Angewandte Mathematik
Modellierung und Numerik
Daniel Tenbrinck, Tim Roith, Lea Föcke

Friedrich-Alexander-Universität
Naturwissenschaftliche Fakultät

Einführung in die Numerik

Programmieraufgaben Blatt 04, Abgabe: Mittwoch, 21.12.2022, 12:00
Wintersemester 2022/2023

— AUFGABE 1: Newton-Verfahren; 3 + 3 + 3 + 6 Punkte —

In dieser Aufgabe implementieren wir eine Funktion `newton_like(f, x_0, dfz=None, x_1=None, tol=1e-8, max_iter=50, variant='standard')` welche Nullstellen der Funktion `f` $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimmen soll. Wir werden im Folgenden anhand des keywords `variant` die Variante spezifizieren, welche durchgeführt werden soll. Hierbei haben wir folgende Argumente für alle Verfahren.

- `f`: Repräsentiert hier die Zielfunktion. Bei Verfahren, welche die Ableitung der Funktion **nicht** explizit benötigen kann `f` eine einfache Python Funktion sein. Falls die Ableitung benötigt wird, soll `f` eine Instanz der Klasse `func` sein, wobei `__call__(self, x)` die Auswertung der Funktion an `x` implementiert und weiterhin eine Methode `derivative(self, x)` gegeben ist, welche die Ableitung (d.h. die Jacobi-Matrix) der Funktion an `x` ausgibt.
- `x_0`: Der Startwert für die Verfahren.
- `tol`: Dieser Wert bestimmt das absolute Abbruchkriterium. Brechen Sie das Verfahren jeweils ab, falls $|x_k - x_{k-1}| <$ `tol` erfüllt ist.
- `max_iter`: Die maximale Anzahl der Iterierten. Brechen Sie das Verfahren ab, falls die maximale Zahl an Iterationen erreicht ist.

(i) `variant='standard'`: Hier soll das normale Newton-Verfahren implementiert werden. Zur Auswertung der Ableitung verwenden wir hier `f.derivative(x)`.

(ii) `varaint='secant'`: Hier soll das Sekantenverfahren durchgeführt werden und deshalb muss auch `x_1` übergeben werden.

(iii) `variant='simple'`: Hier soll das einfache Newton-Verfahren von Theorie Blatt 08 durchgeführt werden. Das Argument `dfz` stellt hierbei die **fixierte** Matrix dar, welche in der Newton-Iteration an Stelle von `f.derivative(x)` verwendet wird.

(iv) Testen und evaluieren Sie jeweils alle drei Methoden für die folgenden Beispiele

$$f_1 : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad f_1(y) := \cot(y), \quad x_0 = 1,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2(y_1, y_2) := \sin(y_1) + \cos(y_2), \quad x_0 = (0,1)^T,$$
$$f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_3(y_1,\dots,y_n) := \sum_{i=1}^{n} \exp(-y_i^2) - n, \quad x_0 = (1,\dots,1)^T, n = 37.$$

Verwenden Sie jeweils `tol=1e-8` und vergleichen Sie die Anzahl der Iterationen bis zum Abbruch und die tatsächliche Laufzeit der Verfahren.