



# Tópicos Complementares

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Tecnologia

Universidade de Brasília

---

---

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Problema da Convecção Natural</b>	<b>2</b>
2.1	Equação da Energia . . . . .	3
2.2	Aproximação de Boussinesq . . . . .	7
2.3	Equações Governantes . . . . .	8
2.4	Adimensionalização . . . . .	8
2.5	Implementação Numérica: Método de Projeção . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Entrada e Saída de Fluido</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Problema do Degrau</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Método de Projeção de Primeira Ordem Implícito</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Método de Projeção de Segunda Ordem</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Formulação Vorticidade-Função de Corrente</b>	<b>20</b>
7.1	Equações Governantes . . . . .	20
7.2	Aproximação Usando Diferenças Finitas . . . . .	21
7.3	Restrições . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Cálculo da Ordem do Método</b>	<b>23</b>

---

---

## 1 Introdução

Nesta aula são discutidos alguns tópicos complementares que serão a base para a elaboração do artigo científico. Os tópicos são abordados de forma introdutória e em cada um deles são apresentadas referências para aqueles leitores que queiram se aprofundar no tema.

## 2 Problema da Convecção Natural

O objetivo aqui é apresentar o problema de **convecção natural bidimensional** para o caso de uma cavidade quadrada de lado  $L$ , representada na figura (1). A parede esquerda é mantida a uma temperatura fixa  $T_H$  e a parede direita é mantida a  $T_C$ , com  $T_H > T_C$ , durante todo o processo. As paredes de cima e de baixo são isoladas termicamente, ou seja,  $\dot{Q} = 0$  nessas paredes. Resolver esse problema significa obter as distribuições de velocidade e temperatura dentro da cavidade, assim como obter o número de Nusselt. Vamos começar com a dedução das equações governantes.

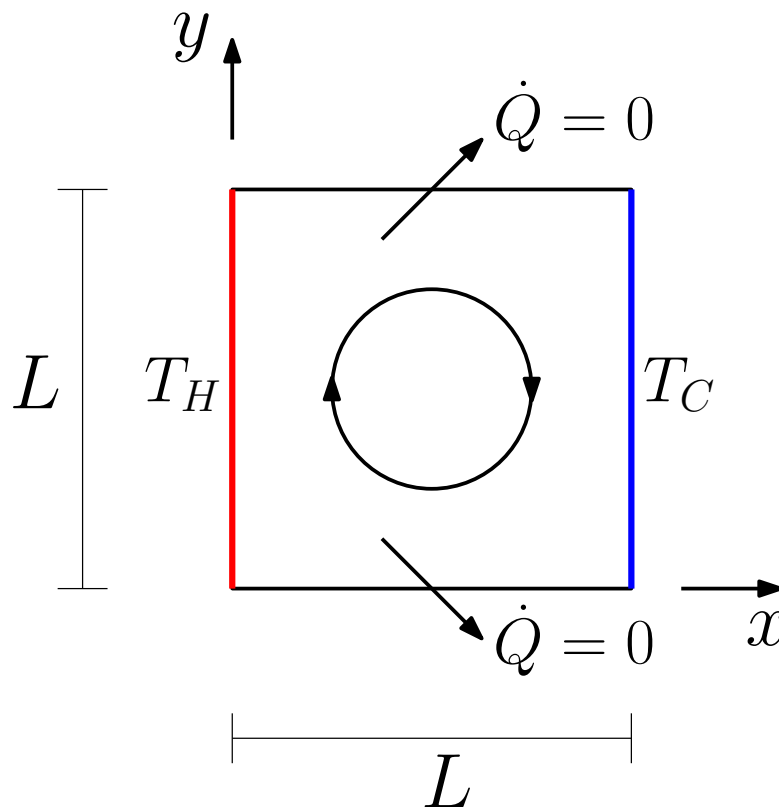


Figura 1: Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada.

## 2.1 Equação da Energia

A energia de um sistema é dada por

$$E = E_{int} + \frac{m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2} , \quad (1)$$

em que  $m$  é a massa,  $\mathbf{u}$  é a velocidade e

$$E_{int} = mcT \quad (2)$$

representa a energia interna, onde  $T$  é a temperatura e  $c$  é o calor específico do material. A energia específica, ou energia por unidade de massa, é dada por

$$e = cT + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} = cT + \frac{u^2}{2} . \quad (3)$$

Primeira lei da Termodinâmica para um sistema: a taxa de variação de energia do sistema é igual ao calor que chega ao sistema somado ao trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema. Na forma de equação, temos

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} , \quad (4)$$

em que  $\dot{Q}$  é a quantidade de calor que chega ao sistema por unidade de tempo e  $\dot{W}$  é o trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema. Assim, temos

$$\dot{Q} = - \int_S (\dot{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = - \int_V (\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}) dV . \quad (5)$$

Na equação (5) foi usado o teorema da divergência para obter a segunda igualdade. Aqui,  $\dot{\mathbf{q}}$  é o vetor fluxo de calor. Usando a lei de Fourier

$$\dot{\mathbf{q}} = -k \nabla T \quad (6)$$

na equação (5) e considerando a condutividade térmica do fluido,  $k$ , constante, resulta:

$$\dot{Q} = \int_V \nabla \cdot (k \nabla T) dV = \int_V k \nabla^2 T dV . \quad (7)$$

O trabalho, por sua vez, é dado por

$$\dot{W} = \int_V (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dV + \int_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} dS . \quad (8)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões, e representa as forças superficiais que são aplicadas no sistema, por unidade de área. A componente  $\sigma_{ij}$  atua no plano  $i$  e na direção  $j$ . Para um fluido Newtoniano,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} , \quad (9)$$

em que  $p$  é a pressão,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade,  $\mu$  é a viscosidade do fluido (constante) e

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad (10)$$

é o tensor taxa de deformação. Usando o teorema da divergência:

$$\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dS = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV . \quad (11)$$

Então, o trabalho pode ser reescrito como:

$$\dot{W} = \int_V (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV . \quad (12)$$

A energia do sistema é:

$$E = \int_V \rho e dV . \quad (13)$$

Assim, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = \dot{Q} + \dot{W} . \quad (14)$$

Usando o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = \int_V \left[ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e \right] dV = \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV . \quad (15)$$

Assim:

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_V k \nabla^2 T dV + \int_V (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV . \quad (16)$$

Ou:

$$\int_V \left[ \rho \frac{De}{Dt} - k \nabla^2 T - (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \right] dV = 0 . \quad (17)$$

Como a integral na equação (17) é zero para qualquer limite de integração, podemos concluir que o integrando é nulo sempre, pelo Teorema da Localização. Assim:

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= k \nabla^2 T + (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \\ &= k \nabla^2 T + (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u}) . \end{aligned} \quad (18)$$

Substituindo a expressão para a energia específica:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} + \frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} = k \nabla^2 T + (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u}) . \quad (19)$$

A equação de Cauchy é dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} . \quad (20)$$

Fazendo o produto escalar da equação de Cauchy por  $\mathbf{u}$  resulta:

$$\frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) . \quad (21)$$

Substituindo (21) em (19):

$$\rho c \frac{DT}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) = k \nabla^2 T + (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u}) . \quad (22)$$

Assim:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u}) . \quad (23)$$

Considerando um fluido Newtoniano, temos

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + (-p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}) : (\nabla \mathbf{u}) . \quad (24)$$

Ou:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} . \quad (25)$$

Mas  $\mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} : \mathbf{D}$ . Considerando um fluido incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), temos:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + 2\mu (\mathbf{D} : \mathbf{D}) . \quad (26)$$

O último termo dessa equação,

$$\Phi = 2\mu D_{ij} D_{ij} , \quad (27)$$

é chamado de função de dissipação viscosa. Em muitos escoamentos,  $\Phi$  é muito menor do que os outros termos da equação (neste trabalho vamos assumir essa hipótese). Portanto, a equação para a energia é dada por:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \alpha \nabla^2 T . \quad (28)$$

Aqui,  $\alpha = k/(\rho c)$  é a difusividade térmica e tem unidade de  $m^2/s$  no SI.

#### Comentários:

- a velocidade interfere no campo de temperatura, pois aparece no termo advectivo da equação (28);

- o trabalho total do tensor de tensões é dado por:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u}) \quad (29)$$

O primeiro termo do lado direito da equação contribui para uma variação na energia cinética do elemento, como pode ser observado na equação (21). O segundo termo contribui para um aumento na energia interna, ou seja, para um aumento de temperatura, como pode ser visto na equação (23).

**Número de Nusselt.** A lei de resfriamento por convecção de Newton, para o caso estudado no presente trabalho, é dada por:

$$\dot{Q} = h (T_H - T_C) , \quad (30)$$

em que  $\dot{Q}$  é a taxa de transferência de calor por convecção por unidade de área e  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção. O número de Nusselt  $Nu$  é o coeficiente de transferência de calor adimensionalizado:

$$Nu = \frac{hL_c}{k} . \quad (31)$$

Como nas paredes o fluido está em repouso, o calor é transmitido apenas por condução, ou seja,

$$\dot{Q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} , \quad (32)$$

na parede esquerda, por exemplo.  $\dot{Q} = 0$  nas paredes de cima e de baixo, já que estas são termicamente isoladas. Esse calor que chega da parede esquerda por condução é transferido por convecção no fluido, de maneira que temos a igualdade:

$$\dot{Q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h (T_H - T_C) . \quad (33)$$

Isolando  $h$ :

$$h = - \frac{k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}}{(T_H - T_C)} . \quad (34)$$

Substituindo (34) em (31) resulta:

$$Nu = - \frac{k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}}{(T_H - T_C)} \frac{L_c}{k} . \quad (35)$$

No caso em que o fluido está em repouso, ou seja, temos transferência apenas por condução pelo meio, resulta que  $Nu = 1$ .

## 2.2 Aproximação de Boussinesq

A variação de temperatura leva a uma variação de massa específica que faz aparecer uma força de empuxo. Precisamos relacionar a variação de temperatura  $T$  com a variação de massa específica  $\rho$ . A propriedade que nos dá essa relação é o coeficiente de expansão volumétrica  $\beta$ , definido como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P . \quad (36)$$

$\beta$  é uma propriedade do fluido e o subíndice  $P$  indica que essa definição é válida para pressão constante. Fazendo uma aproximação da equação (36), podemos reescrevê-la como:

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho_o} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{(\rho - \rho_o)}{(T - T_o)} . \quad (37)$$

$\rho_o$  e  $T_o$  representam a massa específica e a temperatura do fluido longe da parede (ou em alguma configuração de referência), respectivamente. Assim,  $\rho$  e  $T$  são pequenos desvios de  $\rho_o$  e  $T_o$ . Isolando  $\rho$  em (37) temos:

$$\rho = \rho_o - \beta \rho_o \Delta T . \quad (38)$$

A equação de Navier-Stokes é:

$$\rho_o \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} . \quad (39)$$

Substituindo a relação (38) na equação (39), resulta:

$$\rho_o \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_o \mathbf{g} - \rho_o \mathbf{g} \beta (T - T_o) . \quad (40)$$

Considerando que a aceleração gravitacional é dada por

$$\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{e}}_y , \quad (41)$$

e definindo uma nova pressão como sendo

$$p^* = p + \rho_o g y , \quad (42)$$

temos

$$\rho_o \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_o g \beta (T - T_o) \hat{\mathbf{e}}_y . \quad (43)$$

Nessa equação já foi usada a nova pressão (sem o asterisco). Note que a força extra que aparece atua apenas na direção  $y$ , que é a direção da aceleração gravitacional. Ao conjunto de passos que leva à equação (43) é dado o nome de aproximação de Boussinesq [1, 2].

## 2.3 Equações Governantes

As equações governantes desse problema são a equação da conservação de massa (fluido incompressível),

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (44)$$

a equação de Navier-Stokes com a correção de Boussinesq,

$$\rho_o \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_o g \beta (T - T_o) \hat{\mathbf{e}}_y , \quad (45)$$

e a equação da energia (temperatura),

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \alpha \nabla^2 T . \quad (46)$$

Nas equações,  $\alpha = k/(\rho_o c)$ ,  $T_o$  é uma temperatura de referência e  $\rho_o$  é a massa específica do fluido nessa temperatura. No nosso problema específico, a temperatura de referência é  $T_C$ .

## 2.4 Adimensionalização

Para adimensionalizar as equações governantes do problema, (44), (45) e (46), vamos utilizar  $L$  como um comprimento característico,  $\alpha/L$  como uma velocidade característica,  $L^2/\alpha$  como um tempo característico e  $\rho_o \alpha^2/L^2$  como uma pressão característica. Assim, as grandezas características usadas para adimensionalizar as equações são:

$$L_c = L , \quad u_c = \frac{\alpha}{L} , \quad t_c = \frac{L^2}{\alpha} \quad \text{e} \quad p_c = \rho_o \frac{\alpha^2}{L^2} . \quad (47)$$

As variáveis adimensionais são:

$$\nabla^* = L \nabla \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_c} = \mathbf{u} \frac{L}{\alpha} , \quad t^* = t \frac{\alpha}{L^2} \quad p^* = p \frac{p_c}{\rho_o \alpha^2} , \quad \theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C} . \quad (48)$$

Note que  $\theta$  é a temperatura adimensional. Substituindo essas variáveis de volta nas equações governantes resulta:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 , \quad (49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + Pr \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ra Pr \theta \hat{\mathbf{e}}_y \quad (50)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta = \nabla^{*2} \theta . \quad (51)$$

Na equação (50),



$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho_o}{k/(\rho_o c)} = \frac{\mu c}{k} \quad (52)$$

é o número de Prandtl e

$$Ra = \frac{g\beta (T_H - T_C) L_c^3}{\nu\alpha} \quad (53)$$

é o número de Rayleigh.

## 2.5 Implementação Numérica: Método de Projeção

As equações que devem ser resolvidas são (já na forma adimensional)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Ra Pr \theta \hat{\mathbf{e}}_y \quad e \quad (55)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \nabla^2 \theta. \quad (56)$$

A figura (2) mostra o problema proposto na forma adimensional. A velocidade possui valor zero em todas as paredes. Para a temperatura, as condições de contorno são:

- $\theta = 1$  para a parede esquerda;
- $\theta = 0$  para a parede direita;
- $\dot{Q} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$  para as paredes de cima e de baixo.

Uma maneira de resolver numericamente essas equações governantes é por meio do método de projeção, acoplado com o método de diferenças finitas para aproximar as derivadas. Os passos para resolver as equações são:

$$\text{PASSO 1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k = Pr \nabla^2 \mathbf{u}^k + Ra Pr \theta^k \hat{\mathbf{e}}_y \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\text{PASSO 2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{\Delta t} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \theta^k = \nabla^2 \theta^k \\ \theta = 1 \text{ em } x = 0; \theta = 0 \text{ em } x = 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1 \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\text{PASSO 3} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \nabla p^{k+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (59)$$

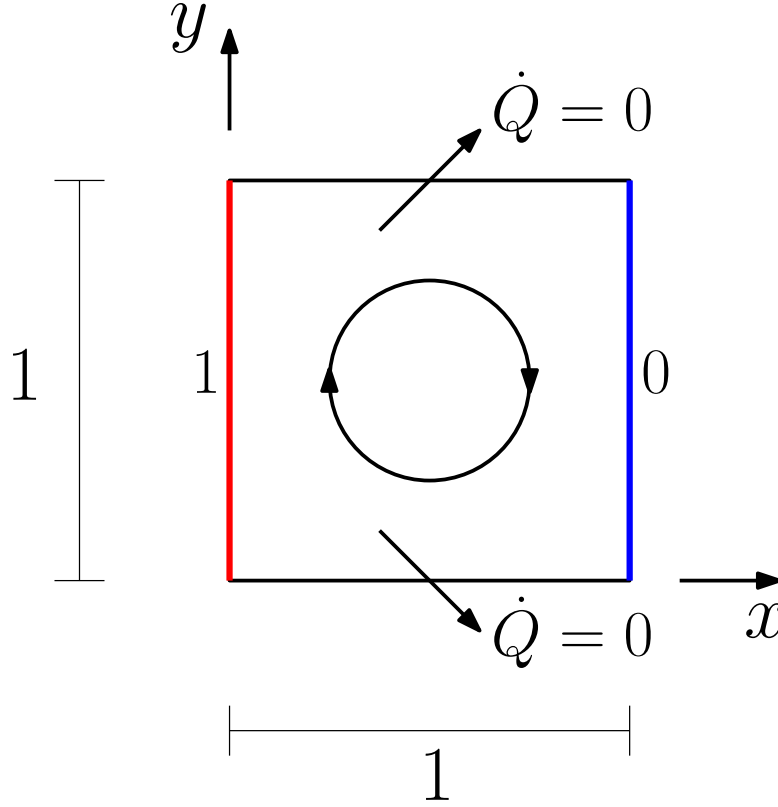


Figura 2: Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada. Problema adimensional.

$$\text{PASSO 4 } \{ \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{k+1} \quad (60)$$

**Posição da temperatura:** usando uma malha defasada, a temperatura pode ser posicionada no centro do elemento, no mesmo local onde se encontra a pressão.

**Número de Nusselt.** Na forma adimensional, a equação (35) é dada por:

$$Nu = - \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} . \quad (61)$$

Esse é o número de Nusselt local, ou seja, para cada valor  $y$  da parede esquerda. O número de Nusselt médio  $Nu_m$  é dado por:

$$Nu_m = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dy . \quad (62)$$

### 3 Entrada e Saída de Fluido

Muitos problemas em fluidos envolvem a entrada e a saída de fluido de um domínio. Para entendermos como essas condições de contorno são implementadas, vamos considerar o escoamento de um fluido entre duas placas planas paralelas, como mostra a

figura (3). Vamos considerar como base a metodologia desenvolvida para o problema da cavidade cisalhante. As paredes de cima e de baixo são sólidas e estão paradas. As condições de contorno aqui serão iguais às da cavidade, sendo necessário apenas zerar a velocidade da tampa. Ou seja, para as paredes sólidas, temos

$$u = v = 0$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

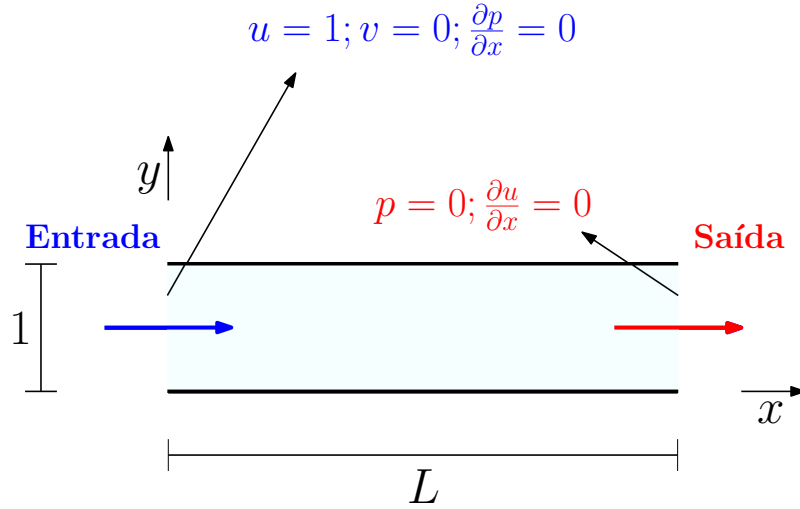


Figura 3: Escoamento entre placas planas, com entrada e saída de fluido.

O que era a parede esquerda da cavidade agora se torna a entrada de fluido. Na entrada nós vamos especificar a velocidade e “liberar” a pressão. Dessa forma, vamos impor

$$u = 1 , v = 0$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Assim, a condição de contorno para a pressão na entrada é a mesma da parede sólida. Assim, não é preciso alterar a equação da pressão nessa parede. Para  $v$  também não é necessário alterar nada, já que continua zero. É preciso alterar apenas as condições para  $u$ , já que agora  $u = 1$ .

Na saída, nós vamos fazer o oposto: vamos “liberar” as velocidades e vamos fixar a pressão. Assim, na saída as condições de contorno são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

e

$$p = 0 .$$

Agora é necessário modificar as equações das 3 incógnitas nas proximidades da saída. Muito cuidado com a pressão: é necessário alterar as equações do método SOR.

Para testar, faça simulações com  $Re = 100$  e  $L = 10$ . Use 100 pontos na direção  $x$  e 10 na direção  $y$ , com um  $\Delta t$  de 0.01. Você vai observar a região de entrada e depois uma convergência do escoamento para o perfil parabólico. Compare seus resultados com a solução analítica.

## 4 Problema do Degrau

Um problema com entrada e saída bem interessante é o problema do degrau, representado na figura (4). Agora, na superfície da esquerda, temos metade sendo entrada e metade sendo parede sólida. Nesse caso você deve aplicar as condições de contorno de parede para  $0 \leq y \leq 0.5$  e as condições de contorno de entrada de fluido para  $0.5 < y \leq 1$ .

O resultado é bem complexo, com o aparecimento de uma recirculação em baixo, próximo da entrada e, para  $Re$  maiores, uma segunda recirculação em cima, a jusante da entrada. Um valor de interesse é o tamanho da primeira recirculação que se forma após o degrau. Você pode comparar os seus resultados com outros resultados numéricos da literatura [3, 4] ou com resultados experimentais [5]. Aqui  $L$  deve ser pelo menos 15 para que você tenha bons resultados. As figuras (5) e (6) mostram o resultado para  $Re = 400$ , sendo a segunda um gráfico de contorno da pressão.

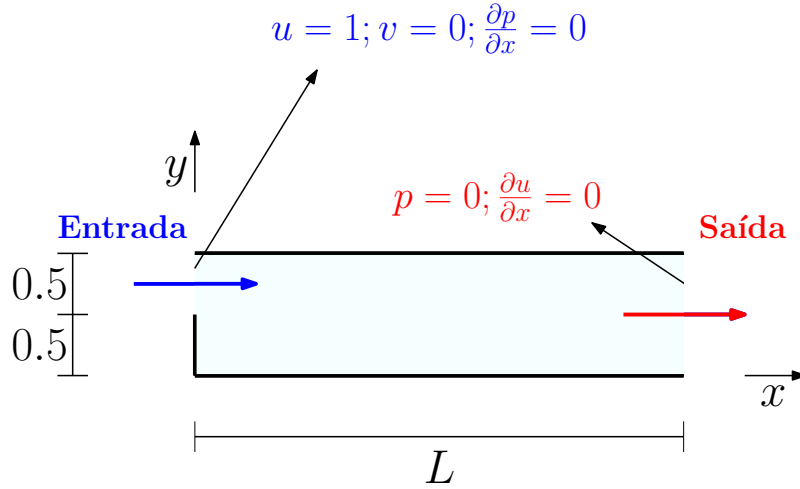


Figura 4: Escoamento com degrau, com entrada e saída de fluido.

## 5 Método de Projeção de Primeira Ordem Implícito

Uma desvantagem do Método de Projeção de Primeira Ordem Explícito, que foi o que vimos no estudo do Problema da Cavidade Cisalhante, é que há uma restrição no passo de tempo  $\Delta t$  causada pelo termo difusivo. Uma das maneiras de contornar esse obstáculo é implementando a versão implícita desse método:

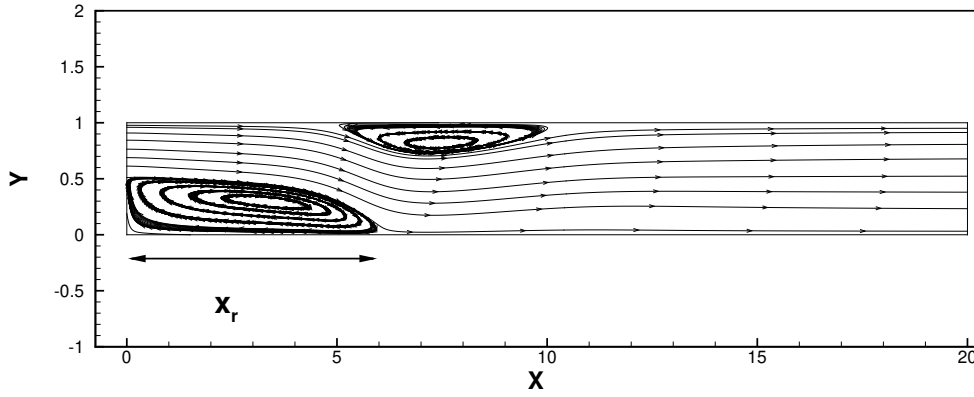


Figura 5: Linhas de corrente do escoamento com degrau, para  $Re = 400$ . Foram usados 400 pontos na direção  $x$  e 50 na direção  $y$ .

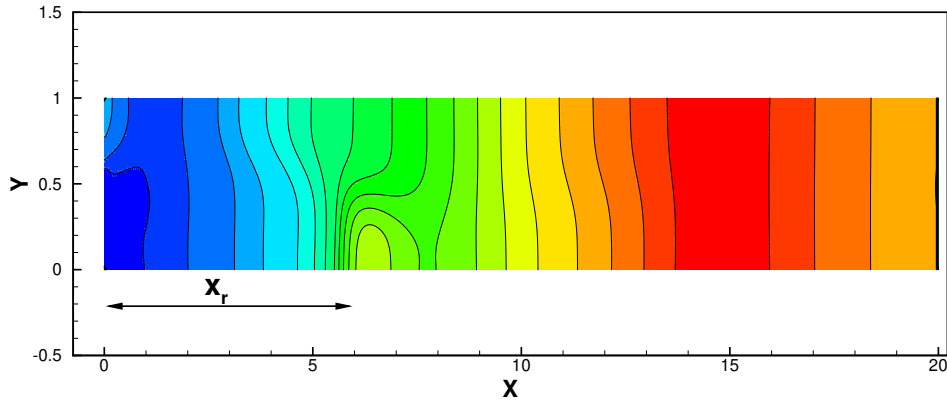


Figura 6: Campo de pressão do escoamento com degrau, para  $Re = 400$ . Foram usados 400 pontos na direção  $x$  e 50 na direção  $y$ .

$$\text{PASSO 1} \begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (63)$$

$$\text{PASSO 2} \begin{cases} \nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \nabla p^{k+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (64)$$

$$\text{PASSO 3} \{ \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{k+1} \quad (65)$$

Agora, porém, faz-se necessário resolver 3 sistemas de equações lineares em cada passo de tempo: um para  $u_{star}$ , um para  $v_{star}$  e um para a pressão  $p$ . Nesta seção vamos ver uma metodologia para implementar esse método, usando uma malha defasada.

Para  $u_{star}$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{u_{star}[i, j] - u[i, j]}{\Delta t} + u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) = \\ \frac{1}{Re} \left[ \frac{u_{star}[i+1, j] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. \frac{u_{star}[i, j+1] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right], \end{aligned} \quad (66)$$

em que

$$C_1 = \frac{1}{4} [v[i, j+1] + v[i-1, j+1] + v[i, j] + v[i-1, j]]. \quad (67)$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} u_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{u_{star}[i+1, j] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. \frac{u_{star}[i, j+1] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right] = \\ = u[i, j] - \Delta t \left\{ u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) \right. \\ \left. + C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

Ou:

$$\begin{aligned} u_{star}[i, j] \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right] = \\ = u[i, j] - \Delta t \left\{ u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right\} \\ + \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{u_{star}[i+1, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u_{star}[i, j+1] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Com isso, conseguimos isolar  $u_{star}[i, j]$ . Usando o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver um sistema de equações lineares, podemos escrever, após algumas operações de soma e subtração de  $u_{star}$  no lado direito da equação (69),

$$u_{star}[i, j] \leftarrow u_{star}[i, j] + R, \quad (70)$$

em que  $R$  é o incremento em cada iteração para encontrar o  $u_{star}$  correto. A partir

da equação (69),  $R$  é dado por:

$$R = \lambda \left\{ \left[ u[i, j] - \Delta t u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ u_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{u_{star}[i+1, j] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u_{star}[i, j+1] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}, \quad (71)$$

em que

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}. \quad (72)$$

As condições de contorno são aplicadas diretamente à  $u_{star}$ . Assim,  $u_{star}[i, -1] = -u_{star}[i, 0]$  e  $u_{star}[i, N_y] = 2U[i] - u_{star}[i, N_y - 1]$ . Essas condições devem ser substituídas na equação (71), com atenção ao fato de que o valor de  $\lambda$  também se altera. Os detalhes podem ser encontrados no algoritmo (1).

O procedimento para a obtenção de  $v_{star}$  é análogo. A equação, em sua versão implícita, é dada por:

$$\frac{v_{star}[i, j] - v[i, j]}{\Delta t} + C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) = \frac{1}{Re} \left[ \frac{v_{star}[i+1, j] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{v_{star}[i, j+1] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right]. \quad (73)$$

Nessa equação,  $C_2$  corresponde ao valor de  $u$  interpolado:

$$C_2 = \frac{1}{4} [u[i+1, j] + u[i, j] + u[i+1, j-1] + u[i, j-1]]. \quad (74)$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} v_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{v_{star}[i+1, j] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{v_{star}[i, j+1] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right] = \\ = v[i, j] - \Delta t \left\{ C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Ou:

$$\begin{aligned}
 v_{star}[i, j] & \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right] = \\
 & = v[i, j] - \Delta t \left\{ C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right\} \\
 & + \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{v_{star}[i+1, j] + v_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{v_{star}[i, j+1] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right].
 \end{aligned} \tag{76}$$

Com isso, conseguimos isolar  $v_{star}[i, j]$ . Usando o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver um sistema de equações lineares, podemos escrever, após algumas operações de soma e subtração de  $v_{star}$  no lado direito da equação (76),

$$v_{star}[i, j] \leftarrow v_{star}[i, j] + R, \tag{77}$$

em que  $R$  é o incremento em cada iteração para encontrar o  $v_{star}$  correto. A partir da equação (76),  $R$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 R = \lambda & \left\{ \left[ v[i, j] - \Delta t C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] \right. \\
 & - \left[ v_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{v_{star}[i+1, j] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{v_{star}[i, j+1] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \left. \right\},
 \end{aligned} \tag{78}$$

em que

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}. \tag{79}$$

As condições de contorno são aplicadas diretamente à  $v_{star}$ . Assim,  $v_{star}[-1, j] = -v_{star}[0, j]$  e  $v_{star}[N_x, j] = -v_{star}[N_x - 1, j]$ . Essas condições devem ser substituídas na equação (78), com atenção ao fato de que o valor de  $\lambda$  também se altera. Os detalhes podem ser encontrados no algoritmo (2).

No caso do método implícito apresentado nesta seção, o algoritmo completo para resolver o problema da cavidade é igual ao algoritmo (??), com a diferença de que agora  $u_{star}$  é dado pelo algoritmo (1) e  $v_{star}$  pelo algoritmo (2).



---

**Algorithm 1** Calculate  $u_{star}$ 

---

**INPUT:**  $u_{star}, u, v, N_x, N_y, \Delta x, \Delta y, \Delta t, tol$ **OUTPUT:**  $u_{star}$ 

error = 100

**while** error > tol **do**

R-max = 0

**for** i = 1,  $N_x - 1$  **do****for** j = 0,  $N_y - 1$  **do**

$$C_1 = \frac{1}{4} [v[i, j+1] + v[i-1, j+1] + v[i, j] + v[i-1, j]]$$

**if** j = 0 **then**

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{3\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}$$

$$R = \lambda \left\{ \left[ u[i, j] - \Delta t u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ u_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{u_{star}[i+1, j] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u_{star}[i, j+1] - 3u_{star}[i, j] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}$$

**else if** j =  $N_y - 1$  **then**

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{3\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}$$

$$R = \lambda \left\{ \left[ u[i, j] - \Delta t u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ u_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{u_{star}[i+1, j] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{2u[i] - 3u_{star}[i, j] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}$$

**else**

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}$$

$$R = \lambda \left\{ \left[ u[i, j] - \Delta t u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t C_1 \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ u_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{u_{star}[i+1, j] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u_{star}[i, j+1] - 2u_{star}[i, j] + u_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}$$

**end if**

$$u_{star}[i, j] \leftarrow u_{star}[i, j] + R$$

**if** |R| > R-max **then**

$$R-max \leftarrow |R|$$

**end if****end for****end for**

$$error \leftarrow R-max$$

**end while**

---

---

**BOUNDARY UPDATE:**

```
for j = 0, Ny - 1 do
  ustar[0, j] = 0
  ustar[Nx, j] = 0
end for
for i = 0, Nx do
  ustar[i, -1] = -ustar[i, 0]
  ustar[i, Ny] = 2U[i] - ustar[i, Ny - 1]
end for
```

---

## 6 Método de Projeção de Segunda Ordem

O erro associado aos métodos de projeção de primeira ordem, explícito e implícito, são de primeira ordem no tempo e de segunda ordem no espaço. Nesta seção é apresentado um método de projeção de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço. Este método foi desenvolvido por Bell, Colella e Glaz [6] e modificado por Brown, Cortez e Minion [7]. Os passos para a implementação desse método são:

$$\text{PASSO 1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{k+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1/2} = \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^k) - \nabla p^{k-1/2} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \text{ em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (80)$$

$$\text{PASSO 2} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \nabla \phi^{k+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (81)$$

$$\text{PASSO 3} \left\{ \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{k+1} \right. \quad (82)$$

$$\text{PASSO 4} \left\{ p^{k+1/2} = p^{k-1/2} + \phi^{k+1} - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 \phi^{k+1} \right. \quad (83)$$

Note que agora existe uma função  $\phi$ , que tem um comportamento parecido com a pressão  $p$ . Os termos advectivos no passo 1 são obtidos por meio de uma interpolação no tempo dada por:

$$f^{k+1/2} = \frac{3}{2} f^k - \frac{1}{2} f^{k-1}. \quad (84)$$

Dessa forma, apenas o termo difusivo fica implícito na equação (80) e o sistema de equações algébricas resultante é linear. Três sistemas de equações lineares devem ser resolvidos em cada passo de tempo: um para  $u_{star}$ , um para  $v_{star}$  e um para  $\phi$ . A pressão é obtida em um instante de tempo intermediário entre  $k$  e  $k + 1$ .




---

**Algorithm 2** Calculate  $v_{star}$

---

**INPUT:**  $u, v, N_x, N_y, \Delta x, \Delta y, \Delta t, tol$

**OUTPUT:**  $v_{star}$

error = 100

**while** error > tol **do**

    R-max = 0

**for**  $i = 0, N_x - 1$  **do**

**for**  $j = 1, N_y - 1$  **do**

$$C_2 = \frac{1}{4} [u[i+1, j] + u[i, j] + u[i+1, j-1] + u[i, j-1]]$$

**if**  $i = 0$  **then**

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{3\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}$$

$$R = \lambda \left\{ \left[ v[i, j] - \Delta t C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ v_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{v_{star}[i+1, j] - 3v_{star}[i, j]}{\Delta x^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{v_{star}[i, j+1] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}$$

**else if**  $i = N_x - 1$  **then**

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{3\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}$$

$$R = \lambda \left\{ \left[ v[i, j] - \Delta t C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ v_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{-3v_{star}[i, j] + v_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{v_{star}[i, j+1] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}$$

**else**

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2} \right]^{-1}$$

$$R = \lambda \left\{ \left[ v[i, j] - \Delta t C_2 \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] - \left[ v_{star}[i, j] - \frac{\Delta t}{Re} \left( \frac{v_{star}[i+1, j] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i-1, j]}{\Delta x^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{v_{star}[i, j+1] - 2v_{star}[i, j] + v_{star}[i, j-1]}{\Delta y^2} \right) \right] \right\}$$

**end if**

$v_{star}[i, j] \leftarrow v_{star}[i, j] + R$

**if**  $|R| > R\text{-max}$  **then**

            R-max  $\leftarrow |R|$

**end if**

**end for**

**end for**

  error  $\leftarrow R\text{-max}$

**end while**

---

---

**BOUNDARY UPDATE:**

```
for j = 0, Ny do
  vstar[-1, j] = -vstar[0, j]
  vstar[Nx, j] = -vstar[Nx - 1, j]
end for
for i = 0, Nx - 1 do
  vstar[i, 0] = 0
  vstar[i, Ny] = 0
end for
```

---

## 7 Formulação Vorticidade-Função de Corrente

Vamos abordar o problema da cavidade cisalhante quadrada, de lado  $L$  e tampa se movendo com velocidade  $U_0$ , usando a formulação vorticidade-função de corrente.

### 7.1 Equações Governantes

As equações governantes para esse problema são a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (85)$$

e a equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} . \quad (86)$$

Usando a intensidade de velocidade  $U_0$  e o tamanho  $L$  da cavidade, as equações acima podem ser adimensionalizadas. O resultado é (todas as variáveis já estão na forma adimensional):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (87)$$

e

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} , \quad (88)$$

em que

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} \quad (89)$$

é o número de Reynolds. O domínio para essa forma adimensional é  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$  e a velocidade da parede superior se torna  $U(x) = 1$ .

Em vez de resolvermos diretamente  $u$ ,  $v$  e  $p$ , que são chamadas de variáveis primitivas, vamos resolver o problema nas variáveis vorticidade  $\omega$  e função de corrente  $\Psi$ . A equação da continuidade é satisfeita automaticamente se definirmos  $\Psi$  como:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} . \quad (90)$$

A vorticidade, no caso bidimensional, por sua vez, é dada por:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \Psi . \quad (91)$$

O rotacional da equação de Navier-Stokes fornece uma equação para a vorticidade:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) . \quad (92)$$

Usando a definição de  $\Psi$  na equação acima, resulta:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) . \quad (93)$$

Assim, temos duas equações (91 e 93) e duas incógnitas ( $\omega$  e  $\Psi$ ). Esse é o novo sistemas de equações que iremos resolver usando diferenças finitas.

## 7.2 Aproximação Usando Diferenças Finitas

Para resolver numericamente as equações (91) e (93), o domínio é discretizado com  $N$  espaços na direção  $x$  e  $N$  espaços na direção  $y$ . Os incrementos espaciais são  $\Delta x = \Delta y = 1/N$ . A função de corrente  $\Psi(x, y, t)$  é aproximada pela sua equivalente numérica  $\Psi(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t) = \Psi_{i,j}^k$ , com  $0 \leq i, j \leq N$  e  $k \geq 0$ . O mesmo vale para a vorticidade  $\omega$ . Note que neste caso a malha não é deslocada: as variáveis  $\omega$  e  $\Psi$  estão no mesmo lugar do domínio numérico, que corresponde às quinas das células computacionais.

Usando a aproximação de diferenças finitas, a equação da vorticidade se torna:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i,j}^{k+1} - \omega_{i,j}^k}{\Delta t} + \left( \frac{\Psi_{i,j+1}^k - \Psi_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^k - \omega_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \right) \\ - \left( \frac{\Psi_{i+1,j}^k - \Psi_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^k - \omega_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) = \\ = \frac{1}{Re} \left( \frac{\omega_{i+1,j}^k - 2\omega_{i,j}^k + \omega_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{\omega_{i,j+1}^k - 2\omega_{i,j}^k + \omega_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right) . \end{aligned} \quad (94)$$

A equação que relaciona a função de corrente e a vorticidade, por sua vez, pode ser escrita como:

$$\frac{\Psi_{i+1,j}^{k+1} - 2\Psi_{i,j}^{k+1} + \Psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^{k+1} - 2\Psi_{i,j}^{k+1} + \Psi_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2} = -\omega_{i,j}^{k+1} . \quad (95)$$

Portanto, em cada passo tempo, primeiro calculamos diretamente o novo  $\omega$ , que é o  $\omega_{i,j}^{k+1}$ . Em seguida usamos a equação (95) e o novo valor de  $\omega$  para calcular  $\Psi_{i,j}^{k+1}$ .

A condição de contorno para  $\Psi$  é:  $\Psi_{i,j} = 0$  para todos os pontos que estejam em alguma das paredes. Assim,  $\Psi_{i,j} = 0$  se  $i = 0$ , ou se  $i = N$ , ou se  $j = 0$ , ou se  $j = N$ .

A condição inicial para  $\Psi$  é  $\Psi_{i,j}^0 = 0$  para todos os pontos do domínio.

Já a condição de contorno para  $\omega$  é atualizada em todo passo de tempo e é específica para cada parede:

Parede inferior ( $j = 0$ ):

$$\omega_{i,0}^k = \frac{2(\Psi_{i,0}^k - \Psi_{i,1}^k)}{\Delta y^2} \quad (96)$$

Parede superior ( $j = N$ ):

$$\omega_{i,N}^k = \frac{2(\Psi_{i,N}^k - \Psi_{i,N-1}^k)}{\Delta y^2} - \frac{2U_i}{\Delta y} \quad (97)$$

Parede esquerda ( $i = 0$ ):

$$\omega_{0,j}^k = \frac{2(\Psi_{0,j}^k - \Psi_{1,j}^k)}{\Delta x^2} \quad (98)$$

Parede direita ( $i = N$ ):

$$\omega_{N,j}^k = \frac{2(\Psi_{N,j}^k - \Psi_{N-1,j}^k)}{\Delta x^2} \quad (99)$$

Essas condições são válidas para todos os instantes de tempo  $k$ , para  $k \geq 0$ . Assim, a condição inicial para  $\omega$  é:

$$\omega_{ij}^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq N; \\ -\frac{2U_i}{\Delta y} & \text{se } j = N. \end{cases} \quad (100)$$

### 7.3 Restrições

Para evitar instabilidades numéricas, devemos obedecer às seguintes restrições quanto aos tamanhos do passo de tempo  $\Delta t$  e do incremento espacial  $\Delta x$ :

$$\Delta t < \Delta x ,$$

$$\Delta x < \frac{1}{Re}$$

e

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2 . \quad (101)$$

## 8 Cálculo da Ordem do Método

É sempre bom checar os resultados que estamos obtendo numericamente. Não podemos simplesmente confiar nos números que o computador exporta apenas porque é um computador. É importante ter um bom conhecimento sobre o problema que está sendo investigado, sobre como seria a solução esperada e também sobre quais seriam os tipos de resultados absurdos (concentração negativa, temperatura absoluta negativa, velocidade muito alta, etc).

Um resultado numérico tem erros causados pela precisão de máquina e pela aproximação discreta, além de poder ter erros humanos, gerados no momento da implementação (erro de programação ou erro de conta, por exemplo). Por isso precisamos apurar se o código implementado fornece resultados confiáveis.

Para saber se os resultados numéricos são válidos, podemos compará-los com resultados analíticos, numéricos ou experimentais. Apenas por uma questão de nomenclatura, quando comparamos com resultados analíticos (para casos simples) ou numéricos (já consagrados na literatura), estamos verificando o nosso código. Já quando comparamos com resultados experimentais estamos validando.

Uma forma de investigar os resultados e ver se eles estão se comportando bem é por meio de uma análise de convergência de malha. Isso é feito a partir da resolução de um mesmo problema com malhas cada vez mais finas: a solução deve convergir para um valor constante à medida em que  $\Delta t$  (ou  $\Delta x$ ) tende a zero.

Outra forma é a partir de uma análise da ordem do método implementado. A ordem é a taxa na qual o erro do método numérico diminui na medida em que o passo de tempo (ou o tamanho da malha) se aproxima de zero. Vimos, ao longo do curso, diferentes métodos numéricos. Alguns eram  $O(\Delta t)$ , outros  $O(\Delta t^2)$ . No espaço, vimos métodos  $O(\Delta x)$  e  $O(\Delta x^2)$ . Na prática, podemos testar a ordem para ver se a implementação foi feita de forma correta e se o código se comporta realmente na ordem esperada.

Vamos ver como a ordem é calculada. Considere  $h$  como sendo o parâmetro relacionado à discretização do domínio temporal ou espacial. Assim,  $h$  pode ser o tamanho da malha ( $\Delta x$  ou  $\Delta y$ ) ou o tamanho do passo de tempo ( $\Delta t$ ). A solução exata para um dado problema é  $f$ , enquanto a solução numérica aproximada, usando  $h$  como parâmetro, é dada por  $f_h$ .

O erro é a diferença entre o valor numérico e o exato. Se o método é de ordem  $p$ , podemos dizer que

$$|f_h - f| \approx Ch^p,$$

em que  $C$  é uma constante. Dividindo  $h$  por dois e resolvendo o mesmo problema, encontramos um outro resultado, que chamaremos de  $f_{h/2}$ . Assim,

$$|f_{h/2} - f| \approx C \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^p}.$$

Da mesma forma, para  $h/4$  temos

$$|f_{h/4} - f| \approx C \left(\frac{h}{4}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^{2p}}.$$

Nas raras situações em que conhecemos a solução exata do problema, podemos calcular a ordem do método comparando as soluções usando  $h$  e  $h/2$ . Isso é feito da seguinte forma:

$$\frac{f_h - f}{f_{h/2} - f} \approx \frac{Ch^p}{Ch^p/2^p} = 2^p . \quad (102)$$

Nas situações mais comuns, quando não temos uma solução exata, podemos calcular a ordem do método usando os resultados das malhas  $h$ ,  $h/2$  e  $h/4$ :

$$\frac{f_h - f_{h/2}}{f_{h/2} - f_{h/4}} \approx \frac{Ch^p - \frac{Ch^p}{2^p}}{\frac{Ch^p}{2^p} - \frac{Ch^p}{2^{2p}}} = \frac{Ch^p - \frac{Ch^p}{2^p}}{\frac{1}{2} \left( \frac{Ch^p}{2^p} - \frac{Ch^p}{2^{2p}} \right)} = 2^p . \quad (103)$$

Assim, é possível calcular a ordem do método usando os resultados de 3 simulações diferentes. Uma observação importante é que muitas vezes a ordem teórica só é alcançada quando  $h$  é muito pequeno.

Todo o material desta seção foi retirado do livro de diferenças finitas do Leveque [8].



## Referências

- [1] A. Bejan. *Convection Heat Transfer*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 4th edition, 2013.
- [2] Y. Cengel and A. Ghajar. *Heat and Mass Transfer*. McGraw Hill Education, New York, 5th edition, 2015.
- [3] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59:308–323, 1985.
- [4] G. Biswas, M. Breuer, and F. Durst. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluid Engineering*, 126:362–374, 2004.
- [5] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, and B. Schonung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 127:473–496, 1983.
- [6] J. B. Bell, P. Colella, and H. M. Glaz. A Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 85:257–283, 1989.
- [7] D. L. Brown, R. Cortez, and M. L. Minion. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 168:464–499, 2001.
- [8] R. J. Leveque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 1st edition, 2007.