Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

Test di Autovalutazione

(12 Gennaio, 2011)

Ogni problema vale 4 punti.

1. Sia $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\} \subseteq [5]\times[5]$. Decidere se $\mathcal{R}$ e' una relazione di equivalenza.

2. $S = \{12345, 32541, 52143\}$ e' un sottogruppo di S_5. Calcolare il suo indice.

3. Siano $u = 13245$ e $v = 12435$. Calcolare il periodo di $u \circ v$ in S_5.

4. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{100}$ tali che
$$[3]_{100}\,[x]_{100} = [1]_{100}.$$

5. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(1 - x + x^4)a(x) + (1 + x + x^2)b(x) = 7.$$

6. Calcolare $|\{i \in [100] : (i, 100) = 1\}|$.

7. In quanti modi si possono dividere 5 persone in 3 gruppi?

8. Quante permutazioni di S_5 hanno esattamente 3 cicli?

Problema Bonus: (1 punto)

Per passare questo corso e' utile:

A. Mettere un barattolo di Nutella sulla cattedra prima di ogni lezione del Prof. Brenti.

B. Offrire al Prof. Brenti un cornetto alla marmellata nell'intervallo fra le lezioni.

C. Far notare al Prof. Brenti che ha fatto un errore nell'ultima lezione.

Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)

I Appello
(15 Febbraio, 2011)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Decidere se $\mathbf{Z}$ rispetto all'operazione
$$a \circ b \stackrel{\text{def}}{=} a + b + 1$$
e' un gruppo.

2. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{120}$ tali che
$$[81]_{120}\,[x]_{120} = [75]_{120}.$$

4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(4 - 3x^2 + x^3)a(x) + (2 + 3x + x^2)b(x) = 16x + 16.$$

5. Calcolare $|\{(a_1, \ldots, a_4) \in \mathbf{P}^4 : a_1 + \cdots + a_4 = 19\}|$.

6. Sia $G = ([10], E)$ il grafo tale che $\{x, y\} \in E$ se e solo se $x \neq y$ e $(x, y) = 1$ (dove (x, y) indica il massimo comun divisore di x e y). Decidere se G e' Euleriano.

7. Trovare la permutazione di S_9 la cui tabella delle inversioni e' $(5, 3, 6, 3, 4, 0, 1, 1, 0)$.

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$$
per $n \geq 3$, con le condizioni iniziali $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)

II Appello
(23 Febbraio, 2011)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Sia $S \stackrel{\text{def}}{=} \{12345, 35412\}$. Decidere se S e' un sottogruppo di S_5.

2. Sia R la relazione su $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ definita ponendo aRb se e solo se $(a,b) > 1$ (dove (a,b) indica il massimo comun divisore di a e b). Decidere se R e' una relazione di equivalenza.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{130}$ tali che
$$[62]_{130}\,[x]_{130} = [18]_{130}.$$

4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(-1 - x + x^2 + x^3)a(x) + (x^4 - 1)b(x) = x + 2.$$

5. Una scatola contiene tre calze blu, tre calze rosse, e quattro calze marroni. Le dieci calze vengono tirate fuori una ad una. In quanti modi puo' avvenire questo? (Calze dello stesso colore sono indistinguibili.)

6. Dimostrare che
$$|\{S \subseteq [n] : |S| = k\}| = \binom{n}{k}$$
per ogni $n \geq k \geq 0$.

7. Quanti numeri $i \in [3000]$ ci sono che non sono divisibili ne' per 2, ne' per 3?

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = -f(n+2) + f(n+1) + f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

III Appello

(28 Giugno, 2011)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. $S \stackrel{\text{def}}{=} \{12345, 35412, 42135, 15342, 32415, 45132\}$ è un sottogruppo di S_5. Calcolare il suo indice.

2. Sia R la relazione su $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ definita ponendo aRb se e solo se $a-b$ è dispari oppure è uguale a 0. Decidere se R è una relazione di equivalenza.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{150}$ tali che
$$[96]_{150}\,[x]_{150} = [82]_{150}.$$

4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(-2-3x+x^3)\,a(x) + (x^2-3x+2)\,b(x) = 4x^2-16.$$

5. Quante funzioni $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ ci sono che sono iniettive?

6. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

7. Quante parole diverse possono essere formate anagrammando (cioe', permutando) le lettere della parola ANASTASIA?

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = -3f(n+2) + 4f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=9$.

Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)

IV Appello
(1 Settembre, 2011)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Decidere se $\mathbf{Z}$ rispetto all'operazione
$$a \circ b \stackrel{\text{def}}{=} a + b + ab$$
è un gruppo.

2. Sia $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ la funzione definita ponendo
$$f(n) = \begin{cases} n^2, & \text{se } n < 0, \\ -n, & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$$
Decidere se f è suriettiva.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{106}$ tali che
$$[30]_{106}\,[x]_{106} = [63]_{106}.$$

4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(x^3 + 4x^2 + 7x + 1)\,a(x) + (x^2 + 4x + 6)\,b(x) = 3x.$$

5. Sia $G = (\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, E)$ il grafo tale che $\{x, y\} \in E$ se e solo se xy è pari. Decidere se G è Euleriano.

6. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n,$$
dove $(x)_k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ per $k = 1, \ldots, n$.

7. Calcolare
$$|\{f \in S_8 : f(1) \neq 1, f(7) \neq 7\}|.$$

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = 5f(n+2) - 8f(n+1) + 4f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)

I Appello
(31 Gennaio, 2012)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Sia R la relazione di equivalenza su $\{1,2,3,4,5,6\}$ definita ponendo $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(1,5),(4,5),(2,6),(5,1),(5,4),(6,2),(4,1)\}$. Calcolare
$$|\{1,2,3,4,5,6\}/R|.$$
2. Siano $a, b, p \in \mathbf{P}$, con p primo, tali che $p\,|\,ab$. Dimostrare che, allora, o $p\,|\,a$ o $p\,|\,b$.
3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{150}$ tali che
$$[54]_{150}\,[x]_{150} = [122]_{150}.$$
4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1)a(x) + (x^3 + x^2)b(x) = x^2 - 1.$$
5. Quante parole diverse si possono formare anagrammando le lettere della parola ABRACADABRA ?
6. In quanti modi si possono mettere 5 palline, numerate da 1 a 5, in 3 scatole, numerate da 1 a 3, se ogni scatola deve contenere almeno una pallina?
7. Trovare la permutazione di S_9 la cui tabella delle inversioni e' $(7,5,6,0,3,3,1,0,0)$.
8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$$
per $n \geq 2$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0, f(1) = -1$.

Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)
II Appello
(22 Febbraio, 2012)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Siano A, B, C tre insiemi. E' sempre vero che
$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)\,?$$
(Motivare la risposta)

2. Calcolare $|\{i \in [500] : (i, 500) = 1\}|$.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{141}$ tali che
$$[18]_{141}\,[x]_{141} = [87]_{141}.$$

4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(x^4 + x^3 - 5x^2 - 4x + 4)a(x) + (x^3 - x^2 - 3x + 2)b(x) = x^3 + x^2.$$

5. Quanti sottoinsiemi di $[100]$ ci sono che contengono almeno un numero ≤ 50 e almeno un numero pari?

6. Dimostrare che
$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$
per ogni $n, k \in \mathbf{P}$ (dove $S(i, j)$ denota un numero di Stirling di II specie).

7. Calcolare la tabella delle inversioni della permutazione 476291583.

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n) = f(n-1) - f(n-2) + f(n-3)$$
per $n \geq 3$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

III Appello

(11 Giugno, 2012)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Sia R la relazione di equivalenza su $\{1,2,3,4,5,6\}$ definita ponendo $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,6),(1,5),(2,3),(5,6),(6,1),(5,1),(3,2),(6,5)\}$. Calcolare la classe di equivalenza di 6.

2. Dimostrare che, se $a, b \in \mathbf{P}$ sono tali che $(a,b) = 1$, allora
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$
dove φ indica la funzione di Eulero.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{184}$ tali che
$$[68]_{184}\,[x]_{184} = [90]_{184}.$$

4. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(-2x^2 + x + 4)\,a(x) + (x^3 - 1)\,b(x) = x - 1.$$

5. Calcolare
$$|\{(x_1, \ldots, x_6) \in [9]^6 : x_i = x_j \text{ per qualche } 1 \le i < j \le 6\}|.$$

6. Si devono formare tre commissioni in un gruppo di 14 persone. Una commissione deve essere costituita da 3 persone, una da 5, e una da 2. In quanti modi puo' avvenire questo? (Nessuna persona puo' essere membra di piu' di una commissione).

7. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = 2f(n+2) + 3f(n+1) - 6f(n)$$
per $n \ge 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

8. Sia $G = (\{2,3,4,5,6,7\}, E)$ il grafo tale che $\{x,y\} \in E$ se e solo se $x + y$ e' pari oppure $x + y = 7$. Decidere se G e' Euleriano.

Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)

IV Appello
(3 Settembre, 2012)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Elementi di Matematica Discreta, od un corso analogo, devono risolvere solo gli ultimi 4 problemi.

1. Siano A, B, C insiemi tali che $A \cap B \neq \emptyset$. È sempre vero che
$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cup A)?$$

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{62}$ tali che
$$[x]_{62}[8]_{62} = [4]_{62}.$$

3. Trovare (se esistono) due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbf{Q}[x]$ tali che
$$(x^3 - 1)\, a(x) + (x^5 - 1)\, b(x) = x + 1.$$

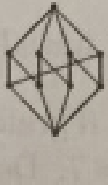
4. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi.

5. In una normale tastiera sono presenti 94 caratteri (47 "maiuscoli" e 47 "minuscoli"). Di questi, 32 sono non alfanumerici (21 "maiuscoli" e 11 "minuscoli"). Si ritiene generalmente che una buona password debba contenere almeno un carattere "maiuscolo" ed almeno un carattere non alfanumerico. Quante password "buone" ci sono di lunghezza 3?

6. Quante "posizioni iniziali" ci sono nel gioco del poker, con 4 giocatori ed un mazzo di 52 carte? (Per "posizione iniziale" si intende l'assegnazione di 5 carte ad ognuno dei quattro giocatori).

7. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = 3f(n+1) + 2f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 0$.

8. Sia G il grafo rappresentato graficamente dalla seguente figura



Decidere se G è Euleriano.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

I Appello

(3 Febbraio, 2014)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Algebra e Logica, od un corso analogo, devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7.

1. Siano A, B, C insiemi. È sempre vero che, allora
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)?$$

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{120}$ tali che
$$[x]_{120}[22]_{120} = [36]_{120}.$$

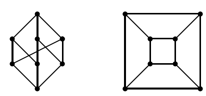
3. State comunicando con il codice RSA. Le chiavi pubbliche sono $n = 60$ ed $e = 7$. Codificare il messaggio $[11]_{60}$.

4. Dimostrare che
$$|\{S \subseteq [n] : |S| = k\}| = \binom{n}{k}$$
per ogni $n \geq k \geq 0$.

5. Trovare l'unica permutazione di S_9 la cui tabella delle inversioni è
$$(5, 3, 6, 0, 2, 3, 1, 0, 0).$$

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa per
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i^2+1}{i}.$$

7. Siano G_1 e G_2 i grafi rappresentati graficamente nella seguente figura



Decidere se G_1 e G_2 sono isomorfi. In caso affermativo esibire un isomorfismo, altrimenti esibire una proprieta' invariante per isomorfismo che uno dei due grafi possiede e l'altro no.

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+2) = 3f(n+1) + f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

II Appello

(27 Febbraio, 2014)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Algebra e Logica, od un corso analogo, devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7.

1. Siano p, q proposizioni. Semplificare la proposizione composta
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$$
(cioe' trovare una proposizione logicamente equivalente che usi un numero strettamente minore di $\vee$, $\wedge$, $\neg$). Motivare la risposta.

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{138}$ tali che
$$[x]_{138}[33]_{138} = [98]_{138}.$$

3. È vero che
$$(n+1)! = o\,(n!) \ ?$$
(Motivare la risposta).

4. Siano $a, b, p \in \mathbf{P}$, p primo, tali che $p \,|\, ab$. Dimostrare che, allora o $p \,|\, a$ o $p \,|\, b$.

5. Quanti numeri $i \in [3500]$ ci sono che sono divisibili o per 5, o per 7 ?

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa per
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \right).$$

7. Sia $G = (V, E)$ il grafo tale che $V \stackrel{\text{def}}{=} S_8$ e $\{\sigma, \tau\} \in E$ se e solo se $\sigma(1) = \tau(1)$. Decidere se G è Euleriano. (Motivare la risposta).

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = 3f(n+1) - 2f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

II Appello

(27 Febbraio, 2014)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che hanno superato il corso di Algebra e Logica, od un corso analogo, devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7.

1. Siano p, q proposizioni. Semplificare la proposizione composta
$$(\neg p) \wedge (\neg q)$$
(cioe' trovare una proposizione logicamente equivalente che usi un numero strettamente minore di $\vee$, $\wedge$, $\neg$). Motivare la risposta.

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{120}$ tali che
$$[x]_{120}[14]_{120} = [98]_{120}.$$

3. È vero che
$$n! = O\left((n+1)!\right) \ ?$$
(Motivare la risposta).

4. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi.

5. Quanti permutazioni $\sigma \in S_{10}$ ci sono tali che $\sigma(3) = 3$ oppure $\sigma(5) = 5$?

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa (o una formula chiusa) per
$$\sum_{i=1}^{n} e^i.$$

7. Sia $G = (V, E)$ il grafo tale che $V \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq [10] : |S| = 3\}$ e $\{S, T\} \in E$ se e solo se $S \cap T = \emptyset$. Decidere se G è Euleriano. (Motivare la risposta).

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+2) = -4f(n+1) - 5f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

III Appello

(23 Luglio, 2014)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che sostengono l'esame per 3 crediti devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7. Motivare tutte le risposte.

1. Sia R la relazione su $\mathbf{Q}$ definita ponendo aRb se e solo se $a - b \in \mathbf{Z}$ (dove $\mathbf{Q}$ sono i numeri razionali e $\mathbf{Z}$ sono i numeri interi). Decidere se R è una relazione di equivalenza.

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{130}$ tali che
$$[x]_{130}[18]_{130} = [60]_{130}.$$

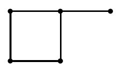
3. State comunicando con il codice RSA. Le chiavi pubbliche sono $n = 60$ ed $e = 7$, la vostra chiave privata è $d = 6$. Decodificare il messaggio $[13]_{60}$.

4. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n.$$

5. Quanti sottoinsiemi $S \subseteq \{1, 2, \dots, 10\}$ ci sono tali che $3 \in S$ oppure $7 \in S$?

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa (o una formula chiusa) per
$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 2).$$

7. Sia G il grafo rappresentato graficamente nella seguente figura



   Calcolare il polinomio cromatico di G.

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+2) = 2f(n+1) - 3f(n)$$
   per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

III Appello

(23 Luglio, 2014)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che sostengono l'esame per 3 crediti devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7. Motivare tutte le risposte.

1. Sia R la relazione su $\mathbf{C}$ definita ponendo $(a+ib)R(c+id)$ se e solo se $a = c$ (dove $\mathbf{C}$ sono i numeri complessi e $i = \sqrt{-1}$). Decidere se R è una relazione di equivalenza.

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{666}$ tali che
$$[x]_{666}[18]_{666} = [60]_{666}.$$

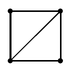
3. State comunicando con il codice RSA. Le chiavi pubbliche sono $n = 60$ ed $e = 7$, la vostra chiave privata è $d = 6$. Decodificare il messaggio $[34]_{60}$.

4. Dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica.

5. Quanti sottoinsiemi $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\}$ ci sono tali che $7 \notin S$ oppure $2 \notin S$?

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa (o una formula chiusa) per
$$\sum_{k=0}^{n} (k^2 + k).$$

7. Sia G il grafo rappresentato graficamente nella seguente figura



Calcolare il polinomio cromatico di G.

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n+3) = -3f(n+2) + 4f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$.

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

IV Appello

(26 Settembre, 2014)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che sostengono l'esame per 3 crediti devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7. Motivare tutte le risposte. Punti possono essere tolti per un lavoro particolarmente disordinato.

1. Siano p, q proposizioni. Semplificare la proposizione composta
$$(p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q)$$
(cioè trovare una proposizione logicamente equivalente che usi un numero strettamente minore di $\vee$, $\wedge$, $\neg$).

2. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{144}$ tali che
$$[x]_{144}[21]_{144} = [84]_{144}.$$

3. Sia $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ una funzione tale che $f(n) = O(\mathbf{1})$. È vero che allora
$$f(n) = o(log(n))\,?$$

4. Dimostrare il Teorema di Cancellazione-Contrazione per il polinomio cromatico di un grafo.

5. In una normale tastiera sono presenti 94 caratteri (47 "maiuscoli" e 47 "minuscoli"). Di questi, 32 sono non alfanumerici (21 "maiuscoli" e 11 "minuscoli"). Si ritiene generalmente che una buona password debba contenere almeno un carattere "maiuscolo" ed almeno un carattere non alfanumerico. Quante password "cattive" ci sono di lunghezza 8?

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa (o una formula chiusa) per
$$\sum_{k=1}^{n} 2\,k\,log(k).$$

7. Sia $G = ([2000], E)$ il grafo avente gli interi tra 1 e 2000 come vertici e dove, per ogni $i, j \in [2000]$, $\{i, j\} \in E$ se e solo se 50 divide $(i + j)$. È possibile colorare G con 41 colori?

8. Risolvere la ricorsione lineare
$$f(n + 3) = 3f(n + 2) - 3f(n + 1) + f(n)$$
per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$.