# Mathemathische Modellierung

Adrian Hieber

23. Oktober 2023

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Modulinfos

Dieses Skript bezieht sich auf den Kurs Mathematische Modellierung von Kräutle. [**?**]
Es gibt kein Übungsbetrieb, da man hierfür eher an dem Seminar erarbeiten soll.
Als Referenzbuch wird Mathematische Modellierung von Eck[**?**] empfohlen.

# 2 Einführung

## 2.1 Mathematische Modellierung mit gewöhnlichen Diff.gleichungen (ODE):

Ein sehr einfaches Beispiel aus Populitionsdynamik: Wachstum Schafherde.
Zuerst: Welche Größen (unbekannte, Parameter) sind relevant (in physikalischer Dimension):

$$t = Zeit; \qquad \text{y(t)=Anzahl Schafe im Zeitpunkt t} \tag{2.1}$$

- Variable t hat die **Dimension** 'Zeit' und eine Einheit (zb. Tage, Stunden...)
- Variable y(t) hat die **Dimension** 'Anzahl'(='Stück'), kann auch als **Dimensionslos** bezeichnet werden

Für Funktion im mathematischen Modellen sollte man ein Definitionsbereich festlegen, wie z.B. $y : [0, T) \to \mathbb{R}$, $y[t_0, T] \to \mathbb{R}$ oder $y : [0, \inf) \to \mathbb{R}$.

### 2.1.1 Bemerkung:

y ist keine gegebene Funktion, sondern gesucht; a priori ist klar, ob y(t) für beliebige große t existiert. Existiert eine Lsg für alle Zeite, d.h. $y : [t_0, \inf) \to \mathbb{R}$ so bezeichnet man sie als **globale Lösung**.

### 2.1.2 Modellannahmen:

Die Wachstumsrate w(t) sei proportional zum aktuellen Bestand:

$$w(t) = K \cdot g(t) \tag{2.2}$$

Es sei $K \in \mathbb{R}$ (ggf. $K \in \mathbb{R}^+$). Dabei ist die Wachstums**rate** definiert als Änderung des Bestands pro Zeitintervall, für 'kurze' Zeitintervalle T, noch genauer für $T \to 0$:

$$w(t) = \lim_{T \to 0} \frac{y(t+T) - y(t)}{T} = y'(t) \tag{2.3}$$

Somit sind unsere Modellgleichungen (Anfangswerte nicht vergessen):

$$\boxed{y'(t) = K \cdot y(t), \qquad y(0) = 0} \tag{2.4}$$

Mit y'(t) als $\frac{Anzahl}{Zeit}$ und $y(0)$ als Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$.
Es enthält 2 **Parameter** $K \in \mathbb{R}$ (oder $K > 0$ bzw $K \geq 0$) $y_0 > 0$ bzw $y_0 \geq 0$ ('Daten')

**2.1.2.1 Dimensionen:** $y_0$: Anzahl $\qquad K$: $\frac{1}{Zeit}$ (ergibt sich als Dgl. da y'(t) die Dimension $\frac{Anzahl}{Zeit}$ hat, was sich wieder aus dem Differenzenquotient ergibt.

## 2.2 Was haben wir alles vernachlässigt; Aussehen von komplexe Modelle?

- ggf, hängt die Wachstumsrate von Nahrungsangebot ab ('begrenzte Ressourcen') **??**
- ...

# 3 Entdimensionalisierung

des Modells $y'(t) = K \cdot y(t), \qquad y(t_0) = y_0$

$$t[Zeit]; \qquad y[Stueckoder Anzahl] \tag{3.1}$$

Wähle dazu (dimensionsbehaftete) "Basisgrößen"(Festlegeung von Maßstäben)$\overline{y}, \bar{t}$
definiere:

$$\tau := \frac{t - t_0}{\bar{t}} \quad \text{und} \quad y(\tau) := \frac{y(t)}{\overline{y}} = \frac{y(\bar{t}\tau + t_0)}{\overline{y}} \tag{3.2}$$

Hierbei ist $\tau$ und $y(\tau)$ <u>**dimensionslose**</u> Größen.

## 3.1 Modell in diesen Größen ausdrücken:

bildlich:TODO

$$\rightsquigarrow y'(\tau) = \frac{\bar{t}}{\overline{y}} y'(\bar{t}\tau + t_0) \overset{DGL}{=} \frac{\bar{t}}{\overline{y}} \cdot K \cdot y(\bar{t}\tau + t_0) = \bar{t} K y(\tau) \tag{3.3}$$

Nicht vergessen: Anfangsbedingung auch skalieren:
Mit $\tau := 0$ ist $y(0) = \dfrac{y(\bar{t} \cdot 0 + t_0)}{\overline{y}} \overset{A.B.}{=} \dfrac{y(t_0)}{\overline{y}}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} y'(\tau) = \bar{t} \cdot K \cdot y(\tau) \\ y(0) = \dfrac{y_0}{\overline{y}} \end{array}} \tag{3.4}$$

**Bemerkung** Die $y(0)$,$y'(\tau)$, $y(\tau)$ und Kostr. dimensionslos sind, müssen auch die Größen $\bar{t}K$ und $\frac{y_0}{\overline{y}}$.

### 3.1.1 Wahl von $\overline{y}$, $\bar{t}$?

- Größen sind dimensionslos (z.B. $ln \dfrac{y(t)}{y_0} = ln \overbrace{y(t)}^{dim.behaftet} - ln( \overbrace{y_0}^{dim.behaftet} )$ ist fragwürdig)
- einige Paramter können elemeniert werden

  Analsis einfacher

  es sind wenige Simulationen nötig um sich Überblick über die Abhängigkeiten der Lösung von den Paramtern zu verschaffen
- Größen haben moderate Werte
- Entdimensionalisierung dient als Vorbereitung eines eventuell geplanten **asymtotischen Entwicklung**[**?**]