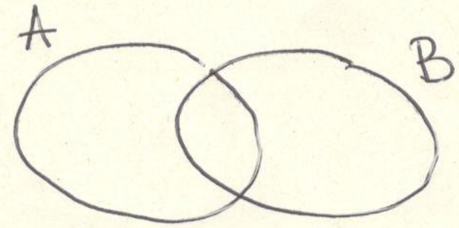
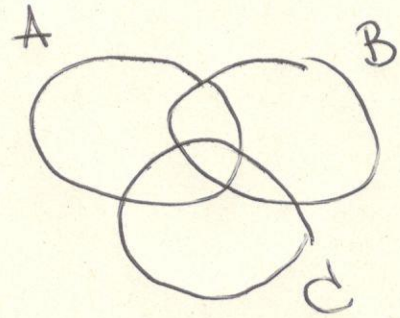
PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE

A, B insiemi



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A, B, C insiemi



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

(1) Quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 385 divisibili per 7 o per 11?

considero l'insieme

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 385 \text{ e } (7 \mid x \text{ o } 11 \mid x)\}$$

e mi chiedo quale è la sua cardinalità

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 385 \text{ e } 7 \mid x\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 385 \text{ e } 11 \mid x\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 385 \text{ e } (7 \mid x \text{ o } 11 \mid x)\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 385 \text{ e } 7 \mid x \text{ e } 11 \mid x\}$$

$$\underset{(7,11)=1}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 385 \text{ e } 77 \mid x\}$$

$385 = 55 \cdot 7 \qquad |A| = 55$

$385 = 35 \cdot 11 \qquad |B| = 35$

$385 = 5 \cdot 77 \qquad |A \cap B| = 5$

$$|A \cup B| \underset{\substack{\text{INCLUSIONE}\\ \text{ESCLUSIONE}}}{=} |A| + |B| - |A \cap B| = 55 + 35 - 5 = 85$$

⚠ l'errore tipico è dire $|A \cup B| = |A| + |B|$

questo è vero solo se $A \cap B = \emptyset$ (A e B disgiunti)

(2) Quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 100 divisibili per 2 o per 5 o per 12 ?

considero l'insieme

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } (2|x \text{ o } 5|x \text{ o } 12|x)\}$$

e mi chiedo quale è la sua cardinalità

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } 2|x\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } 5|x\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } 12|x\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } 2|x \text{ e } 5|x\}$$
$$\underset{(2,5)=1}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } 10|x\}$$

$$A \cap C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } 2 \mid x \text{ e } 12 \mid x\} \underset{(2,12)=2}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } 12 \mid x\} = C$$

$$B \cap C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } 5 \mid x \text{ e } 12 \mid x\} \underset{(5,12)=1}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } 60 \mid x\}$$

$$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B = C \cap B = B \cap C$$

$$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } (2 \mid x \text{ o } 5 \mid x \text{ o } 12 \mid x)\}$$

$100 = 50 \cdot 2$ $\quad |A| = 50$

$100 = 20 \cdot 5$ $\quad |B| = 20$

$100 = 8 \cdot 12$ $\quad |C| = |A \cap C| = 8$

$100 = 10 \cdot 10$ $\quad |A \cap B| = 10$

$|B \cap C| = |A \cap B \cap C| = 1$

$$|A \cup B \cup C| \underset{\text{INCLUSIONE ESCLUSIONE}}{=} |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 50 + 20 + 8 - 10 - 8 - 1 + 1 = 60$$

COEFFICIENTI BINOMIALI

$n \geq 0$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n\,(n-1)! \end{cases}$$

DEFINIZIONE RICORSIVA DI $n!$

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$n \geq 0 \quad k = 0, \ldots, n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

DEFINIZIONE DI COEFFICIENTE BINOMIALE

PROPRIETÁ STANDARD

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

5. $a, b \in \mathbb{R} \quad n \geq 0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

BINOMIO DI NEWTON

(6) $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

La proprietà (4) ci permette di calcolare in maniera semplice tutti i coefficienti binomiali (PENSATECI!)

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

riga 0 $$\binom{0}{0}$$

riga 1 $$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

riga 2 $$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

riga 3 $$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

riga 4 $$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

riga 5 $$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{6}$$

...

utilizzando le varie proprietà diventa

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

(3) $a, b \in \mathbb{R}$ Sviluppare $(a+b)^5$

$$(a+b)^5 \underset{\substack{| \\ \text{BINOMIO} \\ \text{DI NEWTON}}}{=} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k b^{5-k} =$$

$$= \binom{5}{0} a^0 b^{5-0} + \binom{5}{1} a^1 b^{5-1} + \binom{5}{2} a^2 b^{5-2}$$

$$+ \binom{5}{3} a^3 b^{5-3} + \binom{5}{4} a^4 b^{5-4} + \binom{5}{5} a^5 b^{5-5}$$

$$\underset{|}{=} 1 \cdot 1 \cdot b^5 + 5 a b^4 + 10 a^2 b^3$$

CALCOLO ESPLICITAMENTE O UTILIZZO TARTAGLIA

$$+ 10 a^3 b^2 + 5 a^4 b + 1 \cdot a^5 \cdot 1$$

$$= b^5 + 5 a b^4 + 10 a^2 b^3$$

$$+ 10 a^3 b^2 + 5 a^4 b + a^5$$

COEFFICIENTI MULTINOMIALI

$n \geq 0$, $r \geq 2$

$k_1, \ldots, k_r \geq 0$ tali che $k_1 + \ldots + k_r = n$

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$$ DEFINIZIONE DI COEFFICIENTE r-NOMIALE

se $r = 2$

$k_1, k_2 \geq 0$ tali che $k_1 + k_2 = n$ $\quad (k_2 = n - k_1)$

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1, n-k_1} = \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} = \binom{n}{k_1}$$

per $r=2$ ritrovo il coefficiente binomiale

PROPRIETÀ STANDARD

① $$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \binom{k_1}{k_1}\binom{k_1+k_2}{k_2}\binom{k_1+k_2+k_3}{k_3} \cdots \binom{\overbrace{k_1 + \cdots + k_r}^{\substack{n \\ \shortparallel}}}{k_r}$$

② $r \geq 2$ $\quad a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ $\quad n \geq 0$

$$(a_1 + \ldots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}$$

MULTINOMIO DI NEWTON

④ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ Sviluppare $(a_1+a_2+a_3)^3$

$n = r = 3$

$$(a_1+a_2+a_3)^3 \underset{\substack{\text{MULTINOMIO}\\ \text{DI NEWTON}}}{=} \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \geq 0 \\ k_1+k_2+k_3=3}} \binom{3}{k_1,k_2,k_3} a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} =$$

$$= \binom{3}{0,0,3} a_1^0 a_2^0 a_3^3 + \binom{3}{0,1,2} a_1^0 a_2^1 a_3^2$$

$$+ \binom{3}{0,2,1} a_1^0 a_2^2 a_3^1 + \binom{3}{0,3,0} a_1^0 a_2^3 a_3^0$$

$$+ \binom{3}{1,0,2} a_1^1 a_2^0 a_3^2 + \binom{3}{1,1,1} a_1^1 a_2^1 a_3^1$$

$$+ \binom{3}{1,2,0} a_1^1 a_2^2 a_3^0 + \binom{3}{2,1,0} a_1^2 a_2^1 a_3^0$$

$$+ \binom{3}{2,0,1} a_1^2 a_2^0 a_3^1 + \binom{3}{3,0,0} a_1^3 a_2^0 a_3^0 \overset{(*)}{=}$$

ricordo che $0! = 1, \; 1! = 1, \; 2! = 2, \; 3! = 6$

$$\binom{3}{0,0,3} = \frac{3!}{0!\,0!\,3!} = 1$$

$$\binom{3}{0,0,3} = \binom{3}{0,3,0} = \binom{3}{3,0,0} = 1$$

$$\binom{3}{0,1,2} = \frac{3!}{0! \cdot 1! \cdot 2!} = 3$$

$$\binom{3}{0,1,2} = \binom{3}{0,2,1} = \binom{3}{1,0,2} = \binom{3}{1,2,0} = \binom{3}{2,0,1} = \binom{3}{2,1,0} = 3$$

$$\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$$

(*)

$$\overset{!}{=} a_3^3 + 3a_2a_3^2 + 3a_2^2a_3 + a_2^3 + 3a_1a_3^2$$

$$+ 6a_1a_2a_3 + 3a_1a_2^2 + 3a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 + a_1^3$$

INSIEME DELLE PARTI E INSIEME POTENZA

A insieme $\quad |A| = n$

$P(A) = \{ B \text{ insieme} \mid B \subseteq A \}$ INSIEME DELLE PARTI DI A

$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n$

tutti i sottoinsiemi di A sono 2^n

dato $k = 0, , n$

Tutti i sottoinsiemi di A di cardinalità k sono $\binom{n}{k}$

(5) $A = \{a, b, c, d\}$

elencare gli elementi di $P(A)$
(i sottoinsiemi di A)

$|A| = 4 \quad , \quad |P(A)| = 2^4 = 16$

i) sottoinsiemi di 0 elementi:

sono $\binom{4}{0} = 1$

c'è solo $\emptyset$

ii) sottoinsiemi di 1 elemento:

sono $\binom{4}{1} = 4$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

iii) sottoinsiemi di 2 elementi:

sono $\binom{4}{2} = 6$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$

$\{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

iv) sottoinsiemi di 3 elementi:

sono $\binom{4}{3} = 4$

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

v) sottoinsiemi di 4 elementi

sono $\binom{4}{4} = 1$

c'è solo $A = \{a, b, c, d\}$

$$P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\},$$
$$\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}$$
$$\{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A \}$$

A, B insiemi

$A^B = \{ f : B \to A \text{ funzione} \}$ INSIEME POTENZA

$|A^B| = |A|^{|B|}$

(6) $A = \{x, y, z\}$ $B = \{a, b\}$

elencare gli elementi di A^B.

$|A| = 3$, $|B| = 2$, $|A^B| = |A|^{|B|} = 3^2 = 9$

$f : B \longrightarrow A$ funzione

f è determinata se assegniamo $f(a)$ e $f(b)$

$A^B = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9 \}$

$f_1(a) = x, f_1(b) = x$ $f_4(a) = y, f_4(b) = x$ $f_7(a) = z, f_7(b) = x$

$f_2(a) = x, f_2(b) = y$ $f_5(a) = y, f_5(b) = y$ $f_8(a) = z, f_8(b) = y$

$f_3(a) = x, f_3(b) = z$ $f_6(a) = y, f_6(b) = z$ $f_9(a) = z, f_9(b) = z$

(7) Ricordando che $2 = 1+1$, dimostrare che per ogni $n \geq 0$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Se volete provatei per induzione!

$$2^n = (1+1)^n \underset{\substack{| \\ \text{BINOMIO} \\ \text{DI NEWTON}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$