RICORSIONI LINEARI OMOGENEE DI GRADO 2

$a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) \quad \forall n \geq 2 & \text{PROBLEMA SEMPLICE} \\ f(0) = b_1 \, , \, f(1) = b_2 & \text{CONDIZIONI INIZIALI} \end{cases}$$

L' INSIEME DELLE SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE È

$$\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) \quad \forall n \geq 2 \}$$

DI TUTTE QUESTE INFINITE SOLUZIONI SCELGO L'UNICA

TALE CHE $f(0) = b_1 , f(1) = b_2$

I) TROVO LE DUE SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$$x^2 - a_1 x - a_2 = (x - x_1)(x - x_2)$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ RADICI $\quad \Delta = a_1^2 + 4 a_2$

$$x_1 = \frac{a_1 + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad x_2 = \frac{a_1 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

tre casi:

$\Delta > 0)$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \, , \, x_1 \neq x_2$

$$f_1(n) = x_1^n \qquad f_2(n) = x_2^n$$

SOLUZIONI BASE

$\Delta = 0)$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 = x_2$

$$f_1(n) = x_1^n \qquad f_2(n) = x_1^n \, n$$

SOLUZIONI BASE

$\Delta < 0)$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad x_1 = c + id \quad x_2 = c - id \quad c, d \in \mathbb{R}$

$$f_1(n) = (c + id)^n \qquad f_2(n) = (c - id)^n$$

II TROVO LE INFINITE SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(n) = A_1 f_1(n) + A_2 f_2(n) \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

III TROVO L'UNICA SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0) = A_1 f_1(0) + A_2 f_2(0)$$
$$f(1) = A_1 f_1(1) + A_2 f_2(1)$$

$$\begin{cases} A_1 f_1(0) + A_2 f_2(0) = b_1 \\ A_1 f_1(1) + A_2 f_2(1) = b_2 \end{cases} \rightsquigarrow$$

TROVO UN VALORE DI A_1 E UN VALORE DI A_2

(1) $\begin{cases} f(n) = 9f(n-2) & \forall n \geq 2 \\ f(0) = 6 \quad f(1) = 12 \end{cases}$

(I) SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(n) = 0\,f(n-1) + 9\,f(n-2)$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 9$$

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\Delta > 0 \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$f_1(n) = 3^n \qquad f_2(n) = (-3)^n$ SOLUZIONI BASE

(II) SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(n) = A_1 3^n + A_2 (-3)^n \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

(III) SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0) = 6 \quad f(1) = 12$$

$$b_1 = 6 \quad b_2 = 12$$

$$f(0) = A_1 3^0 + A_2(-3)^0 = A_1 + A_2$$

$$f(1) = A_1 3^1 + A_2(-3)^1 = 3A_1 - 3A_2$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 6 \\ 3A_1 - 3A_2 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 6 - A_2 \\ 3(6-A_2) - 3A_2 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 5 \\ A_2 = 1 \end{cases}$$

$$f(n) = 5\,3^n + (-3)^n$$

SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

(2)
$$\begin{cases} f(n) = 4f(n-1) - 4f(n-2) \\ f(0) = 1 \quad f(1) = 8 \end{cases}$$

(I) SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$a_1 = 4 \quad a_2 = -4$

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = 2$

$f_1(n) = 2^n \quad f_2(n) = 2^n n$ SOLUZIONI BASE

(II) SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$f(n) = A_1 2^n + A_2 2^n n \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

(III) SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

$b_1 = 1 \quad b_2 = 8$

$f(0) = A_1 2^0 + A_2 2^0 0 = A_1$

$f(1) = A_1 2 + A_2 2 \cdot 1 = 2A_1 + 2A_2$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ 2A_1 + 2A_2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 1 \\ 2 + 2A_2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 3 \end{cases}$$

$f(n) = 2^n + 3\,2^n\,n$

SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

(3) $\begin{cases} f(n) = -f(n-2) \\ f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \end{cases}$

(I) SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$f(n) = 0\,f(n-1) + f(n-2)$

$a_1 = 0 \quad a_2 = -1$

$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

$\Delta < 0 \qquad x_1 = i \qquad x_2 = -i$

$f_1(n) = i^n \qquad f_2(n) = (-i)^n$ SOLUZIONI BASE

(II) SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$f(n) = A_1\, i^n + A_2 (-i)^n \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

(III) SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

$b_1 = 0 \qquad b_2 = 1$

$f(0) = A_1\, i^0 + A_2 (-i)^0 = A_1 + A_2$

$f(1) = A_1 i + A_2(-i) = i(A_1 - A_2)$

$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ i(A_1 - A_2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -A_1 \\ 2i A_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -A_1 \\ A_1 = \frac{1}{2i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{2} \end{cases}$

$$\leadsto \begin{cases} A_1 = -i/2 \\ A_2 = i/2 \end{cases}$$

$$f(n) = -\frac{i}{2} i^n + i/_2 (-i)^n =$$

$$= -\frac{1}{2} i^{n+1} - \frac{1}{2} (-i)^{n+1}$$

SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

RICORSIONI LINEARI OMOGENEE DI GRADO d

$a_1, \quad, a_d \in \mathbb{R} \quad b_1, \quad, b_d \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \quad + a_d f(n-d) & \forall n \geq d \\ f(0) = b_1, f(1) = b_2, \dots, f(d-1) = b_d \end{cases}$$

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE È

$$\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_d f(n-d) \quad \forall n \geq d \}$$

DI TUTTE QUESTE INFINITE SOLUZIONI SCELGO L'UNICA TALE CHE $f(0) = b_1, \dots, f(d-1) = b_d$

(I) TROVO LE d SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$$x^d - a_1 x^{d-1} - a_2 x^{d-2} \quad - a_{d-1} x - a_d = (x - x_1)(x - x_2) \quad (x - x_d)$$

$x_1, \quad, x_d \in \mathbb{C}$ RADICI

⚠ I VALORI POTREBBERO RIPETERSI !

x_1 MOLTEPLICITÀ 1 $\quad f_1(n) = x_1^n$

x_1 MOLTEPLICITÀ 2 $\quad f_1(n) = x_1^n \quad f_2(n) = x_1^n n$

x_1 MOLTEPLICITÀ 3 $\quad f_1(n) = x_1^n, \; f_2(n) = x_1^n n, \; f_3(n) = x_1^n n^2$

x_1 MOLTEPLICITÀ r

$$f_1(n) = x_1^n, \quad f_2(n) = x_1^n n, \quad \dots \quad, f_r(n) = x_1^n n^{r-1}$$

ALLA FINE TROVO d SOLUZIONI BASE $f_1(n), \; , f_d(n)$

(II) TROVO LE INFINITE SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(n) = A_1 f_1(n) + A_2 f_2(n) + \dots + A_d f_d(n)$$

$$A_1, \; , A_d \in \mathbb{C}$$

(III) TROVO L'UNICA SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0) = A_1 f_1(0) + \quad + A_d f_d(0)$$

$$\dots$$

$$f(d-1) = A_1 f_1(d-1) + \quad + A_d f_d(d-1)$$

$$\begin{cases} A_1 f_1(0) + \quad + A_d f_d(0) = b_1 \\ \dots \\ A_1 f_1(d-1) + \quad + A_d f_d(d-1) = b_d \end{cases}$$

TROVO UN VALORE PER $A_1, \dots, A_d$

(4) $\begin{cases} f(n) = 3f(n-1) - 4f(n-3) \quad \forall n \geq 3 \\ f(0) = 4 \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 15 \end{cases}$

(I) SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(n) = 3f(n-1) + 0f(n-2) - 4f(n-3)$$

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -4$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$$

$x_1 = -1$ MOLTEPLICITÀ 1 $\quad f_1(n) = (-1)^n$

$x_2 = 2$ MOLTEPLICITÀ 2 $\quad f_2(n) = 2^n \quad f_3(n) = 2^n n$

(II) SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(n) = A_1(-1)^n + A_2 2^n + A_3 2^n n \qquad A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$$

(III) SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONE INIZIALE

$$b_1 = 4 \quad b_2 = 1 \quad b_3 = 15$$

$$f(0) = A_1(-1)^0 + A_2 2^0 + A_3 \cdot 2^0 \, 0 = A_1 + A_2$$

$$f(1) = A_1(-1) + A_2 2^1 + A_3 2^1 \, 1 = -A_1 + 2A_2 + 2A_3$$

$$f(2) = A_1(-1)^2 + A_2 2^2 + A_3 2^2 \, 2 = A_1 + 4A_2 + 8A_3$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 4 \\ -A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 1 \\ A_1 + 4A_2 + 8A_3 = 15 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A_1 = 3 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

$f(n) = 3(-1)^n + 2^n + 2^n n$

SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

(5)
$$\begin{cases} f(n) = 12f(n-1) - 48f(n-2) + 64f(n-3) & \forall n \geq 3 \\ f(0) = 1 \quad f(1) = 12 \quad f(2) = 112 \end{cases}$$

(I) SOLUZIONI BASE AL PROBLEMA SEMPLICE

$a_1 = 12 \quad a_2 = -48 \quad a_3 = 64$

$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x-4)^3$

$x_1 = 4$ MOLTEPLICITÀ 3

$f_1(n) = 4^n \quad f_2(n) = 4^n n \quad f_3(n) = 4^n n^2$

(II) SOLUZIONI AL PROBLEMA SEMPLICE

$f(n) = A_1 4^n + A_2 4^n n + A_3 4^n n^2 \quad A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$

(III) SOLUZIONE AL PROBLEMA CON CONDIZIONI INIZIALI

$b_1 = 1 \quad b_2 = 12 \quad b_3 = 112$

$f(0) = A_1 4^0 + A_2 4^0 0 + A_3 4^0 0^2 = A_1$

$f(1) = A_1 4 + A_2 4 1 + A_3 4 1^2 = 4A_1 + 4A_2 + 4A_3$

$f(2) = A_1 4^2 + A_2 4^2 2 + A_3 4^2 2^2 = 16A_1 + 32A_2 + 64A_3$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ 4A_1 + 4A_2 + 4A_3 = 12 \\ 16A_1 + 32A_2 + 64A_3 = 112 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

$$f(n) = 4^n + 4^n n + 4^n n^2$$

SOLUZIONE

6 $\boxed{\text{FIBONACCI}}$

VEDERE INTERPRETAZIONE CON CONIGLI

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad \forall n \geq 2 \\ f(0) = 1 \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

$$a_1 = 1, \ a_2 = 1, \ b_1 = 1, \ b_2 = 1$$

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\Delta > 0 \qquad f_1(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad f_2(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f(n) = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

SOLUZIONE GENERALE AL PROBLEMA SEMPLICE

$$f(0) = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A_1 + A_2$$

$$f(1) = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ A_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$f(n) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

SOLUZIONE AL PROBLEMA DI FIBONACCI

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618033$$

COSTANTE DI FIDIA

SEZIONE AUREA

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$$

$$f(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{n+1}$$