Equações Governantes em CFD

Tópicos Especiais em Sistemas Térmicos: CFD

Professor: Adriano Possebon Rosa

Laboratório de Energia e Ambiente
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília

Sumário

CFD é baseada nas equações governantes da mecânica dos fluidos e da transferência de calor.

Essas equações representam leis de conservação da física.

Vamos trabalhar com 3 leis:

- lei da conservação da massa;
- lei da conservação de momento (ou segunda lei de Newton);
- lei da conservação de energia (ou primeira lei da termodinâmica).

Sumário

A variação de massa no tempo em um pequeno volume de controle é igual à massa que entra menos a massa que sai:

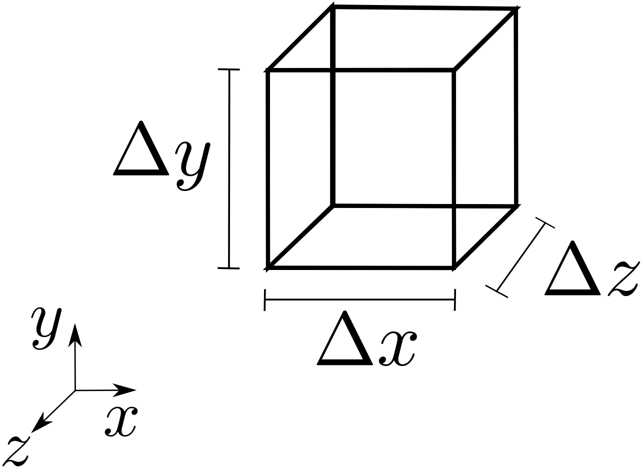
$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sai} \tag{1}$$

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

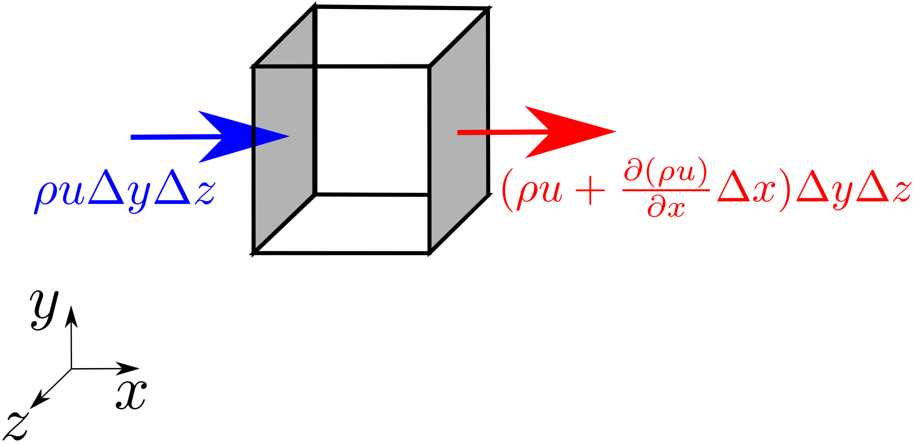
Vetor velocidade e suas componentes:

$$\mathbf{U} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + w\,\mathbf{k}$$

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$



Na direção x:


$\rho u \Delta y \Delta z$
$(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x)\Delta y \Delta z$
y
x
z

$$\dot{m}_{entra,x} = \rho u \Delta y \Delta z$$

$$\dot{m}_{sai,x} = \left(\rho u + \frac{\partial \left(\rho u \right)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$

$$\dot{m}_{entra,x} - \dot{m}_{sai,x} = \rho u \Delta y \Delta z - \left(\rho u + \frac{\partial \left(\rho u \right)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z =$$

$$= -\frac{\partial \left(\rho u \right)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Na direção y:

$$\dot{m}_{entra,y} = \rho v \Delta x \Delta z$$

$$\dot{m}_{sai,y} = \left(\rho v + \frac{\partial \left(\rho v \right)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z$$

$$\dot{m}_{entra,y} - \dot{m}_{sai,y} = \rho v \Delta x \Delta z - \left(\rho v + \frac{\partial \left(\rho v \right)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z =$$

$$= -\frac{\partial \left(\rho v \right)}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z$$

Na direção z:

$$\dot{m}_{entra,z} = \rho w \Delta x \Delta y$$

$$\dot{m}_{sai,z} = \left(\rho w + \frac{\partial \left(\rho w \right)}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y$$

$$\dot{m}_{entra,z} - \dot{m}_{sai,z} = \rho w \Delta x \Delta y - \left(\rho w + \frac{\partial \left(\rho w \right)}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y =$$

$$= -\frac{\partial \left(\rho w \right)}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y$$

Juntando tudo de volta na equação 1:

$$\frac{\partial\left(\rho\Delta x\Delta y\Delta z\right)}{\partial t}=-\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z-\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z$$
$$-\frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y$$

Ou:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0} \qquad (2)$$

Essa é a **Equação da Conservação de Massa** ou **Equação da Continuidade** para um fluido.

Podemos reescrevê-la como

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0} \qquad (3)$$

Abrindo o termo do divergente, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho + \rho \left(\nabla \cdot \mathbf{U} \right) = 0$$

Derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho$$

Assim, a equação da conservação de massa se torna

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\nabla \cdot \mathbf{U} \right) = 0$$

Em muitos problemas, a variação temporal e espacial da densidade é insignificante quando comparada à variação da velocidade, ou seja,

$$\frac{D\rho}{Dt} \ll \rho\,(\nabla \cdot \mathbf{U})$$

Nesses casos, a equação da conservação de massa pode ser simplificada para

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{U} = 0} \tag{4}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \tag{5}$$

Essa última forma simplificada da equação da conservação de massa é válida para os fluidos incompressíveis e também para fluidos compressíveis nos casos em que a densidade e os gradientes de velocidade são tais que $D\rho/Dt$ é muito pequeno quando comparado a $\rho\,(\nabla \cdot \mathbf{U})$.

Os escoamentos que são modelados por essa equação são chamados de **escoamentos incompressíveis**.

Líquidos são modelados por essa versão simplificada, assim como gases em baixas velocidades.

Comentário: a derivada material ou total ou lagrangiana de uma variável $\phi(\mathbf{x}, t)$ é definida como

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi$$

e representa a taxa de variação dessa propriedade acompanhando uma partícula de fluido que se move com o escoamento.

O primeiro termo do lado direito representa a variação local ou euleriana da variável, enquanto o segundo representa a contribuição da advecção à variação de ϕ.

Sumário

A lei da conservação de momento ou segunda lei de Newton nos diz que a variação de momento em um sistema é igual à soma das forças agindo neste sistema.

Momento (ou momento linear ou quantidade de movimento) é o produto da massa pela velocidade: $m\mathbf{U}$.

Na ausência de forças, o momento do sistema se conserva.

No caso de um pequeno volume de controle, temos que levar em consideração o fluxo de momento, que é a quantidade de momento que entra e sai do volume, sendo carregada pelo próprio escoamento.

Essa equação é vetorial, já que o momento é um vetor. Teremos uma equação para cada direção.

A equação para o momento na direção x, considerando um volume de controle, pode ser escrita como

$$\frac{\partial \left(mu\right)}{\partial t} = \dot{m}_{entra} u - \dot{m}_{sai} u + F_x \tag{6}$$

Massa:

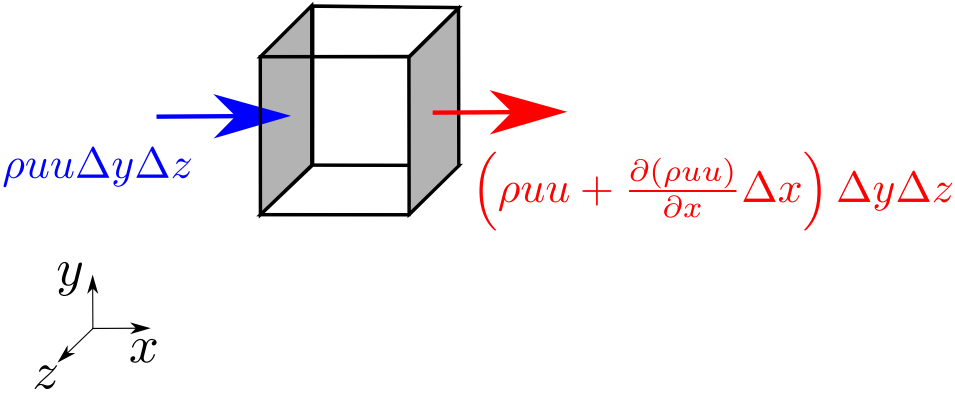
$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

Entrada:

$$\dot{m}_{entra} u = \rho u u \Delta y \Delta z + \rho v u \Delta x \Delta z + \rho w u \Delta x \Delta y$$

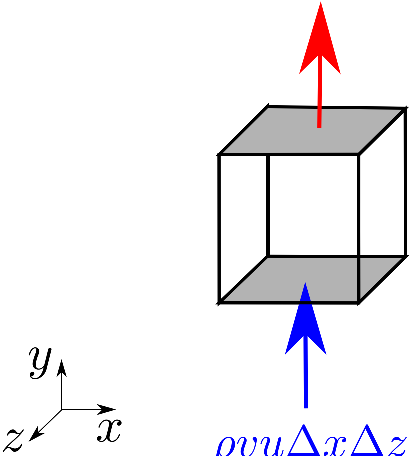
Saída:

$$\dot{m}_{sai} u = \left(\rho u u + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$
$$+ \left(\rho v u + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z$$
$$+ \left(\rho w u + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y$$

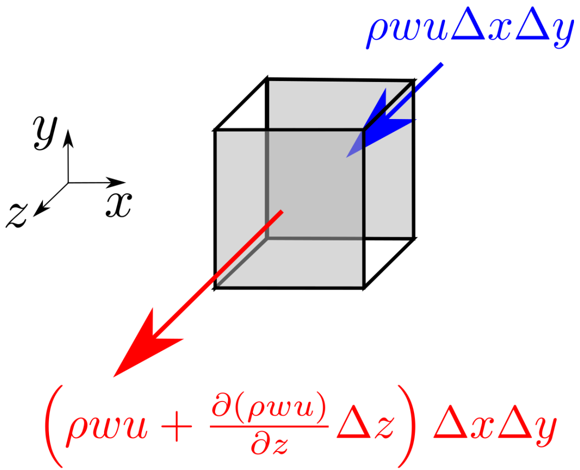


$\rho u u \Delta y \Delta z$
$\left(\rho u u + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$
y
x
z

$$\left(\rho v u + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta z$$



$$\rho v u \Delta x \Delta z$$

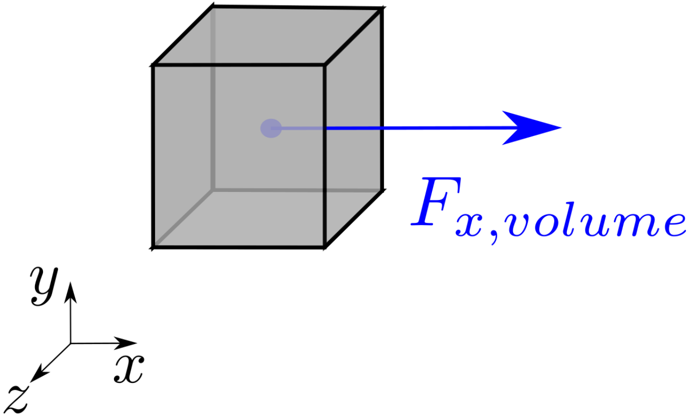

$\rho w u \Delta x \Delta y$
y
z
x
$\left(\rho w u + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x \Delta y$

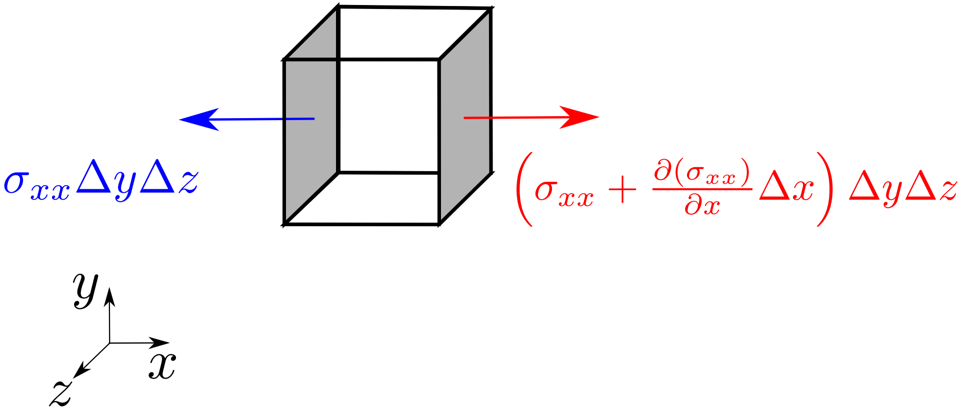
A força pode ser dividida em força de superfície e força de volume:

$$F_x = F_{x,volume} + F_{x,superfcie}$$

$$F_{x,volume} = m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{i} = \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{i}\Delta x\Delta y\Delta z$$

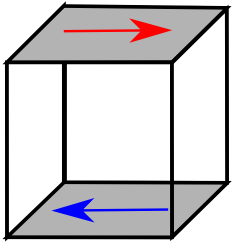
$$F_{x,superfcie} = -\sigma_{xx}\Delta y\Delta z + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$
$$-\sigma_{yx}\Delta x\Delta z + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z$$
$$-\sigma_{zx}\Delta x\Delta y + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y$$


$F_{x,volume}$
y
x
z

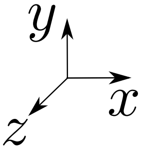


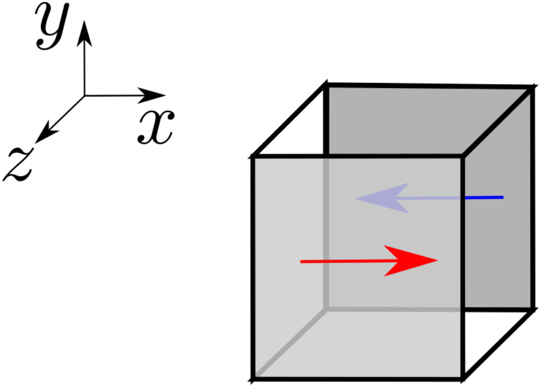
$\sigma_{xx}\Delta y \Delta z$
$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$
y
x
z

$$\left(\sigma_{yx} + \frac{\partial(\sigma_{yx})}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z$$



$$\sigma_{yx}\Delta x\Delta z$$





$$\sigma_{zx}\Delta x\Delta y$$

$$\left(\sigma_{zx} + \frac{\partial(\sigma_{zx})}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y$$

$\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões. Ele possui 9 componentes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

O primeiro índice da componente indica o plano o segundo a direção.

Observação: no OpenFOAM, as componentes de um tensor são enumeradas de 0 a 8, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Substituindo todos esses resultados de volta na equação 6 e considerando que a única força de volume agindo no elemento é a força gravitacional, temos

$$\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{i}$$

Vamos considerar que a aceleração gravitacional está orientada no sentido negativo do eixo z, ou seja,

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$$

Com isso, a equação do momento na direção x se torna

$$\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vu)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wu)}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}$$

Por analogia, nas direções y e z temos

$$\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho ww)}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}-\rho g$$

Em notação vetorial:

$$\boxed{\frac{\partial\left(\rho\mathbf{U}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}\right)=\rho\mathbf{g}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}} \tag{7}$$

Essa equação é chamada de **Equação de Cauchy**. Essa equação é válida para qualquer fluido.

O tensor de tensões pode ser dividido em uma parte devido à pressão e outra devido às tensões viscosas:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}$ é o tensor identidade:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\tau}$ é chamado de **tensor de tensões viscosas**.

Para um fluido newtoniano (linear), o tensor de tensões é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \mu\left[\nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{U})\,\mathbf{I}\right] \tag{8}$$

μ é o coeficiente de viscosidade.

Substituindo a equação 8 na equação 7:

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{U}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}\right)=\rho\mathbf{g}+\nabla\cdot\left[-p\boldsymbol{I}+\mu\left[\nabla\mathbf{U}+\nabla\mathbf{U}^{T}-\frac{2}{3}\left(\nabla\cdot\mathbf{U}\right)\mathbf{I}\right]\right]$$

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{U}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}\right)=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\nabla\cdot\left(\mu\nabla\mathbf{U}\right)+\frac{1}{3}\mu\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{U}\right)$$

Considerando μ constante e o escoamento como sendo incompressível, resulta

$$\boxed{\frac{\partial\left(\rho\mathbf{U}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}\right)=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\mu\nabla^{2}\mathbf{U}} \tag{9}$$

Essa é a **equação de Navier-Stokes** para um escoamento incompressível.

Direção x:

$$\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vu)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wu)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Direção y:

$$\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Direção z:

$$\frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho ww)}{\partial z}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}$$
$$+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

No caso de escoamento incompressível, como a densidade ρ é constante, podemos reescrever a equação 9 como

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = \mathbf{g} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{U}} \tag{10}$$

Aqui, $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática.

Note que nesta formulação estamos utilizando a variável p/ρ (que tem unidade de m^2/s^2), e não p.

A equação 10 é a forma que o OpenFOAM utiliza para resolver escoamentos incompressíveis. Abaixo está o código do *icoFoam* (este solver foi substituído na versão 11 pelo *incompressibleFluid*, mas ainda tem valor didático).

```
fvVectorMatrix UEqn
(
    fvm::ddt(U)
  + fvm::div(phi, U)
  - fvm::laplacian(nu, U)
);

if (piso.momentumPredictor())
{
    solve(UEqn == -fvc::grad(p));
}
```

Por que a pressão está separada, em outra equação???

Comentário: voltando na equação 9,

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{U}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}\right)=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\mu\nabla^{2}\mathbf{U}\ ,$$

podemos trabalhar no lado esquerdo, reescrevendo-o como

$$\rho\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{U}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\rho\mathbf{U}\right)\cdot\nabla\mathbf{U}+\mathbf{U}\left(\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\right)\right)$$

Ou

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right)+\mathbf{U}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\right)\right)$$

O segundo termo entre parênteses é zero, pois representa exatamente a equação da conservação de massa, equação 3.

Dessa forma,

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{U}\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}\right) = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right) = \rho\frac{D\mathbf{U}}{Dt} \ .$$

Ou seja, a equação 9 pode ser reescrita como

$$\rho\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{U}\ .$$

As duas versões são idênticas. Esta última é chamada de forma não conservativa, enquanto a equação 9 está na forma conservativa.

A forma conservativa é mais vantajosa/apropriada para a abordagem de volumes finitos, e por isso será a mais utilizada em nossos estudos.

Sumário

Lei da conservação da energia ou primeira lei da termodinâmica para um sistema: a taxa de variação de energia do sistema é igual ao calor que chega ao sistema somado ao trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema:

$$\frac{DE_t}{Dt} = \dot{Q} + \dot{W} \ .$$

E_T é a energia total, que é a soma da energia interna E e da energia cinética $mU^2/2$,

$$E_t = E + \frac{mU^2}{2} \ .$$

Podemos trabalhar com essas propriedades considerando seus valores por unidade de massa. Assim, temos que

$$e_t = e + \frac{U^2}{2} \ ,$$

em que $e_T = E_T/m$ e $e = E/m$.

Considerando $\dot{q} = \dot{Q}/m$ e $\dot{w} = \dot{W}/m$, a equação da energia pode ser reescrita como

$$\rho\frac{De_t}{Dt} = \rho\frac{De}{Dt} + \rho\frac{D(U^2/2)}{Dt} = \dot{q} + \dot{w} \ .$$

A transferência de calor, $\dot{Q}$, pode ser relacionada com o vetor $\mathbf{q}$, que é o vetor de fluxo de calor por unidade de área.

Na direção x, o calor entrando é

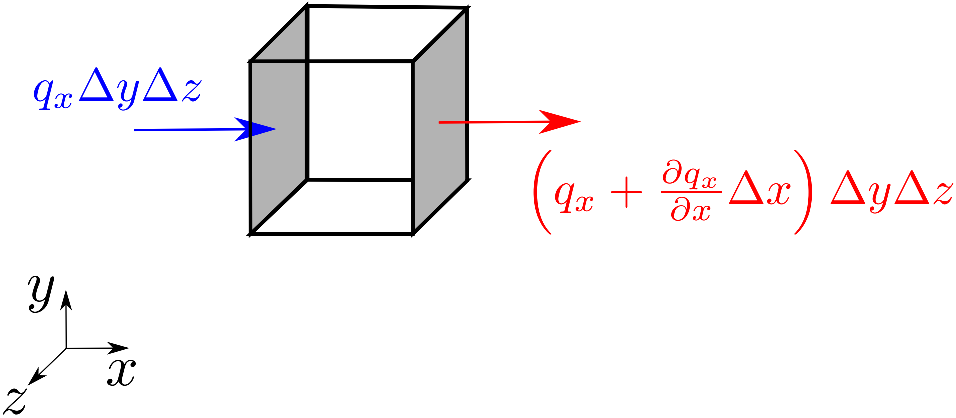
$$q_x \, \Delta y \Delta z$$

e o calor saindo é

$$(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z$$

Assim, na direção x, o aumento na energia causado pelo calor é (por unidade de volume)

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}$$


$q_x \Delta y \Delta z$
$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$
y
x
z

Considerando as 3 direções, temos

$$\dot{q} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

Pela Lei de Fourier, o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura, com a constante de proporcionalidade, k, sendo denominada de condutividade térmica. Assim,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

Portanto:

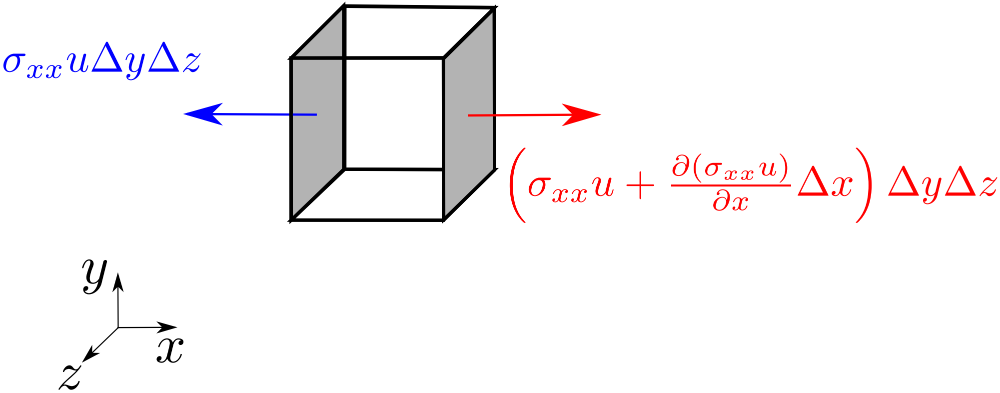
$$\dot{q} = -\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (k\nabla T)$$

O trabalho é realizado pelas forças de volume e pelas forças de superfície é:

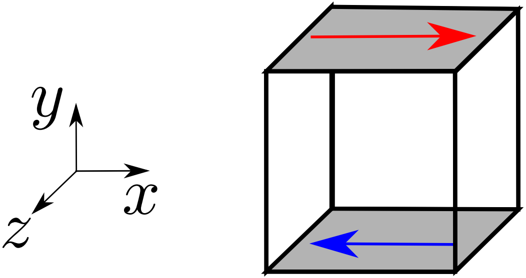
$$\dot{w} = \mathbf{U} \cdot \rho\mathbf{g} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{U})$$

Podemos abrir o divergente e reescrever essa equação como

$$\dot{w} = \mathbf{U} \cdot \rho\mathbf{g} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla\mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})$$


$\sigma_{xx} u \Delta y \Delta z$
$\left(\sigma_{xx} u + \frac{\partial(\sigma_{xx} u)}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z$
y
x
z

$$\left(\sigma_{yx}u + \frac{\partial(\sigma_{yx}u)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z$$



$$\sigma_{yx}u\Delta x\Delta z$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{U}) = \frac{\partial(\sigma_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xz}w)}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial(\sigma_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yz}w)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(\sigma_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zy}v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz}w)}{\partial z}$$

Voltando à Equação de Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Multiplicando essa equação por $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} \cdot \rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho \frac{D(U^2/2)}{Dt} = \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{g} + \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

$$\mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \rho \frac{D(U^2/2)}{Dt} - \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{g}$$

Substituindo essa relação na equação de $\dot{w}$:

$$\dot{w} = \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{g} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{U} + \rho \frac{D(U^2/2)}{Dt} - \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{g}$$

Voltando para a equação da energia:

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D(U^2/2)}{Dt} = \dot{q} + \dot{w}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D(U^2/2)}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{g} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{U} + \rho \frac{D(U^2/2)}{Dt} - \mathbf{U} \cdot \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{U}$$

O tensor de tensões pode ser dividido em uma parte devido à pressão e outra devido às forças viscosas:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

Assim:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p\nabla \cdot \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U} \ . \tag{11}$$

O último termo no lado direito recebe o nome de função de dissipação viscosa Φ e é definido como

$$\Phi = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U}$$

Vamos trabalhar um pouco mais na equação 11.

Equação da conservação de massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{U}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{U}$$

Multiplicando pela pressão dos dois lados:

$$\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -p\nabla\cdot\mathbf{U}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U}$$

A entalpia h é definida como

$$h = e + \frac{p}{\rho} \, .$$

Temos,

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}$$

Por fim, a equação da conservação da energia em termos da entalpia específica é dada por

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U}}$$

Considerando a forma conservativa da equação e a Lei de Fourier, temos

$$\frac{\partial\left(\rho h\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho \mathbf{U} h\right) = \nabla\cdot\left(k\nabla T\right) + \frac{Dp}{Dt} + \Phi$$

No limite de baixas velocidades, com k constante e considerando escoamento incompressível, em que $dh \approx c_p dT$, essa equação se torna

$$\boxed{\frac{\partial\left(\rho c_p T\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho \mathbf{U} c_p T\right) = k\,\nabla^2 T} \tag{12}$$

O OpenFOAM utiliza uma versão da equação da energia que pode envolver a energia interna ou a entalpia.

No caso da energia interna, temos

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{DK}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{U})$$

$$K = \frac{U^2}{2}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{DK}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \left((\rho \mathbf{U}) \frac{p}{\rho} \right) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U})$$

Na forma conservativa:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} e) + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} K) \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \left((\rho \mathbf{U}) \frac{p}{\rho} \right) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U})\end{aligned}}$$

No caso da entalpia,

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{U}h) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\frac{p}{\rho}\right) - \nabla\cdot(\rho\mathbf{U}\,\frac{p}{\rho})$$
$$+\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{U}K)$$
$$= -\nabla\cdot\mathbf{q} - \nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\,\frac{p}{\rho}\right) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{U})$$

Assim:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{U}h) + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{U}K) \\ = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{U})\end{aligned}}$$

O código no próximo slide é do arquivo *thermophysicalPredictor.C*, do módulo *fluid*.

A variável *he* pode ser a entalpia h ou a energia interna e.

O último termo da equação, o termo do divergente do tensor $\boldsymbol{\tau}$, é desprezado em muitas aplicações. Em alguns casos ele aparece como termo fonte (*source*) na equação do OpenFOAM.

```
fvScalarMatrix EEqn
(
    fvm::ddt(rho, he) + fvm::div(phi, he)
  + fvc::ddt(rho, K) + fvc::div(phi, K)
  + pressureWork
    (
        he.name() == "e"
      ? fvc::div(phi, p/rho)()
      : -dpdt
    )
  + thermophysicalTransport->divq(he)
 ==
    (
        buoyancy.valid()
      ? fvModels().source(rho, he) + rho*(U & buoyancy->g)
      : fvModels().source(rho, he)
    )
);
```

Sumário

As equações governantes possuem um padrão quando escritas na forma conservativa.

Podemos generalizar essa equação para qualquer propriedade do fluido que esteja sendo transportada.

Vetor velocidade e suas componentes:

$$\mathbf{U} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + w\,\mathbf{k}$$

Equação de transporte para uma propriedade ϕ:

$$\frac{\partial\left(\rho\phi\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u\phi\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v\phi\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho w\phi\right)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + S_\phi$$

Ou, na forma vetorial:

$$\boxed{\frac{\partial\left(\rho\phi\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\phi\right)=\nabla\cdot\left(\Gamma_{\phi}\nabla\phi\right)+S_{\phi}} \tag{13}$$

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$ é o termo transiente, que representa a variação de ϕ no volume.

$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi)$ é o termo de fluxo advectivo, que representa o transporte de ϕ para fora do volume causado pelo escoamento.

$\nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi)$ é o termo de transporte de ϕ para dentro do volume por meio de difusão.

S_ϕ é o termo fonte, que representa geração e destruição de ϕ no volume, por unidade de volume.

Comparando as equações que nós desenvolvemos com essa equação geral, podemos definir os valores dessas propriedades genéricas para cada equação.

Equação da conservação de massa:

- $\phi = 1$
- $\Gamma_\phi = 0$
- $S_\phi = 0$

Na equação da conservação de momento (incompressível):

- $\phi = \mathbf{U}$
- $\Gamma_\phi = \mu$
- $S_\phi = \rho\mathbf{g} - \nabla p$

Na equação da conservação da energia (em termos de temperatura):

- $\phi = c_p T$
- $\Gamma_\phi = k$
- $S_\phi = 0$

Sumário

Escoamento incompressível.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = \mathbf{g} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{U}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} T) = \alpha \, \nabla^2 T$$

Escoamento compressível.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\mathbf{U}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U}) + \frac{1}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U})$$

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} h) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U}$$