EQUAZIONI DIOFANTINE

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$ax + by = c$

$Sol = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid ax + by = c\} \subseteq \mathbb{Z}^2$

$d = (a,b) = MCD(a,b)$

CASO 1 $\quad d \mid c$

ESISTONO ∞ SOLUZIONI

$d \mid a, \; d \mid b, \; d \mid c$

$a = a'd \quad b = b'd \quad c = c'd$

PER TROVARE UNA SOLUZIONE $(x_0, y_0) \in Sol$:

MODO 1 $\quad$ A MENTE

MODO 2 $\quad d = ak + bl$ CON $k, l \in \mathbb{Z}$

(IDENTITÀ DI BEZOUT)

TROVO k E l CON L'ALGORITMO EUCLIDEO

$(x_0, y_0) = (kc', lc')$

PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI Sol:

$Sol = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \mid x = x_0 + b'm, \; y = y_0 - a'm, \; m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$

CASO 2 $\quad d \nmid c$

NON ESISTONO SOLUZIONI

$Sol = \emptyset \subseteq \mathbb{Z}^2$

① $2x + 7y = 5$

$a = 2, \ b = 7, \ c = 5$

$d = (2, 7) = 1 \mid 5$

<u>CASO 1</u> ESISTONO ∞ SOLUZIONI

$2 = 2 \cdot 1 \qquad 7 = 7 \cdot 1 \qquad 5 = 5 \cdot 1$

$a' = 2 \qquad b' = 7 \qquad c' = 5$

TROVO A MENTE UNA SOLUZIONE (MODO 1)

$2(1) + 7(-1) = 5$

$(x_0, y_0) = (1, -1) \in Sol$

(*) $Sol = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = 1 + 7m, \ y = 1 - 2m, \ m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$

ALTERNATIVAMENTE POSSO TROVARE UNA SOLUZIONE CON L'ALGORITMO EUCLIDEO (MODO 2)

cerco $k, l \in \mathbb{Z}$ tali che $1 = 2 \cdot k + 7 \cdot l$

$7 = 3 \cdot 2 + 1 \longrightarrow 1 = 7 - 3 \cdot 2$

$1 = 2(-3) + 7 \cdot (1)$

$k = -3, \ l = 1$

$(x_0, y_0) = (kc', lc') = (-3 \cdot 5, 1 \cdot 5) = (-15, 5) \in Sol$

(**) $Sol = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = -15 + 7m, \ y = 5 - 2m, \ m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$

⚠ (*) E (**) COINCIDONO (PENSATECI)

(2) $21x + 3y = 6$

$a = 21, \; b = 3, \; c = 6$

$d = (21, 3) = 3 \mid 6$

<u>CASO 1</u> ESISTONO ∞ SOLUZIONI

$21 = 7 \cdot 3 \qquad 3 = 1 \cdot 3 \qquad 6 = 2 \cdot 3$

$a' = 7 \qquad b' = 1 \qquad c' = 2$

cerco $k, l \in \mathbb{Z}$ tali che $3 = 21k + 3l$

$3 = 21 \cdot 1 + 3(-6)$

$k = 1 \qquad l = -6$

UNA SOLUZIONE È QUINDI

$(x_0, y_0) = (kc', lc') = (1 \cdot 2, -6 \cdot 2) = (2, -12) \in Sol$

(*) $Sol = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = 2 + m, \; y = -12 - 7m, \; m \in \mathbb{Z}\}$

ALTERNATIVAMENTE POTEVO ACCORGERMI CHE

$21(1) + 3(-5) = 6$

QUINDI $(x_0, y_0) = (1, -5)$ È UNA SOLUZIONE

(**) $Sol = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = 1 + m, \; y = -5 - 7m, \; m \in \mathbb{Z}\}$

⚠ (*) E (**) COINCIDONO

(3) $6x + 8y = 3$

$a = 6 \quad b = 8 \quad c = 3$

$d = (6,8) = 2 \not| \, 3$

CASO 2   NON ESISTONO SOLUZIONI

$Sol = \emptyset \subseteq \mathbb{Z}^2$

(4) $7x + 11y = 13$

(5) $210x + 175y = 264$

(6) $231x + 225y = 162$

(7) $486x + 360y = 54$

(8) $132x + 51y = 6$

(9) $125x + 147y = 13$

$a = 125, \; b = 147, \; c = 13$

$d = (125, 147) = ?$

$147 = 1 \cdot 125 + 22 \rightarrow (4) \quad 22 = 147 - 125$

$125 = 5 \cdot 22 + 15 \rightarrow (3) \quad 15 = 125 - 5 \cdot 22$

$22 = 1 \cdot 15 + 7 \rightarrow (2) \quad 7 = 22 - 15$

$15 = 2 \cdot 7 + 1 \rightarrow (1) \quad 1 = 15 - 2 \cdot 7$

$7 = 7 \cdot 1 + 0$

NOTA:
NON MI RICORDO QUALI HO SVOLTO A LEZIONE. TRASCRIVO SOLO LE SOLUZIONI DI (1), (2), (3) E (9)

$d = (125, 147) = 1 \mid 13$

CASO 1 ESISTONO ∞ SOLUZIONI

$125 = 125 \cdot 1$ $\quad 147 = 147 \cdot 1$ $\quad 13 = 13 \cdot 1$

$a' = 125$ $\quad b' = 147$ $\quad c' = 13$

TROVO UNA SOLUZIONE CON L'ALGORITMO EUCLIDEO

CERCO $k, l \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $1 = 125k + 147l$

$$1 \underset{\uparrow \atop 1}{=} 15 - 2 \cdot 7 \underset{\uparrow \atop 2}{=} 15 - 2(22 - 15) = 15 - 2 \cdot 22 + 2 \cdot 15 =$$

$$= 3 \cdot 15 - 2 \cdot 22 \underset{\uparrow \atop 3}{=} 3(125 - 5 \cdot 22) - 2 \cdot 22 =$$

$$= 3 \cdot 125 - 15 \cdot 22 - 2 \cdot 22 = 3 \cdot 125 - 17 \cdot 22 =$$

$$\underset{\uparrow \atop 4}{=} 3 \cdot 125 - 17(147 - 125) = 3 \cdot 125 - 17 \cdot 147 + 17 \cdot 125 =$$

$$= 20 \cdot 125 + (-17) 147$$

$k = 20 \quad l = -17$

$(x_0, y_0) = (kc', lc') = (20 \cdot 13, -17 \cdot 13) = (260, -221) \in Sol$

$Sol = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = 260 + 147m, y = -221 - 125m, m \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{Z}^2$

NUMERI COMPLESSI

① Calcolare $i^2, i^3, i^4, i^{20}, i^7$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^{20} = i^{4 \cdot 5} = (i^4)^5 = 1^5 = 1$

$i^7 = i^{4+3} = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$

② Razionalizzazione $\frac{1}{3-i}, \frac{2-i}{7+2i}, \frac{7}{4-2i}, \frac{9+2i}{i}$

$$\frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i}\,\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$\frac{2-i}{7+2i} = \frac{2-i}{7+2i}\,\frac{7-2i}{7-2i} = \frac{14-7i-4i+2i^2}{7^2+2^2} =$$

$$= \frac{14-11i-2}{53} = \frac{12-11i}{53} = \frac{12}{53} - \frac{11}{53}i$$

$$\frac{7}{4-2i} = \frac{7}{4-2i}\,\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{28+14i}{4^2+2^2} = \frac{28+14i}{20} =$$

$$= \frac{28}{20} + \frac{14}{20}i = \frac{7}{5} + \frac{7}{10}i$$

$$\frac{9+2i}{i} = \frac{9+2i}{i}\,\frac{-i}{-i} = \frac{-9i-2i^2}{-i^2} = \frac{-9i-2(-1)}{-(-1)} =$$

$$= \frac{2-9i}{1} = 2-9i$$