



Revista Mexicana de Física

ISSN: 0035-001X

rmf@ciencias.unam.mx

Sociedad Mexicana de Física A.C.

México

Krötzsch, G.; Gómez-Méndez, M.A.  
Transformada discreta de ambüedad  
Revista Mexicana de Física, vol. 63, núm. 6, noviembre-diciembre, 2017, pp. 505-515  
Sociedad Mexicana de Física A.C.  
Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57053213002>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica  
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## Transformada discreta de ambigüedad

G. Krötzsch y M.A. Gómez-Méndez

*Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México,*

*Av. Universidad s/n, Cuernavaca, Morelos, 62210, México.*

*e-mail: kroet@fis.unam.mx, magomez@icf.unam.mx*

Received 17 April 2017; accepted 26 July 2017

En este trabajo se presenta un algoritmo de cómputo para calcular la Transformada Discreta de Ambigüedad y mediante sus representaciones en el espacio tiempo-frecuencia caracterizar y analizar las señales temporales producidas por vibraciones mecánicas. Partiendo de la igualdad de Riemann entre la integral acotada de una función continua y el límite al infinito de la sumatoria de la misma función se obtiene una versión discreta de la transformada. El programa fue escrito para software de cómputo simbólico en *MATHEMATICA 10* ©, que con su transformada de Fourier compilada permite reducir el tiempo de cómputo. Se caracterizan y analizan los registros de vibración del eje de las máquinas de rotación, se comparan con funciones diseñadas compuestas de sinusoides de frecuencias constantes y moduladas linealmente. La metodología seguida es útil y eficiente para conocer la composición estructural y el comportamiento de señales de vibración mecánica.

**Descriptor:** Función de ambigüedad; señales FM lineales; vibraciones de eje rotatorio; doppler; algoritmo de cómputo; Estimador de máxima similitud

In this work, a computer algorithm is presented to calculate the Discrete Ambiguity Transform and through its representations in the time-frequency space to characterize and analyze the temporal signals produced by mechanical vibrations. Starting from the equality of Riemann between the bounded integral of a continuous function and the limit to infinity of the sum of the same function, a discrete version of the transform is obtained. The program was written for symbolic computing software in *Mathematica 10* ©, which with its compiled Fourier transform allows reducing computation time. The vibration registers of the axis of rotating machines are characterized and analyzed then compared with designed functions composed of sinusoids of constant and linearly modulated frequencies. The methodology followed is useful and efficient to know the structural composition and behavior of mechanical vibration signals.

**Keywords:** Ambiguity Function; lineal FM signals; rotary shaft's vibrations; doppler; computer algorithm; maximum similarity estimator.

PACS: 02.30.Uu; 02.30.Nw; 02.30.Fn

### 1. Introducción

La Función continua de Ambigüedad (AF, por sus siglas en inglés) es una transformada integral y compleja que admite como argumento una o dos señales que son representadas en el plano fase tiempo-frecuencia. Tradicionalmente, aunque no exclusivamente, con dos registros como argumento se ha empleado para diseñar y analizar señales tipo radar y pulsos sonar debido a que resuelve bien las diferencias entre las señales cuando el emisor y/o el receptor están en movimiento relativo, siempre y cuando alguno de estos no fluctúe [5]. (Efecto Doppler, ver la Subsec. 4.1).

En este reporte se aplica la Función Discreta de Ambigüedad (DAF) sobre una sola señal autocorrelacionada (auto-DAF) para representar la naturaleza y la dinámica del sistema, y sobre dos señales correlacionadas (cruz-DAF) para determinar las frecuencias y los parámetros que ajustan el comportamiento. Se desglosa el algoritmo escrito para el software de cómputo simbólico *WOLFRAM MATHEMATICA 10* que se sigue en los cálculos, según el diagrama de flujo Fig. 1.

La definición de la AF [3] para dos funciones  $S_1(t)$ ,  $S_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , es

$$AF_{S_1 S_2}(\tau, \nu) := \int_{\mathbb{R}} S_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) S_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad (1)$$

Cuando  $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$  se dará lugar a la auto-AF o simplemente AF escrita como

$$AF_S(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} S\left(t + \frac{\tau}{2}\right) S^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (2)$$

de las Ecs. (1) y (2) se infiere que  $AF : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , es decir, la AF es una función compleja.

Entre el gran número de propiedades que satisface la función de ambigüedad [7], para los fines de este estudio las marginales de tiempo y frecuencia son indispensables

$$AF_S(\tau, 0) = \int_{\mathbb{R}} S\left(t + \frac{\tau}{2}\right) S^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt, \quad (3)$$

$$AF_S(0, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \|S(t)\|^2 e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (4)$$

donde (3), que será referida como Mt (Marginal de tiempo), corresponde a una autoconvolución de  $S(t)$  y la Ec.(4) identificada a su vez como Mf (Marginal de frecuencia) representa la transformada de Fourier del módulo al cuadrado de la función que entra a la AF. El satisfacer las propiedades marginales es una característica general de las representaciones bilineales de la clase de Cohen. La función de ambigüedad las cumple en el dominio de la correlación o Dominio-C [3], en el cual el parámetro de energía  $E_S$  asociado a  $S(t)$  es definido como  $AF_S(0, 0)$  y pertenece a  $\mathbb{R}$ .

El desarrollo del presente trabajo parte con la obtención de la forma discreta de la AF, Sec. 2; en la Sec. 3 se describe el algoritmo a seguir para construir la DAF, enfatizando los requerimientos necesarios para evitar en lo posible el *aliasing* en el resultado final. En las Secs. 4 y 5 se procesan registros de datos generados a partir de funciones conocidas, muestreadas según el criterio de Nyquist [6], y los correspondientes obtenidos de las vibraciones del eje de una máquina de rotación. Las conclusiones son enunciadas en la Sec. 6.

## 2. Discretización

Sea  $s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que, muestreada durante un tiempo  $T$ , cumple las condiciones necesarias para que el espacio de funciones corresponda al conjunto de aquellas que poseen transformada de Fourier. En este estudio se modela como sigue para obtener su DAF

$$x(t) = \begin{cases} S(t), & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5)$$

donde  $S(t) = s(t) + i\hat{H}[s(t)]$ , que será explicado con detalle en la Sec. 3.

La AF de  $x(t)$  según la definición (2) se deja escribir como

$$AF_x(u, \nu) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S\left(\tau + \frac{u}{2}\right) S^*\left(\tau - \frac{u}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau,$$

donde  $u \in [-T, T]$ . Reparametrizando  $t = u/2$  tal que  $t \in [-T/2, T/2]$ , se logra que  $t$  y  $\tau$  tengan el mismo dominio, esto permite reescribir  $AF_x$  de la siguiente forma

$$AF_x(t, \nu) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(\tau + t) S^*(\tau - t) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau. \quad (6)$$

Considerando que la función  $s(t)$  es Riemann integrable en el intervalo de estudio [1], y suponiendo que esta característica se conserva al volverla analítica mediante la transformada de Hilbert, podemos emplear una partición regular para aproximar la integral anterior mediante una suma de Riemann<sup>ii</sup>

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{b-a}{M} \sum_{k=1}^M f\left(a + k \frac{(b-a)}{M}\right), \quad (7)$$

es posible obtener una versión discreta de (6) considerando a  $M \gg 1$  en lugar de tomar el límite  $M \rightarrow \infty$ . Así, la aproximación discreta de  $AF_x(t, \nu)$  es

$$DAF_x(n\delta T, m\delta\nu) = \delta T \sum_{k=1}^M (-1)^m \left[ S\left(-\frac{T}{2} + (k+n)\delta T\right) \times S^*\left(-\frac{T}{2} + (k-n)\delta T\right) \right] e^{-i2\pi m k / M}, \quad (8)$$

con  $\delta T = T/M$ ,  $\tau = -T/2 + k\delta T$ ,  $t = n\delta T$  y  $\nu = m\delta\nu$  tal que  $\delta\nu = 1/T$  [4].

La forma matricial de la Ec. (8) es

$$DAF_x(n, m) = \delta T \sum_{k=1}^M (-1)^m R_{nk} e^{-i2\pi m k / M}, \quad (9)$$

esta expresión corresponde a la DAF de  $x(t)$ ; la matriz  $R_{nk}$  se denomina matriz de correlación y se define como

$$R_{nk} = S\left(-\frac{T}{2} + (k+n)\delta T\right) S^*\left(-\frac{T}{2} + (k-n)\delta T\right), \quad (10)$$

con la propiedad

$$R_{nk} = R(n, k) = R^*(M - n, k), \quad (11)$$

que permite simplificar su computo a la mitad.

$DAF_x(n, m)$  se realiza como una matriz de tamaño  $M \times M$ . Si en (9) se elige  $M = 2p$  tal que  $p \in \mathbb{N}$  se obtiene

$$DAF_x(n, m + M) = DAF_x(n, m), \quad (12)$$

es decir, la función posee periodicidad  $M$ , lo cual no implica que  $x(t)$  o  $s(t)$  sean periódicas, esto es una consecuencia de aplicar a las filas de la matriz (10) una transformada discreta de Fourier.

## 3. Algoritmo

En la práctica la DAF es evaluada sobre una sucesión de puntos  $\{s_i = s(i\delta T)\}_{i=0}^M$  tomados durante un tiempo  $T$ . Es importante notar que en la ecuación (9)  $M$  representa el número de intervalos en los que se divide  $T$ , pero la sucesión  $s_i$  contiene  $N = M + 1$  puntos. Esa diferencia no es considerada en nuestro cómputo debido a que (9) es una aproximación a la forma continua AF, y se obtiene

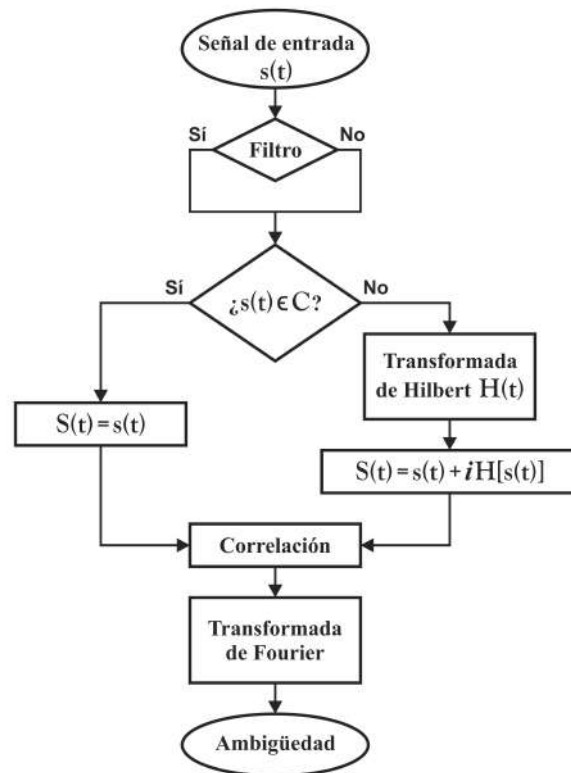


FIGURA 1. Diagrama de flujo computacional de la Transformada Discreta de Ambigüedad.

a partir de la integral de Riemann que no depende de la forma en que se divida el dominio de integración ni del punto de evaluación, con lo que es posible realizar la suma hasta  $M + 1$ , siempre y cuando  $N$  sea un número par, condición necesaria para asegurar la periodicidad de la distribución.

El muestreo digital de una señal analógica a una tasa de muestreo constante, contiene información sobre frecuencias y periodicidad que es necesario considerar previamente a su cuantificación. Se define entonces una frecuencia de muestreo  $F_s = N/T$ , que especifica la máxima frecuencia presente en la sucesión  $N$  de puntos de la señal  $s(t)$  muestreada durante el tiempo  $T$ . La reconstrucción exacta de la señal periódica discreta en banda base a partir de sus muestras, es matemáticamente posible si la tasa de muestreo es superior al doble de su ancho de banda, esto es,  $F_s > 2B$  como dicta el teorema de Nyquist-Shannon [6, 9]. Con esta consideración en los cálculos se reduce notablemente la perturbación de *aliasing* que ocurre al cuantificar un muestreo digital. En la práctica con instrumentos, es necesario aplicar a la señal muestreada un filtro de paso bajo cuya frecuencia de corte sea  $1/2F_s$ .

Aún cumpliendo el criterio de muestreo de Nyquist-Shannon que nos asegura la reconstrucción mediante interpolación de la señal, se presentará *aliasing* al obtener la representación de la señal en el espacio de las variables conjugadas  $\tau$  y  $\nu$ . Para evitar este efecto se emplean señales analíticas, introducidas en 1946 por Dennis Gabor [2] y construida para el análisis de señales como propuso J. Ville en 1948 [14]. Para ello a la señal  $s(t)$  se le suma su transformada de Hilbert [8]:

$$S(t) = s(t) + i\hat{H}[s(t)]. \quad (13)$$

La cual se obtiene convolucionando  $s(t)$  con el impulso respuesta  $h(t) = 1/\pi t$

$$\begin{aligned} \hat{H}[s(t)] &= (s * h)(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_s(\omega)\mathcal{F}_h(\omega)](t). \end{aligned} \quad (14)$$

$\mathcal{F}^{-1}$  denota la transformada inversa de Fourier, mientras que  $\mathcal{F}_s(\omega)$  y  $\mathcal{F}_h(\omega)$  corresponden a la transformada de Fourier de  $s(t)$  y  $h(t)$  respectivamente. Definido así el teorema de convolución se evalúa punto a punto la transformada de Hilbert<sup>iii</sup> en el dominio espectral.

El cómputo de la DAF de una muestra de datos, requiere que la matriz de correlación  $R_{nk}$  se diseñe con la estructura apropiada,

$$\begin{aligned} \text{corr}_S[n, k] &= \\ &\begin{cases} (-1)^k S\left(\frac{-N}{2} + k + n\right) S^*\left(\frac{N}{2} + k - n\right), & \text{si } \frac{N}{2} - n + 1 \leq k \leq \frac{N}{2} + n, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

con  $n = 1, 2, \dots, N/2$  y  $k = 1, 2, \dots, N$ . De la propiedad simétrica (11) la matriz de correlación toma la forma

$$R_{n,k} = \begin{cases} \text{corr}[n, k], & \text{si } 1 \leq n \leq \frac{N}{2}, \\ \text{corr}[N + 1 - n, k], & \text{si } \frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N. \end{cases} \quad (16)$$

Equivalentemente la forma matricial (9) puede escribirse como

$$DAF(n, m) = \delta T \hat{F}_k[R_{nk}][m], \quad (17)$$

donde  $\hat{F}_k[\cdot]$  es la transformada discreta de Fourier sobre la  $n$ -ésima fila de la matriz  $R_{nk}$ .

Como  $DAF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , es conveniente trabajar con su valor absoluto que define la Superficie de Ambigüedad (SAF)

$$SAF(n, m) = |DAF(n, m)|, \quad (18)$$

tal que  $SAF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Al evitar el *aliasing*, surge una correspondencia entre la DAF de una señal muestreada y la AF de la señal continua [11],

$$DAF_x(n\delta T, m\delta\nu) = AF_x(t, \nu), \quad (19)$$

en el intervalo

$$(n\delta T, m\delta\nu) \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right].$$

La naturaleza cuadrática de la DAF cumple un principio de superposición no lineal y en consecuencia, en las representaciones del plano fase se distinguen los elementos que delinean las trazas correspondientes a los autotérminos (que definen propiamente a las frecuencias contenidas en la señal) ubicados alrededor del centro, de aquellos otros de interferencia o términos cruzados que se dibujan a cierta distancia de éste, proporcional [13] a la amplitud y a la distancia en tiempo-frecuencia en el dominio de energía de los componentes implicados.

## 4. Aplicación a señales diseñadas

Denominaremos señal diseñada a un registro de datos consecuencia de evaluar una función continua en una serie de puntos discretos, las propiedades marginales y proyecciones en el espacio  $t - \nu$  de sus correspondientes DAF deben coincidir con la transformada de ambigüedad de la función continua a partir de la cual se genera la señal discreta.

Un caso de especial interés son los datos obtenidos a partir de funciones sinusoidales de frecuencia constante, pues éstas son reconstruidas como ondas mediante la transformada de Hilbert, *i.e.* si  $s(t) \in \{\sin(2\pi\nu t), \cos(2\pi\nu t)\}$  entonces

$$\begin{aligned} S(t) &= s(t) + i\hat{H}[s(t)] \\ &= \begin{cases} -ie^{i2\pi\nu t} & \text{si } s(t) = \sin(2\pi\nu t) \\ e^{i2\pi\nu t} & \text{si } s(t) = \cos(2\pi\nu t). \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

### 4.1. Efecto Doppler

La causa de que un observador registre una frecuencia distinta de la que emite una fuente se debe al movimiento relativo, ya sea de la fuente, del observador o de ambos, a este fenómeno se le conoce como efecto Doppler.

Si  $v_0$  es la velocidad con la que se propaga una onda de frecuencia constante  $\nu$  en un medio estacionario como el agua, el aire, etc., y  $v_1$  la velocidad de un observador que avanza hacia la fuente emisora considerada en reposo relativo con respecto a éste, la frecuencia  $\nu'$  que medirá el observador será

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{v_1}{v_0}\right). \quad (21)$$

En caso contrario, si el observador se aleja de la fuente registrará una frecuencia menor dada por

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right). \quad (22)$$

Considérense dos señales sinusoidales  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$  de frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  las cuales al ser completadas por su transformada de Hilbert se modelan de la forma siguiente

$$s_i \rightarrow S_i \propto e^{i(2\pi\nu_i t + \delta_i)} \quad (23)$$

con  $i = 1, 2$ .

Usando la definición (1) para calcular la cruz-AF para este par de sinusoides, resulta

$$AF_{S_1 S_2}(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i[2\pi f_1(t + \frac{\tau}{2}) + \delta_1]} \times e^{-i[2\pi f_2(t - \frac{\tau}{2}) + \delta_2]} \right) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (24)$$

Esta integral se resuelve fácilmente usando la definición de la Delta de Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dt,$$

y reparametrizando con  $\tau = 2t$  queda

$$AF_{S_1 S_2}(t, \nu) = e^{i2\pi(f_1 + f_2)t + i(\delta_1 - \delta_2)} \delta(\nu + f_2 - f_1). \quad (25)$$

En general, con la expresión anterior es posible obtener información sobre que tanto difieren las frecuencias de las señales que entran a la transformada tomando el valor absoluto de la marginal  $t = 0$

$$|AF_{S_1 S_2}(0, \nu)| = \delta(\nu + f_2 - f_1). \quad (26)$$

En particular, para el caso en que las frecuencias de las señales difieran como en las Ecs. (21) y (22), tal que  $f_1 = \nu$  y  $f_2 = \nu'$ , la expresión (26) toma la forma

$$AF_{S_1 S_2}(0, \nu) = \delta\left(\nu \pm \frac{v_1}{v_0} f_1\right), \quad (27)$$

donde el signo positivo corresponde al caso  $\nu' > \nu$  y el negativo a  $\nu' < \nu$ .

La posición y el signo de la delta de Dirac permiten conocer la velocidad y el sentido con los que se desplaza un objeto en movimiento sobre el cual incide una onda emitida por un emisor en reposo relativo, ver Fig. 2.

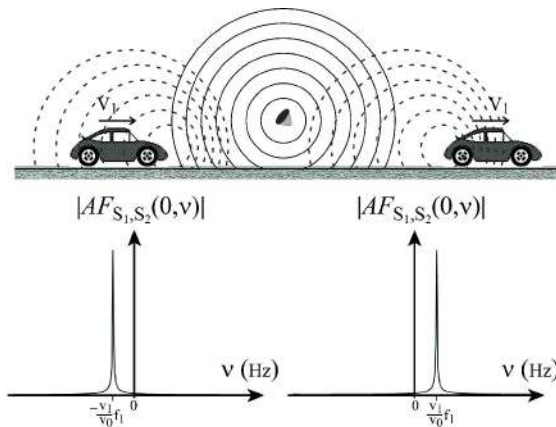


FIGURA 2. Posiciones de la delta para la marginal  $AF_{S_1 S_2}(0, \nu)$  de un objeto en movimiento que se acerca y que se aleja del emisor. Nótese que  $\nu \pm (v_1/v_0)f_1 = 0$ .

## 4.2. Superposición de armónicos

Considérese una función  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por la suma de  $N_p$  funciones armónicas de frecuencias constantes y diferentes entre sí

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_p} e^{i2\pi f_i t}. \quad (28)$$

Sustituyendo (28) en la Ec. (2) y dada la correspondencia Ec. (19), se obtiene en forma continua la  $AF_S \equiv DAF_{S'}$

$$DAF_S(t, \nu) = \sum_{i=1}^{N_p} e^{i4\pi f_i t} \delta(\nu) + \sum_{i,j}^{N_p} (1 - \delta_{ij}) \times e^{i2\pi(f_i - f_j)t} \delta(f_i - f_j - \nu). \quad (29)$$

La primera sumatoria de la expresión anterior corresponde a los autotérminos y componen la traza sobre la recta  $\nu = 0$  de la Fig. 4. Las siguientes generan los términos cruzados y producen trazas sobre las rectas  $\nu = f_i - f_j$  con  $i, j = 1, 2, \dots, N_p$ .

De la expresión (29) es posible extraer las propiedades marginales dadas en (3) y (4), así, haciendo cero la frecuencia se obtiene la marginal temporal

$$DAF_S(t, 0) = \delta(0) \sum_{i=1}^{N_p} e^{i4\pi f_i t} + \sum_{i,j}^{N_p} (1 - \delta_{ij}) \times e^{i2\pi(f_i + f_j)t} \delta(f_i - f_j), \quad (30)$$

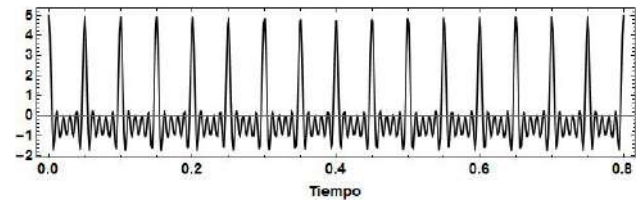


FIGURA 3. Superposición de ondas armónicas de 20 Hz, 40 Hz, 60 Hz, 80 Hz y 100 Hz; muestreadas durante 0.8 s con una frecuencia de muestreo  $F_s = 640$  Hz.

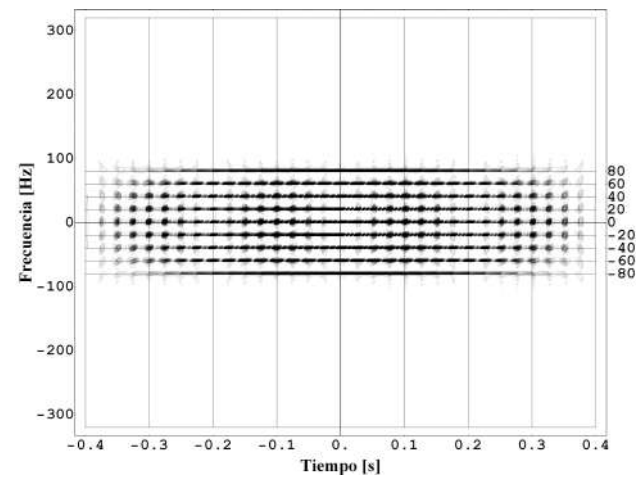


FIGURA 4. Proyección en el plano  $t - \nu$  del valor absoluto de la DAF para la señal mostrada en la Fig. 3.

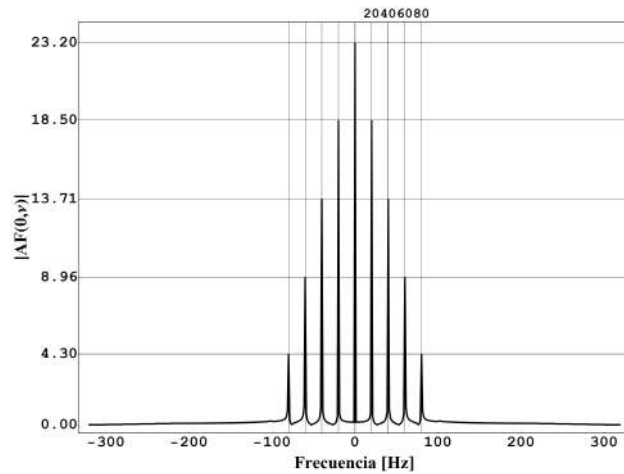


FIGURA 5. Marginal  $DAF_S(0, \nu)$  de la señal de la Fig. 3, las deltas están centradas en  $\pm 20$  Hz,  $\pm 40$  Hz,  $\pm 60$  Hz y  $\pm 80$  Hz.

TABLA I. Posiciones de las deltas de Dirac,  $\delta(\nu)$ , para la Mf correspondiente a la DAF de una superposición de armónicos, Ec. (28).

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$\dots$	$f_{N_p}$
$f_1$	0	$f_2 - f_1$	$f_3 - f_1$	$\dots$	$f_{N_p} - f_1$
$f_2$	$f_1 - f_2$	0	$f_3 - f_2$	$\dots$	$f_{N_p} - f_2$
$f_3$	$f_1 - f_3$	$f_2 - f_3$	0	$\dots$	$f_{N_p} - f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_{N_p}$	$f_1 - f_{N_p}$	$f_2 - f_{N_p}$	$f_3 - f_{N_p}$	$\dots$	0

alternativamente, si el tiempo se iguala a cero se resolverá para la marginal de frecuencia

$$DAF_S(0, \nu) = N_p \delta(\nu) + \sum_{i,j}^{N_p} (1 - \delta_{ij}) \delta(f_i - f_j - \nu). \quad (31)$$

La Mf (31) contiene información sobre cómo se mapean las frecuencias contenidas en una superposición de armónicos bajo la transformada de ambigüedad, notamos que las  $\delta(\nu)$  se distribuyen en las diferencias  $f_i - f_j$  de la forma en que se muestra en la Tabla I.

### 4.3. Superposición de dos señales de frecuencia modulada linealmente

Las señales de frecuencias variables moduladas linealmente (FM), producen en el plano fase de ambigüedad trazas que cruzan por el origen con pendientes que definen la razón de cambio de las frecuencias.

Sea  $S(t)$  una señal compuesta de dos ondas cuyas frecuencias son moduladas con  $f_i(t) = m_i t + b_i$ , para  $m_i$  y  $b_i$  constantes

$$S(t) = \sum_{i=1}^2 e^{i2\pi f_i(t)t} \quad (32)$$

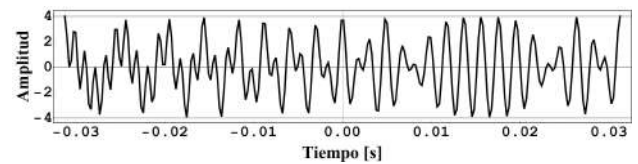


FIGURA 6. Suma de dos ondas de frecuencia modulada, muestreadas durante 0.0625 s, con una  $F_s = 4096$  Hz. Las funciones de frecuencia son:  $f_1(t) = -4096t + 768$  y  $f_2(t) = 4096t + 256$ . Ambas finalizan con 512 Hz.

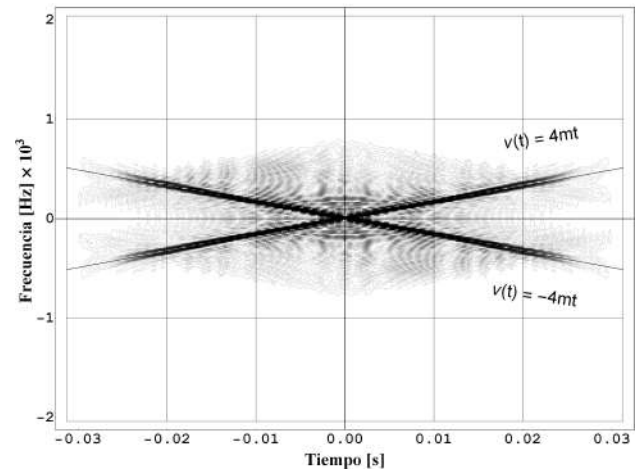


FIGURA 7. SAF del pulso dado en la Fig. 6. Las líneas diagonales sólidas trazadas sobre los autotérminos corresponden a las rectas especificadas dentro de la imagen.

La DAF de la Ec. (32) se deja escribir como

$$DAF_S(t, \nu) = \sum_{i=1}^2 e^{i4\pi b_i t} \delta(4m_i t - \nu) + g(t, \nu), \quad (33)$$

el primer término corresponde a las componentes de  $S(t)$  que generan las trazas de deltas de Dirac sobre las rectas  $4m_i - \nu$ , donde el signo de las pendientes  $m_i$  define el aumento o disminución de la razón de cambio de las frecuencias. La función  $g(t, \nu)$  implica los términos cruzados, no dados explícitamente, que delinean las marcas entre los autotérminos de la Fig. 7. Para este ejemplo se definieron iguales amplitudes y modulaciones similares, razón por la cual las marcas de interferencia son simétricas en ambos ejes, cualquier diferencia entre sus definiciones producirá asimetría.

## 5. Aplicación a vibraciones Mecánicas

En esta sección se analizan los registros digitales producidos por las vibraciones del eje de la máquina de rotación experimental referida. El equipo **Bentley-Nevada RK4**® consta de un motor que opera con corriente directa, de un eje de acero con contenido medio de carbono, sujeto en sus extremos por chumaceras de buje y abrazado en un punto medio de su claro por un disco para prácticas de balanceo. La parte electrónica de control cuenta con un modulador de velocidad y rampa de aceleración lineal en *rpm*, con un concentrador de los datos censados por un inductor vertical de proximidad deslizante, colocado cerca del punto de mayor deflexión del eje. Para el procesamiento y almacenamiento de los datos se utilizó un adquirente del mismo equipo que incluye el software de **PRISM**®.

Se muestran los resultados experimentales para los estados balanceado y desbalanceado del eje, diferenciándose dos casos (Experimento A y Experimento L). Se tomaron registros en los tres regímenes de trabajo: Estable, arranque y frenado. El Experimento A se llevó a cabo cuando la **RK4** se encontraba en óptimas condiciones de desempeño, en tanto que el Experimento L se efectuó dos años después, con lo que se presentan variaciones debidas al desgaste de la máquina. En la Tabla II se desglosan los parámetros generales para cada experimento.

TABLA II. Parámetros necesarios para calcular la DAF de los datos muestreados de las vibraciones del eje de la **RK4**.

Experimento	A	L
No. de puntos muestrales ( $N$ )	4096	4096
Tiempo total ( $T$ )	12.6945 s	12.7969 s
Intervalo ( $\delta T$ )	0.003100 s	0.003125 s
Frecuencia de muestreo ( $F_s$ )	322.659 Hz	320.078 Hz

### 5.1. Régimen Estable

Las señales generadas por las máquinas de rotación son habitualmente determinísticas y cuando trabajan en condiciones estacionarias, las vibraciones producidas pueden ser modeladas por sencillas expresiones matemáticas explícitas.

Durante un régimen de trabajo estable el eje de las máquinas de rotación gira a velocidad angular constante, por lo que se supondrá que las vibraciones de estos registros se comportan como funciones armónicas sinusoidales o como una superposición de ellas. Para probar lo antedicho en el apartado 4.2. se diseñó una función con la suma de armónicos, ahí se muestra y se describe la representación de la marginal para  $\tau = 0$  que coincide con la correspondiente para el régimen (Ver Fig. 8).

La ubicación y distribución de las máximas deltas de Dirac en la Mf de la auto-DAF representan en forma simétrica la estructura conformacional de la señal, sin embargo, estos máximos no inciden en los valores de las frecuencias que realmente componen a la señal

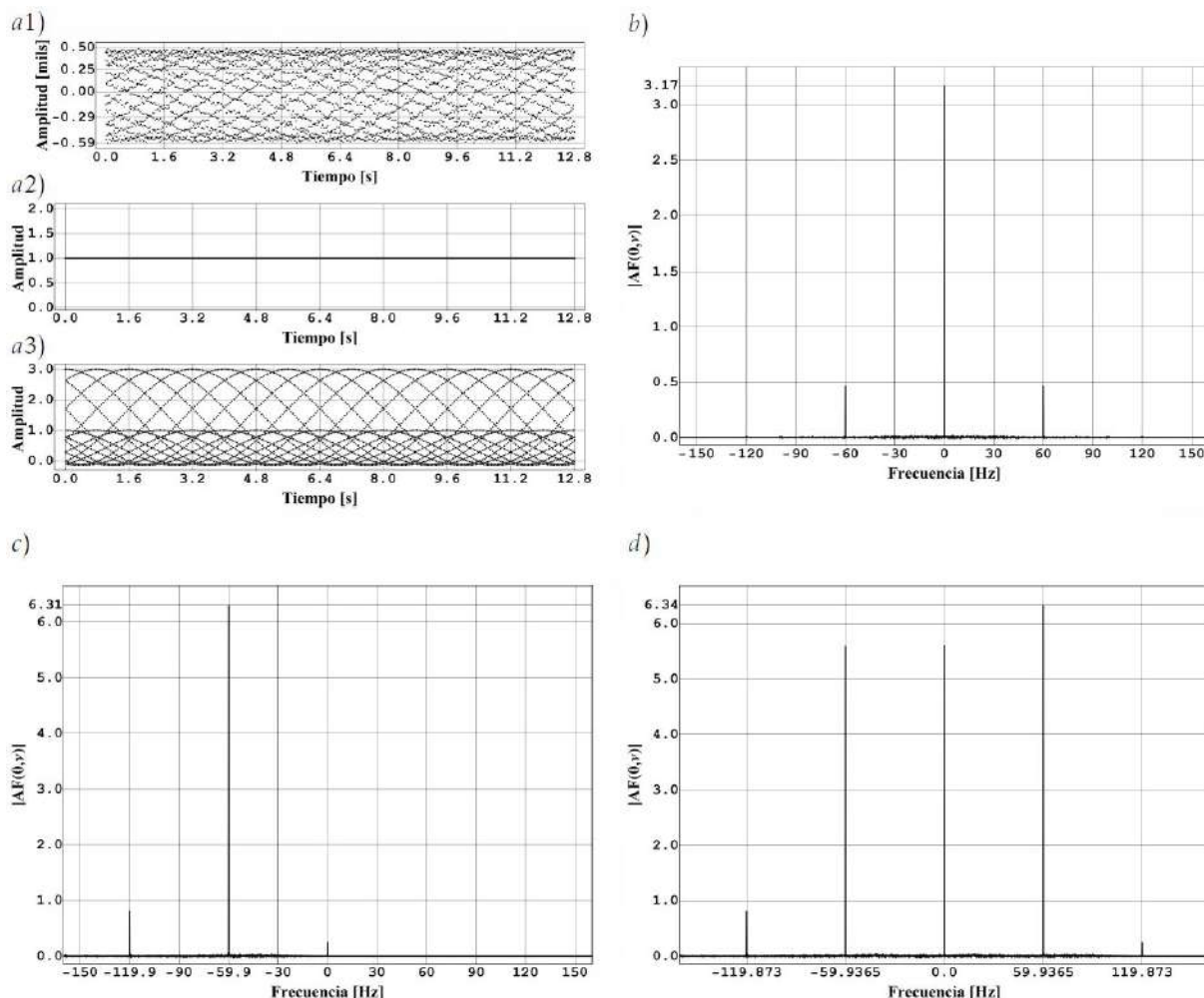


FIGURA 8. Representación del proceso para obtener un estimador de máxima similitud empleando el registro de vibración  $a1)$  del Experimento L y las marginales para  $\tau = 0$  de las DAF involucradas.  $b)$  auto-DAF de  $a1)$ ;  $c)$  cruz-DAF de  $a1)$  con  $a2)$  diseñada con  $\nu = 0$ ;  $d)$  cruz-DAF de  $a1)$  con  $a3)$  diseñada como suma de cosenos con las frecuencias resueltas en  $c)$ .

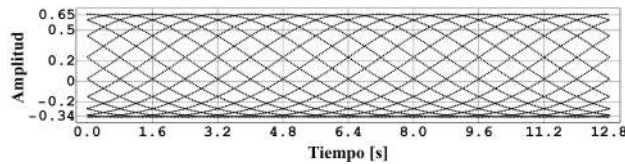


FIGURA 9. Registro de la señal diseñada a partir del estimador de máxima similitud de la Fig. 8d).

la señal porque sus posiciones son las diferencias entre las frecuencias que la constituyen, como en la Tabla I. Pero con el “performance” que provee la auto-DAF de la señal es posible generar un estimador de máxima similitud, buscando la posición de los máximos en la Mf de una cruz-DAF de la señal recibida del registro de vibración, con otra función diseñada con cualquier valor  $\nu_1 \in [0, F_s/2)$ . Resulta muy práctico que el valor a tomar sea  $\nu_1 = 0$  ya que las ubicaciones de las deltas que se obtienen con la marginal de ésta DAF cruzada corresponderán justamente a los valores buscados de frecuencia.

Del supuesto anterior, la señal del registro experimental tendrá la relación de suma de armónicos

$$S_1(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{i2\pi f_i t}$$

y la función diseñada para  $\nu_1 = 0$ , la forma

$$S_2(t) = A e^{i2\pi \nu_1 t}.$$

Consecuentemente la expresión de la marginal para  $\tau = 0$  de la cruz-DAF entre  $S_1$  y  $S_2$  será

$$DAF_{S_1 S_2}(0, \nu) = \sum_{i=1}^N (A A_i) \delta(\nu_1 - f_i - \nu) \quad (34)$$

lo que implica que podemos conocer las frecuencias  $f_i$  mediante

$$\nu_1 - f_i - \nu = 0 \Rightarrow f_i = \nu_1 - \nu \Rightarrow f_i = -\nu. \quad (35)$$

Con la convención que en este estudio se ha adoptado, al respecto de que la señal de estudio sea la que entre a la correlación

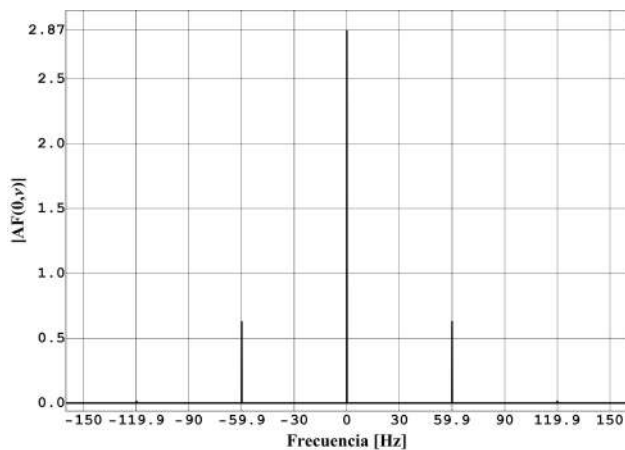


FIGURA 10. Mf de la auto-DAF de la señal diseñada de la Fig. 9. Las deltas están ubicadas en los valores  $\pm 59.9365$  Hz y  $\pm 119.873$  Hz que se indican en 8d) y que corresponden a las frecuencias que componen el registro de estudio 8a1).

como la conjugada compleja, la marginal de la cruz-DAF resolverá un espacio antisimétrico con  $\nu_1 = 0$  y  $f_i < 0$ . Para garantizar que las frecuencias que integran la señal son efectivamente las  $f_i$  buscadas, es preciso diseñar una función de suma de armónicos  $S_3(t)$  con los valores de estas y efectuar una cruz-DAF entre  $S_1(t)$  y  $S_3(t)$ . El resultado final de esta operación constituye un *estimador de máxima similitud* si la Mf resultante contiene, básicamente una delta en cero y deltas en las diferencias de frecuencias originarias de la Mf del registro de estudio.

Al modelar una función que emule al registro de vibración, además de los valores de las frecuencias encontradas es necesario aproximar las contribuciones de las amplitudes de cada frecuencia en la Mf de la auto-DAF original. Para ello deben proporcionarse las amplitudes entre esta y las de la Mf de la cruz-DAF, tomando como factor de proporcionalidad a la razón entre la amplitud de la  $\delta = 0$  de la primera y la amplitud de la  $\max(\delta \neq 0)$  de la segunda. Sin embargo, no es posible estipular un procedimiento porque la aproximación final podrá no contener a todas las frecuencias naturales del registro.

En la Fig. 8 se revelan gráficamente los resultados obtenidos al llevar a cabo los cálculos sobre el registro del régimen estable balanceado del Experimento L, como se describió en los párrafos anteriores de ésta subsección. Conforme se proporcionen mejor las amplitudes entre b) y c) las marginales b) y d) se asemejaran mas. Compárese la Fig. 8b) con la simulación en la Fig. 10.

## 5.2. Régimen Transiente

Entre las normas del fabricante de máquinas de rotación se especifican la forma o las formas de aceleración y desaceleración angular constante para que el desempeño de los ejes de rotación sea óptimo en condiciones estándares de trabajo. Los experimentos que aquí se analizan se realizaron con aceleración angular lineal, por lo que se supondrá que las vibraciones del eje tendrán un comportamiento similar al de las señales de FM (Ver Subsec. 4.3). Pero a diferencia del caso de la Subsección, en los registros experimentales se tienen fenómenos de resonancia con amortiguamiento debidos a que los materiales al vibrar variando las frecuencias en un rango determinado, coinciden y resuenan en algún armónico natural del sistema. Justamente, lo que se pretende al fijar el ritmo de cambio de la aceleración de los ejes es que las frecuencias no permanezcan demasiado tiempo en aquellas que provoquen resonancia en el material, disminuyendo con esto el riesgo de fractura.

En la representación de la SAF de la auto-DAF del registro de un régimen transiente de la **RK4**, se puede observar que el comportamiento de la traza formada por los autotérminos coincide con la de una señal de frecuencia modulada linealmente. El valor de la pendiente  $m$  puede aproximarse con buena precisión mediante el cálculo de los máximos en alguno de los cuadrantes de la SAF por los que pasa la traza. Del argumento de la  $\delta$  en la Ec. (33) se observa que el valor de la pendiente recaerá en  $m_0 = m/4$ , con lo que la velocidad de cambio calculada para las frecuencias ajustará al valor del registro.

A diferencia de la pendiente, el valor  $b$  de la ordenada al origen no se desprende directamente de la superficie de ambigüedad. Para ello, debe calcularse un estimador de máxima similitud con un procedimiento similar el descrito para el caso estable, computando las cruz-DAF entre la señal de entrada y las funciones diseñadas para el proceso.



En el entendido de que el registro de entrada  $\{S_n\}_{n=1}^N$  puede escribirse como

$$S(t) = A_1 e^{i2\pi(m_0 t + b)t},$$

con  $m_0$  y  $b$  constantes, se diseña la función  $\{Z_n\}_{n=1}^N$  utilizando la pendiente  $m_0$

$$Z(t) = A_2 e^{i2\pi(m_0 t)t}.$$

Se computa la cruz-DAF entre ambas

$$DAF_{ZS}(t, \nu) = A_1 A_2 e^{i2\pi b t} \delta(4m_0 t - b - \nu) \quad (36)$$

cuya marginal de frecuencia Mf es

$$DAF_{ZS}(0, \nu) = A_1 A_2 \delta(b + \nu), \quad (37)$$

de donde se desprende que  $b = -\nu$ . Empleando los valores encontrados de las constantes, se compone la función  $f(t) = m_0 t + b$  con la que se formula una segunda función que al combinarla con  $S(t)$  en la cruz-DAF producirá la Mf que corresponderá al estimador de máxima similitud. Y será tal, solo si en su  $|DAF(0, \nu)|$ ,

$\nu_0 = 0$ . Esto es, implicará que las constantes calculadas corresponden a las que caracterizan la señal del registro analizado.  $\nu_0 \neq 0$  es un indicador de que no hay similitud entre el registro y la función diseñada.

La forma del estimador con amplitud  $A = 1$  será:

$$EMS(t) = e^{i2\pi(m_0(t+t_0)^2 + b(t+t_0))} \quad (38)$$

con  $t > t_0 = |b/m_0|$  que indica el tiempo desde el cual el cálculo de la transformada arroja datos válidos, por debajo de este valor las frecuencias podrían ser negativas.

En la Fig. 11 se detalla gráficamente el proceso para especificar la dinámica de las vibraciones del eje de rotación generadas durante el arranque balanceado para el Experimento *L*, claramente se observa en *b*) que evolucionan con una aceleración angular lineal de FM. La  $\delta$  en la marginal *c*) se encuentra desplazada del origen en la magnitud que da el valor de la ordenada  $b$ . En la imagen *d*) se ajusta

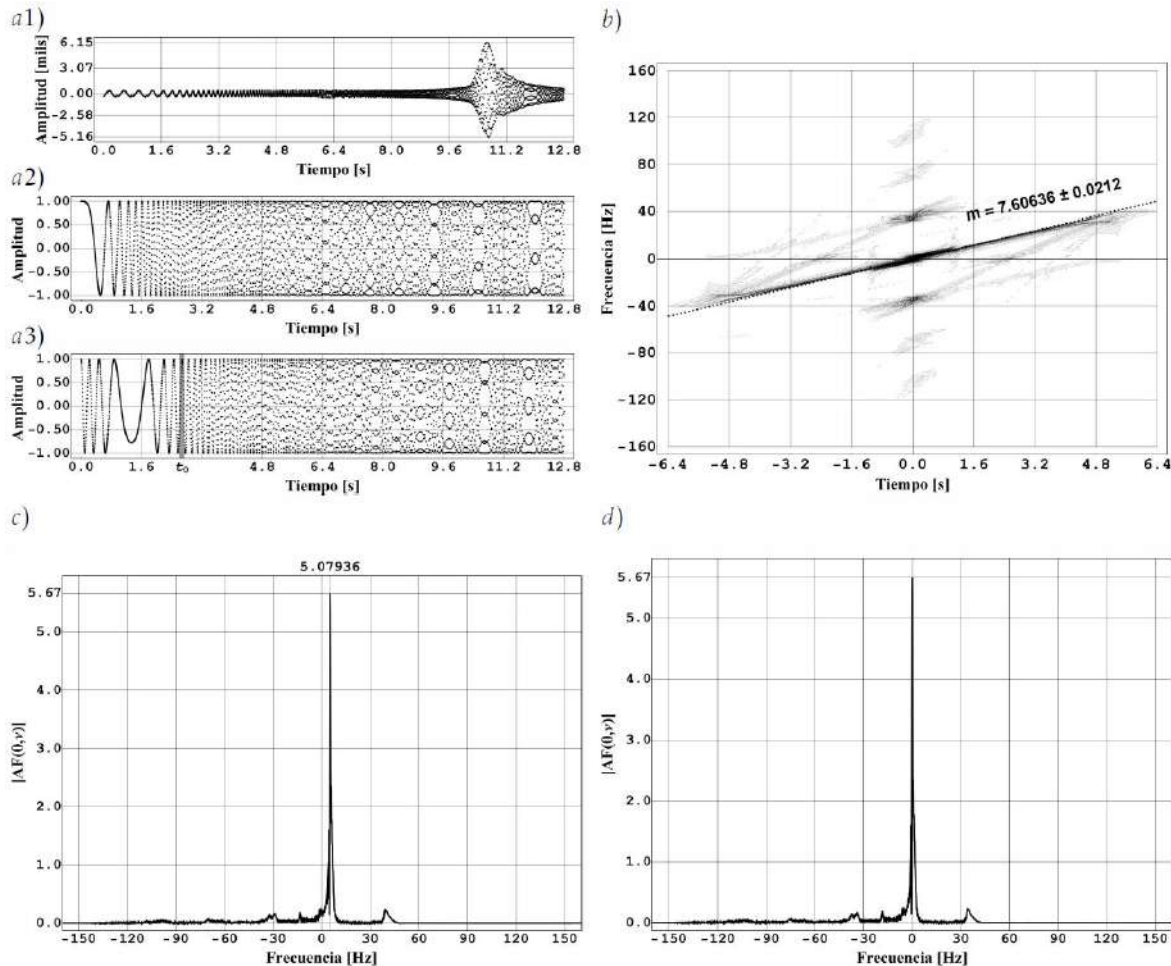


FIGURA 11. *a1*) Registro de datos de un arranque balanceado del experimento *L*. *b*) SAF de la auto-DAF del registro, donde se calcula la velocidad de cambio experimental de las frecuencias,  $m/4 = m_0 = 1.9016$ . *a2*) Función de cambio de frecuencias diseñada por  $f(t) = m_0 t$ . *c*) Mf de la cruz-DAF entre la función *a2*) y el registro *a1*), el desplazamiento fuera del origen marca el valor de la ordenada  $b = 5.0794$ . *a3*) Gráfico de la función diseñada con  $f(t) = m_0 t + b$ . *d*) Marginal de frecuencia de la cruz-DAF entre las señales *a3*) y *a1*), la delta en cero confirma que la señal FM caracterizada por *a3*) aproxima los valores de los parámetros que definen el comportamiento de *a1*). Para una simulación con los datos obtenidos es preciso sumarle al tiempo  $t$  de la función a modelar, el tiempo  $t_0$ , que indica el tiempo a partir del cual el cálculo de la transformada arroja datos válidos, esto es,  $t > t_0 = |b/m_0| = 2.6711$ . Por debajo de este valor las frecuencias serán negativas.

a cero la  $\delta$  máxima. Por consiguiente se tiene un estimador de los parámetros en la superficie  $\tau - \nu$  y con ello la posibilidad de escribir una función que simule la dinámica.

### 5.3. Registros Compuestos

El monitoreo del desempeño en los diferentes regímenes de trabajo de los ejes de las máquinas de rotación para diagnosticar las condiciones físicas y dinámicas en las que se encuentran las barras, es indispensable para dar el mantenimiento preventivo necesario a los equipos. Los desbalances, que van desde los casi imperceptibles hasta aquellos que hacen oscilar al eje cerca de sus valores elásticos críticos, no pueden ser caracterizados con solo la función de ambigüedad, ya que un factor importante en el desbalance es la forma en la que se distribuye la energía en el plano fase tiempo-frecuencia. Sin embargo resulta interesante analizar, del Experimento A, el caso desbalanceado del régimen estable que se efectuó con el máximo desbalance controlado que permite la **RK4**. El análisis del registro de la Fig. 12 produce la marginal de la Fig. 13 que muestra una composición diferente a la de las marginales para los casos estables porque no despliega una distribución de diferencias de frecuencias, sino que se dibuja una sola delta en el origen como en las señales de FM, y al representar la SAF en la Fig. 14 se revela una señal compuesta por los dos regímenes transientes a dos diferentes tiempos, como tal, se hace necesario analizarlos por separado.

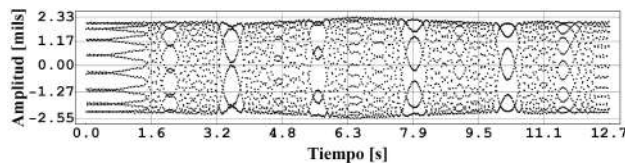


FIGURA 12. Registro de las vibraciones del eje bajo régimen estable para el Experimento A, con el máximo desbalance controlado que permite la **RK4**.

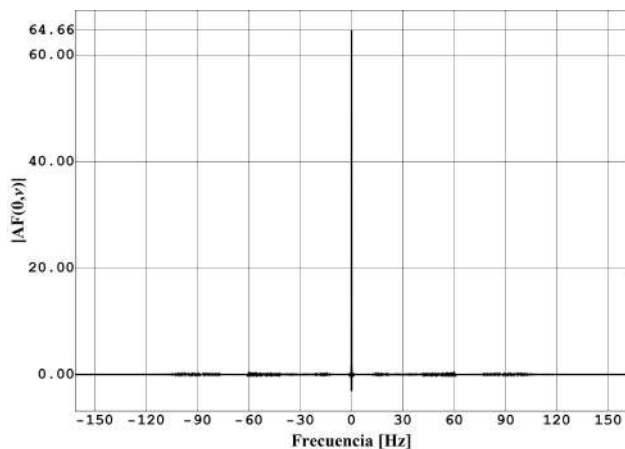


FIGURA 13.  $|AF(0, \nu)|$  del registro 12. Esta marginal, como se puede observar, no pertenece al tipo de representaciones que producen las vibraciones de un eje que gira con velocidad angular constante como en la Fig. 8b). Pero si coincide con las de las marginales auto-DAF de las señales de FM.

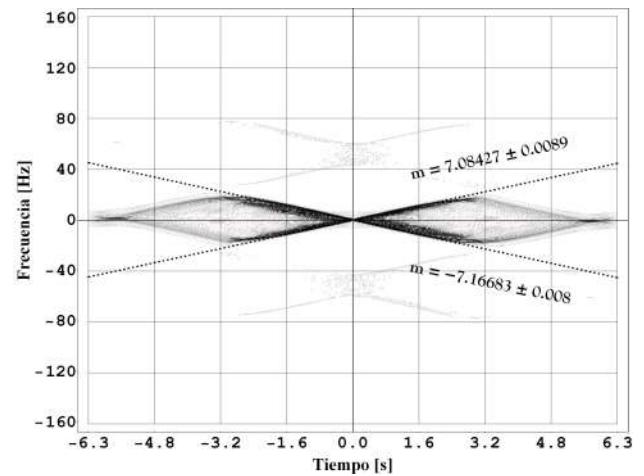


FIGURA 14. Proyección en la superficie  $t - \nu$  de la auto-DAF de las vibraciones mostradas en las Fig. 12. Con trazas de autotérminos diagonales similares a las dibujadas por las señales de FM.

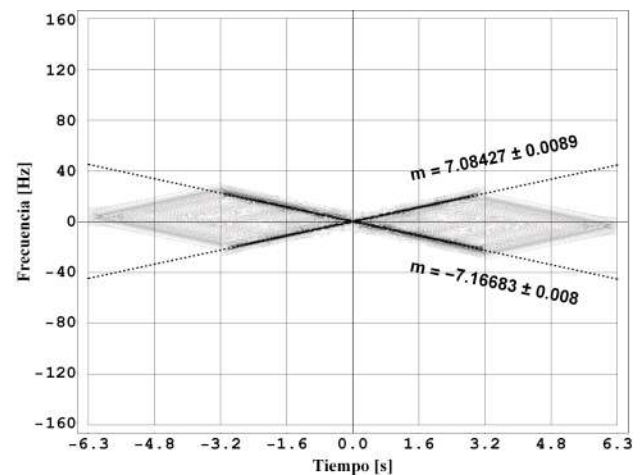


FIGURA 15. Proyección en la superficie  $t - \nu$  de la auto-DAF de la simulación  $SC(t)$ . Como señal compuesta, las perturbaciones únicamente se delinean entre los cruces horizontales de los autotérminos.

El análisis para aproximadamente la mitad izquierda del registro procede de manera similar al caso mostrado en la Fig. 11, la marginal de frecuencia para esta primera parte, equivalente a 11c), manifiesta menor número de perturbaciones y mayor amplitud que la de la mitad derecha del registro. Gráficos que no se publican en el presente trabajo.

Al calcular las pendientes y ordenadas al origen se encuentra que las vibraciones inicialmente evolucionan frenando y en la segunda mitad del tiempo de muestreo lo hacen acelerando. Esto lleva a suponer que aunque el régimen es estable, el gran desbalance provoca deslizamientos de la barra en las chumaceras, por lo cual el comportamiento puede considerarse estrictamente inercial. La proyección sobre el plano  $t - \nu$  en la Fig. 14 presenta trazas similares a las obtenidas en la Fig. 7, sin embargo es notoria la diferencia de distribución de los términos cruzados debido a que la señal diseñada de la Fig. 6 es una suma de frecuencias moduladas, en tanto que en este caso se trata de una señal compuesta, por lo cual solo se tienen perturbaciones entre los cruces horizontales de los autotérminos.

Con las pendientes y las ordenadas al origen obtenidas del procesamiento del registro completo, la SAF de la Fig. 15 es generada con la siguiente función diseñada para la simulación:

$$SC(t) = \begin{cases} e^{i2\pi(-m_1 t^2 + b_1 t)}, & \text{si } t \leq \frac{T}{2}, \\ e^{i2\pi(m_2 t^2 + b_2 t)}, & \text{si } t > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

## 6. Conclusiones

La superficie conformada por las variables conjugadas complejas de tiempo y frecuencia que genera la Transformada de Ambigüedad, se construye con la auto-correlación de datos de una señal o correlacionando datos de dos señales diferentes. Esta propiedad permite hacer análisis distintos según sea el caso. En el estudio de señales determinísticas sobre una señal, caracteriza la geometría y la dinámica del comportamiento de las vibraciones analizadas. Sobre dos señales, define los parámetros que permiten simular la evolución con funciones explícitas.

Los desafíos que se enfrentan al implementar el algoritmo de cómputo ocurren, al discretizar la forma continua, al construir la correlación entre los datos, al programar la forma analítica de la señal y al calcular la transformada de Fourier. Los anteriores pormenores resultan fundamentales para la forma de programación que se elija, que no está exenta de la capacidad para realizar el álgebra de quien afronta el problema.

El método de discretización de la AF empleando la sumatoria de Riemann, que converge a la forma integral de la transformada de Fourier, genera un espectro discreto de frecuencias en el espacio fase de ambigüedad.

Una de las ventajas del análisis con la DAF estriba en que los autotérminos siempre están relacionados con el origen de coordenadas, lo cual hace que los análisis se efectúen en concordancia a su desviación de éste. Otra, respecto a la distribución de los términos interferentes en la SAF, es que al ser la derivada parcial de la fase una frecuencia, la tasa de oscilación de los términos interferentes en la distribución de energía de Wigner-Ville es directamente proporcional a la distancia al origen en la Transformada de Ambigüedad. Entre mayor es la amplitud de los términos interferentes en el espacio de energía, mas delimitada será la concentración de las frecuencias que componen a la señal en el espacio ambigüo.

Las amplitudes usadas en las simulaciones requieren de relaciones proporcionales mediadas entre las amplitudes de las marginales

de las auto-DAF y de las cruz-DAF, debido a que en los registros reales existen una multitud de pequeñas marcas que no se consideran en las amplitudes finales diseñadas.

Particularmente en esta representación bilineal las marginales de frecuencia y de tiempo son básicas para el análisis integral en el dominio de las correlaciones. Es claro que la identificación completa de las señales de este tipo requieren simultáneamente de las realizaciones en el dominio de la distribución de energía.

La DAF caracteriza bien las vibraciones mecánicas en el espacio fase tiempo-frecuencia del dominio de las correlaciones, constituye una herramienta muy útil en el monitoreo del estado de las máquinas de rotación.

## Agradecimientos

Agradecemos al Dr. Juan Carlos Castrejón, responsable del Laboratorio de Vibraciones del Centro de Ciencias Aplicadas e Ingeniería, CIICAp-UAEM, por su disposición de permitirnos emplear el equipo para realizar los experimentos cuyos registros procesamos y analizamos en este documento, amén de su guía y orientación en los procedimientos.

Un especial agradecimiento al Dr. Kurt Bernardo Wolf, jefe del grupo de óptica Matemática del ICF-UNAM, por sus enseñanzas, su dirección y por el habernos mostrado el gran valor analítico de la distribución de Wigner, que fue la base para la realización de este trabajo.

Agradecemos al MC. Alejandro Urzúa Pineda el habernos proporcionado sus datos experimentales, unos de los que aquí se analizaron, por su contribución en la parte de programación de la función de correlación, por su participación en la realización de la señal analítica. En general, por sus atinadas observaciones y finos comentarios.

Con gratitud mencionamos a la tesista Leila Hi Bridger por haber efectuado los experimentos cruciales para nuestro trabajo.

Finalmente agradecemos el apoyo económico para la realización del presente trabajo proporcionado por *PAPIIT-DGAPA* (Universidad Nacional Autónoma de México), al proyecto con número 101115 de "óptica Matemática" dirigido por el Dr. Kurt Bernardo Wolf.

- i. Es importante mencionar que las DAF calculadas con esta discretización están reparametrizadas por  $\tau = 2t$ , lo que implica que toda DAF calculada a partir de las Ecs. (1) y (2) debe ser reparametrizada de la misma forma para comparar los cálculos aquí realizados.
- ii. Para corroborar formalmente que  $S(\tau+t)S^*(\tau-t)$  es Riemann integrable su suma de Riemann debe ser acotada para cualquier particionado del intervalo, en el caso de funciones más generales o que no sean Riemann integrables podrían emplearse integrales de Henstock-Kurzweil.
- iii. La transformada de Hilbert es el único operador singular en una dimensión que cumple con las condiciones de continuidad, de amplitud y diferenciabilidad, independencia de fase y escala,

así como las correspondencias armónicas formuladas por Vakman [12].

1. T.M. Apostol, *Calculus, Volumen I*, 2nd ed. (Editorial Reverté, S.A., España, 1984), pp. 79-153.
2. D. Gabor, *Electrical Engineers Part III: Radio and Communication Engineering, J. Institution of* **93** (1946) 429.
3. F. Hlawatsch, *IEEE Transactions on signal processing*, **39** (1991) 1564.
4. J.G. Holbrook, *Laplace Transforms for Electronic Engineers*, 2nd ed. (Pergamon pres, New York, 1966) pp. 37-46.
5. E.H. Lieb, *J. Math. Phys.* **31** (3) 1990.
6. H. Nyquist, *Bell System technical journal* **3** (1924) 324.

7. A. Papoulis *J. Opt. Soc. Am.*, **64** (1974) 6.
8. S.-C. Pei y S.-B. Jaw, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **36** (1989) 1251.
9. C.E. Shannon, *Proc. IEEE*, **72** (1984) 1192.
10. Y.S. Shin y J.-J. Jeon, *Shock and Vibration* **1** (1993) 65.
11. M. Slamani, D. Weiner, T. Tsao, P. Varshney, H. Schwarzlander, S. Borek, *Proc. IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis* (Proc. IEEE-SP International Symposium, 1992), pp. 501-504.
12. D. Vakman, *IEEE Trans. Signal Process.*, **44** (1996) 791.
13. E. Vera, *Procesamiento de señales e imágenes: Teoría y Aplicaciones*, (Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, 2004), pp. 110-161.
14. J.D. Ville *et al.*, *Cables et transmission* **2** (1948) 61.