ESERCIZI SULL'INDUZIONE

1) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ 6 divide $n^3 + 5n$

$P(n)$: $6 \mid n^3 + 5n$

BASE INDUTTIVA $P(1)$ è vera

Devo dimostrare che $P(1)$ è vera

Mi scrivo $P(1)$: $6 \mid 1^3 + 5 \cdot 1$

$1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6$

Ottengo $P(1)$: $6 \mid 6$ vera

PASSO INDUTTIVO Se $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ è vera

Mi scrivo $P(n)$: $6 \mid n^3 + 5n$

$P(n+1)$: $6 \mid (n+1)^3 + 5(n+1)$

Dimostro che $P(n+1)$ è vera supponendo che $P(n)$ è vera

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 1 + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6\end{aligned}$$

utilizzo il seguente risultato:

(*) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \mid b$, $a \mid c$, $a \mid d \Rightarrow a \mid b + c + d$

- $6 \mid n^3 + 5n$ perché $P(n)$ è vera
- $6 \mid 3n(n+1)$ perché $6 = 2 \cdot 3$ e $2 \mid n(n+1)$ (uno dei due è pari)
- $6 \mid 6$

Quindi per (*) $6 \mid (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6 = (n+1)^3 + 5(n+1)$

Ho quindi dimostrato che $P(n+1)$ è vera

(2) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

BASE INDUTTIVA $P(1)$ è vera

$$P(1): \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad , \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Ottengo $P(1): 1 = 1$ vera

PASSO INDUTTIVO Se $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ è vera

Mi scrivo $P(n): \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dimostro che $P(n+1)$ è vera supponendo che $P(n)$ è vera

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \underset{\text{IPOTESI INDUTTIVA}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ho quindi dimostrato che $P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ è vera

③ Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

BASE INDUTTIVA $P(1)$ è vera

$$P(1): \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1, \quad \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = (1)^2 = 1$$

Ottengo $P(1)$: $1 = 1$ vera

PASSO INDUTTIVO Se $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ è vera

Mi scrivo $P(n): \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

$$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Dimostro che $P(n+1)$ è vera supponendo che $P(n)$ è vera

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underset{\substack{\text{IPOTESI} \\ \text{INDUTTIVA}}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \underset{\substack{\text{ESERCIZIO 2} \\ (\text{con } P(n))}}{=}$$

$$= \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \overset{\pm}{=} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

ESERCIZIO 2
(con $P(n+1)$)

Ho quindi dimostrato che $P(n+1)$ è vera

(4) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0$

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0$$

BASE INDUTTIVA $P(1)$ è vera

$$P(1): \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = (-1)^{1-1} \frac{1}{1} = 1 \geq 0$$

quindi $P(1)$ è vera

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO FORTE}}$ se $P(1), \ldots, P(n)$ sono tutte vere, allora $P(n+1)$ è vera

$$P(n-1): \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0$$

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0$$

$$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0$$

distinguo 2 casi

n pari) $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^{n+1-1} \frac{1}{n+1} =$$

$$\underset{\substack{\text{IPOTESI} \\ \text{INDUTTIVA} \\ \text{su } P(n)}}{\geq} 0 + (-1)^{n} \frac{1}{n+1} \underset{n \text{ pari}}{=} \frac{1}{n+1} \geq 0$$

ho quindi che $P(n+1)$ è vera

n dispari) $n \geq 3$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^{n} \frac{1}{n+1}$$

$$\underset{\substack{\text{IPOTESI} \\ \text{INDUTTIVA} \\ \text{su } P(n-1)}}{\geq} 0 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^{n} \frac{1}{n+1} \underset{n \text{ dispari}}{=}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

ho quindi che $P(n+1)$ è vera

FALSO TEOREMA Sia $a \in \mathbb{R}-\{0\}$. Allora per ogni $n \geq 0$

$$a^n = 1$$

FALSA DIMOSTRAZIONE:

dimostro per induzione su n

$$P(n) : a^n = 1$$

BASE INDUTTIVA $P(0)$ è vera

$P(0) : a^0 = 1$ è vera

PASSO INDUTTIVO FORTE se $P(0), \ , P(n)$ sono vere, allora $P(n+1)$ è vera

$$P(n-1) : a^{n-1} = 1, \quad P(n) : a^n = 1, \quad P(n+1) : a^{n+1} = 1$$

assumo $P(n-1)$ e $P(n)$ vere e dimostro $P(n+1)$

$$a^{n+1} = a^{2n-n+1} = a^{2n-(n-1)} = \frac{a^n a^n}{a^{n-1}} \underset{\text{IPOTESI INDUTTIVA}}{=} \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

Ho quindi che $P(n+1)$ è vera ■

⚠ $P(1)$ dice che $a^1 = 1$

Se $a \neq 1$ $P(1)$ è falsa

Nel passo induttivo forte non posso provare che $P(2)$ è vera assumendo che lo sono $P(0)$ e $P(1)$ perché $P(1)$ non lo è

MCD E IDENTITÀ DI BEZOUT

(1) Trovare il MCD di 486 e 360

Scrivere esplicitamente un' identità di Bezout

utilizzo l' algoritmo euclideo

$$486 = 1 \cdot 360 + 126$$
$$360 = 2 \cdot 126 + 108$$
$$126 = 1 \cdot 108 + 18$$
$$108 = 6 \cdot 18 + 0$$

(3) $126 = 486 - 360$

(2) $108 = 360 - 2 \cdot 126$

(1) $18 = 126 - 108$

$$(486, 360) = 18$$

Dalla teoria sappiamo che

$$18 = 486 \cdot k + 360 \cdot \ell \quad ; \; k, \ell \in \mathbb{Z}$$

Per trovare esplicitamente k e ℓ utilizzo

$$18 \underset{(1)}{=} 126 - 108 \underset{(2)}{=} 126 - (360 - 2 \cdot 126) =$$

$$= 126 - 360 + 2 \cdot 126 = 3 \cdot 126 - 360 \underset{(3)}{=}$$

$$= 3(486 - 360) - 360 = 3 \cdot 486 - 3 \cdot 360 - 360 =$$

$$= 3 \cdot 486 - 4 \cdot 360 = 3 \cdot 486 + (-4)\,360$$

quindi $k = 3$, $\ell = -4$

(2) Stessa cosa dell'esercizio precedente con 231 e 225

$$231 = 1 \cdot 225 + 6$$
$$225 = 37 \cdot 6 + 3$$
$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

(2) $6 = 231 - 225$

(1) $3 = 225 - 37 \cdot 6$

$(231, 225) = 3$

Dalla teoria sappiamo che

$$3 = 231 \cdot K + 225\, l \quad , \quad K, l \in \mathbb{Z}$$

Per trovare K e l esplicitamente utilizzo

$$3 \underset{(1)}{=} 225 - 37 \cdot 6 \underset{(2)}{=} 225 - 37(231 - 225)$$

$$= 225 - 37 \cdot 321 + 37 \cdot 225$$

$$= 38 \cdot 225 - 37 \cdot 321$$

$$= 321(-37) + 225(38)$$

$$K = -37, \quad l = 38$$