



Trabalho 2

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Tecnologia

Universidade de Brasília

Instruções:

- O trabalho é individual. Você pode discutir os exercícios com os seus colegas, mas cada um deve fazer o seu próprio trabalho e desenvolver seus próprios códigos.
- Você pode utilizar qualquer linguagem de programação (recomendo o python).
- Responda aos exercícios com texto, gráficos e explicações. Comente todos os gráficos que você incluir no relatório.
- O relatório com as respostas deve ser enviado em formato pdf por meio do Moodle.
- Os códigos devem ser enviados separadamente, também no Moodle.

Equações Diferenciais Ordinárias

Para os exercícios de 1 a 5: resolva numericamente a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y) , \quad y(t_o) = y_o \quad (1)$$

usando os métodos de Euler Explícito,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_n , \quad (2)$$

Euler Implícito,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_{n+1} , \quad (3)$$

Runge-Kutta de segunda ordem,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) , \quad (4)$$

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n) , \quad (5)$$

$$k_2 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_1) , \quad (6)$$

e Runge-Kutta de quarta ordem,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \quad (7)$$



$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n) , \quad (8)$$

$$k_2 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) , \quad (9)$$

$$k_3 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) , \quad (10)$$

$$k_4 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3) . \quad (11)$$

Em todos esses problemas, compare, por meio de gráficos, os resultados usando esses métodos com a solução analítica da EDO. Utilize um passo de tempo Δt conveniente.

Exercício 1. $y' = 2 - 2t + 4t^2 - 4t^3 - 4t^4$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = 1 + 2t - t^2 + \frac{4}{3}t^3 - t^4 - \frac{4}{5}t^5$.

Exercício 2. $y' = 1 + \frac{y}{t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$. Solução analítica: $y(t) = t \ln t + 2t$.

Exercício 3. $y' = t^2 y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = \exp(t^3/3)$.

Exercício 4. $y' = ty^2$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = -\frac{2}{t^2-2}$. Observação: Nesse caso não é necessário resolver usando o método de Euler Implícito.

Exercício 5. Considere novamente a equação $y' = 2 - 2t + 4t^2 - 4t^3 - 4t^4$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. Para um tempo fixo $t = 1$, faça um estudo do erro (módulo da diferença entre o valor y calculado e o valor exato) em função do valor do Δt utilizado. Compare os resultados obtidos com os 4 métodos. Disserte.

Exercício 6. O deslocamento angular $\theta(t)$, em radianos, de um pêndulo é dado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad \text{com } \theta(0) = \theta_0 \text{ e } \theta'(0) = \theta'_0 , \quad (12)$$

com $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ sendo a aceleração gravitacional e L o comprimento do pêndulo. Para pequenos valores de θ , essa equação pode ser simplificada para

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 . \quad (13)$$

Faça gráficos de θ em função de t , com um período de oscilação, para $\theta(0) = 0.1$ e $\theta(0) = 0.5$, $\theta'(0) = 0$ e $L = 0.1, 1.0$ e 10 m . Utilize a equação exata e a simplificada. Compare os resultados.

Exercício 7. O crescimento populacional de uma dada espécie pode ser modelado por uma EDO do tipo

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 , \quad N(0) = N_0 , \quad (14)$$

em que N é a população, aN representa a taxa de nascimento e bN^2 representa a taxa de mortalidade causada por doenças e competição por alimentos. Se $N_0 = 100000$, $a = 0,1$ e $b = 10^{-7}$, calcule $N(t)$ para t entre 0 e 20 anos. Varie o coeficiente b e veja como isso afeta no número de

indivíduos. Resolva este problema usando o método de Euler Explícito e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Compare as soluções.

Exercício 8. As populações de duas espécies competindo pela mesma fonte de alimentação podem ser modeladas pelo par de EDOS

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(a_1 - b_1N_1 - c_1N_2), \quad \text{com } N_1(t=0) = N_{1,0} \quad (15)$$

e

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(a_2 - b_2N_2 - c_2N_1), \quad \text{com } N_2(t=0) = N_{2,0} . \quad (16)$$

Nessas equações, N_i é o número de indivíduos da espécie i , a_iN_i representa a taxa de nascimento, $b_iN_i^2$ representa a taxa de mortalidade e $c_iN_iN_j$ representa a taxa de mortalidade devido à competição por alimentos. Se $N_{1,0} = N_{2,0} = 10^5$, $a_1 = 0.1$, $b_1 = 8 \times 10^{-7}$, $c_1 = 10^{-6}$, $a_2 = 0.1$, $b_2 = 8 \times 10^{-7}$ e $c_2 = 10^{-7}$, calcule $N_1(t)$ e $N_2(t)$ entre 0 e 10 anos.

Equação do Calor (1D transiente, explícito)

Exercícios 9 ao 13. Objetivo: resolver numericamente a equação do calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (17)$$

usando diferenças finitas (explícitas, FTCS)

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (18)$$

com diferentes condições de contorno.

Sugestões: faça gráficos de T em função de x para diferentes t ; compare com as soluções analíticas; escolha, por exemplo, um t pequeno (0.01) para mostrar o início, um t intermediário (0.1 ou 0.2, dependendo do problema), e um t maior para mostrar a condição final (1 ou 2); faça a simulação com diferentes Δt , para ver quais levam a uma resposta que faz sentido e quais “explodem”; interprete fisicamente os gráficos.

Exercício 9.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \quad (19)$$

$$T(0, t) = T(2, t) = 0, \quad t > 0 \quad (20)$$

$$T(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (21)$$

Solução exata:

$$T(x, t) = \exp\left[-\frac{\pi^2 t}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2}x\right] \quad (22)$$

Exercício 10.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (23)$$



$$T(0, t) = T(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (24)$$

$$T(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1 \quad (25)$$

Solução exata:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)\pi x] \exp[-(2n-1)^2 \pi^2 t]. \quad (26)$$

Exercício 11.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (27)$$

$$T(0, t) = 1, \quad T(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (28)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (29)$$

Solução exata:

$$T(x, t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin[n\pi x] \exp[-n^2 \pi^2 t]. \quad (30)$$

Exercício 12.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (31)$$

$$T(0, t) = T(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (32)$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 200x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 200(1-x), & 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \quad (33)$$

Solução exata:

$$T(x, t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)\pi x] \exp[-(2n+1)^2 \pi^2 0.01 t]. \quad (34)$$

Exercício 13. Condição de contorno de Neumann (da derivada).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 0.5, \quad t > 0 \quad (35)$$

$$T(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0.5, t) = 0, \quad t > 0 \quad (36)$$

$$T(x, 0) = 200x, \quad 0 \leq x \leq 0.5 \quad (37)$$

Solução exata:

$$T(x, t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)\pi x] \exp[-(2n+1)^2 \pi^2 0.01t] . \quad (38)$$

Equação do Calor (2D transiente, explícito)

Exercícios 14 ao 17. O objetivo aqui é encontrar a solução para a equação do calor bidimensional transiente,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} , \quad (39)$$

usando diferenças finitas (explícitas, FTCS),

$$\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} , \quad (40)$$

com diferentes condições de contorno. Sugestões: faça gráficos tridimensionais de T em função de x e y para diferentes t e faça também gráficos de contorno; compare com as soluções analíticas (note que as soluções analíticas são para o regime permanente); escolha, por exemplo, um t pequeno (0.05) para mostrar o início, um t intermediário (0.2), e um t maior para mostrar a condição final (1 ou 2); faça a simulação com diferentes Δt , para ver quais levam a uma resposta que faz sentido e quais “explodem” ; interprete fisicamente os gráficos.

Exercício 14.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \quad (41)$$

$$T(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (42)$$

$$T(x, 1, t) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (43)$$

$$T(0, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t \geq 0 \quad (44)$$

$$T(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t \geq 0 \quad (45)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (46)$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x, y, t \rightarrow \infty) = \frac{\sinh(\pi y) \sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \quad (47)$$

Exercício 15.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} , \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \quad (48)$$

$$T(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad t \geq 0 \quad (49)$$

$$T(x, 1, t) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad t \geq 0 \quad (50)$$

$$T(0, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t \geq 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0.5, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t \geq 0 \quad (52)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < y < 1 \quad (53)$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x, y, t \rightarrow \infty) = \frac{\sinh(\pi y) \sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \quad (54)$$

Exercício 16.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \quad (55)$$

$$T(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (56)$$

$$T(x, 1, t) = \begin{cases} 75x, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 150(1-x), & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (57)$$

$$T(0, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t \geq 0 \quad (58)$$

$$T(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t \geq 0 \quad (59)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (60)$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x, y, t \rightarrow \infty) = \frac{450}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2 \sinh n\pi} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y). \quad (61)$$

Exercício 17.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (62)$$

A placa da figura 1 tem dimensão 1 por 1. Todas as paredes têm temperatura 0. Os pontos do centro (cor preta) da placa têm temperatura 1 (fixa, não varia com o tempo). Como condição inicial considere todos os pontos que não estão no centro com temperatura 0.

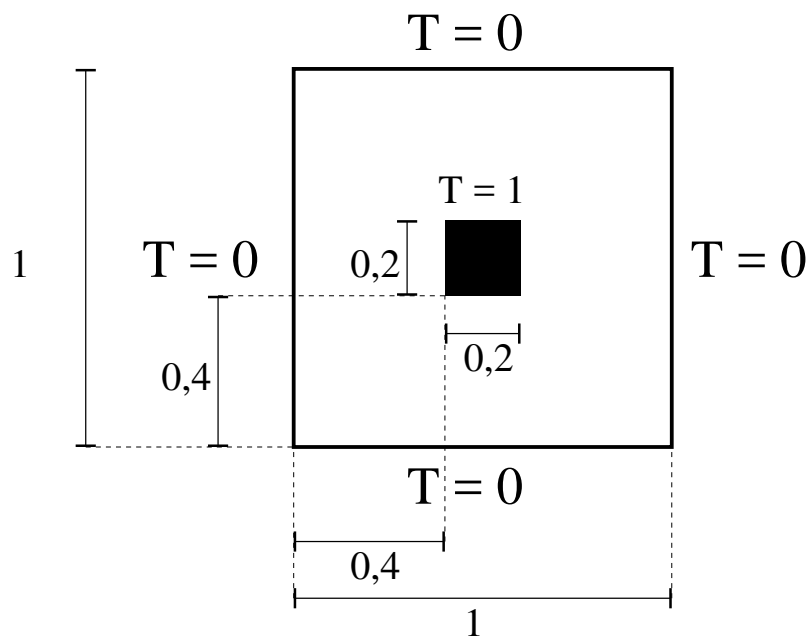


Figura 1: Problema 4.