básicas

Un **Vertex Cover** es un conjunto $S \subseteq V$ en un grafo $G = (V, E)$ tal que cada arista $(u, v) \in E$ tiene al menos uno de sus extremos en S. El objetivo es encontrar un **Vertex Cover mínimo**, el conjunto S de menor tamaño que cubra todas las aristas.

Por otro lado, un **Conjunto Dominante** es un conjunto $D \subseteq V$ tal que cada vértice $v \in V \setminus D$ está conectado a al menos un vértice en D. El objetivo es encontrar un **Conjunto Dominante mínimo**, el conjunto D de menor tamaño que domine a todos los vértices.

Conjunto Dominante pertenece a NP

Un problema pertenece a la clase NP si una solución propuesta puede verificarse en tiempo polinomial. En este caso, dado un conjunto $D \subseteq V$, podemos verificar en tiempo $O(|V| + |E|)$ si todos los vértices en $V \setminus D$ tienen al menos un vecino en D. Esto se logra revisando las aristas incidentes a cada vértice en $V \setminus D$. Por lo tanto, el problema de encontrar un conjunto dominante pertenece a NP.

Relación entre Vertex Cover y Conjunto Dominante

Aunque ambos problemas involucran vértices y sus conexiones, atacan objetivos diferentes:
Vertex Cover busca cubrir aristas, mientras que el **Conjunto Dominante** busca cubrir vértices.
Sin embargo, existe una conexión clave que permite transformar uno en el otro. En un grafo $G = (V, E)$, si $S \subseteq V$ es un **Vertex Cover**, entonces $V \setminus S$ (los vértices fuera del cover) es un conjunto independiente. Por otro lado, si $D \subseteq V$ es un **Conjunto Dominante**, los vértices $V \setminus D$ están controlados por D, ya que cada vértice en $V \setminus D$ tiene vecinos en D.

4. Reducción de Vertex Cover a Conjunto Dominante

Dado un grafo $G = (V, E)$, supongamos que tenemos una solución al problema de **Vertex Cover**: un conjunto mínimo S que cubre todas las aristas. Considera el conjunto $D = V \setminus S$. Este conjunto contiene los vértices **no incluidos** en el Vertex Cover. Podemos asegurarnos de que D cumple con las propiedades de un conjunto dominante:

Cada vértice en $V \setminus D = S$ debe estar conectado a al menos un vértice en D, esto se cumple porque en el problema de Vertex Cover, cada arista (u, v) está cubierta por al menos uno de los extremos en S. Por lo tanto, para cualquier $v \in S$, existe un vecino $u \in D$ tal que $(u, v) \in E$. Por construcción, D es un conjunto dominante. Si tienes un Vertex Cover S, puedes construir un conjunto dominante $D = V \setminus S$ en tiempo polinomial.

5. Reducción de Conjunto Dominante a Vertex Cover

Dado un grafo $G = (V, E)$, supongamos que tenemos una solución al problema de **Conjunto Dominante**: un conjunto D que domina todos los vértices de G. Considera el complemento $S = V \setminus D$. Este conjunto contiene los vértices **no incluidos** en el conjunto dominante. Podemos asegurarmos de que S cumple con las propiedades de un Vertex Cover:

Cada arista $(u, v) \in E$ debe estar cubierta por al menos un vértice en S, esto se cumple porque en el problema de Conjunto Dominante, cada vértice $v \in V \setminus D$ debe estar conectado a un vértice en D. Por lo tanto, cualquier arista (u, v) tiene al menos un extremo en D, y si ambos extremos estuvieran en $V \setminus D$, D no dominaría V. Si tienes un conjunto dominante D, puedes construir un Vertex Cover $S = V \setminus D$ en tiempo polinomial.

6. El conjunto mínimo S genera el conjunto dominante mínimo $D = V \setminus S$

Cada vértice en S está conectado a D: Por definición de Vertex Cover, cada arista está cubierta por S, lo que implica que los vértices de S tienen vecinos en D. Esto asegura que $D = V \setminus S$ domina a todos los vértices.
D **es mínimo:** Si eliminamos cualquier vértice de D, algún vértice en S quedaría sin conexión y D dejaría de ser dominante. Como S es mínimo, su complemento D también es mínimo.
La relación entre el tamaño mínimo del Vertex Cover ($|S|$) y el tamaño mínimo del Conjunto Dominante ($|D|$) es:

$$|D| = |V| - |S|$$

Esto asegura que el tamaño de D es óptimo.

7. El conjunto mínimo D genera el conjunto mínimo $S = V \setminus D$

Cada vértice en D está conectado a S: Por definición de Conjunto Dominante, cada vértice en $V \setminus D = S$ debe estar conectado a al menos un vértice en D. Esto asegura que cualquier arista del grafo está cubierta por algún vértice en D o, específicamente, por un vértice en $S = V \setminus D$.
S **es mínimo:** Si eliminamos cualquier vértice de S, alguna arista del grafo no estaría cubierta, porque esa arista tendría ambos extremos en D, y D no dominaría el grafo correctamente. Dado que D es mínimo, esto implica que su complemento $S = V \setminus D$ también debe ser mínimo. Si S no fuera mínimo, significaría que D podría crecer para dominar los vértices eliminados, lo que contradice la definición de D como conjunto dominante mínimo.
La relación entre el tamaño mínimo del Conjunto Dominante ($|D|$) y el tamaño mínimo del Vertex Cover ($|S|$) sigue siendo:

$$|S| = |V| - |D|$$

Esto asegura que $S = V \setminus D$ también es un Vertex Cover mínimo.

Conclusión Final

Dado que podemos transformar cualquier instancia de **Vertex Cover** en una instancia de **Conjunto Dominante** y viceversa en tiempo polinomial, se concluye que el problema de Conjunto Dominante es NP-Hard, porque **Vertex Cover** es NP-completo. Además, el problema pertenece a NP, ya que una solución propuesta puede verificarse en tiempo polinomial. Por lo tanto, el problema de Conjunto Dominante es NP-Completo.