Angewandte Mathematik
Modellierung und Numerik
Daniel Tenbrinck, Tim Roith

Friedrich-Alexander-Universität
Naturwissenschaftliche Fakultät

Einführung in die Numerik

Programmieraufgaben Blatt 06, Abgabe: 25.01.2023, 12:00
Wintersemester 2022/2023

— AUFGABE 1: Quadratur; 6 + 5 + 4 Punkte

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Approximation von Integralen

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a < b$. Implementieren Sie dazu eine Funktion `quad(f, a=0., b=1., method='trapezoidal', num_ints=1)`, wobei

- `f` die Funktion und
- `a,b` die Intervallgrenzen,

repräsentieren. Der Wert `num_ints` gibt hierbei an, in wie viele Teilintervalle das Intervall $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ aufgeteilt werden soll.

(i) Für `num_ints=1` soll anhand des keywords `method` das Integral mittels folgender Newton–Cotes Formeln bestimmt werden.

   (a) method='trapezoidal': Quadratur mittels der Trapezregel.

   (b) method='Simpson': Quadratur mittels der Simpson-Regel.

   (c) method='pulcherrima': Quadratur mittels der Newton 3/8-Regel, a.k.a die Pulcherrima.

   (d) method='Milne': Quadratur mittels der Milne-Regel.

   (e) method='six-point': Quadratur mittels der 6-Punkt-Regel.

   (f) method='Weddle': Quadratur mittels der Weddle-Regel.

(ii) Falls `num_ints>1` gilt, soll das Intervall $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ in `num_ints` viele äquidistante Teilintervalle $[\mathtt{c}_i, \mathtt{c}_{i+1}], \quad i = 0, \dots, \mathtt{num\_ints} - 1$ aufgeteilt werden. Wir teilen das Integral dann folgendermaßen auf

$$\sum_{i=0}^{\mathtt{num\_ints}-1} \int_{\mathtt{c}_i}^{\mathtt{c}_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{\mathtt{a}}^{\mathtt{b}} f(x)\, dx$$

und approximieren die Integrale auf den Teilintervallen mithilfe der durch `method` spezifizierten Quadratur-Regel.

Hinweis: Im Fall linearer Interpolation auf jedem Teilintervall liefert diese Methode auch das Integral über das lineare Spline. Für höhere Polynomgrade ist dies nicht der Fall, da wir keine Bedingung an die Ableitung fordern, die Funktion die intergiert wird ist also einfach stückweise ein Polynom, das an den Intervallgrenzen i.A. nicht differenzierbar ist. Deshalb ist diese Art der Quadratur als „zusammengesetzte“ Quadratur bekannt.

(iii) Testen Sie ihre Implementierung anhand der Funktion $f(x) = (x + 1)\ \sin(x)$, für verschiedene Intergralgrenzen a, b. Vergleichen Sie jeweils die Genauigkeit der Quadratur auch für verschiedene Anzahlen von Teilintervallen `num_ints`.