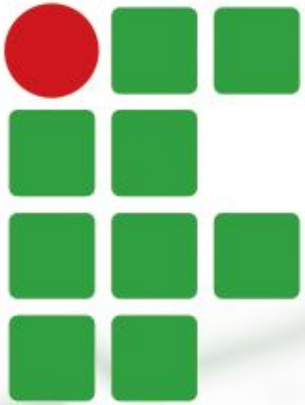


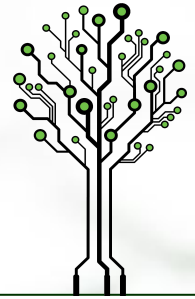
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Estruturas de Dados 2
- Árvores -

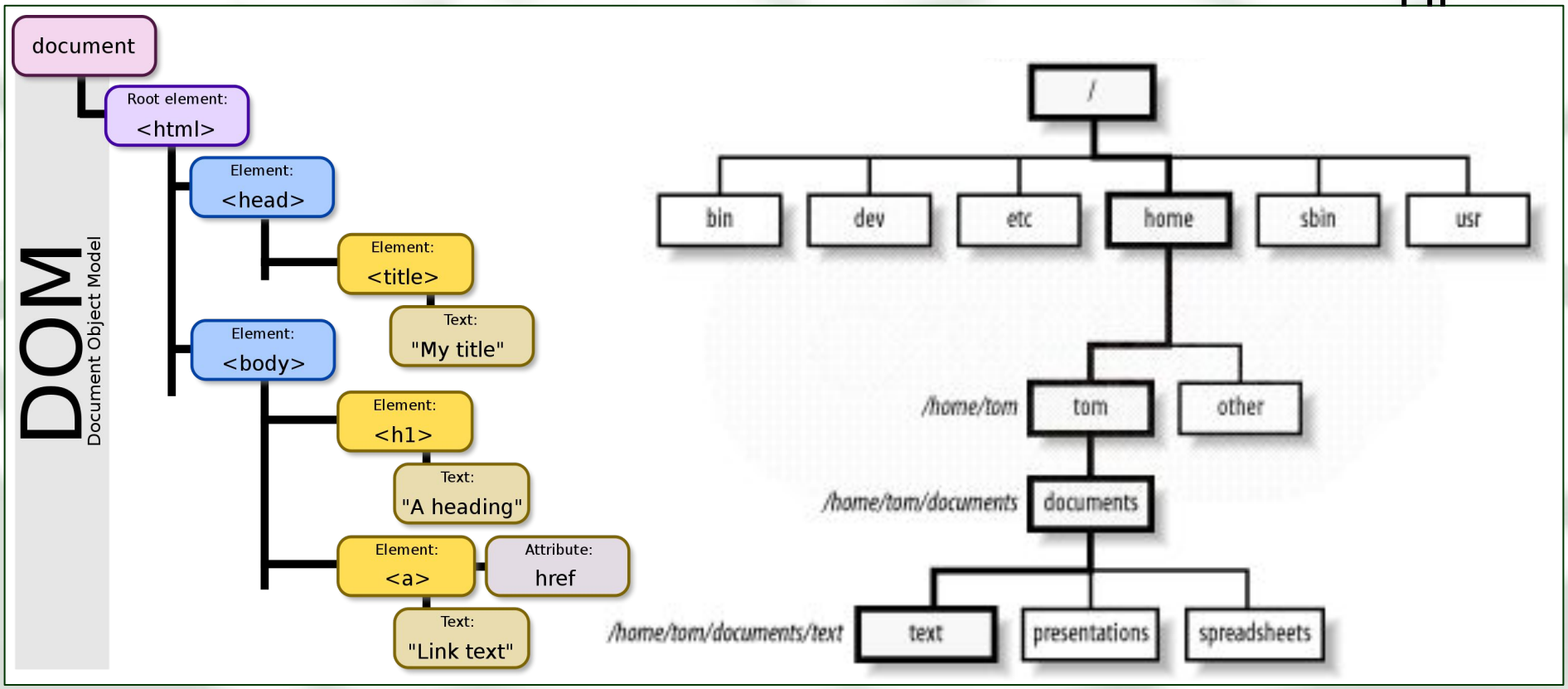
Prof. MSc. Adriano Antunes Prates

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

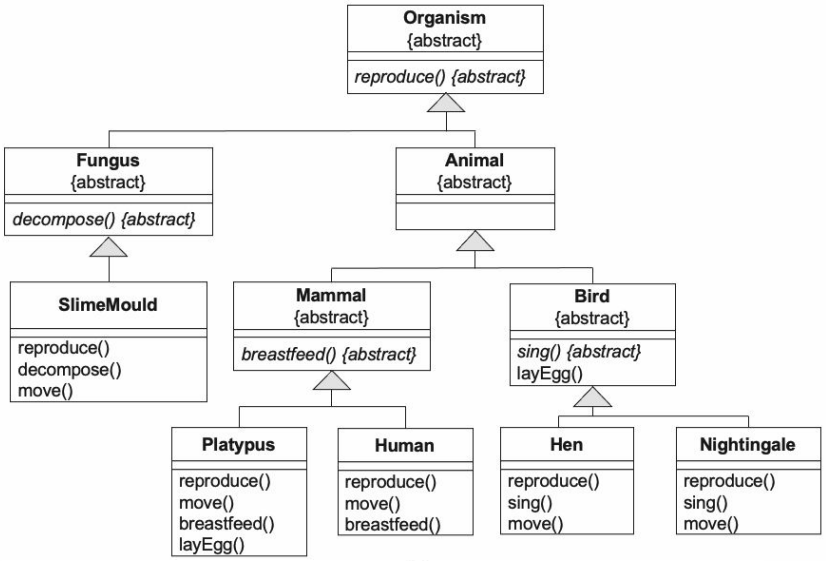


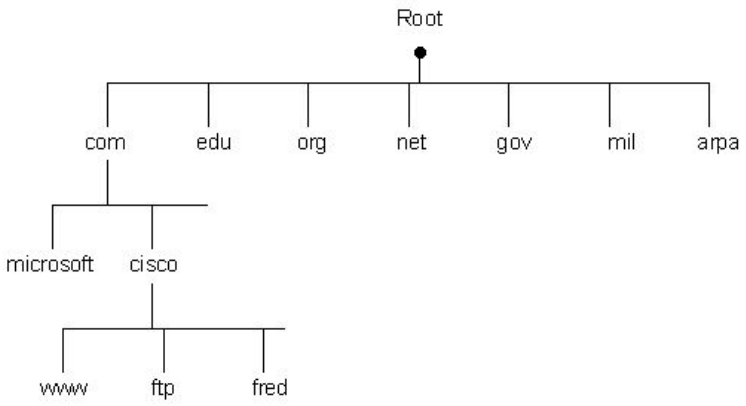
- **Árvores** são uma das **Estruturas de Dados** mais importantes da computação…



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores



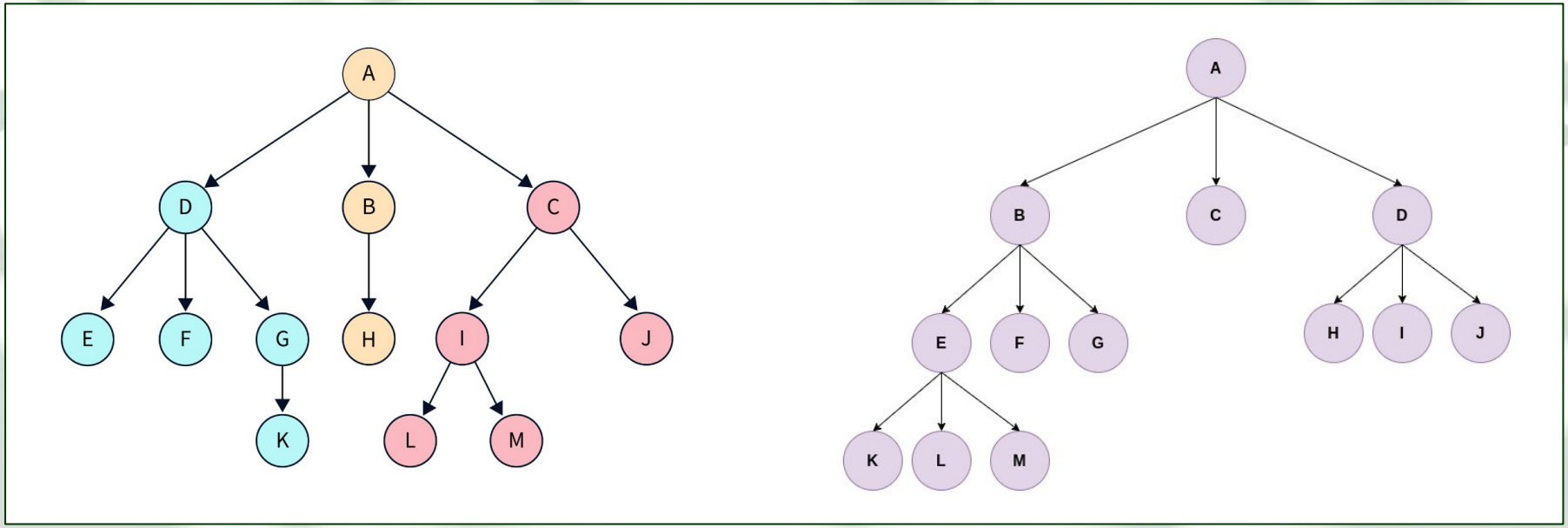



```
$> pstree
systemd─┬─ModemManager───2*[{ModemManager}]
        ├─NetworkManager───2*[{NetworkManager}]
        ├─accounts-daemon───2*[{accounts-daemon}]
        ├─acpid
        ├─agetty
        ├─apache2───2*[apache2───26*[{apache2}]]
        ├─avahi-daemon───avahi-daemon
        ├─blkmapd
        ├─chrome_crashpad───2*[{chrome_crashpad}]
        ├─chrome_crashpad───{chrome_crashpad}
        ├─colord───2*[{colord}]
        ├─containerd───8*[{containerd}]
        ├─containerd-shim─┬─entrypoint.sh───katharanp
        │                 └─11*[{containerd-shim}]
        ├─containerd-shim─┬─entrypoint.sh───katharanp
        │                 └─10*[{containerd-shim}]
        ├─core───13*[{core}]
        ├─core─┬─wsatspi
        │      └─13*[{core}]
        ├─cron
        ├─csd-printer───2*[{csd-printer}]
        ├─cups-browsed───2*[{cups-browsed}]
```

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

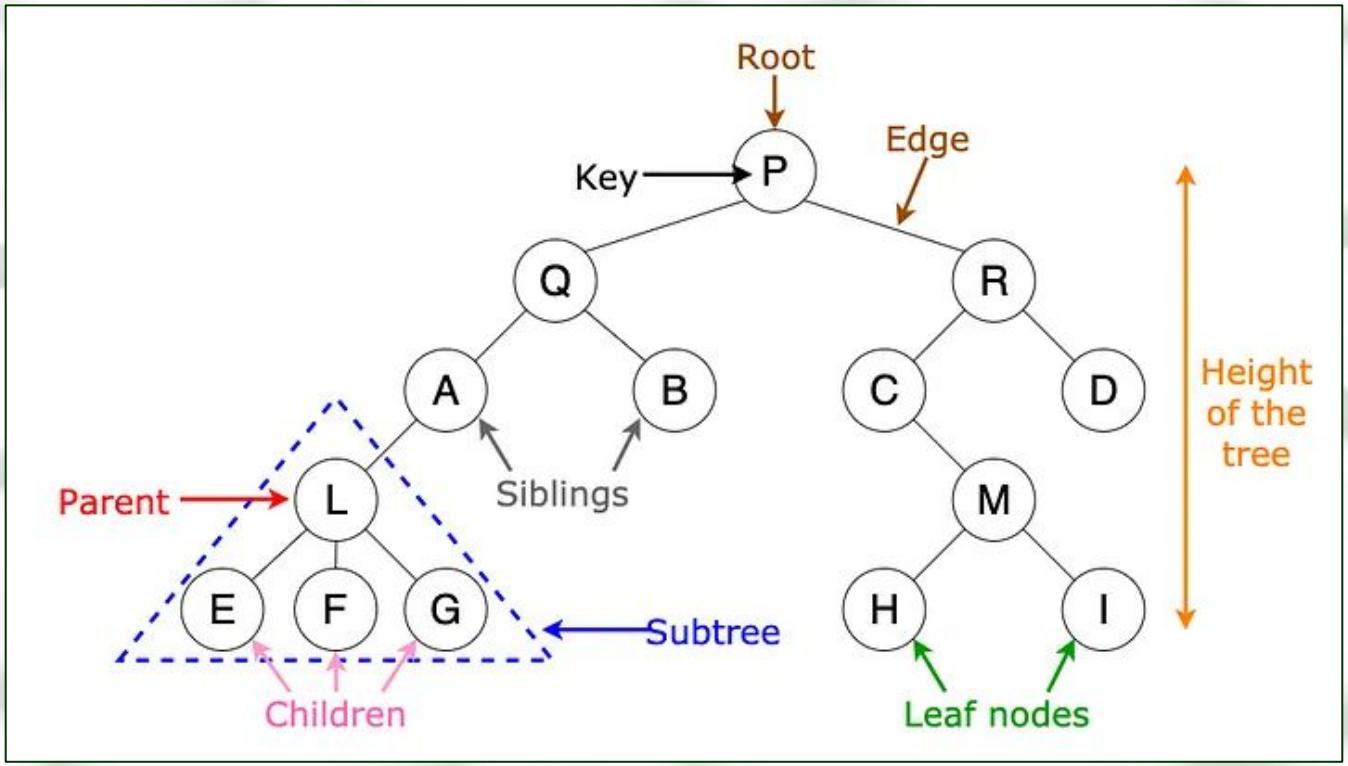
- Pode ser vista como uma **extensão de uma Lista Encadeada, mas onde cada nó pode ter mais de um sucessor**, neste caso, chamados de **nós filhos**.
- Árvores são **Estruturas de Dados não Lineares.**



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

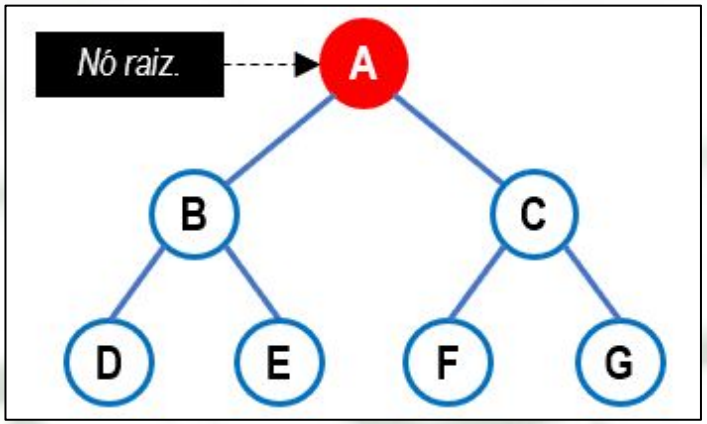
- As Árvores possuem diversas características técnicas que as distinguem entre si. Veremos as mais importantes…

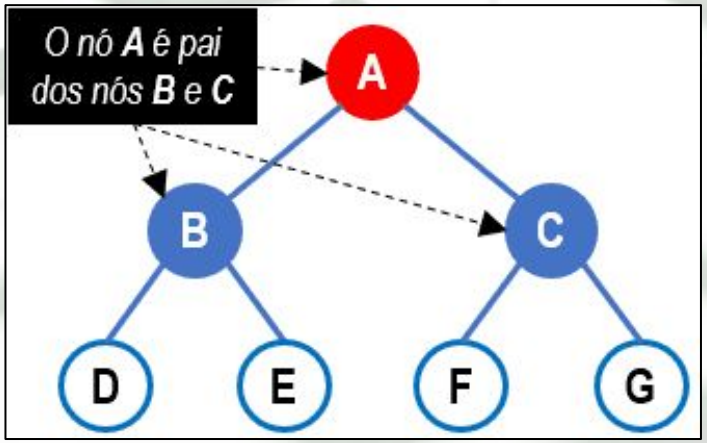


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

- A representação usual é invertida, **tendo o nó raiz no topo, e as folhas na base.**
- Cada nó possui um único pai (exceto o nó raiz). Cada nó filho por sua vez, pode ser considerada uma sub-árvore (idéia de **recursividade**).
- Todo percurso é **único**! Ao contrário, seria um grafo.

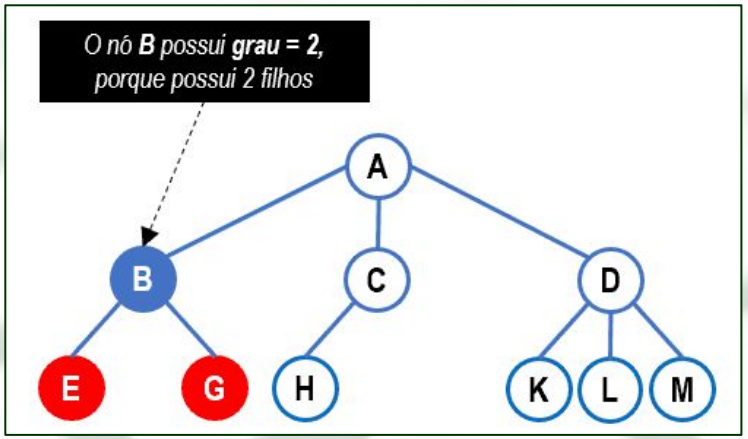


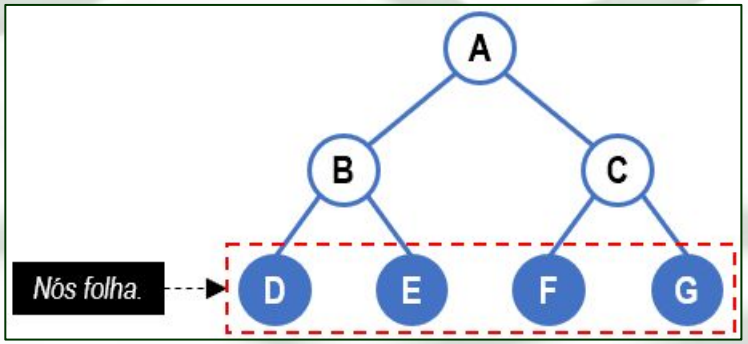


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

- O número máximo de filhos de um nó determina o **Grau** deste nó (ou da sub-árvore).
- O maior grau dentre todos os nós, determina o **Grau da Árvore** como um todo.
- Nós de grau 0 são chamados de Folhas.

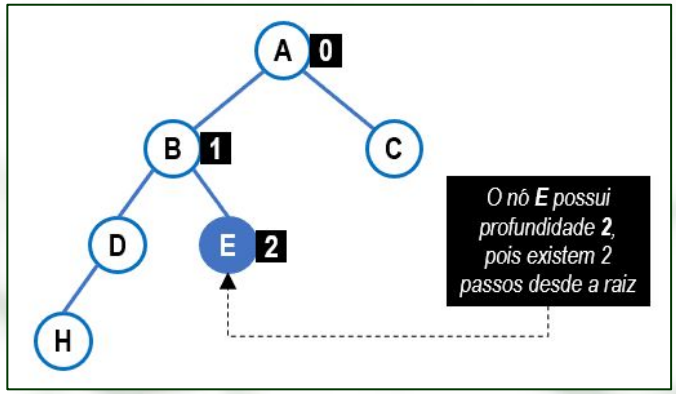




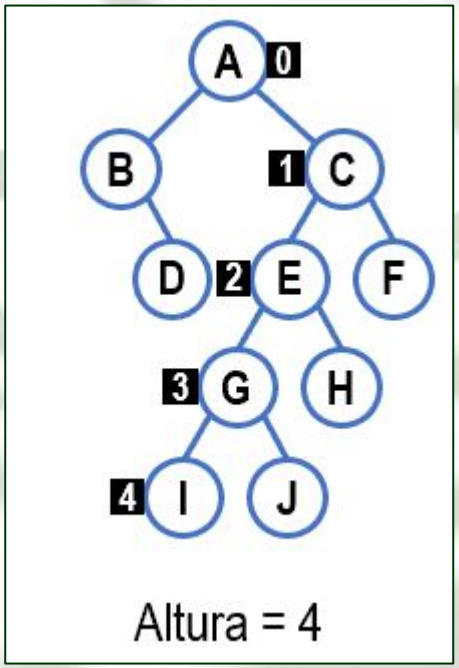
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

- A **Profundidade de um nó** é a sua distância para alcançar a raiz.



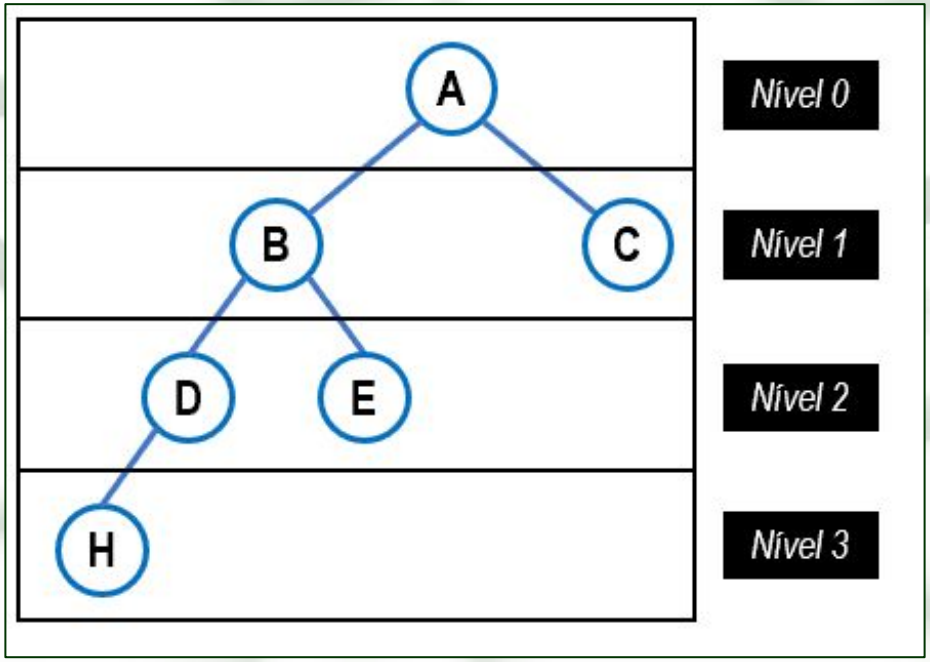
- A **Altura de uma árvore** representa a maior profundidade dentre todos os nós.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

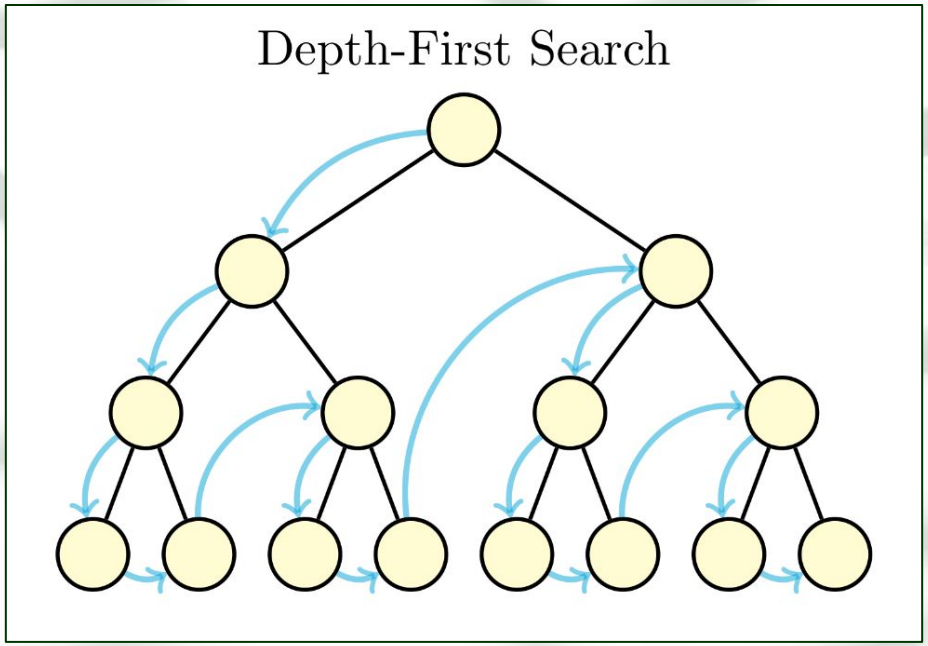
Árvores

- O **Nível** define as fatias de profundidade de uma árvore, de modo que os filhos de um determinado nó (nós irmãos) sempre estarão no mesmo nível.



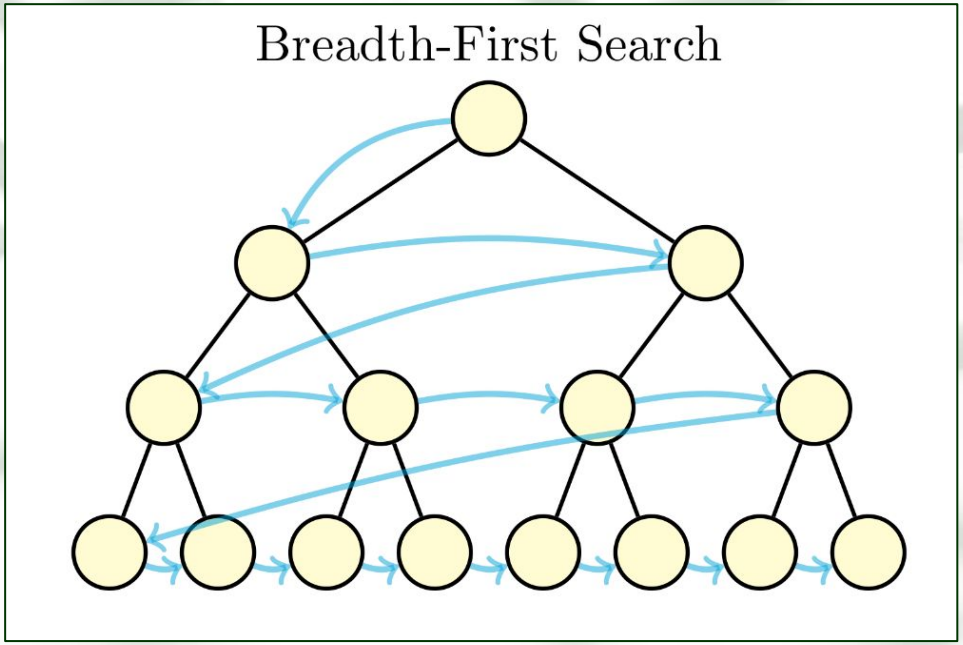
Árvores

- A **Busca em Profundidade** - DFS (*Depth-First Search*) é o método de travessia em árvore que, começando do nó raiz, explora tanto quanto possível cada uma das sub-árvores, antes de retroceder ao nó pai.



Árvores

- A **Busca em Largura** - BFS (*Breadth-First Search*), ou busca em amplitude, é o método de travessia em árvore que, começando do nó raiz, explora todos os nós de um mesmo nível, antes de ir aos nós filhos.

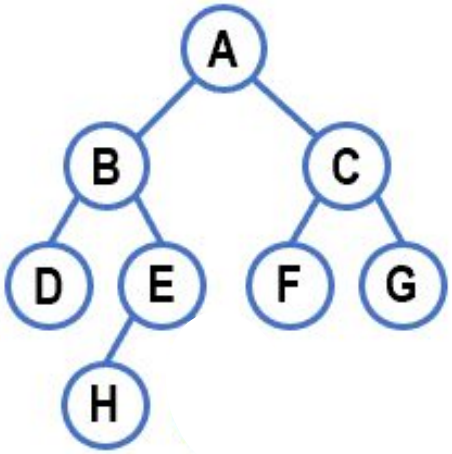


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

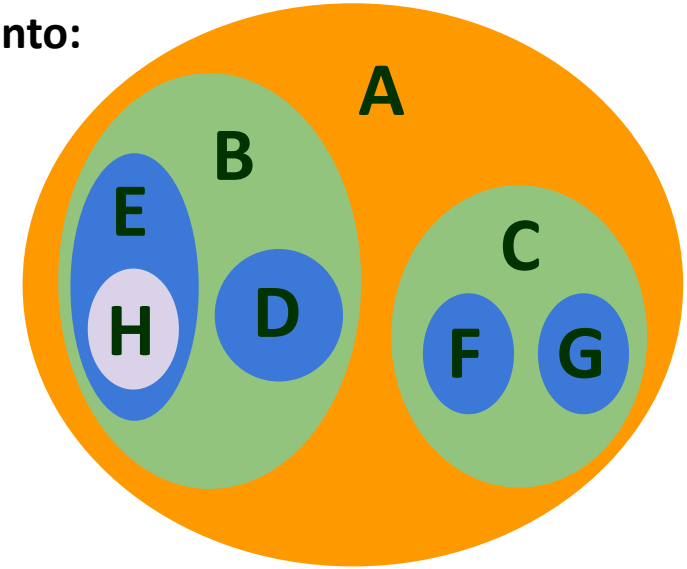
Árvores

- Outras formas de representação das Árvores…

Grafo:



Conjunto:



Parênteses:

(A (B (D,E (H)), C(F, G)))

Array:

A	B	C	D	E	F	G	/	/	H	/	/	/	/	/

Árvores

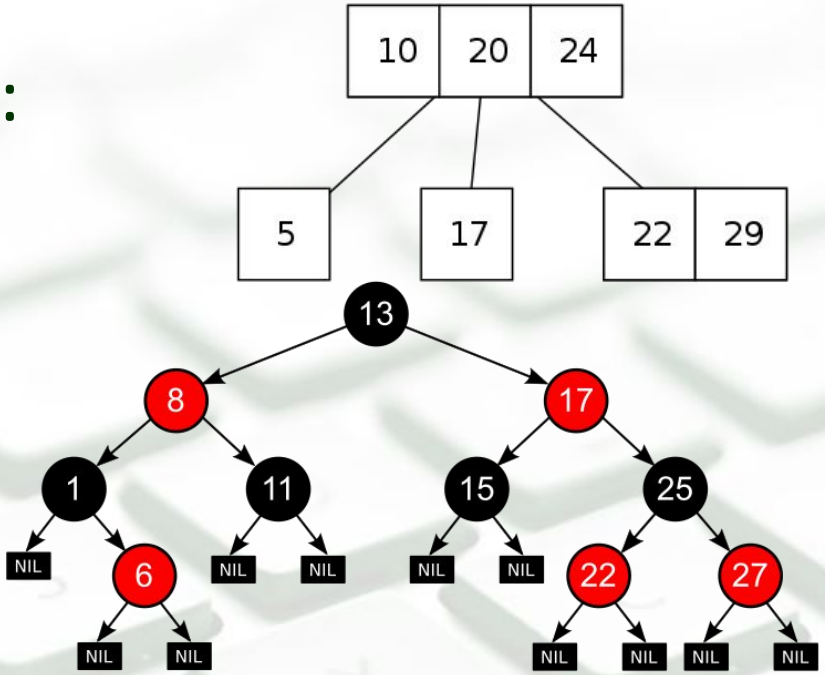
- Como percebemos, existe um grande número de conceitos técnicos inerentes às características das Árvores.

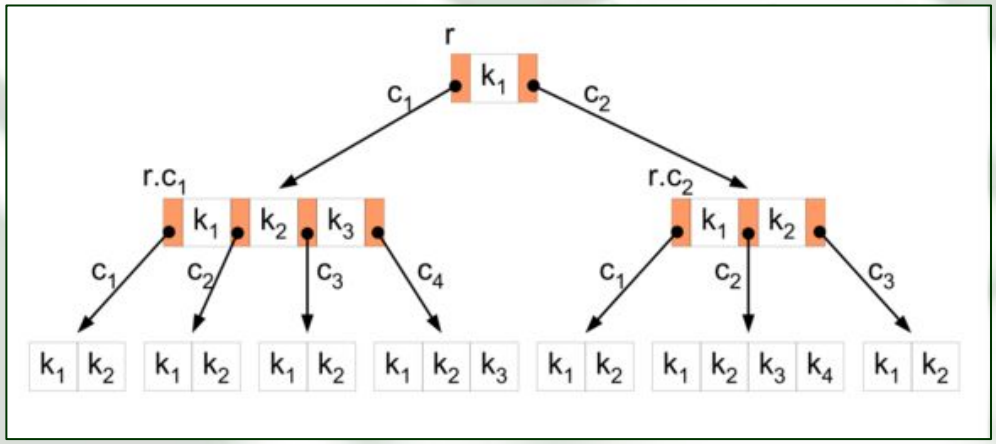
- Da mesma forma, existem **inúmeras variantes de Estruturas de Dados em formato de Árvores**, cada qual, sendo melhor ou pior aplicável a diversos problemas existentes na computação…

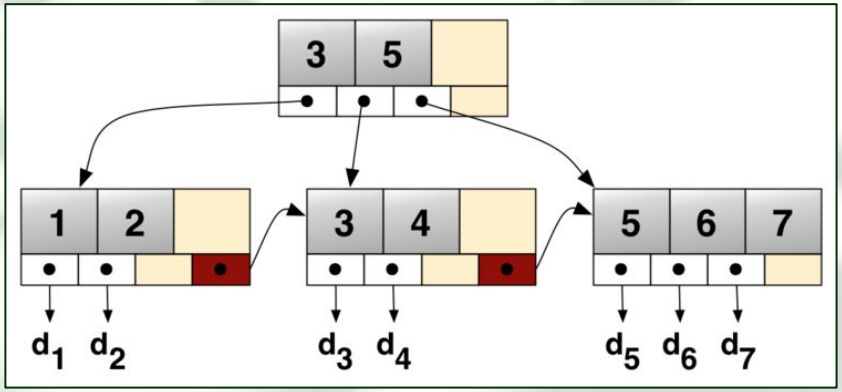
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores

- Principais Tipos de Árvores:
  - Árvores Binárias (ABB)
  - Árvores AVL (Balanceadas)
  - Árvores Radix
  - Árvores Rubro-Negras
  - Árvores B e B+



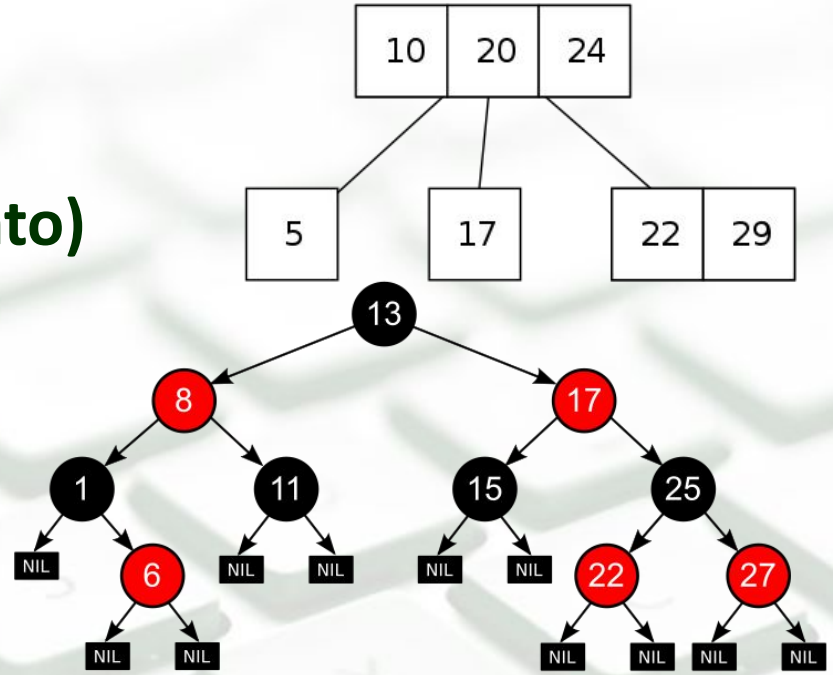


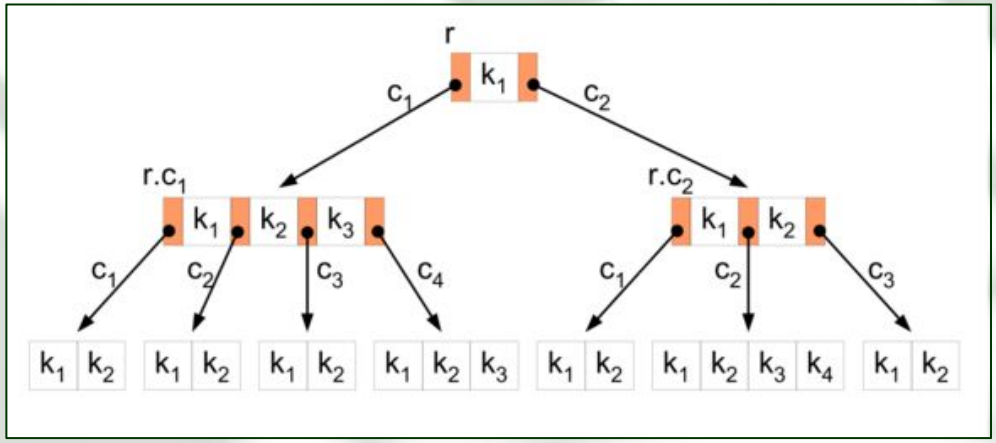


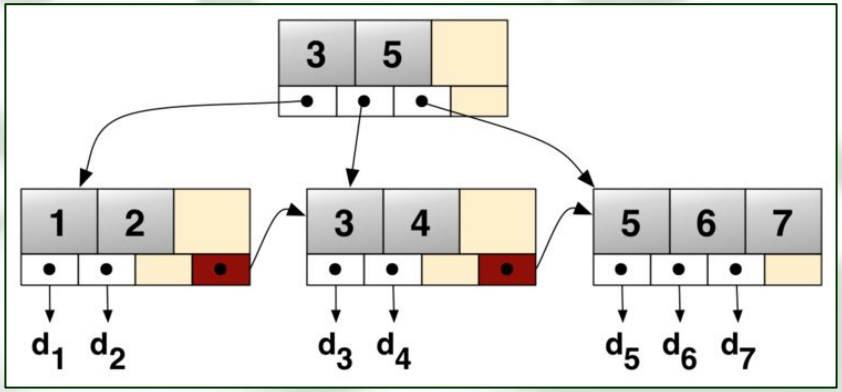
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Seminários

- Temas para Apresentação:
  - **Árvores AVL (Balanceamento)**
  - **Árvores Splay**
  - **Árvores B e B+**
  - **Árvores Rubro-Negras**
  - **Árvores Radix**





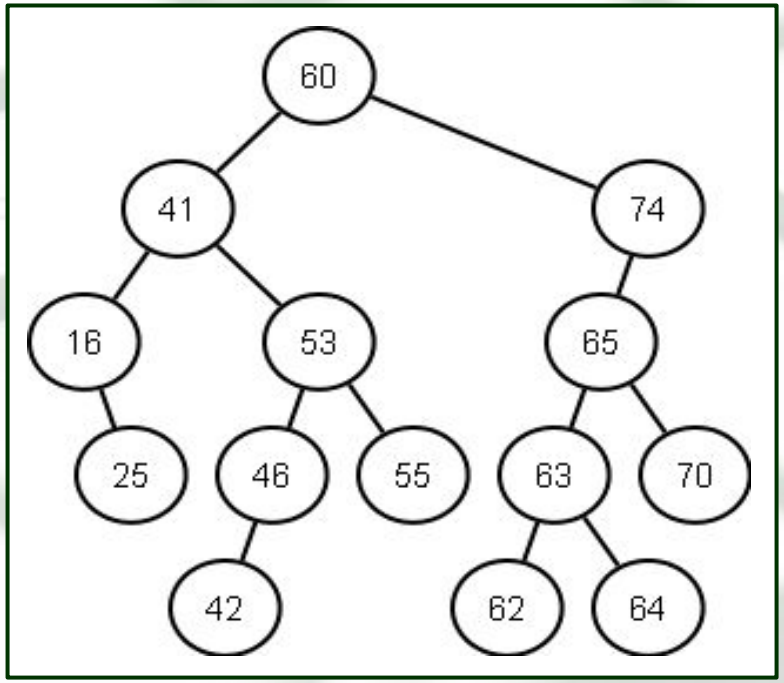


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- **Árvores Binárias** são aquelas de grau máximo 2.
- A implementação mais comum das Árvores Binárias são as ABB (**Árvores Binárias de Busca**)

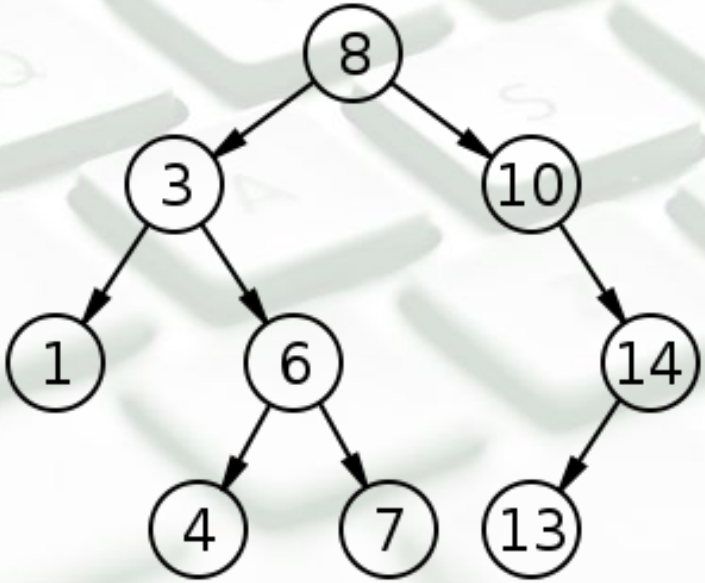
Nas ABB, todos os nós da subárvore esquerda possuem um valor chave (valor de identificação) **inferior à chave do nó raiz**, e todos os nós da subárvore direita possuem um valor de chave **superior à chave do nó raiz**.



Árvores Binárias

- **Responda rápido...**

Qual a **Ordem de Complexidade (Big O)** para métodos de Inserção e Consulta em uma Árvore Binária de Busca?



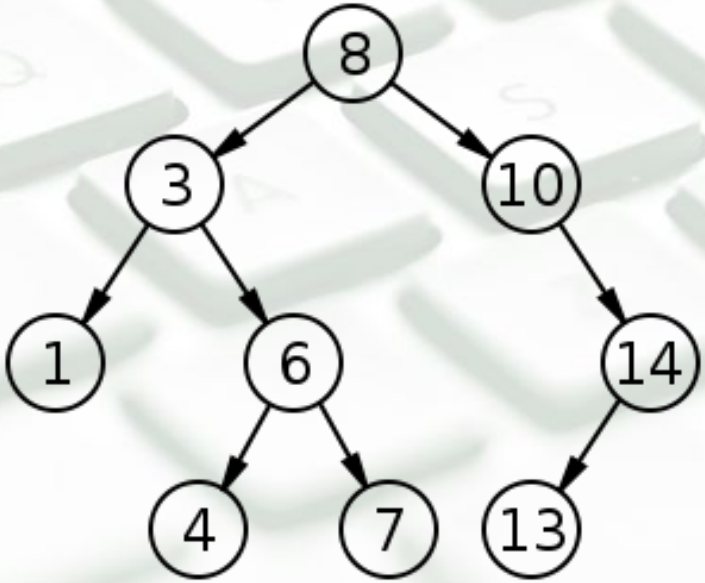
Árvores Binárias

- **Responda rápido...**

Qual a **Ordem de Complexidade (Big O)** para métodos de Inserção e Consulta em uma Árvore Binária de Busca?

Inserção

Logarítmica



Consulta

Logarítmica

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

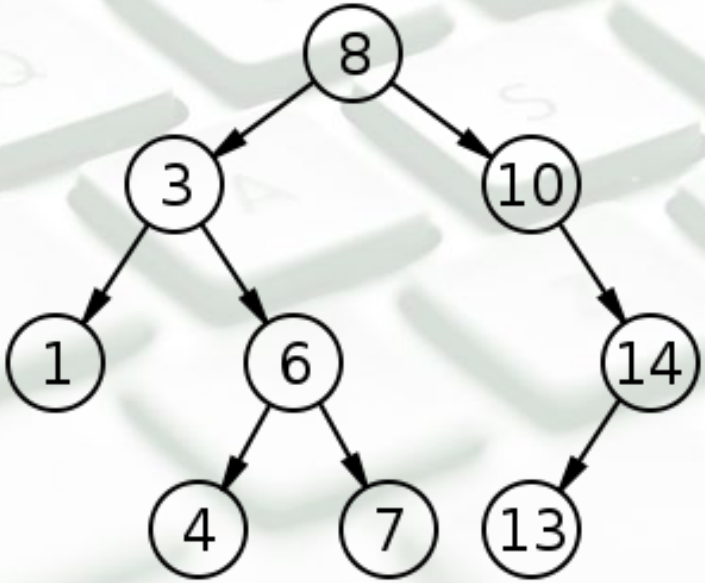
Árvores Binárias

- **Responda rápido...**

Qual a **Ordem de Complexidade (Big O)** para métodos de Inserção e Consulta em uma Árvore Binária de Busca?

Inserção

~~***Logarítmica***~~



Consulta

~~***Logarítmica***~~

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

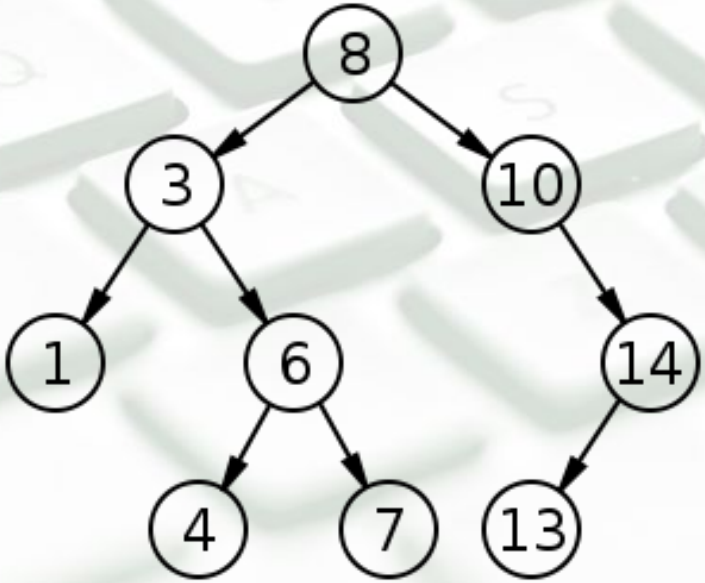
- **Responda rápido...**

Qual a **Ordem de Complexidade (Big O)** para métodos de Inserção e Consulta em uma Árvore Binária de Busca?

Inserção

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***



Consulta

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- **Respo**

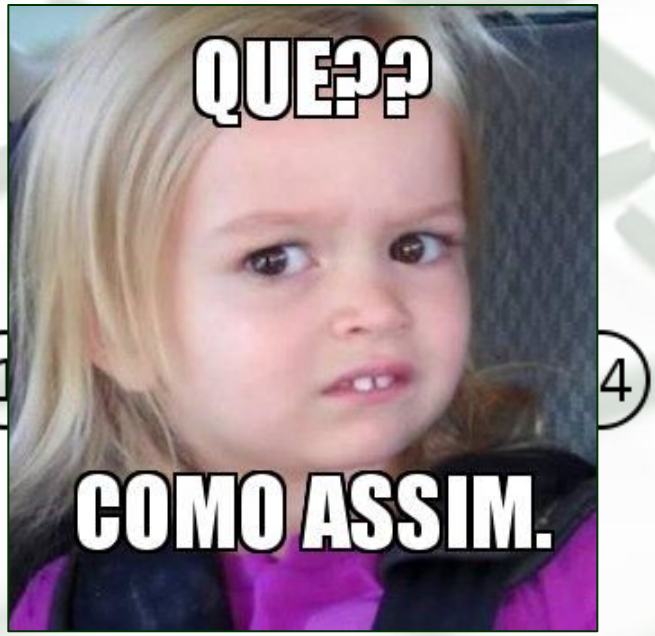
Data Structure	Time Complexity			
	Worst			
	Access	Search	Insertion	Deletion
Stack	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)
Queue	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)
Binary Search Tree	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)

Qual a **C** métodos de Inserçã de Busca?

Inserção

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***



Consulta

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

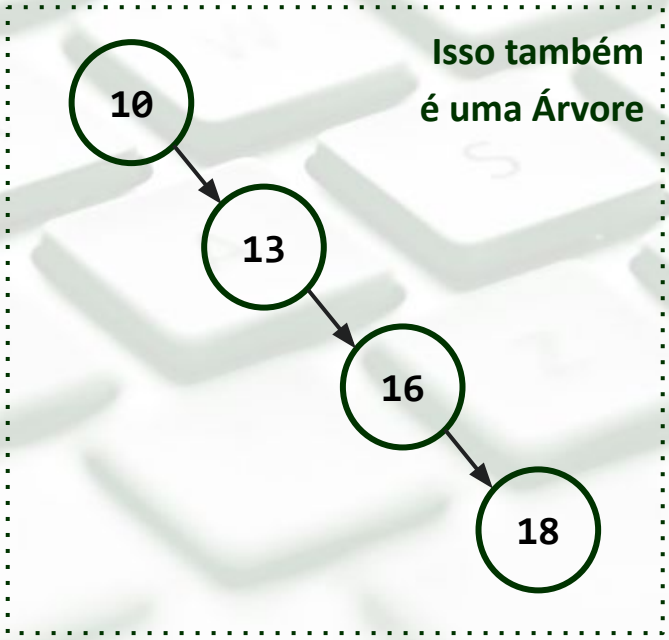
- **Responda rápido...**

Qual a **Ordem de Complexidade (Big O)** para métodos de Inserção e Consulta em uma Árvore Binária de Busca?

Inserção

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***



Consulta

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

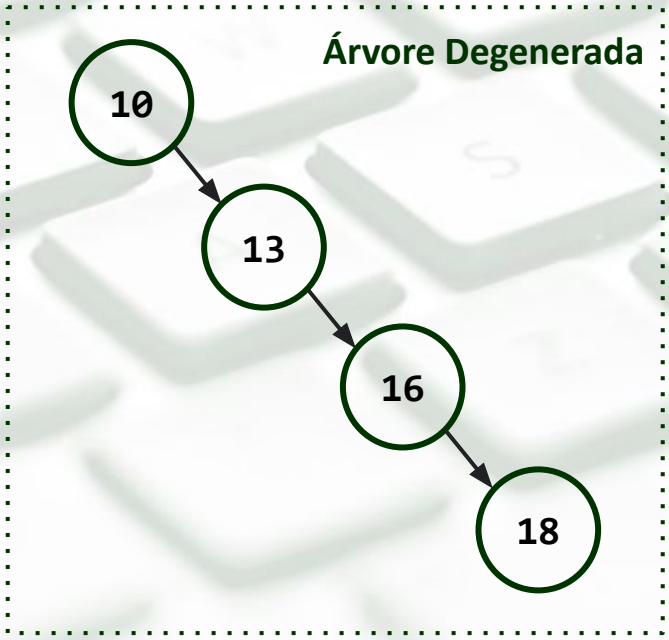
- **Responda rápido...**

Qual a **Ordem de Complexidade (Big O)** para métodos de Inserção e Consulta em uma Árvore Binária de Busca?

Inserção

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***



Consulta

~~***Logarítmica***~~

O(n) => ***Linear***

Árvores Binárias

- Obviamente, **Árvores Degeneradas** é um caso de **excepcionalidade** considerando a maioria das construções de Árvores Binárias.

- Por este motivo, tende-se a considerar a **Ordem de Complexidade Theta***, tanto para inserção quanto para consulta de nós.

Θ(log(n))

Ordem de Complexidade Theta considera o caso médio ao invés do pior caso.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

Data Structure	Time Complexity							
	Average				Worst			
	Access	Search	Insertion	Deletion	Access	Search	Insertion	Deletion
Stack	Θ(n)	Θ(n)	Θ(1)	Θ(1)	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)
Queue	Θ(n)	Θ(n)	Θ(1)	Θ(1)	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)
Binary Search Tree	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)

- Por este motivo, tende-se a considerar a **Ordem de Complexidade Theta***, tanto para inserção quanto para consulta de nós.

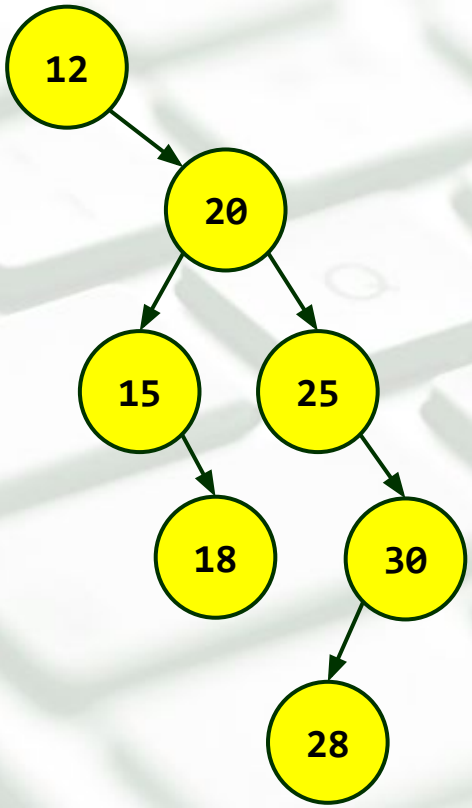
Θ(log(n))

Ordem de Complexidade Theta considera o caso médio ao invés do pior caso.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Outro problema que impacta no desempenho de uma ABB é quando ela se torna **desbalanceada**…



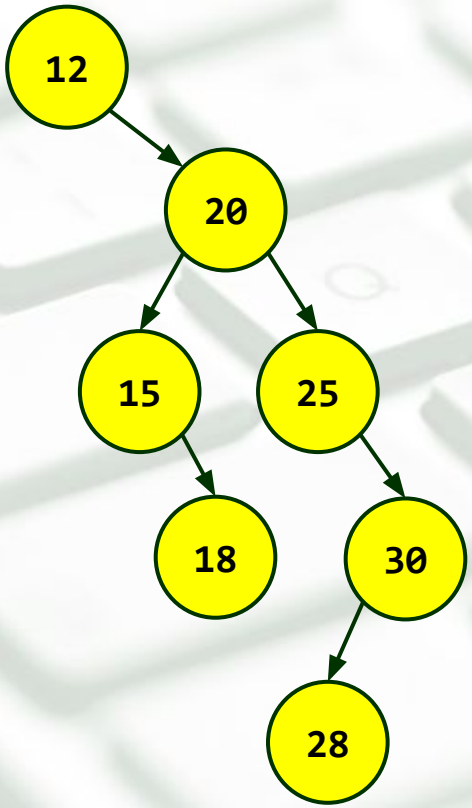
Uma árvore está desbalanceada quando:

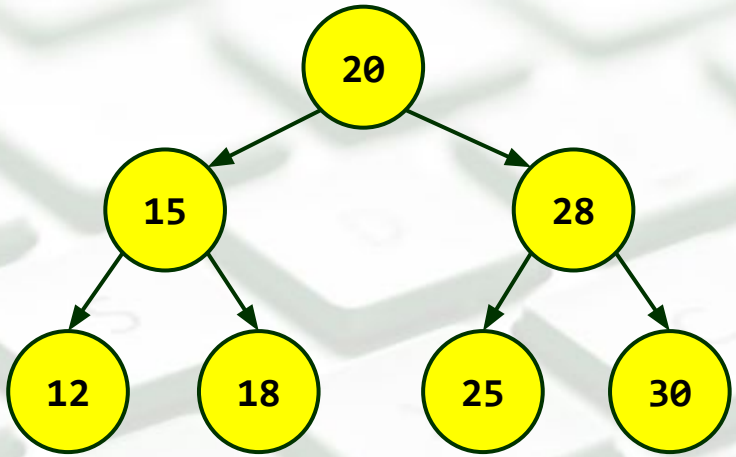
Altura > $Log_2(n)$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Outro problema que impacta no desempenho de uma ABB é quando ela se torna **desbalanceada**…





O mesmo conjunto de elementos, em uma Árvore Desbalanceada e em uma Árvore Balanceada.

Árvores Binárias

- A grande importância das Árvores Binárias se dá ao fato de **unir o que há de melhor (vantagens) nas duas estruturas de dados vistas anteriormente…**

Comparativo	Complexidade de Operações	Alocação de Memória
Arrays (Busca Binária)	Logarítmico	Estática
Listas Encadeadas (Stack / Queue)	Linear	Dinâmica
Árvores Binárias	**Logarítmico**	**Dinâmica**

Árvores Binárias

- Estrutura Base de um Nó de Árvore Binária

```
typedef struct No{
   long chave;
   void* dado;
   struct No* esq;
   struct No* dir;
}No;
```

Árvores Binárias

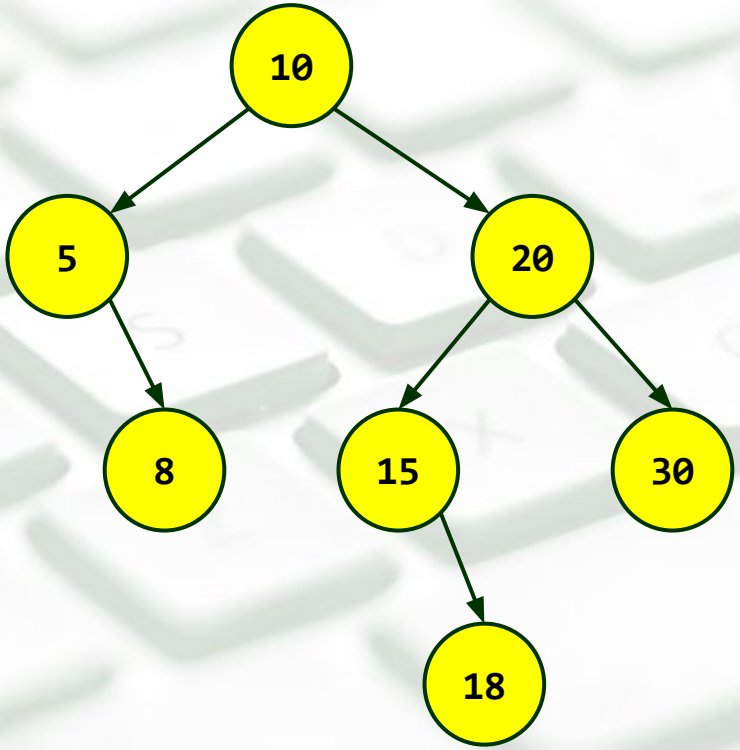
- Consulta / Inserção de Nós em ABB
- Procure o “local” adequado para inserir a nova chave, começando a partir do nó-raiz…
- Para cada nó visitado, compare:
  - Se a nova chave for menor ou igual do que o valor do nó visitado, repita todo o processo para sub-árvore esquerda.
  - Se a nova chave for maior que o valor no nó visitado, repita todo o processo para sub-árvore direita.
- Se um ponteiro (filho esquerdo/direito) nulo é atingido, insira o novo nó neste ramo.
- **A inserção sempre se dá como um nó folha, e não exige deslocamentos!**

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Consulta / Inserção de Nós em ABB

Novo Nó

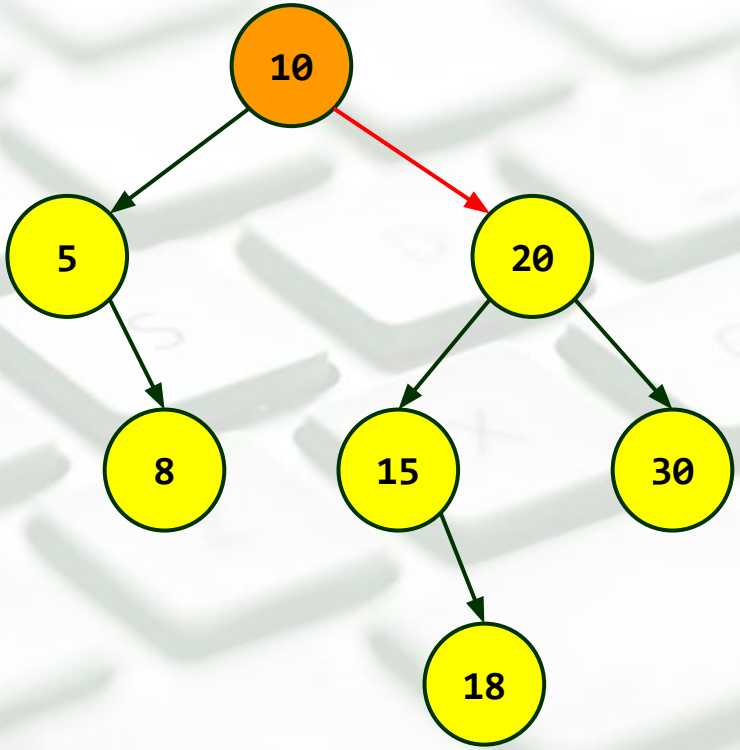


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Consulta / Inserção de Nós em ABB

Novo Nó

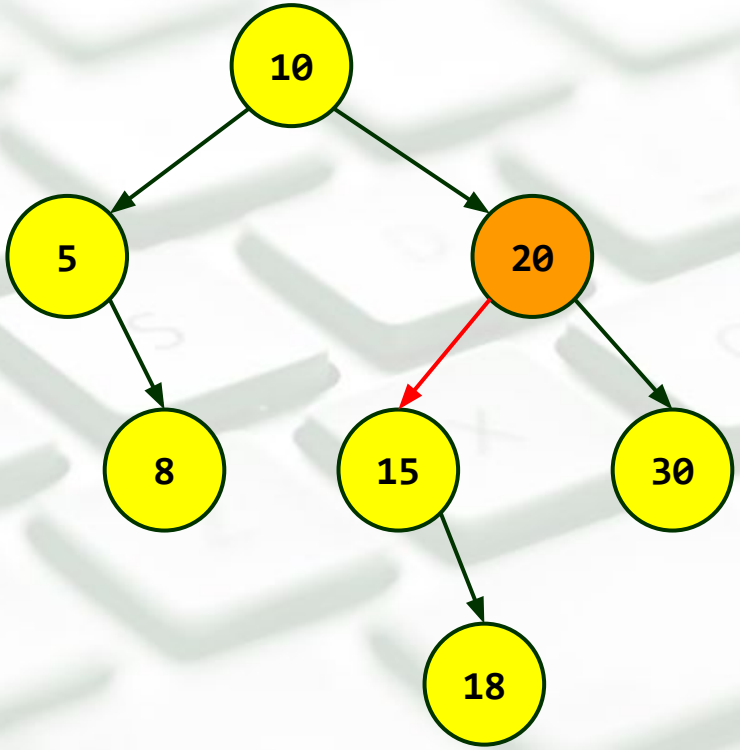


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Consulta / Inserção de Nós em ABB

Novo Nó

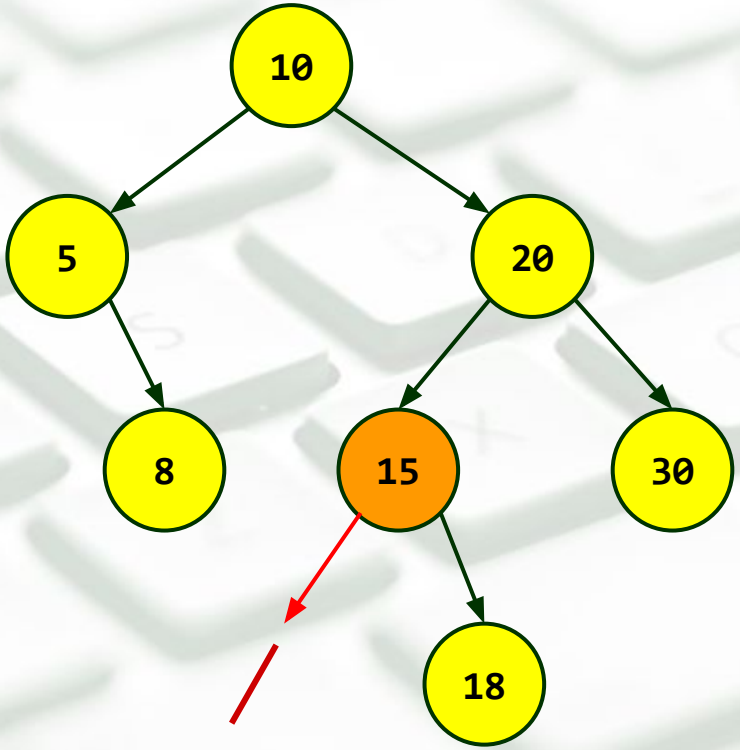


INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Consulta / Inserção de Nós em ABB

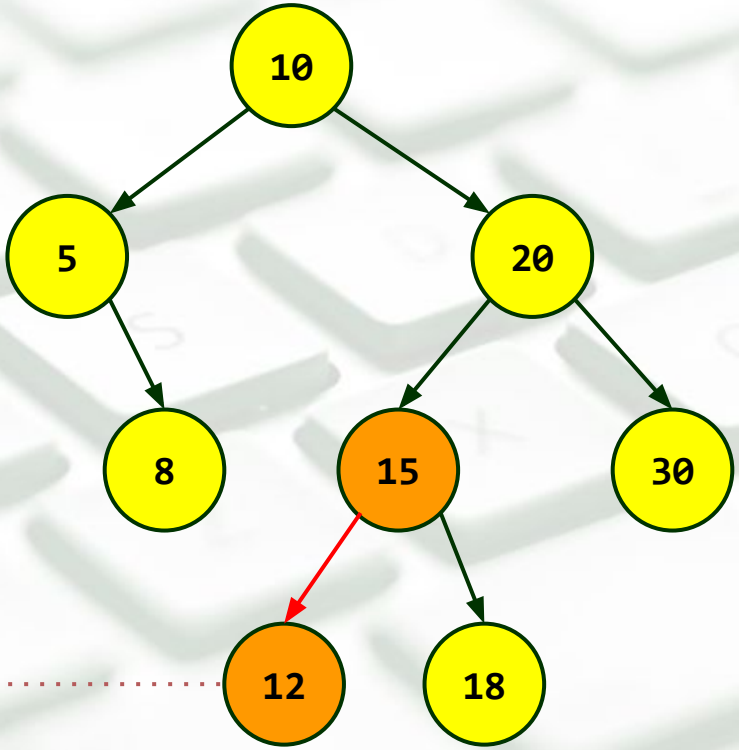
Novo Nó



Árvores Binárias

- Consulta / Inserção de Nós em ABB

Novo Nó



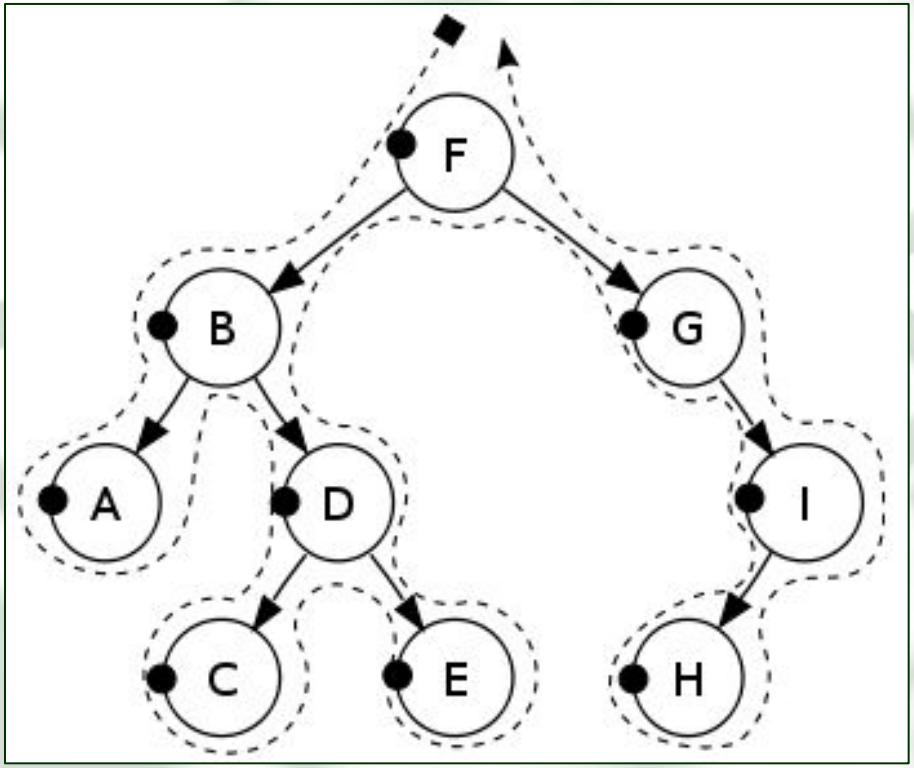
Árvores Binárias

- Consulta / Inserção de Nós em ABB

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB
  - ***Percurso em Profundidade (DFS)***



03 variantes...

Pré Ordem (Raiz -> E -> D)

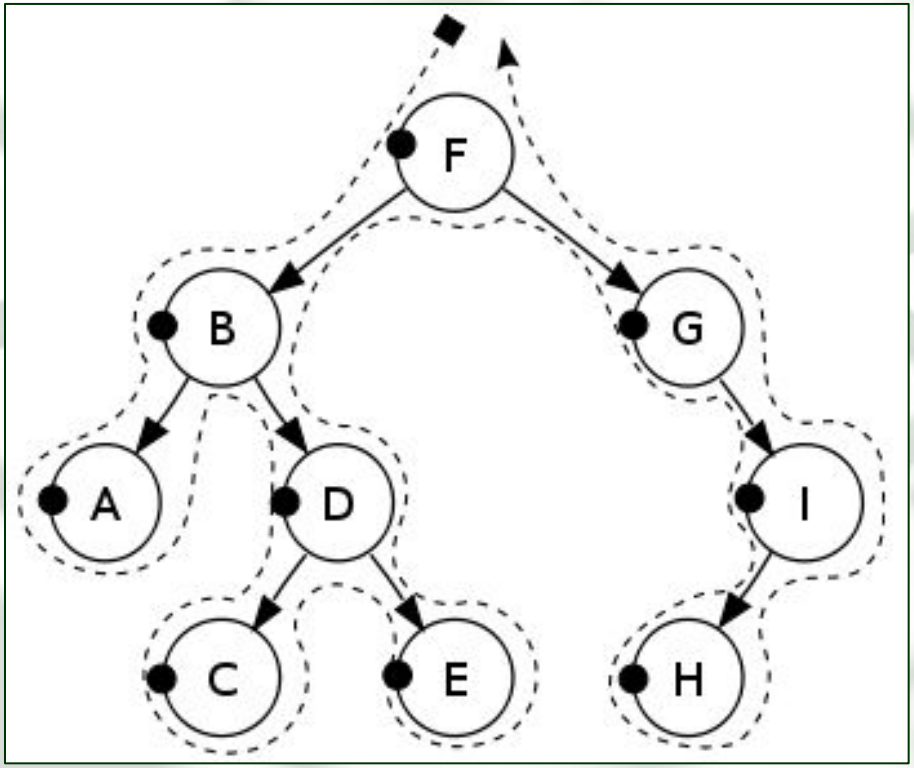
```
void percorre(a){
    if (a){
        printf("%c ", a->chave);
        percorre(a->esq);
        percorre(a->dir);
    }
}
```

>> Qual sequência???

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB
  - ***Percurso em Profundidade (DFS)***



03 variantes...

Pré Ordem (Raiz -> E -> D)

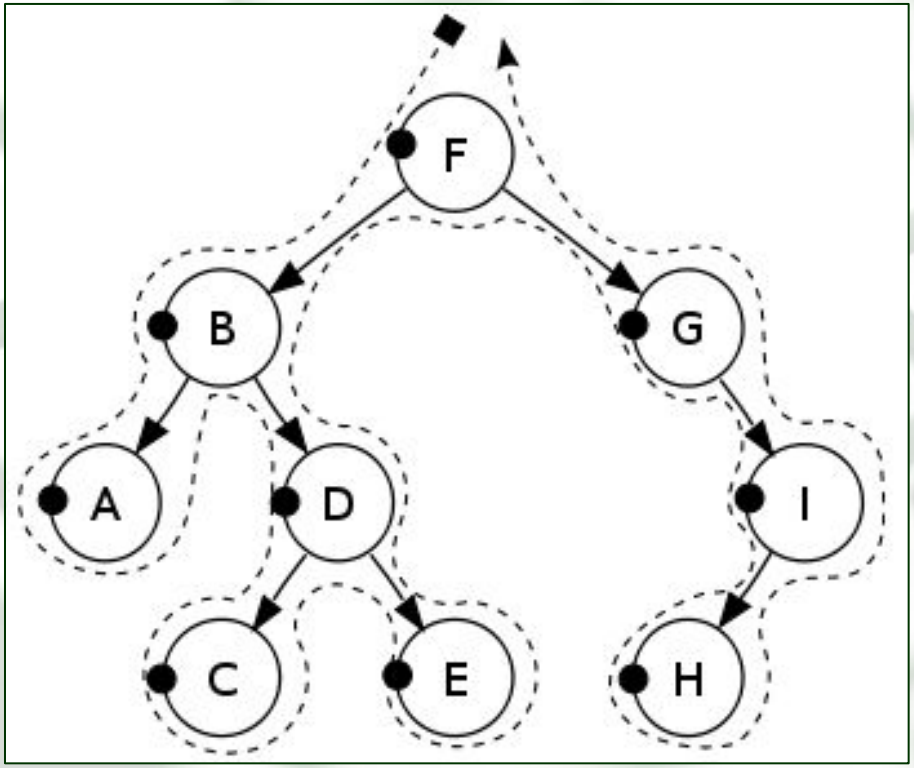
```
void percorre(a){
    if (a){
        printf("%c ", a->chave);
        percorre(a->esq);
        percorre(a->dir);
    }
}
```

>> F B A D C E G I H

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB
  - ***Percurso em Profundidade (DFS)***



03 variantes...

Em Ordem (E -> Raiz -> D)

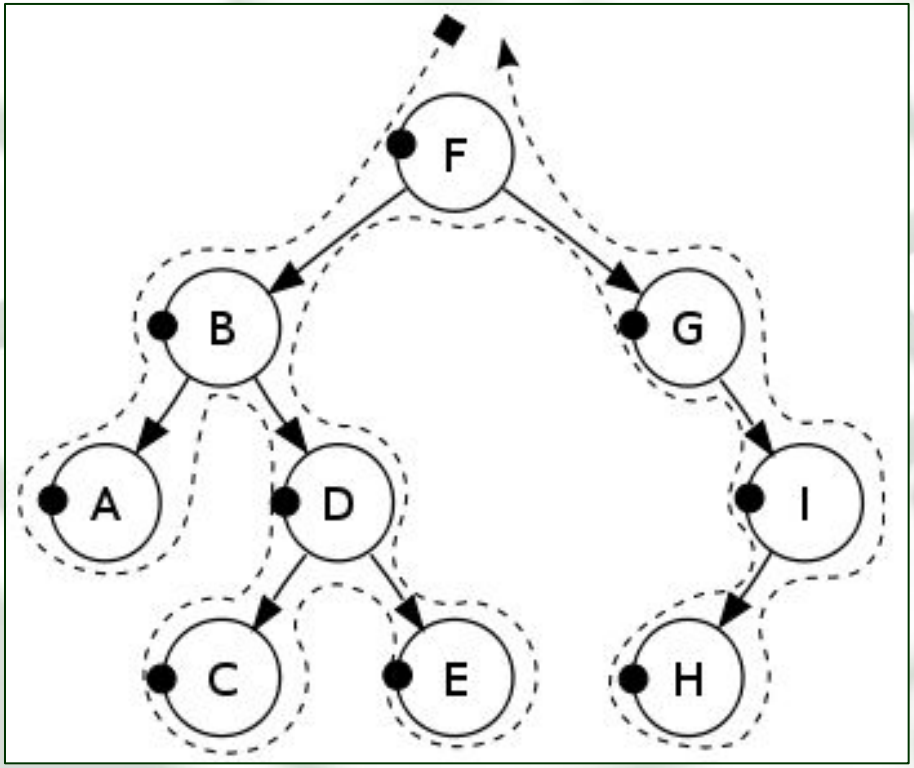
```
void percorre(a){
    if (a){
        percorre(a->esq);
        printf("%c ", a->chave);
        percorre(a->dir);
    }
}
```

>> Qual sequência???

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB
  - ***Percurso em Profundidade (DFS)***



03 variantes...

Em Ordem (E -> Raiz -> D)

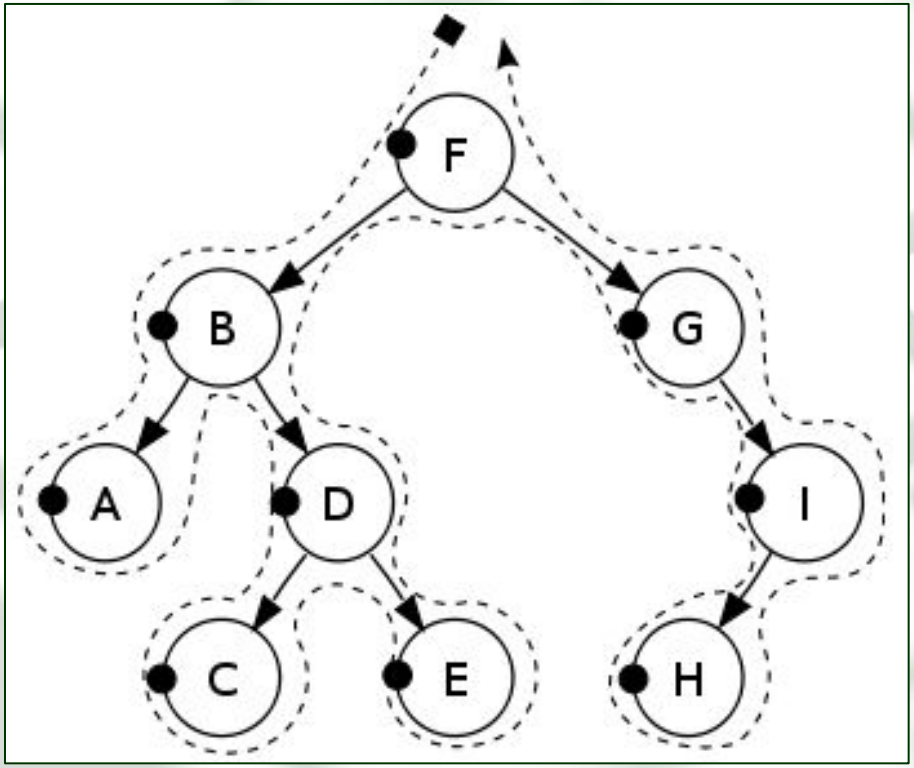
```
void percorre(a){
    if (a){
        percorre(a->esq);
        printf("%c ", a->chave);
        percorre(a->dir);
    }
}
```

>> A B C D E F G H I

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB
  - ***Percurso em Profundidade (DFS)***



03 variantes...

Pós Ordem (E -> D -> Raiz)

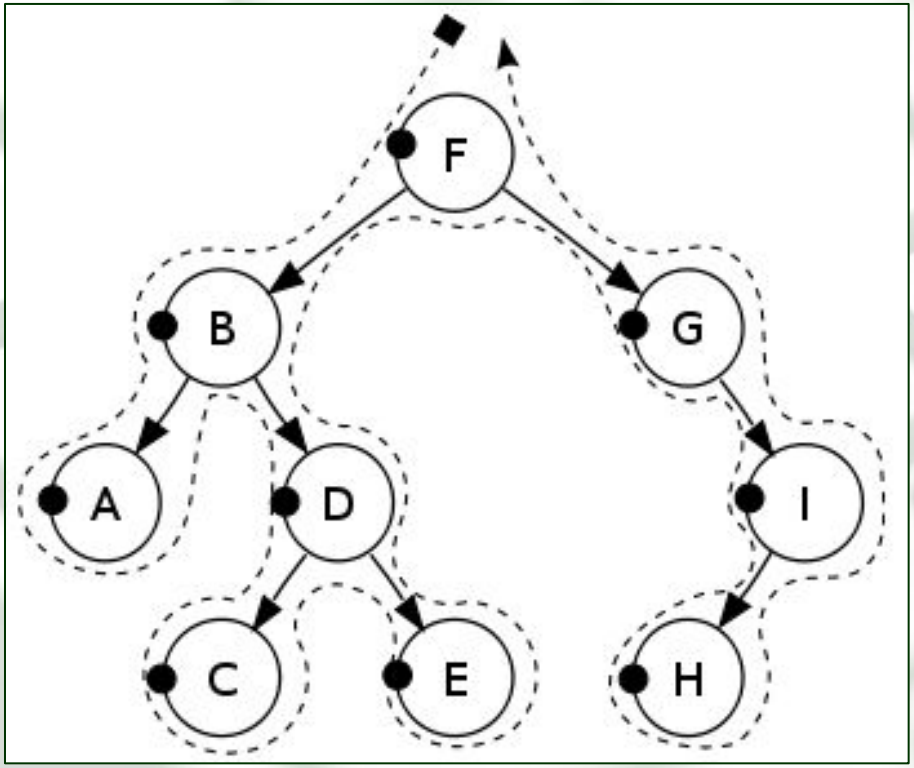
```
void percorre(a){
    if (a){
        percorre(a->esq);
        percorre(a->dir);
        printf("%c ", a->chave);
    }
}
```

>> Qual sequência???

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB
  - ***Percurso em Profundidade (DFS)***



03 variantes...

Pós Ordem (E -> D -> Raiz)

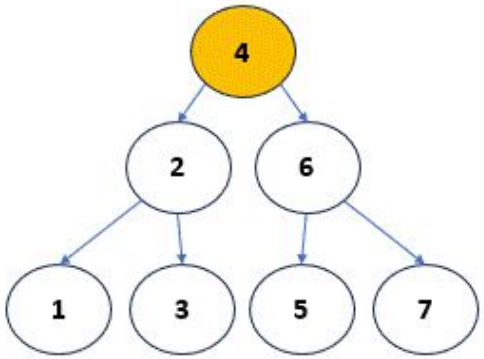
```
void percorre(a){
    if (a){
        percorre(a->esq);
        percorre(a->dir);
        printf("%c ", a->chave);
    }
}
```

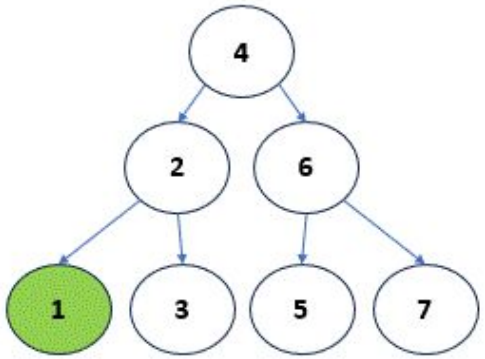
>> A C E D B H I G F

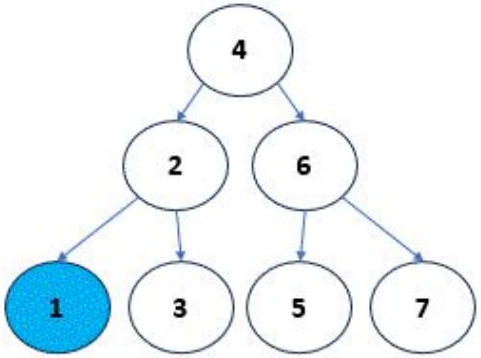
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Percorrer Nós em ABB







Pre order ↓

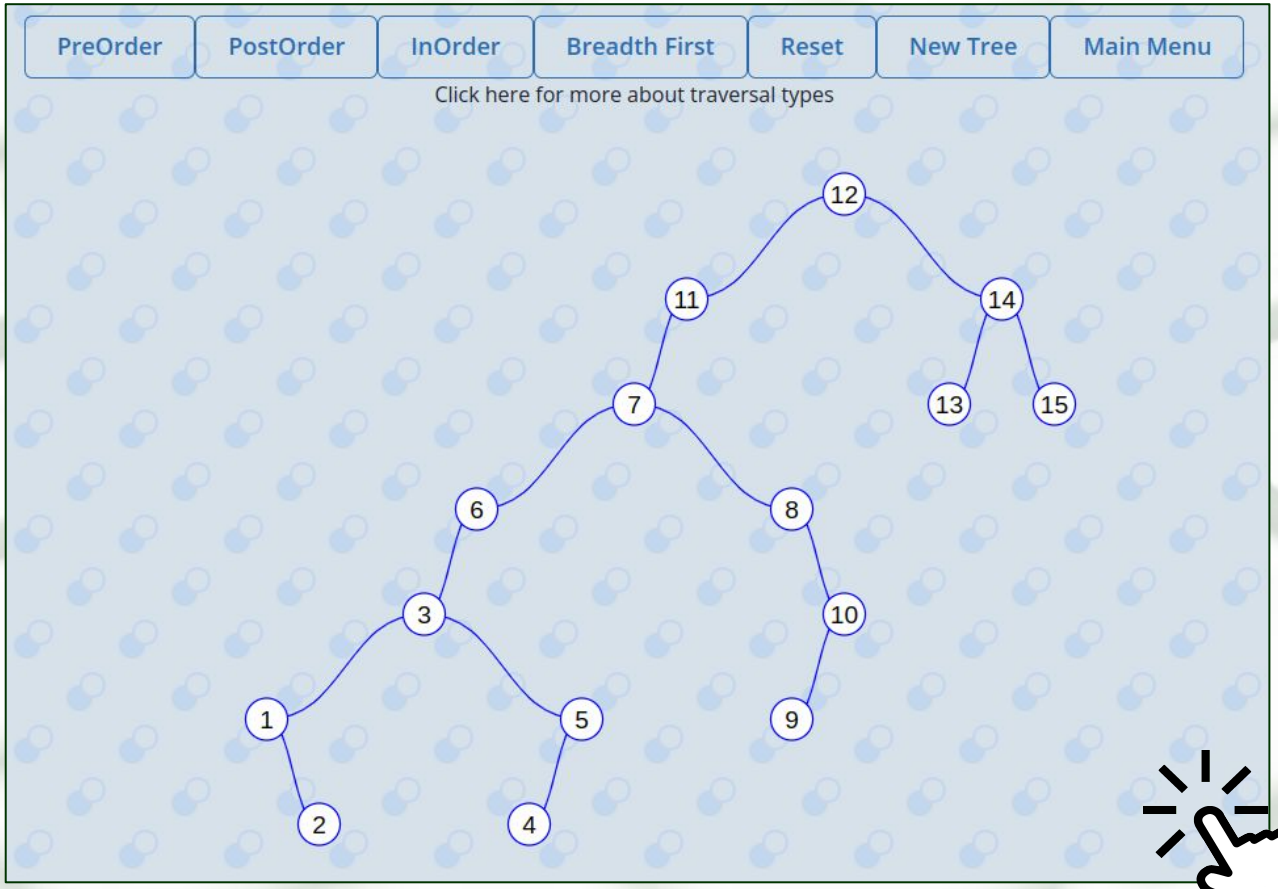
In order

Post order ↑

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Site animado…



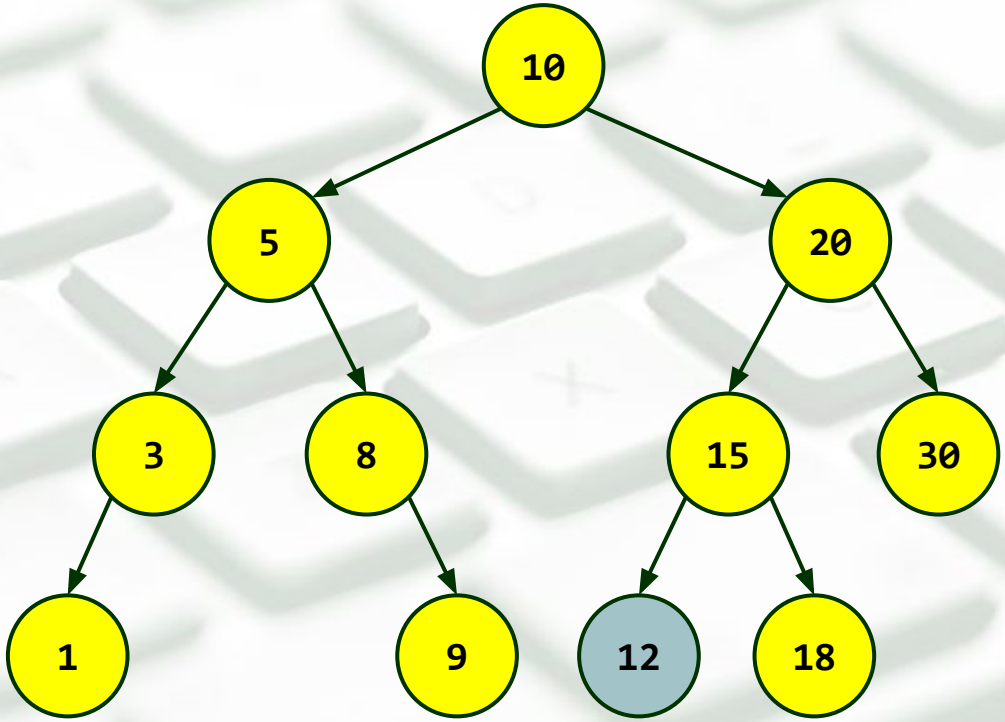
Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído é uma FOLHA:

Quando o nó a ser removido não possui filhos, a exclusão pode acontecer de forma direta, sem re-arranjo da árvore.

O ponteiro do pai deve ser atualizado para NULO



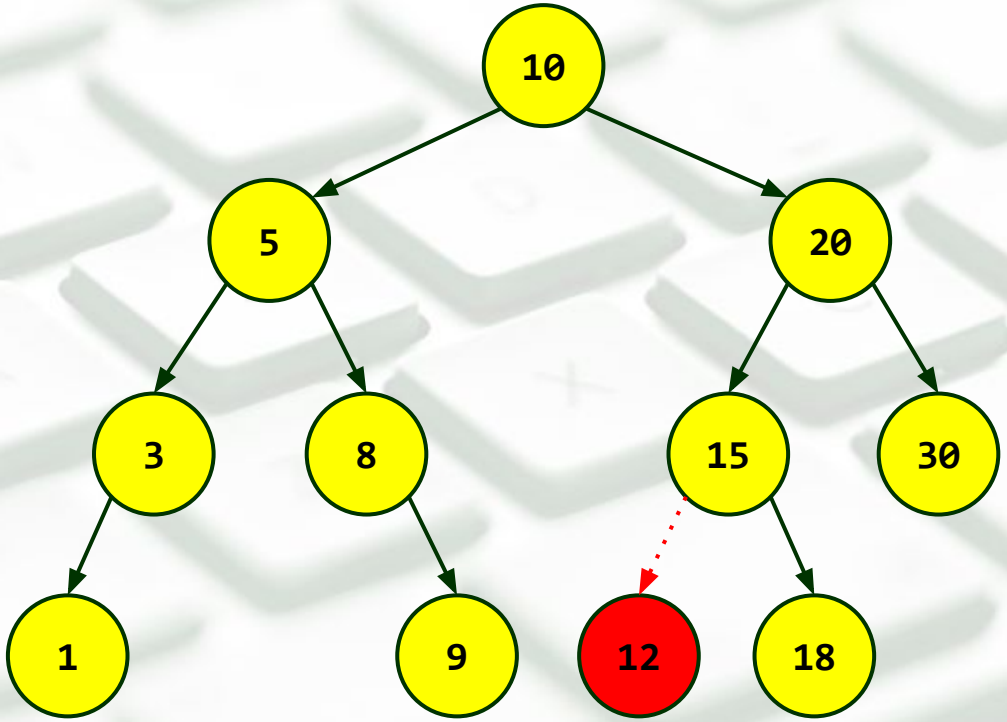
Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído é uma FOLHA:

Quando o nó a ser removido não possui filhos, a exclusão pode acontecer de forma direta, sem re-arranjo da árvore.

O ponteiro do pai deve ser atualizado para NULO



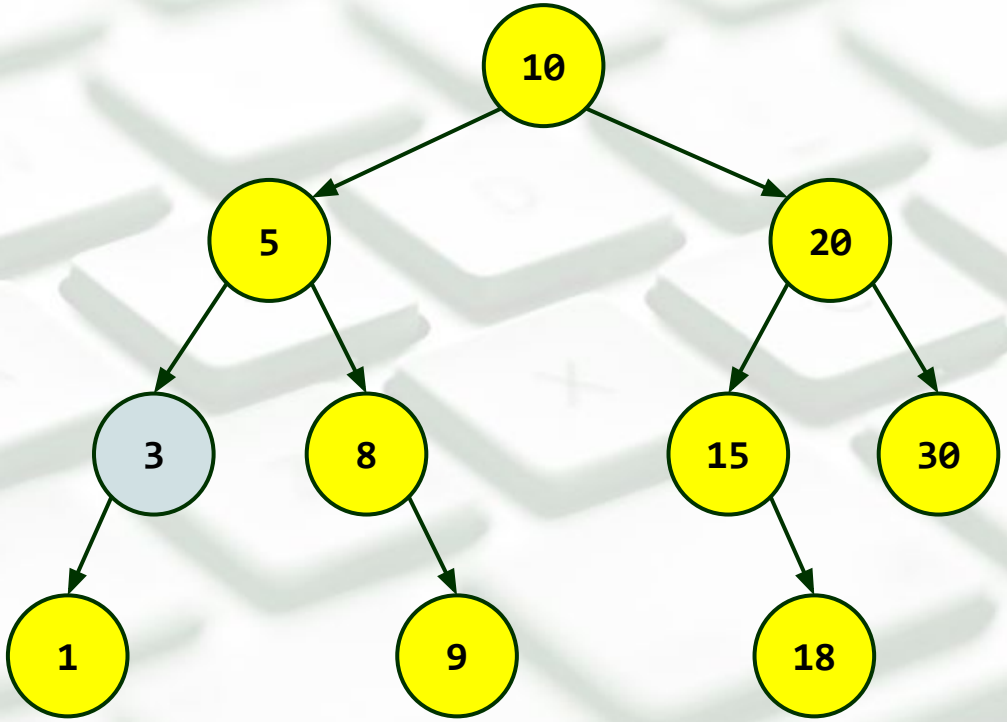
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui UM FILHO:

Quando o nó a ser removido possui UM ÚNICO filho (esquerda ou direita), a exclusão desse nó deve acontecer após este filho substituí-lo no arranjo da árvore.



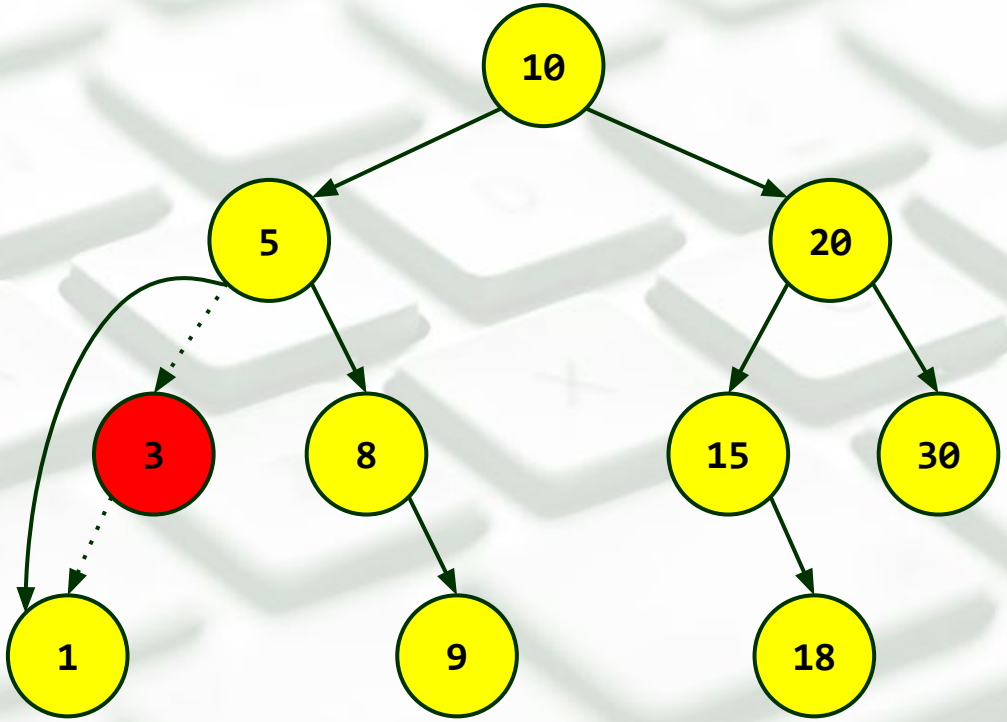
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui UM FILHO:

Quando o nó a ser removido possui UM ÚNICO filho (esquerda ou direita), a exclusão desse nó deve acontecer após este filho substituí-lo no arranjo da árvore.



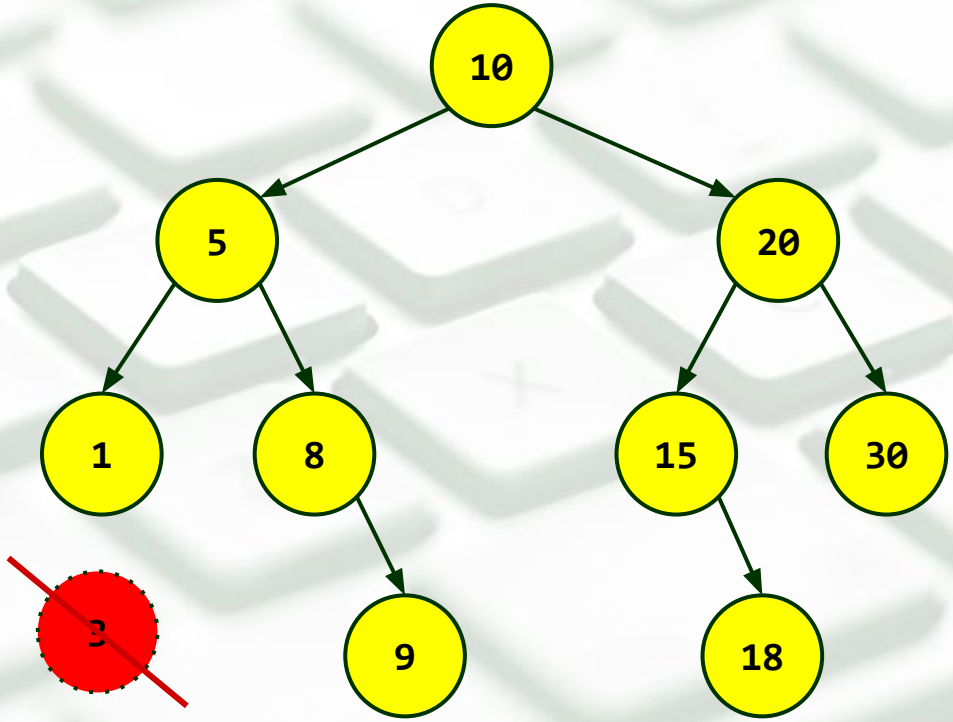
INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui UM FILHO:

Quando o nó a ser removido possui UM ÚNICO filho (esquerda ou direita), a exclusão desse nó deve acontecer após este filho substituí-lo no arranjo da árvore.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

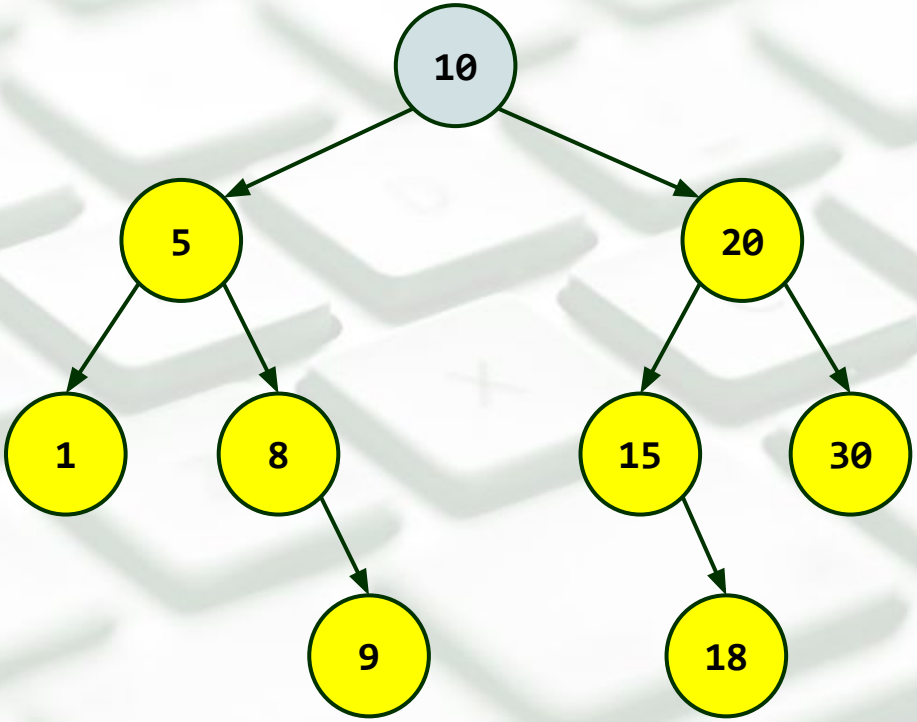
Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui DOIS FILHOS:

Quando o nó a ser removido possui DOIS FILHOS, deve ser substituído por:

a) Maior elemento da subárvore esquerda; ou
b) Menor elemento da subárvore direita.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

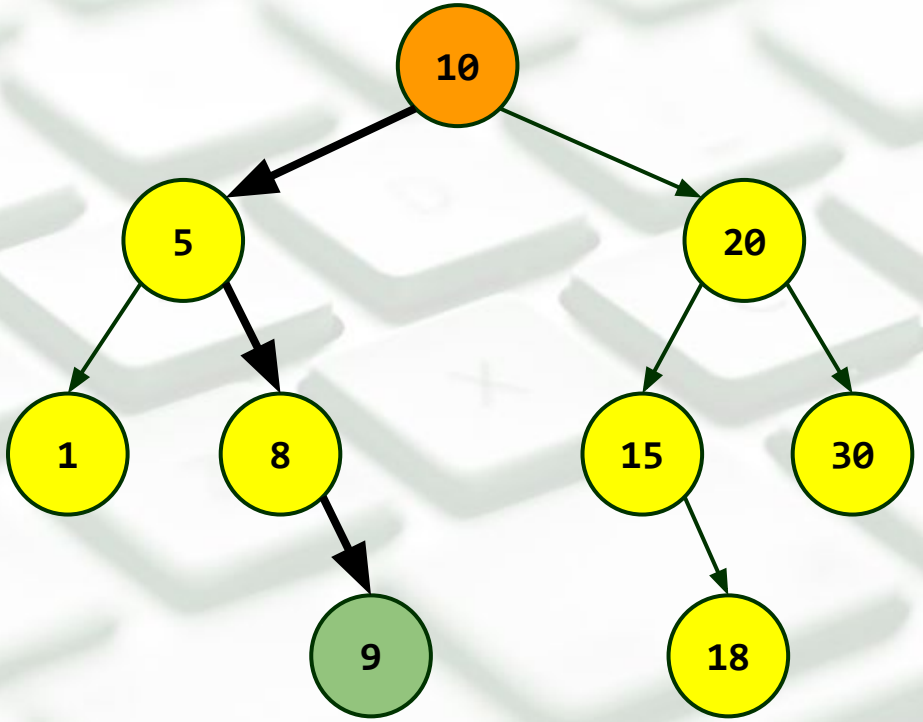
- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui DOIS FILHOS:

Quando o nó a ser removido possui DOIS FILHOS, deve ser substituído por:

a) **Maior elemento da subárvore esquerda; ou**

b) Menor elemento da subárvore direita.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

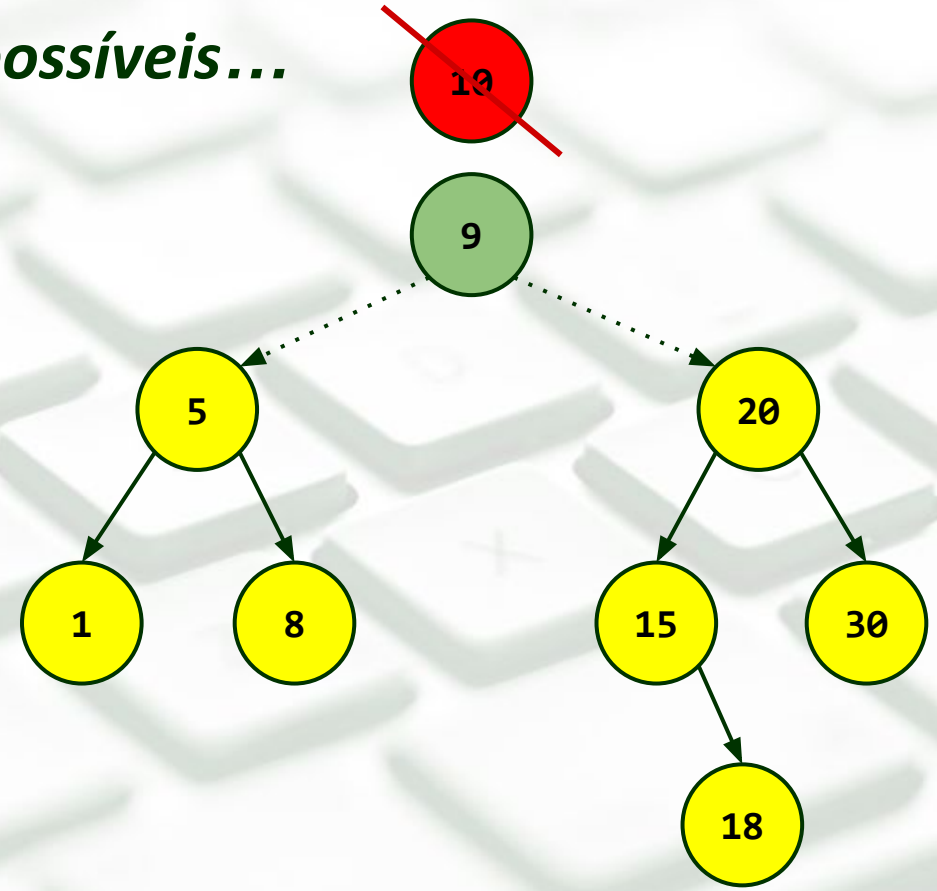
- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui DOIS FILHOS:

Quando o nó a ser removido possui DOIS FILHOS, deve ser substituído por:

a) **Maior elemento da subárvore esquerda; ou**

b) Menor elemento da subárvore direita.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

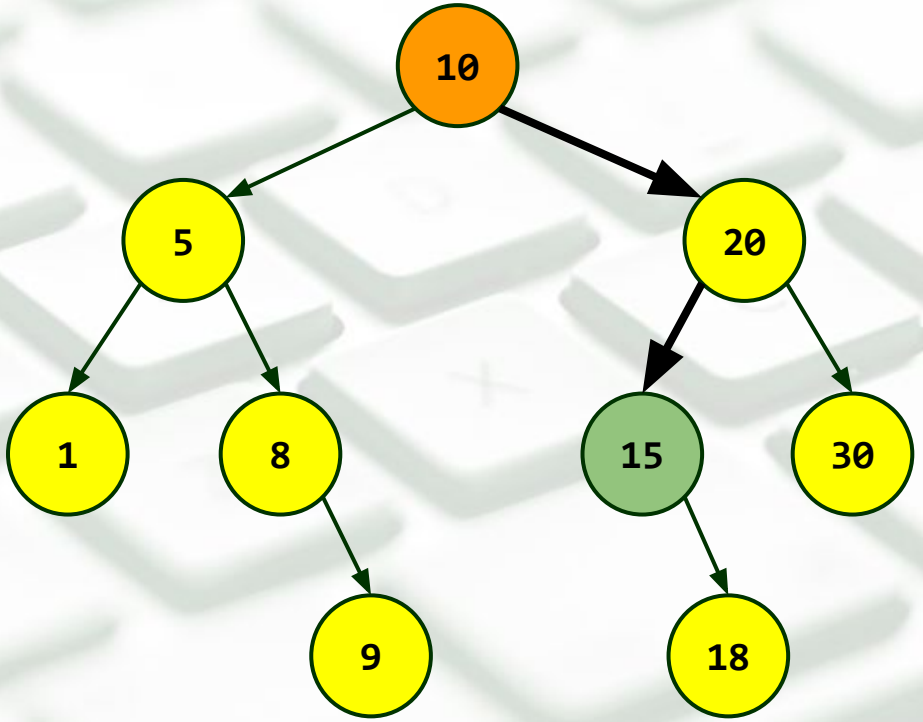
- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui DOIS FILHOS:

Quando o nó a ser removido possui DOIS FILHOS, deve ser substituído por:

a) Maior elemento da subárvore esquerda; ou

b) Menor elemento da subárvore direita.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Árvores Binárias

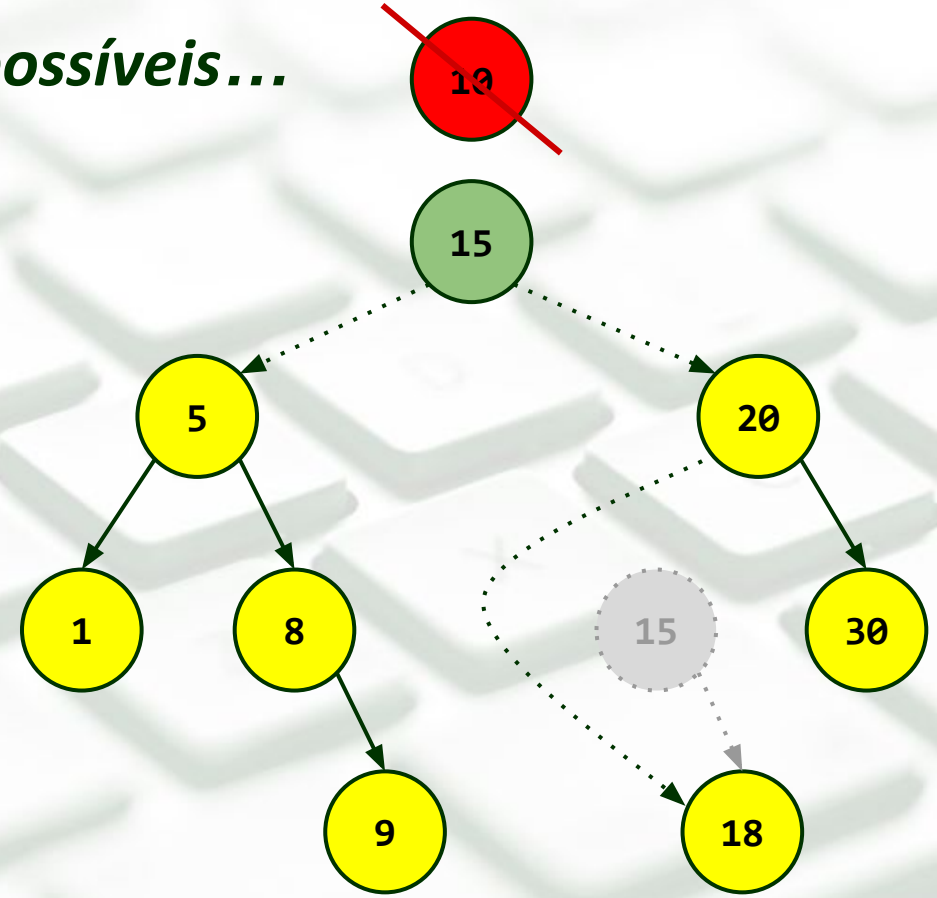
- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui DOIS FILHOS:

Quando o nó a ser removido possui DOIS FILHOS, deve ser substituído por:

a) Maior elemento da subárvore esquerda; ou

b) Menor elemento da subárvore direita.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

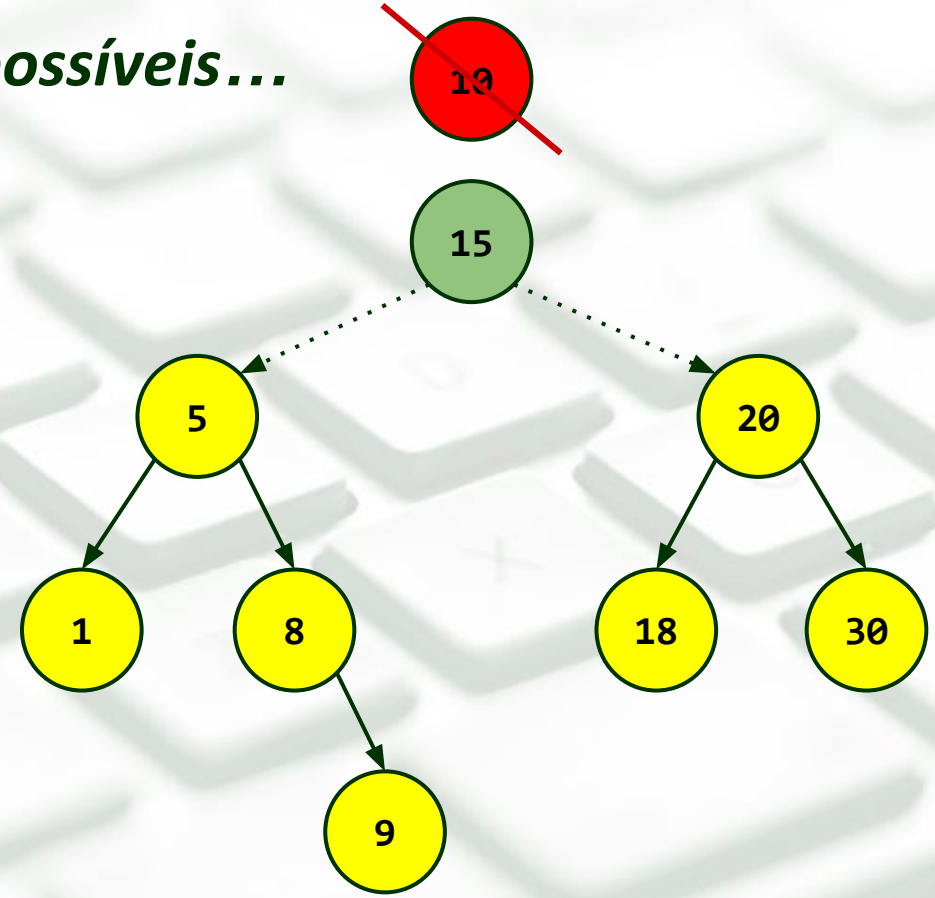
Árvores Binárias

- Exclusão de Nós em ABB
  - ***Existem 03 situações possíveis…***

Quando o Nó a ser excluído possui DOIS FILHOS:

Quando o nó a ser removido possui DOIS FILHOS, deve ser substituído por:

a) Maior elemento da subárvore esquerda; ou
b) Menor elemento da subárvore direita.



INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Bora Codar!

- Criar uma **biblioteca com funções genéricas** para uma *Binary Search Tree* (BST).

```
BSTree abb = new(BSTree)
<Criar uma Árvore Vazia>
```

```
abb->insert(Object, key)
<Adicionar Objeto de Chave key na ABB>
```

```
abb->search(key)
<Retornar Object* de chave key>
```

```
abb->remove(key)
<Remover objeto de chave key>
```

```
abb->clear()
<Limpar/Excluir todos Obj da Árvore>
```

```
abb->preorder()
<Impressão dos Objetos sob
percurso pre-order>
```

```
abb->inorder()
<Impressão dos Objetos sob
percurso in-order>
```

```
abb->postorder()
<Impressão dos Objetos sob
percurso post-order>
```

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Referências

- Feofiloff, Paulo. **Projeto de Algoritmos**
- Apostila UFPR
- Algol.dev - Árvores
- Recurso Educacional Aberto para o Ensino de Algoritmos e Estruturas de Dados
- FreeCodeCamp
- https://medium.com/@yatshunlee