

Analiza porównawcza algorytmów minimalizacji stochastycznej PRS i GA w optymalizacji funkcji Ackleya i Alpine02

Adrian Krawczyk, Damian Chłus

31 stycznia 2025

Streszczenie

Niniejszy eksperyment przedstawia szczegółową analizę porównawczą efektywności algorytmów Pure Random Search (PRS) i Algorytmu Genetycznego (GA) w kontekście minimalizacji dwóch funkcji testowych: Ackleya i Alpine02. Przeprowadzono kompleksowe eksperymenty w przestrzeniach 2-, 10- i 20-wymiarowych, wykonując po 100 niezależnych prób dla każdej konfiguracji przy limicie 1000 ewaluacji funkcji.

1 Wprowadzenie

Optymalizacja funkcji wielowymiarowych stanowi fundamentalne wyzwanie w dziedzinie algorytmów obliczeniowych i sztucznej inteligencji. W praktyce często spotykamy się z problemami optymalizacyjnymi o różnej charakterystyce i złożoności, co wymaga odpowiedniego doboru metod optymalizacji. W niniejszym eksperymencie skupiamy się na porównaniu dwóch fundamentalnie różnych podejść:

- **Pure Random Search (PRS)** - algorytm działa poprzez losowe generowanie punktów w przestrzeni poszukiwań. Każdy nowy punkt jest porównywany z dotychczas najlepszym znalezionym rozwiązaniem. Jeśli wartość funkcji celu w nowym punkcie jest niższa, aktualizujemy najlepsze znane rozwiązanie. Po zakończeniu iteracji wynik algorytmu stanowi wartość funkcji w ostatnio zarejestrowanym najlepszym punkcie.
- **Algorytm Genetyczny (GA)** - metoda optymalizacji inspirowana mechanizmami ewolucji, takimi jak selekcja, krzyżowanie i mutacja. Proces rozpoczyna się od losowego wygenerowania początkowej populacji rozwiązań. Następnie każdemu rozwiązaniu przypisywana jest wartość funkcji celu, a najlepsze osobniki są wybierane do dalszej reprodukcji. Poprzez operacje genetyczne, takie jak krzyżowanie (łączenie cech dwóch rodziców) i mutacja (wprowadzanie losowych zmian), tworzone są nowe potencjalnie lepsze rozwiązania. Proces powtarza się przez określoną liczbę iteracji lub do osiągnięcia satysfakcjonującego wyniku.

Celem badania jest określenie efektywności obu metod w kontekście różnych funkcji testowych i wymiarowości przestrzeni rozwiązań, co ma istotne znaczenie praktyczne przy wyborze odpowiedniej metody optymalizacji dla konkretnych zastosowań.

2 Metodologia badań

2.1 Środowisko eksperymentalne

Wszystkie eksperymenty przeprowadzono w środowisku R, wykorzystując następujące biblioteki:

- `smoof` - do implementacji funkcji testowych
- `ecr` - do implementacji algorytmu genetycznego
- `ggplot2` - do wizualizacji wyników
- `stats` - do analiz statystycznych

2.2 Implementacja algorytmów

2.2.1 Pure Random Search (PRS)

Implementacja PRS opiera się na następujących założeniach:

- Liczba ewaluacji funkcji celu: 1000

2.2.2 Algorytm Genetyczny (GA)

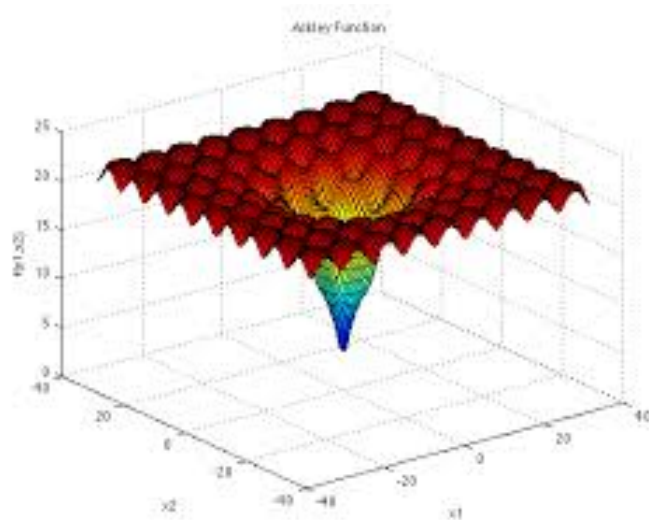
Konfiguracja GA objęła następujące parametry:

- Wielkość populacji: $\mu = 50$ osobników
- Liczba potomków: $\lambda = 25$ w każdej generacji
- Operator mutacji: mutacja gaussowska z adaptacją do granic przestrzeni poszukiwań
- Kryterium stopu: 1000 ewaluacji funkcji celu

3 Funkcje testowe

3.1 Funkcja Ackleya

$$f(\mathbf{x}) = -20 \exp \left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) - \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i) \right) + 20 + e \quad (1)$$



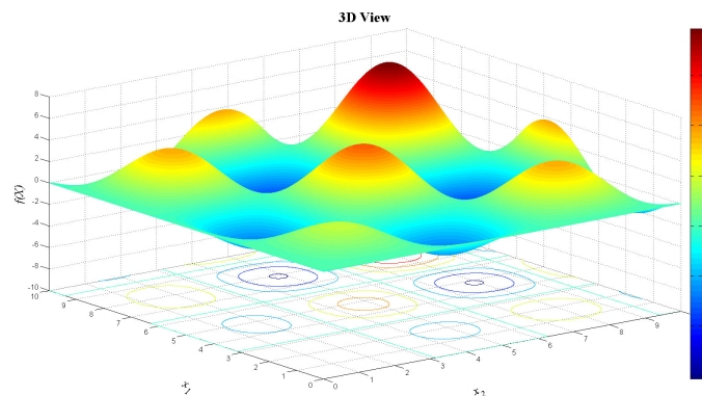
Rysunek 1: Wizualizacja funkcji Ackleya w 3D

Charakterystyka:

- Minimum globalne: $f(\mathbf{0}) = 0$
- Dziedzina: $x_i \in [-32.768, 32.768]$
- Wielomodalna z wieloma lokalnymi minimami
- Symetryczna względem początku układu współrzędnych
- Charakterystyczny kształt "igły w stogu siana"

3.2 Funkcja Alpine02

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i} \sin(x_i) \quad (2)$$



Rysunek 2: Wizualizacja funkcji Alpine02 w 3D

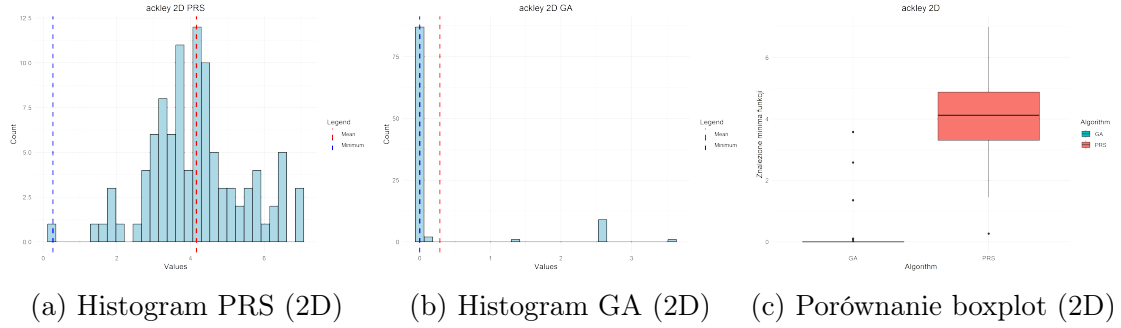
Charakterystyka:

- Dziedzina: $x_i \in [0, 10]$
- Złożona struktura z wieloma lokalnymi ekstremami
- Nieliniowa zależność między wymiarami
- Nieregularna powierzchnia

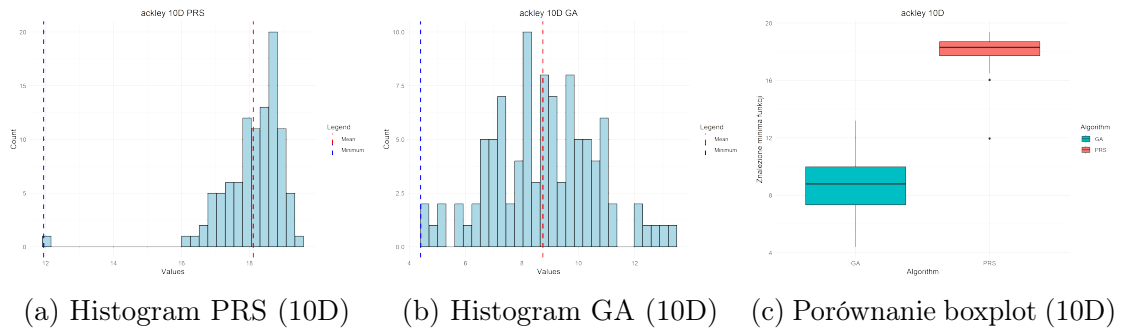
4 Wyniki eksperymentalne

Funkcja	Wymiar	Algorytm	Średnia	Oczekiwane Minimum	Mediana	Wartość p	Blżej Minimum
Ackley	2D	PRS GA	4.159 0.285	0	4.115 0.001	8.62×10^{-46}	GA
Ackley	10D	PRS GA	18.115 8.743	0	18.295 8.786	4.63×10^{-68}	GA
Ackley	20D	PRS GA	19.829 10.953	0	19.866 11.017	2.89×10^{-82}	GA
Alpine02	2D	PRS GA	-6.078 -6.129	-6.1295	-6.092 -6.130	4.52×10^{-18}	GA
Alpine02	10D	PRS GA	-793.323 -1814.709	-23700.88	-589.665 -1457.397	2.46×10^{-10}	GA
Alpine02	20D	PRS GA	-38843.84 -393902.27	-722667254	-12494.70 -161473.80	1.27×10^{-5}	GA

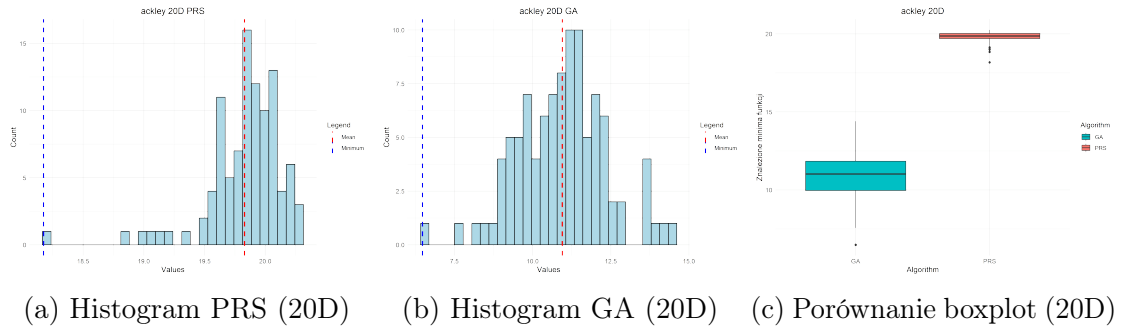
4.1 Wykresy dla funkcji Ackleya



Rysunek 3: Wyniki dla funkcji Ackleya w przestrzeni 2D

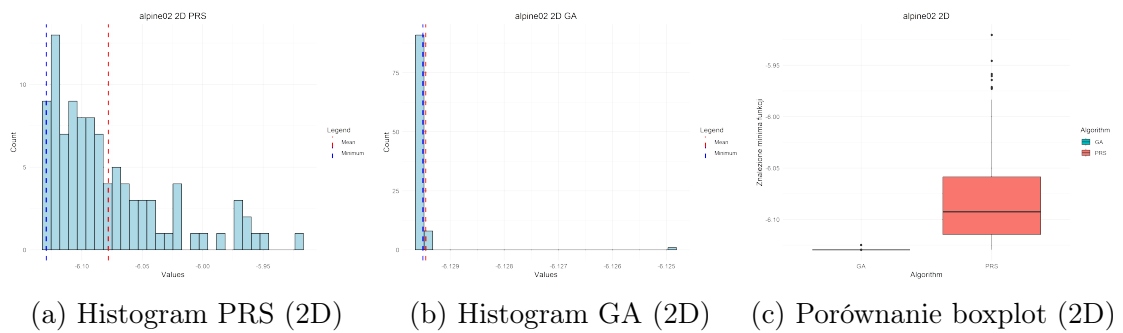


Rysunek 4: Wyniki dla funkcji Ackleya w przestrzeni 10D

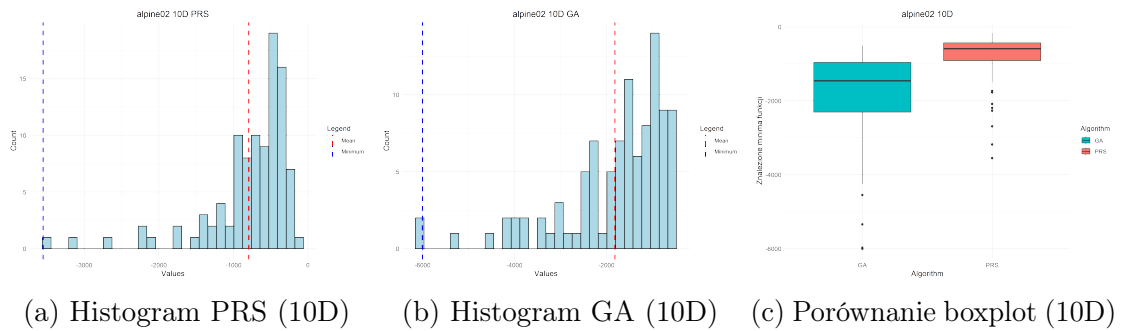


Rysunek 5: Wyniki dla funkcji Ackleya w przestrzeni 20D

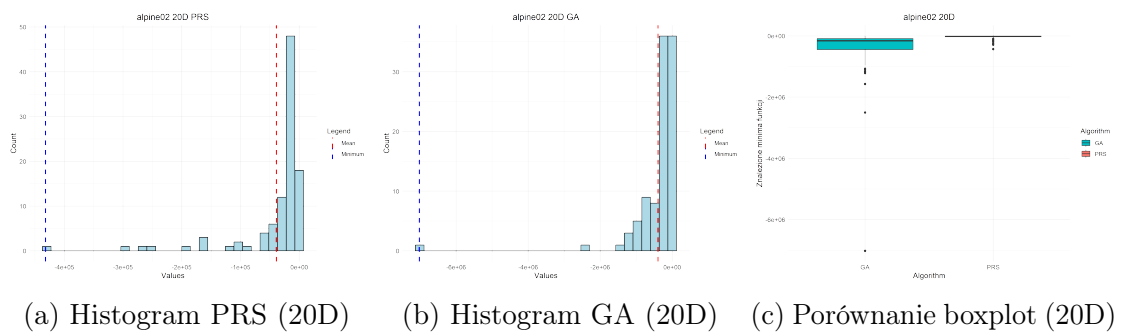
4.2 Wykresy dla funkcji Alpine02



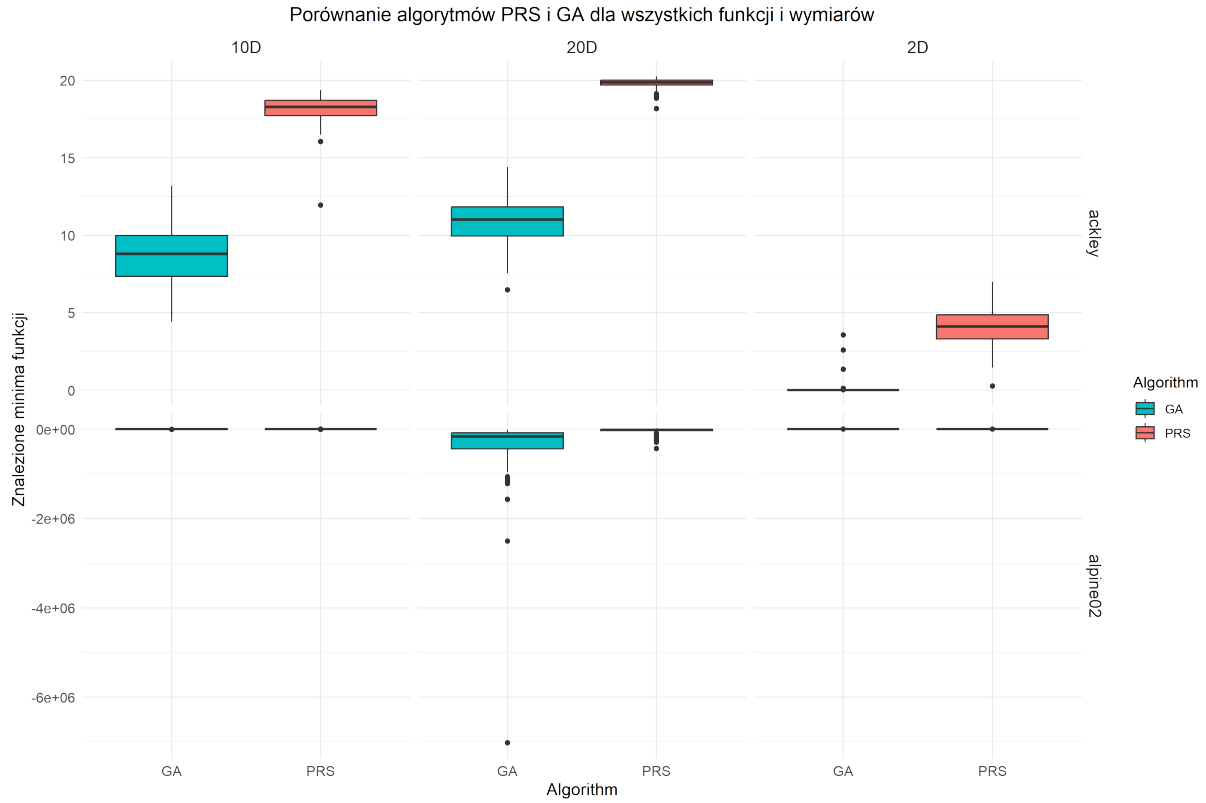
Rysunek 6: Wyniki dla funkcji Alpine02 w przestrzeni 2D



Rysunek 7: Wyniki dla funkcji Alpine02 w przestrzeni 10D



Rysunek 8: Wyniki dla funkcji Alpine02 w przestrzeni 20D



Rysunek 9: Zbiorcze porównanie wyników dla wszystkich funkcji i wymiarów

5 Test statystyczny

W celu potwierdzenia istotności różnic między algorytmami przeprowadzono test t-Studenta dla każdej pary wyników. Przyjęto następującą hipotezę zerową H_0 : nie ma istotnej różnicy między średnimi wynikami algorytmów GA i PRS, oraz hipotezę alternatywną H_1 : istnieje istotna różnica między średnimi wynikami algorytmów. Otrzymane wartości p dla wszystkich przypadków ($p < 8.62 \times 10^{-46}$ dla Ackleya 2D, $p < 4.63 \times 10^{-68}$ dla Ackleya 10D, $p < 2.89 \times 10^{-82}$ dla Ackleya 20D oraz analogicznie $p < 4.52 \times 10^{-18}$, $p < 2.46 \times 10^{-10}$, $p < 1.27 \times 10^{-5}$ dla Alpine02) pozwalają na odrzucenie hipotezy zerowej na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i potwierdzenie statystycznie przewagę nad PRS w każdym z badanych przypadków.

6 Wnioski końcowe

6.1 Analiza porównawcza metod

- **Funkcja Ackleya:** Algorytm Genetyczny (GA) konsekwentnie przewyższał PRS we wszystkich badanych wymiarach. W przestrzeni 2D osiągał wyniki bliskie minimum globalnemu, podczas gdy PRS utknął w płaskich regionach funkcji. W wyższych wymiarach (10D, 20D) GA zachował znaczną przewagę dzięki zdolności do systematycznej eksploracji przestrzeni.
- **Funkcja Alpine02:** GA wykazał lepszą efektywność we wszystkich analizowanych przypadkach. W 2D precyzyjnie lokalizował minima, podczas gdy PRS wykazywał

większą wariancję wyników. W wymiarach 10D i 20D różnice w skuteczności stały się szczególnie wyraźne na korzyść GA.

6.2 Podsumowanie

Na podstawie przedstawionych wyników eksperymentalnych oraz odrzucenia hipotezy zerowej o braku różnic między algorytmami ($p < 0.05$ dla wszystkich przypadków) można stwierdzić, że Algorytm Genetyczny (GA) konsekwentnie przewyższał Pure Random Search (PRS) w optymalizacji obu badanych funkcji testowych, niezależnie od wymiarowości przestrzeni przeszukiwań, przy czym różnica ta była szczególnie widoczna dla funkcji Ackleya, gdzie średnie wyniki GA były znacząco bliższe minimum globalnemu. Zaobserwowano również, że wraz ze wzrostem wymiarowości przestrzeni skuteczność obu algorytmów malała, jednak GA zachowywał istotną statystycznie przewagę nad PRS w każdym z badanych przypadków.