



Cavidade Cisalhante: Implementação com Diferenças Finitas e Método de Projeção

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Tecnologia

Universidade de Brasília

Sumário

1	Dedução das Equações Governantes	2
1.1	Equação da Conservação da Massa	3
1.2	Equação do Balanço de Quantidade de Movimento	7
2	Equações Adimensionalizadas	12
3	Detalhes do Problema Proposto	12
4	Aproximação Usando Diferenças Finitas	13
5	Método de Projeção de Primeira Ordem Explícito	14
5.1	Implementação com Malha Tradicional (não defasada): Não Funciona Muito Bem .	15
5.2	Implementação com Malha Defasada (<i>staggered grid</i>): <i>É o que Vamos Usar</i>	16
5.3	Programando	20
5.4	Restrições em Δt e Δx	22
5.5	Função de Corrente	23
5.6	Algoritmos	23
5.7	Detalhes da Implementação em Python	29
6	Material para Referência	30

O problema da **cavidade cisalhante bidimensional** é apresentado na figura (1). A cavidade é quadrada, de lado L , e está preenchida com um fluido newtoniano incompressível. As paredes laterais e inferior estão estacionárias, enquanto a parede superior se move com uma velocidade $U(x)$. O sistema de coordenadas adotado tem origem no vértice inferior esquerdo da cavidade. O fluido considerado é newtoniano e incompressível. Resolver esse problema significa encontrar o valor da pressão

$$p = p(x, y, t) \quad (1)$$

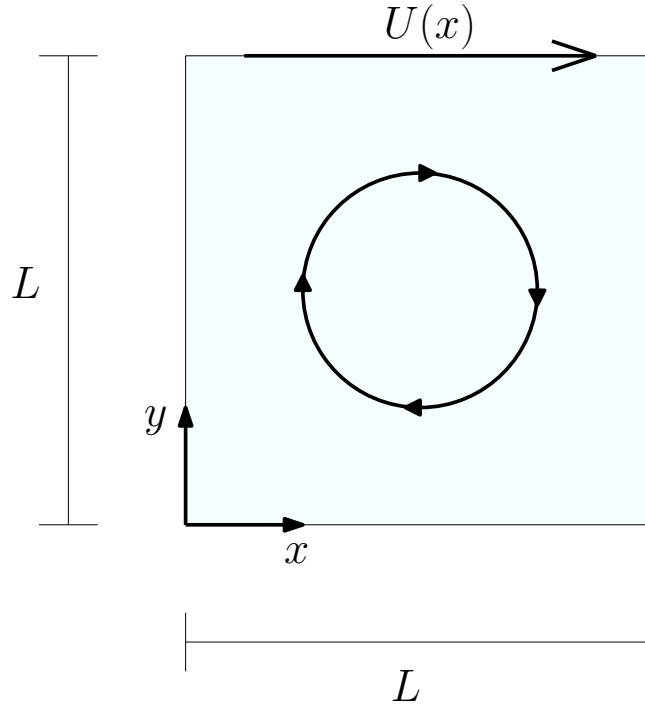


Figura 1: Representação do problema da cavidade cisalhante.

e do vetor velocidade

$$\mathbf{u} = u(x, y, t)\hat{\mathbf{e}}_x + v(x, y, t)\hat{\mathbf{e}}_y \quad (2)$$

em todos os pontos da cavidade e em diferentes instantes de tempo t .

Os objetivos principais aqui neste roteiro são:

- resolver este problema (**escoamento bidimensional** de um fluido **newtoniano incompressível** em uma **cavidade** com a parede superior se movendo) usando o **método de projeção** e o **método das diferenças finitas**;
- simular alguns casos, com diferentes números de Reynolds e com cavidades retangulares.

Vamos começar com uma dedução das equações governantes. Depois veremos a adimensionalização dessas equações e a ideia por trás do Método de Projeção. Por fim, vamos ver os detalhes da resolução numérica das equações finais, por meio dos algoritmos.

1 Dedução das Equações Governantes

Vamos considerar um **Volume de Controle** (VC) fixo, de lados Δx e Δy , centrado no ponto (x, y) , como mostra a figura (2) (obs.: na verdade temos uma “Superfície de Controle”, pois estamos considerando o caso bidimensional; porém vamos manter o nome VC apenas por comodidade). Os pontos nos centros de cada lado estão representados na figura também. É nesses pontos que vamos calcular as propriedades que estão entrando e saindo do VC.

Vamos estudar aqui nesse trabalho o caso bidimensional. A generalização para problemas tridimensionais pode ser feita a partir da dedução apresentada aqui.

As **equações governantes** do movimento do fluido são obtidas a partir das leis de **conservação da massa** e de **balanço da quantidade de movimento** (a famosa 2ª Lei de Newton). Com essas equações vamos calcular numericamente os valores da pressão p e das componentes do vetor velocidade, u e v , em cada ponto do domínio.

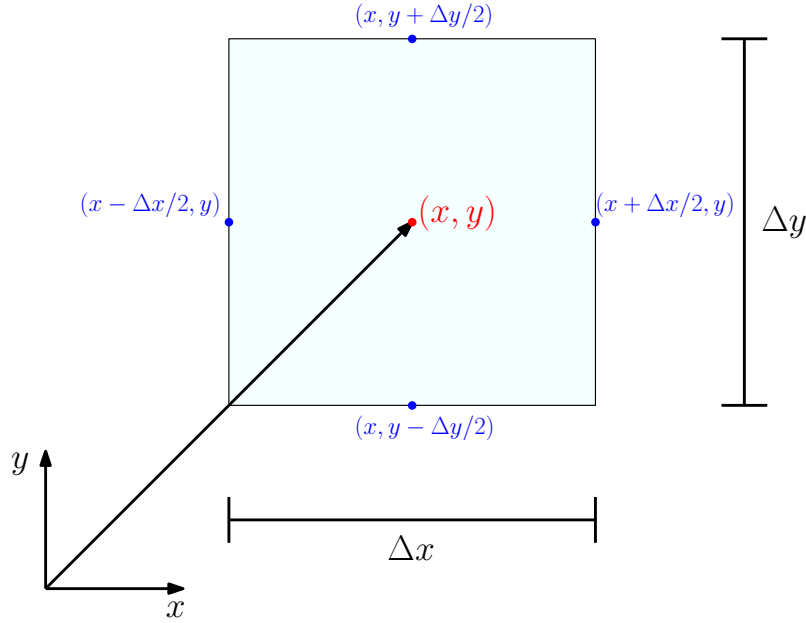


Figura 2: Volume de Controle.

Vamos começar a dedução dessas equações. Essa dedução pode ser encontrada nos livros do White [1] e do Çengel [2].

1.1 Equação da Conservação da Massa

A equação da conservação de massa para um sistema nos diz que a massa se conserva, ou seja:

$$\frac{dm}{dt} = 0 . \quad (3)$$

A massa pode ser escrita como sendo o produto entre a **massa específica** ρ (também conhecida como **densidade**, dependendo do livro) e o volume do sistema,

$$m = \rho \Delta x \Delta y (\Delta z) . \quad (4)$$

Vamos estudar o caso bidimensional aqui. O Δz não será incluído nas próximas equações, mas ele está sempre presente (outra forma é pensarmos que todas as propriedades extensivas aqui apresentadas estão por unidade de comprimento).

A massa específica é uma propriedade do material e, a princípio, pode depender da posição e do tempo,

$$\rho = \rho(x, y, t) . \quad (5)$$

Queremos deduzir as equações que governam o movimento de um fluido usando **VCs**. Para isso, temos que **adaptar** a lei da conservação de massa, que é válida, na forma como está, apenas para **sistemas**. Em um VC:

$$\text{Variação da Massa Dentro do VC} = \text{Fluxo de Massa que Entra} - \text{Fluxo de Massa que Sai} . \quad (6)$$

Ou

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y = \dot{m}_{\text{entrando}} - \dot{m}_{\text{saindo}} . \quad (7)$$

Aqui, \dot{m} representa o fluxo de massa entrando ou saindo do VC. Esse fluxo para dentro e para fora do VC é causado pelo **próprio escoamento**, nas fronteiras do VC (essa é a principal diferença

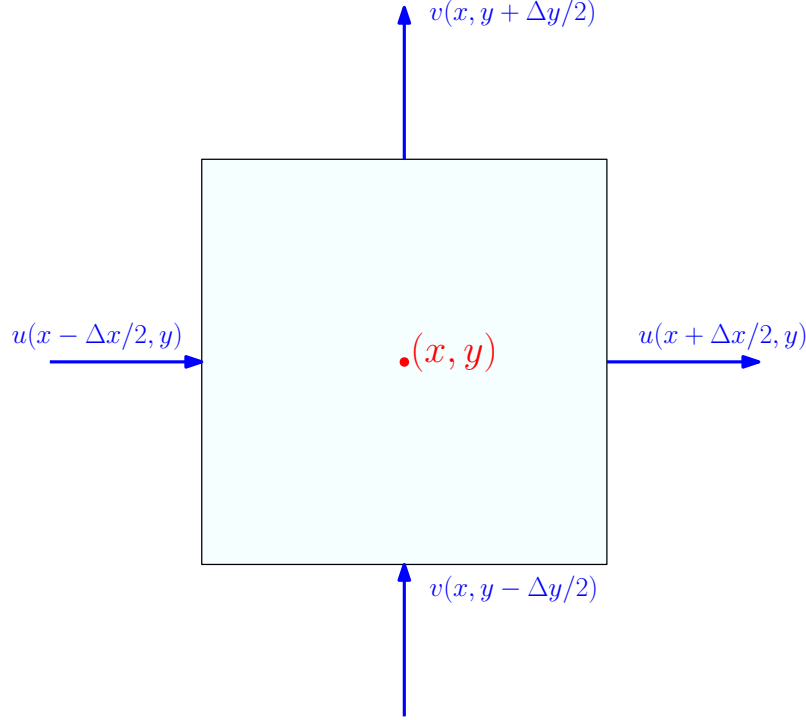


Figura 3: Velocidades nos lados do VC.

para os problemas de condução de calor pura: aqui o escoamento carrega as propriedades, além de termos também difusão). Na abordagem por meio da análise de **sistemas** (para os quais as leis foram apresentadas) não há entrada e saída de massa do volume estudado; na abordagem por meio de **volumes de controle** há entrada e saída de fluido. Por isso temos que adaptar as leis: para podermos levar em consideração essa entrada e saída. A figura (3) mostra as velocidades nos lados do VC.

Na direção x , o fluxo de massa entrando em um dado instante de tempo t , considerando a velocidade no ponto central do lado esquerdo, é

$$\rho(x - \Delta x/2, y)u(x - \Delta x/2, y)\Delta y, \quad (8)$$

e o fluxo de massa saindo é

$$\rho(x + \Delta x/2, y)u(x + \Delta x/2, y)\Delta y. \quad (9)$$

Agora temos um passo importantíssimo. Vamos **aproximar** o valor das propriedades nos lados do quadrado usando uma **expansão em série de Taylor** a partir do ponto central (x, y) . Temos, assim:

$$\rho(x + \Delta x/2, y) = \rho(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)} + \dots \quad (10)$$

A ideia aqui é diminuirmos o valor de Δx (e Δy também) para que o VC se encolha, aproximando-se de um ponto. Nesse caso, os termos na série da equação (10) que estão multiplicados por Δx^2 , Δx^3 , \dots , ficarão muito pequenos. Iremos **ignorar** esses termos. Assim, aproximaremos o valor de ρ no lado direito como

$$\rho(x + \Delta x/2, y) \approx \rho(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{(x,y)}. \quad (11)$$

Por sua vez, o valor de ρ no lado esquerdo é aproximado como:

$$\rho(x - \Delta x/2, y) \approx \rho(x, y) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{(x,y)}. \quad (12)$$

O mesmo vale para outras propriedades do escoamento, como a componente u da velocidade. Temos

$$u(x + \Delta x/2, y) \approx u(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \quad (13)$$

e

$$u(x - \Delta x/2, y) \approx u(x, y) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} . \quad (14)$$

Assim, o fluxo de massa entrando pelo lado esquerdo, apresentado na equação (8), pode ser reescrito (aproximadamente) como

$$\rho(x - \Delta x/2, y)u(x - \Delta x/2, y)\Delta y \approx \rho(x, y)u(x, y)\Delta y - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta y , \quad (15)$$

enquanto o fluxo de saída pelo lado direito é aproximado por

$$\rho(x + \Delta x/2, y)u(x + \Delta x/2, y)\Delta y \approx \rho(x, y)u(x, y)\Delta y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta y . \quad (16)$$

Aqui, apenas por simplificação de escrita, vamos escrever a propriedade ρu em cada ponto, sendo ρu a nossa nova função (ρu é o produto de ρ por u). Isso vai facilitar as coisas aqui e na dedução da equação de Navier-Stokes também. Além disso, sempre que a função estiver sendo aplicada no ponto (x, y) , vamos omitir essa informação. Assim, as equações (15) e (16) são reescritas como

$$\rho u(x - \Delta x/2, y)\Delta y \approx \rho u\Delta y - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta y \quad (17)$$

e

$$\rho u(x + \Delta x/2, y)\Delta y \approx \rho u\Delta y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta y . \quad (18)$$

Agora, na direção y , o fluxo de massa entrando no VC é dado por

$$\rho v(x, y - \Delta y/2)\Delta x \approx \rho v\Delta x - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \quad (19)$$

e o fluxo saindo é

$$\rho v(x, y + \Delta y/2)\Delta x \approx \rho v\Delta x + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x . \quad (20)$$

Pronto.

Agora podemos voltar na equação (7) e substituir os fluxos de entrada e de saída. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y = & \left[\rho u\Delta y - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta y \right] + \left[\rho v\Delta x - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \right] \\ & - \left[\rho u\Delta y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta y \right] - \left[\rho v\Delta x + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \right] . \end{aligned} \quad (21)$$

Cancelando os termos ρu e ρv e também Δx e Δy , resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} . \quad (22)$$

Passando todo mundo pro lado esquerdo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 . \quad (23)$$

Essa é a **Equação da Conservação de Massa** ou **Equação da Continuidade** em duas dimensões. Essa equação representa a **lei da conservação de massa** quando estamos usando campos (escalares e vetoriais) para estudar o movimento de um fluido (abordagem euleriana).

Em 3 dimensões, a equação (23) se torna

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 , \quad (24)$$

em que w é a componente do vetor velocidade na direção z . Podemos reescrever essa equação usando o operador nabla,

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} . \quad (25)$$

Temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \quad (26)$$

Podemos, ainda, reescrever essa equação abrindo o divergente. Nesse caso,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 , \quad (27)$$

ou, ainda,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 . \quad (28)$$

Aqui,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (29)$$

representa a **derivada material** de uma dada propriedade. É a variação da propriedade quando **acompanhamos** o escoamento, quando acompanhamos o **movimento** de uma partícula de fluido.

Escoamentos incompressíveis são aqueles nos quais

$$\frac{D\rho}{Dt} \ll \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) . \quad (30)$$

Ou seja, a variação da massa específica de uma partícula, quando acompanhamos o seu movimento, é muito pequena comparada ao outro termo da equação (28). Nesses casos, a equação da continuidade se torna

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (31)$$

Em duas dimensões:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (32)$$

Essa é a equação da conservação de massa no caso de um escoamento incompressível. Traduzindo, em um escoamento incompressível não é qualquer campo de velocidade \mathbf{u} que pode representar o escoamento de um fluido real, mas apenas os **campos solenoidais** (campos com divergente nulo).

O escoamento de líquidos pode ser modelado como incompressível, assim como o escoamento de gases em baixas velocidades. (obs.: alguns autores falam em fluidos incompressíveis, outros preferem escoamentos incompressíveis; vou usar as duas maneiras aqui no texto, por achar que não há ambiguidade e nem prejuízo no desenvolvimento e aplicação das equações)

Vamos agora para a equação do balanço de quantidade de movimento, ou segunda lei de Newton.

1.2 Equação do Balanço de Quantidade de Movimento

A **segunda lei de Newton**, para um sistema, é escrita como:

$$\frac{d(mu)}{dt} = \sum \mathbf{F} . \quad (33)$$

Para um sistema, a variação da quantidade de movimento, definida como mu , é igual ao somatório das forças agindo no sistema.

Para o nosso VC, a quantidade de movimento é dada por

$$\rho u \Delta x \Delta y \quad (34)$$

Agora, assim como no caso da conservação de massa, temos que levar em consideração a quantidade de movimento que entra e que sai do VC. Essa é a adaptação que temos que fazer. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Variação da Quantidade de Movimento} &= \text{Quantidade de Movimento Entrando} \\ &- \text{Quantidade de Movimento Saindo} + \text{Forças} \end{aligned} \quad (35)$$

Ou

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \Delta x \Delta y = (\text{qdt de mov})_{\text{entra}} - (\text{qdt de mov})_{\text{sai}} + \sum \mathbf{F} \quad (36)$$

Essa é uma **equação vetorial**, o que significa que teremos duas equações aí (caso bidimensional), sendo uma para cada direção. Vamos deduzir a equação para a direção x .

Temos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \Delta x \Delta y = (\text{qdt de mov})_{\text{entra}, x} - (\text{qdt de mov})_{\text{sai}, x} + \sum F_x \quad (37)$$

Vamos começar pelos termos de entrada e saída de quantidade de movimento. Assim como no caso da massa, o responsável por essa entrada e saída de quantidade de movimento é o próprio escoamento. Quantidade de movimento ρu entra tanto pelo lado esquerdo quanto pelo lado inferior. Nesse caso temos:

$$(\text{qdt de mov})_{\text{entra}, x} = \rho u u(x - \Delta x/2, y) \Delta y + \rho u v(x, y - \Delta y/2) \Delta x . \quad (38)$$

Na equação acima, u no lado esquerdo é responsável por trazer ρu para dentro do VC, enquanto v no lado inferior é responsável por trazer mais ρu para dentro do VC.

De maneira análoga, a quantidade de movimento na direção x , saindo do VC, é dada por

$$(\text{qdt de mov})_{\text{sai}, x} = \rho u u(x + \Delta x/2, y) \Delta y + \rho u v(x, y + \Delta y/2) \Delta x . \quad (39)$$

Usamos uma expansão em série de Taylor para aproximar esses valores. Assim,

$$\rho u u(x - \Delta x/2, y) \approx \rho u u - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} , \quad (40)$$

$$\rho u v(x, y - \Delta y/2) \approx \rho u v - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} , \quad (41)$$

$$\rho u u(x + \Delta x/2, y) \approx \rho u u + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \text{ e} \quad (42)$$

$$\rho u v(x, y + \Delta y/2) \approx \rho u v + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} . \quad (43)$$

Resulta:

$$(\text{qdt de mov})_{\text{entra}, x} - (\text{qdt de mov})_{\text{sai}, x} = - \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} \Delta x \Delta y . \quad (44)$$

Com isso já temos a primeira parte do lado direito da equação (37). Agora precisamos encontrar uma expressão para as **forças** agindo no VC em termos das variáveis de campo. Temos três tipos

de forças agindo no VC, a **força gravitacional** (que é uma força de volume), a **força devido à pressão** e as **forças viscosas** (essas duas últimas chamadas de forças de superfície). Assim:

$$\sum F_x = F_{x,grav} + F_{x,press} + F_{x,visc} . \quad (45)$$

Vamos considerar que o eixo y aponta para cima. Nesse caso, a aceleração gravitacional é

$$\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_y , \quad (46)$$

e a componente da força gravitacional na direção x é

$$F_{x,grav} = \rho(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)\Delta x\Delta y = 0 . \quad (47)$$

Ou seja, não há força gravitacional na direção x .

A pressão atua perpendicularmente aos lados, sendo, por convenção, positiva quando compressiva, como mostra a figura (4). Assim, nas duas laterais, as forças devido à pressão são dadas por

$$F_{x,press} = p(x - \Delta x/2, y)\Delta y - p(x + \Delta x/2, y)\Delta y . \quad (48)$$

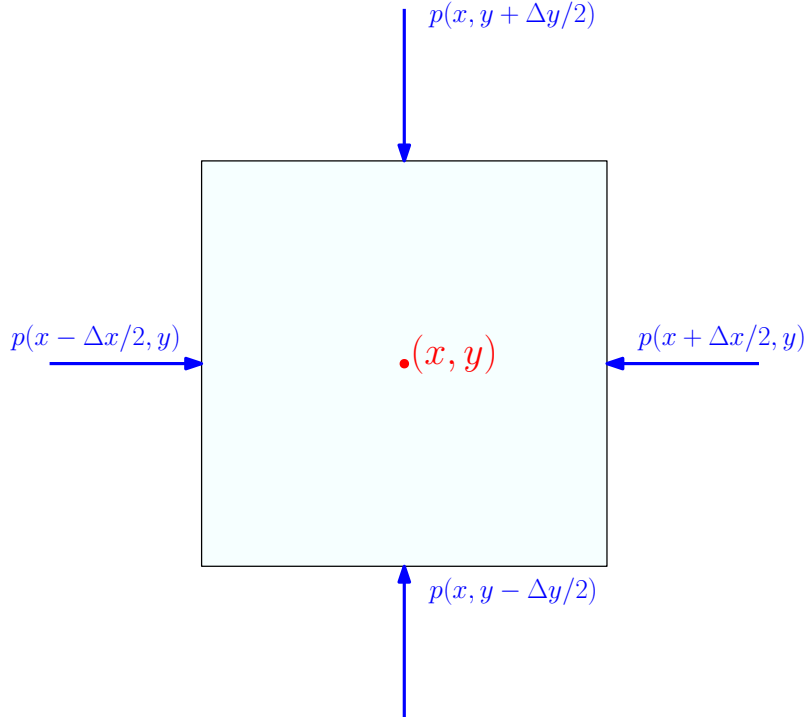


Figura 4: Pressão agindo no VC.

Usando uma expansão em série de Taylor:

$$F_{x,press} = \left[p\Delta y - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta y \right] - \left[p\Delta y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta y \right] . \quad (49)$$

O resultado final para essa força é

$$F_{x,press} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y . \quad (50)$$

As forças viscosas surgem do atrito interno causado pelo deslizamento entre as camadas de fluidos, quando elas se movem umas em relação às outras. Temos aqui forças de superfície, de

curto alcance, que agem nos lados do nosso VC. Essas forças possuem uma componente normal (perpendicular) e uma componente tangencial, em cada lado. Para representar essas componentes usamos um tensor de tensões τ , que é o tensor de tensões viscosas,

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

A força é calculada a partir da multiplicação da componente do tensor de tensões pelo lado (na verdade, aqui seria a área, mas estamos no caso bidimensional). Veja a figura (5). Assim, contabilizando apenas as componentes na direção x , tanto nas paredes laterais quanto nas paredes inferior e superior, temos:

$$F_{x,visc} = -\tau_{xx}(x - \Delta x/2, y)\Delta y + \tau_{xx}(x + \Delta x/2, y)\Delta y \\ - \tau_{yx}(x, y - \Delta y/2)\Delta x + \tau_{yx}(x, y + \Delta y/2)\Delta x. \quad (52)$$

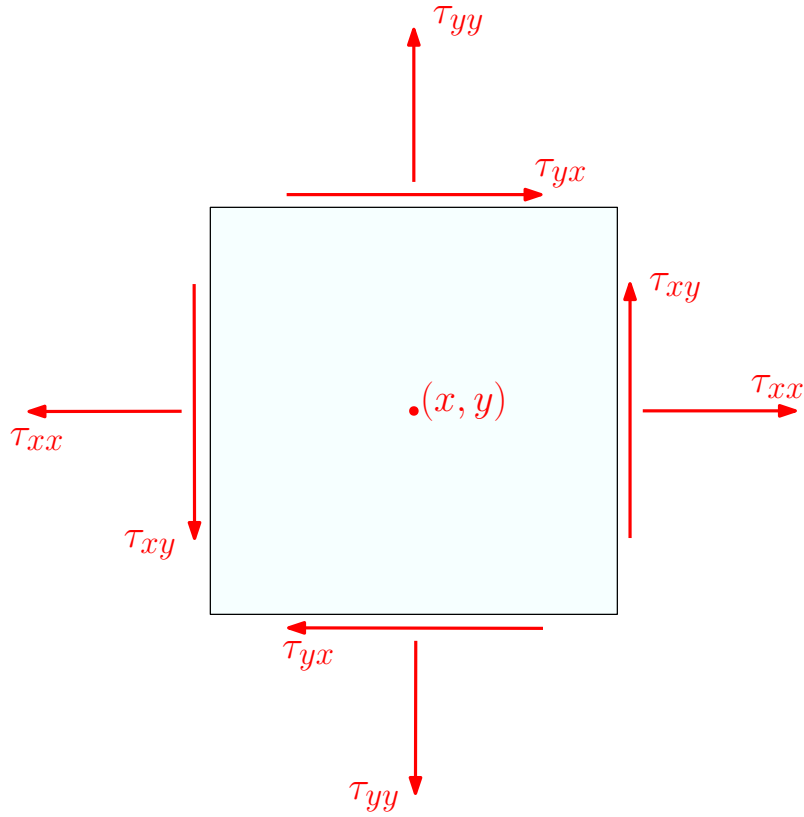


Figura 5: Tensões viscosas no VC.

De modo geral, τ_{ab} é a componente da tensão no plano a e na direção b . Ou seja, τ_{xx} é a componente da tensão no plano x e na direção x , τ_{yx} é a componente da tensão no plano y e na direção x , e assim por diante.

Fazendo uma expansão em série de Taylor para cada termo do lado direito da equação (52), temos:

$$\tau_{xx}(x - \Delta x/2, y) = \tau_{xx} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad (53)$$

$$\tau_{xx}(x + \Delta x/2, y) = \tau_{xx} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad (54)$$

$$\tau_{yx}(x, y - \Delta y/2) = \tau_{yx} - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \text{ e} \quad (55)$$

$$\tau_{yx}(x, y + \Delta y/2) = \tau_{yx} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} . \quad (56)$$

Substituindo de volta essas aproximações na equação (52), resulta:

$$F_{x,visc} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y . \quad (57)$$

Desenvolvemos expressões para as três forças. Vamos agora substituir essas equações (47), (50) e (57) de volta em (37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \Delta x \Delta y = & - \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \\ & - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \\ & + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y . \end{aligned} \quad (58)$$

Cancelando $\Delta x \Delta y$ e passando os termos de quantidade de movimento para o lado esquerdo:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} . \quad (59)$$

Queremos usar essa última equação, a (59), para encontrar a velocidade u , mas apareceram duas novas propriedades, τ_{xx} e τ_{yx} . Para resolver essa equação precisamos de equações para esses termos novos. E é aí que entra a **Lei da viscosidade de Newton**. Essa lei relaciona as **tensões viscosas** com a **viscosidade do fluido** μ (constante) e o **campo de velocidade**:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix} . \quad (60)$$

Ou seja:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} , \quad (61)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \text{ e} \quad (62)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} . \quad (63)$$

Substituindo esses valores em (59):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) . \quad (64)$$

Essa é a nova cara da segunda lei de Newton, na direção x . Vamos trabalhar mais um pouquinho nessa equação, abrindo essas derivadas. Primeiro, o lado esquerdo:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] . \quad (65)$$

Mas o segundo termo entre parênteses é igual a **zero**, pela equação da continuidade, equação (23). Assim:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] . \quad (66)$$

Agora, olhando para o lado direito de (64), vamos abrir as derivadas dos termos viscosos (com a pressão já está tudo certo):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad (67)$$

O segundo termo entre colchetes do lado direito da equação é igual a **zero**, no caso de um **escoamento incompressível**, pela equação (32). Assim:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (68)$$

Substituindo (66) e (68) de volta na equação (64):

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (69)$$

Essa é a equação final pra gente. Essa é a **equação de Navier-Stokes** na direção x .

Para chegar na **equação na direção y** , os passos são análogos. Vou deixar para você essa dedução. O resultado final é

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (70)$$

Agora apareceu o termo da força gravitacional, pois escolhemos o eixo y como sendo “para baixo”. Mas esse termo não vai interferir no escoamento do fluido na cavidade fechada (por quê?), e por isso iremos já desconsiderá-lo.

Temos as nossas três equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (71)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \text{ e} \quad (72)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (73)$$

Essas são as equações governantes do escoamento bidimensional de um fluido newtoniano incompressível. A primeira é a equação da continuidade e as duas últimas são as componentes da equação de Navier-Stokes nas direções x e y , respectivamente.

Temos três equações, (71), (72) e (73), e três incógnitas, p , u e v . O problema aqui é temos uma equação para u , (72), e uma para v , (73), mas não temos uma equação explícita para p . A pressão em escoamentos incompressíveis garante que o escoamento seja incompressível, ou seja, garante que a igualdade na equação (71) seja satisfeita. Usaremos essa equação, a (71), para criarmos uma “equação” para a pressão (essa é a ideia do método de projeção). Veremos isso daqui a pouco.

Podemos reescrever as equações (71), (72) e (73) na forma vetorial como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ e} \quad (74)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (75)$$

2 Equações Adimensionalizadas

Para adimensionalizar as equações governantes do problema, (74) e (75), vamos utilizar L (tamanho da cavidade) como um comprimento característico, U (velocidade máxima na parede superior) como uma velocidade característica, L/U como um tempo característico e ρU^2 como uma pressão característica. Assim, as grandezas características usadas para adimensionalizar as equações são:

$$L_c = L, \quad u_c = U, \quad t_c = \frac{L}{U} \quad \text{e} \quad p_c = \rho U^2. \quad (76)$$

As variáveis adimensionais, representadas com um asterisco, são:

$$\nabla^* = L \nabla \quad \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad t^* = t \frac{U}{L} \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}. \quad (77)$$

Substituindo essas variáveis de volta nas equações governantes, resulta:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{e} \quad (78)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{u}^*. \quad (79)$$

O parâmetro que aparece na equação (79) é o número de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}. \quad (80)$$

A adimensionalização das equações deixa o problema mais geral, mostrando-nos que o comportamento do fluido é governado, nesse problema, pelo número de Reynolds, essa combinação dos parâmetros, e não pelas propriedades U , ρ , μ e L individualmente.

Atenção: daqui pra frente, todas as variáveis desse roteiro são adimensionais. Por isso vamos deixar de usar os asteriscos apenas por comodidade. As equações que vamos resolver numericamente, em sua forma final, são escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (81)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{e} \quad (82)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (83)$$

Nessa versão adimensional, a cavidade tem tamanho 1, como mostra a figura (6).

3 Detalhes do Problema Proposto

Queremos encontrar $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ e $p(x, y, t)$ em cada ponto do domínio para um determinado número de Re e em um determinado tempo t . As equações governantes, em duas dimensões, se reduzem a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (84)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{e} \quad (85)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (86)$$

Na forma vetorial, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad (87)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} . \quad (88)$$

O problema abordado neste trabalho é o do **escoamento bidimensional de um fluido newtoniano incompressível** confinado em uma cavidade quadrada de lado unitário, como mostra a **figura (6)**. As paredes laterais e a parede inferior estão paradas. O domínio Ω para essa forma adimensional é $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e vamos considerar a velocidade da parede superior como sendo $U(x) = 1$. As **condições de contorno** para o problema são as condições de não escorregamento e de impenetrabilidade nas paredes, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para as paredes laterais e para a parede inferior e $\mathbf{u} = 1\hat{\mathbf{e}}_x$ para a parede superior.

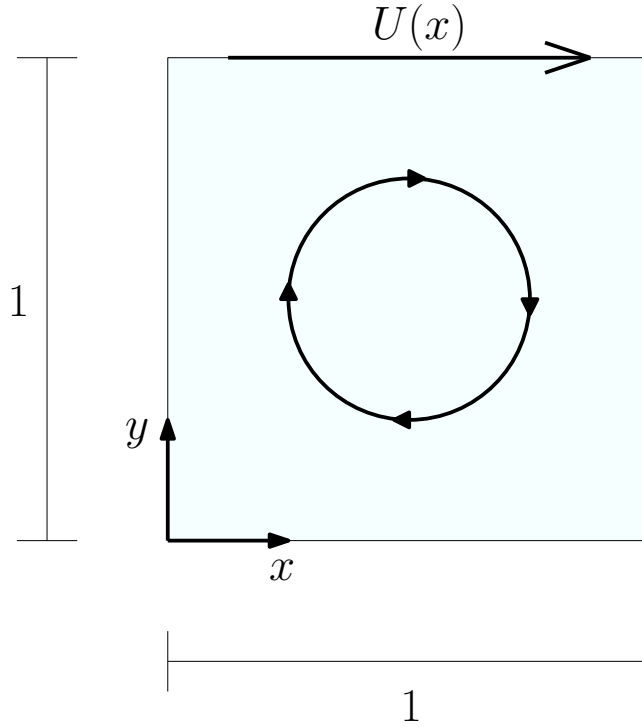


Figura 6: Escoamento em uma cavidade bidimensional.

4 Aproximação Usando Diferenças Finitas

As equações (87) e (88), discretizadas com relação ao tempo, podem ser escritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad (89)$$

e

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k = -\nabla p^{k+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^k . \quad (90)$$

Aqui, f^k aproxima o valor da função f no instante de tempo $k\Delta t$, em que Δt é o passo de tempo. A ideia seria usar a equação (90) para evoluir as componentes u e v no tempo e, simultaneamente, encontrar uma pressão p^{k+1} que satisfaça a equação (89). Porém, isso não é muito eficiente pois **não temos uma equação explícita para a pressão**, apenas uma equação restritiva que impõe certas condições ao campo de velocidade do escoamento.

5 Método de Projeção de Primeira Ordem Explícito

O método de projeção foi desenvolvido por Chorin [3] e Temam [4]. Em vez de tentar satisfazer simultaneamente a restrição de incompressibilidade e a equação de Navier-Stokes, **o método de projeção consiste em dois passos**. Primeiramente, a restrição de incompressibilidade e o termo da pressão são ignorados. Uma velocidade intermediária \mathbf{u}^* (o asterisco aqui não indica adimensional, já que todas as variáveis já são adimensionais; o asterisco é para indicar essa velocidade intermediária) é calculada usando a equação de Navier-Stokes (sem o termo de pressão). Essa velocidade intermediária \mathbf{u}^* não é necessariamente **solenoidal** (ou seja, seu divergente não é necessariamente nulo) e não tem significado físico. Depois, \mathbf{u}^* é projetada de volta no espaço de campos vetoriais incompressíveis, e com isso obtemos \mathbf{u}^{k+1} e p^{k+1} . Essa velocidade \mathbf{u}^{k+1} é a nova velocidade, e possui significado físico. Em resumo, o método de projeção desacopla o cálculo de \mathbf{u}^{k+1} e p^{k+1} .

O procedimento pode ser esquematizado como:

$$\text{PASSO 1} \quad \begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^k + \Delta t \left(-\mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^k \right) \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (91)$$

$$\text{PASSOS 2 e 3} \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{k+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0 \\ \nabla p^{k+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (92)$$

Aqui, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ é o domínio e $\partial\Omega$ representa a fronteira do domínio (as quatro paredes da cavidade). A condição de contorno física para a velocidade é representada por \mathbf{u}_b .

Esse é o método de projeção de primeira ordem no tempo. A combinação dos dois passos apresentados nas equações (91) e (92) equivale à discretização apresentada na equação (90). Para mostrar isso, basta substituir a relação

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{k+1} + \Delta t \nabla p^{k+1} \quad (93)$$

na equação (91), tendo como resultado a própria equação (90).

Dada a equação (92), que corresponde ao passo 2 do método de projeção, como calcular a nova pressão? A ideia é aplicar o divergente à equação (93):

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} + \nabla \cdot (\Delta t \nabla p^{k+1}) . \quad (94)$$

O objetivo principal do método de projeção é garantir que \mathbf{u}^{k+1} seja solenoidal. Assim, impondo $\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0$ em (94), resulta

$$\nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* , \quad (95)$$

ou seja, **a imposição de que o novo campo vetorial de velocidade seja solenoidal fornece uma equação de Poisson para a pressão**, cujo termo fonte é o divergente do campo de velocidade intermediário \mathbf{u}^* .

Com isso, a implementação numérica do método de projeção se resume a:

1. calcular \mathbf{u}^* usando a equação (91) juntamente com as condições de contorno para a velocidade aplicadas a \mathbf{u}^* .
2. calcular a nova pressão p^{k+1} usando a equação (95) e as condições de contorno de Neumann homogêneas, dadas em (92).
3. calcular a nova velocidade \mathbf{u}^{k+1} com a equação (93).

Os três passos podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\text{PASSO 1} \begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^k + \Delta t \left(-\mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^k \right) \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (96)$$

$$\text{PASSO 2} \begin{cases} \nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \nabla p^{k+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (97)$$

$$\text{PASSO 3} \begin{cases} \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{k+1} \end{cases} \quad (98)$$

Os detalhes para a implementação numérica desses três passos são apresentados nas próximas seções.

5.1 Implementação com Malha Tradicional (não defasada): Não Funciona Muito Bem

Considere uma discretização espacial usando uma malha tradicional, como mostra a figura (7). A figura representa uma malha com $N_x = 5$ espaços na direção x e $N_y = 5$ espaços na direção y . Neste exemplo, o tamanho de cada célula numérica é $\Delta x = 1/N_x = 1/5$ e $\Delta y = 1/N_y = 1/5$. Para essa malha, a solução numérica $u_{i,j}^k$ aproxima a solução verdadeira u no ponto $x = i\Delta x$ e $y = j\Delta y$ e no tempo $t = k\Delta t$, ou seja,

$$u_{i,j}^k \approx u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t). \quad (99)$$

De maneira análoga,

$$v_{i,j}^k \approx v(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t) \quad e \quad (100)$$

$$p_{i,j}^k \approx p(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t). \quad (101)$$

Usando derivadas centrais de segunda ordem para o espaço, as equações de diferenças para u e v são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^* - u_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k \left(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^k \left(\frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) = \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (102)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^* - v_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k \left(\frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^k \left(\frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) = \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right]. \end{aligned} \quad (103)$$

Da equação (93),

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^* - \Delta t \left(\frac{p_{i+1,j}^{k+1} - p_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta x} \right) \quad (104)$$

e

$$v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^* - \Delta t \left(\frac{p_{i,j+1}^{k+1} - p_{i,j-1}^{k+1}}{2\Delta y} \right). \quad (105)$$

Queremos garantir que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0. \quad (106)$$

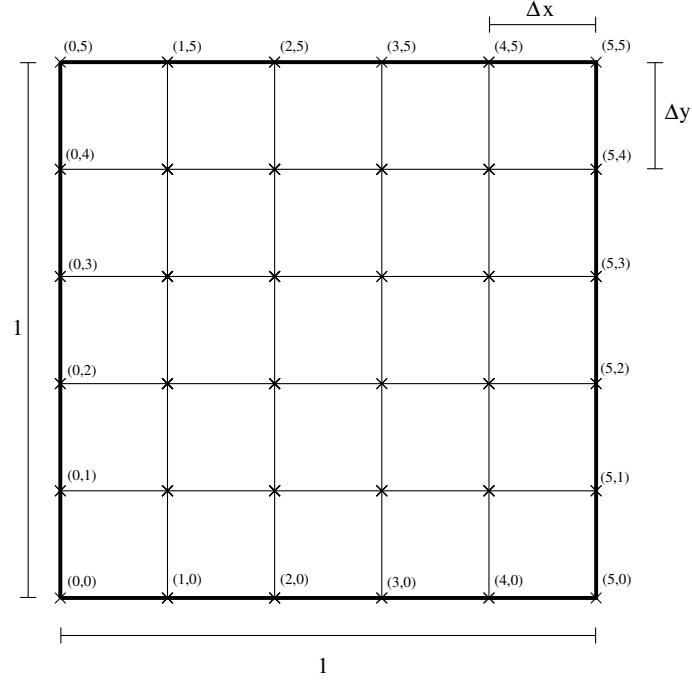


Figura 7: Esquema mostrando uma malha tradicional completa, com $N_x = N_y = 5$. Nesse caso, u , v e p são colocadas no mesmo lugar da malha, denotado no esquema por \times .

Mas

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = \left[\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1}}{2\Delta y} \right]. \quad (107)$$

Assim, substituindo as equações (104) e (105) em (107):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0 = & \frac{1}{2\Delta x} \left[u_{i+1,j}^* - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (p_{i+2,j}^{k+1} - p_{i,j}^{k+1}) - u_{i-1,j}^* + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (p_{i,j}^{k+1} - p_{i-2,j}^{k+1}) \right] \\ & + \frac{1}{2\Delta y} \left[v_{i,j+1}^* - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (p_{i,j+2}^{k+1} - p_{i,j}^{k+1}) - v_{i,j-1}^* + \frac{\Delta t}{2\Delta y} (p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j-2}^{k+1}) \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{4\Delta x^2} [p_{i+2,j}^{k+1} - 2p_{i,j}^{k+1} + p_{i-2,j}^{k+1}] + \frac{\Delta t}{4\Delta y^2} [p_{i,j+2}^{k+1} - 2p_{i,j}^{k+1} + p_{i,j-2}^{k+1}] = \\ \left[\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2\Delta x} \right] + \left[\frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*}{2\Delta y} \right]. \end{aligned} \quad (109)$$

Notamos, observando a equação (109), que o stencil para a pressão é muito grande (usa dois pontos para frente e dois para trás). Além disso, os pontos pares estão desacoplados dos pontos ímpares, o que leva a oscilações na pressão, que não são físicas. Portanto, **resolver o problema do escoamento de um fluido Newtoniano com o método de projeção e diferenças finitas, nessa malha tradicional, não é muito eficiente.**

Uma maneira de contornar esse problema é usando uma **malha defasada**.

5.2 Implementação com Malha Defasada (*staggered grid*): É o que Vamos Usar

Na implementação com malha defasada, u , v e p **não são posicionadas no mesmo local na malha**. A figura (8) mostra o esquema de uma célula na malha defasada, com as posições para

u , v e p . A figura (9) mostra o esquema de uma malha completa, com $N_x = 5$ espaços na direção x e $N_y = 5$ espaçamentos na direção y . Neste exemplo, $\Delta x = 1/N_x = 1/5$ e $\Delta y = 1/N_y = 1/5$. Note a presença de pontos fora do domínio físico da cavidade: esses pontos são chamados de *ghost points* e são usados para auxiliar na **imposição das condições de contorno**. Para a malha defasada, a solução numérica $u_{i,j+\frac{1}{2}}^k$ aproxima a solução verdadeira u no ponto $x = i\Delta x$ e $y = (j + \frac{1}{2})\Delta y$ e no tempo $t = k\Delta t$, ou seja,

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}^k \approx u\left(i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta y, k\Delta t\right). \quad (110)$$

De maneira análoga,

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^k \approx v\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, j\Delta y, k\Delta t\right) \quad (111)$$

$$p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k \approx p\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta y, k\Delta t\right). \quad (112)$$

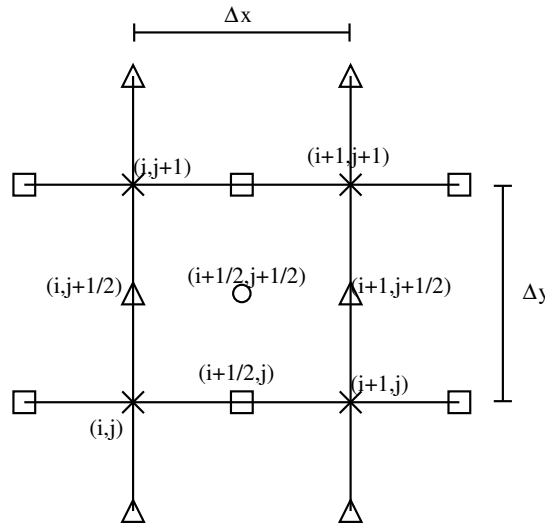


Figura 8: Esquema mostrando uma célula da malha defasada. Triângulo: componente u . Quadrado: componente v . Círculo: pressão p .

A equação (91) para a componente u^* é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^* - u_{i,j+\frac{1}{2}}^k}{\Delta t} + u_{i,j+\frac{1}{2}}^k \left(\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^k}{2\Delta x} \right) + v_{i,j+\frac{1}{2}}^k \left(\frac{u_{i,j+\frac{3}{2}}^k - u_{i,j-\frac{1}{2}}^k}{2\Delta y} \right) = \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^k + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}}^k - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^k + u_{i,j-\frac{1}{2}}^k}{\Delta y^2} \right]. \end{aligned} \quad (113)$$

Na equação (113), precisamos de $v_{i,j+\frac{1}{2}}^k$, que aparece na parte advectiva. O problema é que não temos a componente v no ponto $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$. Para isso, interpolamos usando os quatro vizinhos de v , da seguinte maneira:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{4} \left[v_{i+\frac{1}{2},j+1}^k + v_{i-\frac{1}{2},j+1}^k + v_{i+\frac{1}{2},j}^k + v_{i-\frac{1}{2},j}^k \right]. \quad (114)$$

Para v^* temos:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^* - v_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\Delta t} + u_{i+\frac{1}{2},j}^k \left(\frac{v_{i+\frac{3}{2},j}^k - v_{i-\frac{1}{2},j}^k}{2\Delta x} \right) + v_{i+\frac{1}{2},j}^k \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - v_{i+\frac{1}{2},j-1}^k}{2\Delta y} \right) = \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{v_{i+\frac{3}{2},j}^k - 2v_{i+\frac{1}{2},j}^k + v_{i-\frac{1}{2},j}^k}{\Delta x^2} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - 2v_{i+\frac{1}{2},j}^k + v_{i+\frac{1}{2},j-1}^k}{\Delta y^2} \right]. \end{aligned} \quad (115)$$

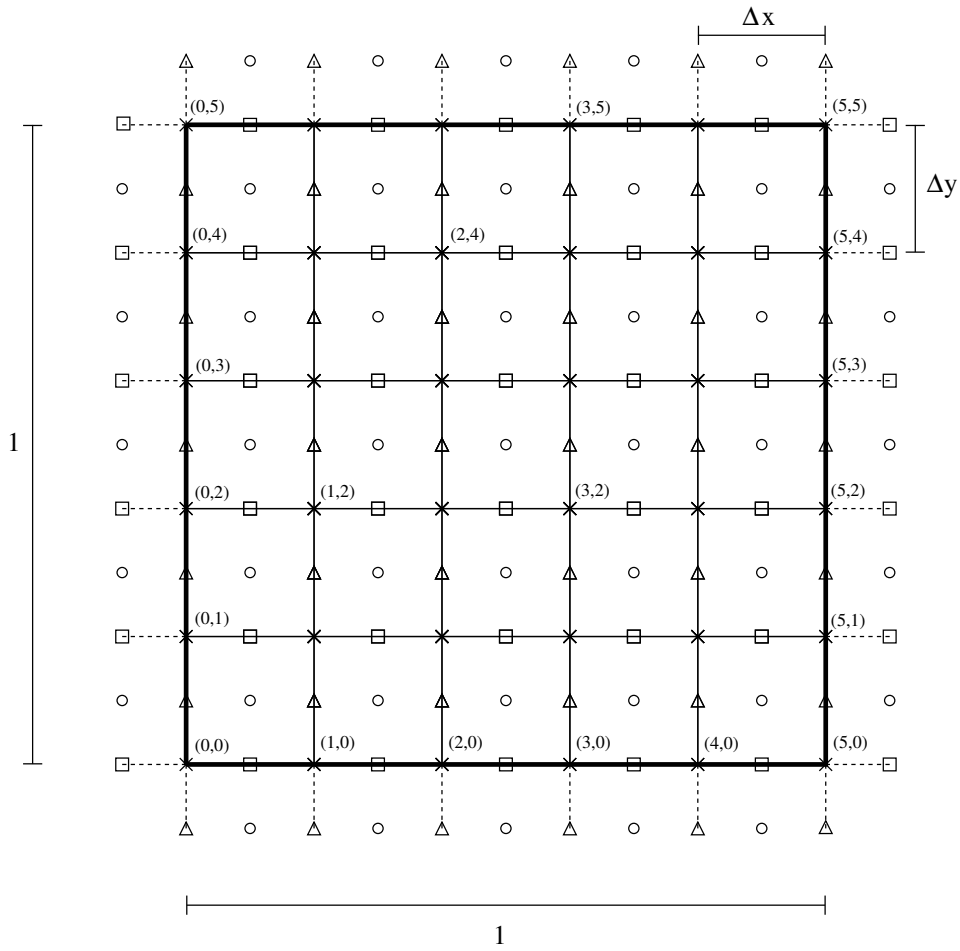


Figura 9: Esquema mostrando uma malha defasada completa, para o caso com $N_x = N_y = 5$. Triângulo: componente u . Quadrado: componente v . Círculo: pressão p .

Na equação (115), precisamos de $u_{i+\frac{1}{2},j}^k$, que aparece na parte advectiva. O problema é que não temos a componente u no ponto $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$. Para isso, interpolamos usando os quatro vizinhos de u , da seguinte maneira:

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^k = \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k + u_{i,j+\frac{1}{2}}^k + u_{i+1,j-\frac{1}{2}}^k + u_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right]. \quad (116)$$

Para a pressão temos:

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} - 2p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k+1} - 2p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta y^2} = \\ \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^* - u_{i,j+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^* - v_{i+\frac{1}{2},j}^*}{\Delta y} \right]. \end{aligned} \quad (117)$$

Essa equação para a pressão deve ser resolvida para todos os pontos do interior do domínio. Para pontos em contato com as fronteiras, essa equação deve ser adaptada para levar em consideração a condição de contorno para a pressão, que é de gradiente normal nulo. Atenção especial deve ser dada aos pontos de quina, devido ao fato de estarem em contato com duas paredes simultaneamente.

Por fim, as novas componentes do vetor velocidade são dadas por

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \Delta t \left(\frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta x} \right) \quad (118)$$

e

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = v_{i+\frac{1}{2},j}^* - \Delta t \left(\frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta y} \right). \quad (119)$$

As condições de contorno de velocidade são aplicadas a u^* e a v^* . Nas paredes laterais, a condição de contorno de u^* é aplicada diretamente, já que u^* está sobre as paredes nesses casos. No entanto, para as paredes de cima e de baixo, é necessário usar os *ghost points*. Exatamente na parede de cima, a velocidade é dada por $U_i = U(i\Delta x)$. Assim, a média entre as velocidades u^* em torno da parede deve ser igual à velocidade imposta:

$$\frac{u_{i,N_y+\frac{1}{2}}^* + u_{i,N_y-\frac{1}{2}}^*}{2} = U_i \quad (120)$$

ou

$$u_{i,N_y+\frac{1}{2}}^* = 2U_i - u_{i,N_y-\frac{1}{2}}^*. \quad (121)$$

Na parede inferior, u deve ser zero. Assim:

$$\frac{u_{i,\frac{1}{2}}^* + u_{i,-\frac{1}{2}}^*}{2} = 0 \quad (122)$$

ou

$$u_{i,-\frac{1}{2}}^* = -u_{i,\frac{1}{2}}^*. \quad (123)$$

Dessa maneira, os valores de u^* nos *ghost points* devem ser atualizados a cada passo de tempo, de maneira a satisfazer as condições de contorno.

Para v^* , a condição de contorno nas paredes de cima e de baixo são aplicadas diretamente a v^* , de maneira análoga. Já para as paredes laterais, devemos usar os *ghost points*. Para a parede esquerda:

$$\frac{v_{-\frac{1}{2},j}^* + v_{\frac{1}{2},j}^*}{2} = 0 \quad (124)$$

ou

$$v_{-\frac{1}{2},j}^* = -v_{\frac{1}{2},j}^* . \quad (125)$$

Para a parede direita:

$$\frac{v_{N_x-\frac{1}{2},j}^* + v_{N_x+\frac{1}{2},j}^*}{2} = 0 \quad (126)$$

ou

$$v_{N_x+\frac{1}{2},j}^* = -v_{N_x-\frac{1}{2},j}^* . \quad (127)$$

Da mesma forma que para u , os valores de v nos *ghost points* devem ser atualizados a cada passo de tempo, de maneira a satisfazer as condições de contorno.

Para a pressão, são impostas condições de derivada nula nas paredes. Para a parede da direita, por exemplo:

$$\frac{p_{N_x+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k - p_{N_x-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k}{\Delta x} = 0 \quad (128)$$

ou

$$p_{N_x+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k = p_{N_x-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k . \quad (129)$$

Assim, os *ghost points* para a pressão devem obedecer essas relações. Para as outras paredes o desenvolvimento é similar.

5.3 Programando

Na hora de programar, temos 3 tipos de matrizes principais: u , v e p . As suas dimensões são: $u[0 : N_x, -1 : N_y]$; $v[-1 : N_x, 0 : N_y]$; $p[-1 : N_x, -1 : N_y]$. Fisicamente, a velocidade $u_{i,j+\frac{1}{2}}$ está no ponto $(x, y) = (i\Delta x, j\Delta y + \frac{1}{2}\Delta y)$. No entanto, na matriz, essa velocidade corresponde à componente $u[i, j]$. Ou seja, a correspondência entre a componente da matriz e a posição real para as variáveis é dada por:

$$u[i, j] \leftarrow u_{i,j+\frac{1}{2}}^k \quad (130)$$

$$u_{star}[i, j] \leftarrow u_{i,j+\frac{1}{2}}^* \quad (131)$$

$$u_{new}[i, j] \leftarrow u_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} \quad (132)$$

$$v[i, j] \leftarrow v_{i+\frac{1}{2},j}^k \quad (133)$$

$$v_{star}[i, j] \leftarrow v_{i+\frac{1}{2},j}^* \quad (134)$$

$$v_{new}[i, j] \leftarrow v_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} \quad (135)$$

$$p[i, j] \leftarrow p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k \quad (136)$$

$$U[i] \leftarrow U_i \quad (137)$$

A equação (113), para u^* , se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{star}[i, j] - u[i, j]}{\Delta t} + u[i, j] \left(\frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + C_1 \left(\frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) = \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{u[i+1, j] - 2u[i, j] + u[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u[i, j+1] - 2u[i, j] + u[i, j-1]}{\Delta y^2} \right] . \end{aligned} \quad (138)$$

Nessa equação, C_1 corresponde ao valor de v interpolado:

$$C_1 = \frac{1}{4} [v[i, j+1] + v[i-1, j+1] + v[i, j] + v[i-1, j]] . \quad (139)$$

Detalhes: A equação (138) é iterada para $1 \leq i \leq N_x - 1$ e $0 \leq j \leq N_y - 1$. As condições de contorno são: $u_{star}[0, j] = 0$ e $u_{star}[N_x, j] = 0$; quando $j = 0$: $u_{star}[i, j-1] = -u_{star}[i, j]$; quando $j = N_y - 1$: $u_{star}[i, j+1] = 2U[i] - u_{star}[i, j]$.

A equação (115), para v^* , se torna:

$$\frac{v_{star}[i, j] - v[i, j]}{\Delta t} + C_2 \left(\frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + v[i, j] \left(\frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) = \frac{1}{Re} \left[\frac{v[i+1, j] - 2v[i, j] + v[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{v[i, j+1] - 2v[i, j] + v[i, j-1]}{\Delta y^2} \right]. \quad (140)$$

Nessa equação, C_2 corresponde ao valor de u interpolado:

$$C_2 = \frac{1}{4} [u[i+1, j] + u[i, j] + u[i+1, j-1] + u[i, j-1]]. \quad (141)$$

Detalhes: A equação (140) é iterada para $0 \leq i \leq N_x - 1$ e $1 \leq j \leq N_y - 1$; $v_{star}[i, 0] = 0$ e $v_{star}[i, N_y] = 0$. As condições de contorno são dadas por: quando $i = 0$: $v_{star}[i-1, j] = -v[i, j]$; quando $i = N_x - 1$: $v_{star}[i+1, j] = -v[i, j]$.

A equação para a pressão é (válida para $1 \leq i \leq N_x - 2$ e $1 \leq j \leq N_y - 2$):

$$\frac{p[i+1, j] - 2p[i, j] + p[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i, j+1] - 2p[i, j] + p[i, j-1]}{\Delta y^2} = \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \quad (142)$$

Aplicando as condições de contorno para a pressão resulta que o *ghost point* é igual ao ponto mais próximo dentro do domínio. No código, isso se traduz na aplicação de 8 condições para os pontos que estão em contato com as paredes:

1. se $i = 0$ e $j = 0$:

$$\frac{p[i+1, j] - p[i, j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i, j+1] - p[i, j]}{\Delta y^2} = \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \quad (143)$$

2. se $i = 0$ e $j = N_y - 1$:

$$\frac{p[i+1, j] - p[i, j]}{\Delta x^2} + \frac{-p[i, j] + p[i, j-1]}{\Delta y^2} = \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \quad (144)$$

3. se $i = N_x - 1$ e $j = 0$:

$$\frac{-p[i, j] + p[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i, j+1] - p[i, j]}{\Delta y^2} = \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \quad (145)$$

4. se $i = N_x - 1$ e $j = N_y - 1$:

$$\frac{-p[i, j] + p[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{-p[i, j] + p[i, j-1]}{\Delta y^2} = \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \quad (146)$$

5. se $i = 0$ e $j \neq 0$ e $j \neq N_y - 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{p[i+1, j] - p[i, j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i, j+1] - 2p[i, j] + p[i, j-1]}{\Delta y^2} = \\ & \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \end{aligned} \quad (147)$$

6. se $i = N_x - 1$ e $j \neq 0$ e $j \neq N_y - 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{-p[i, j] + p[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i, j+1] - 2p[i, j] + p[i, j-1]}{\Delta y^2} = \\ & \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \end{aligned} \quad (148)$$

7. se $j = 0$ e $i \neq 0$ e $i \neq N_x - 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{p[i+1, j] - 2p[i, j] + p[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i, j+1] - p[i, j]}{\Delta y^2} = \\ & \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \end{aligned} \quad (149)$$

8. se $j = N_y - 1$ e $i \neq 0$ e $i \neq N_x - 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{p[i+1, j] - 2p[i, j] + p[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{-p[i, j] + p[i, j-1]}{\Delta y^2} = \\ & \frac{u_{star}[i+1, j] - u_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{star}[i, j+1] - v_{star}[i, j]}{\Delta t \Delta y} \end{aligned} \quad (150)$$

Esse sistema de equações lineares para a pressão pode ser resolvido usando o método **Gauss-Seidel**, por exemplo. Nesse método, isola-se o termo $[i, j]$ em cada equação e, disso, obtém-se um processo iterativo que converge para a solução verdadeira. O algoritmo (3) mostra como esse método funciona na prática.

O último passo do método de projeção é atualizar a velocidade:

$$u_{new}[i, j] = u_{star}[i, j] - \Delta t \left(\frac{p[i, j] - p[i-1, j]}{\Delta x} \right), \quad (151)$$

para $1 \leq i \leq N_x - 1$ e $-1 \leq j \leq N_y$, e

$$v_{new}[i, j] = v_{star}[i, j] - \Delta t \left(\frac{p[i, j] - p[i, j-1]}{\Delta y} \right), \quad (152)$$

para $-1 \leq i \leq N_x$ e $1 \leq j \leq N_y - 1$.

5.4 Restrições em Δt e Δx

Para evitar instabilidades numéricas, devemos obedecer às seguintes restrições quanto aos tamanhos do passo de tempo Δt e do incremento espacial Δx :

$$\Delta t < \Delta x, \quad (153)$$

$$\Delta x < \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad \text{e} \quad (154)$$

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2. \quad (155)$$

5.5 Função de Corrente

Para visualização do campo de velocidade, é interessante calcular a **função de corrente** Ψ . O mais adequado, é posicionar a função de corrente nos pontos $(x, y) = (i\Delta x, j\Delta y)$, que estão marcados por um \times na representação esquemática da malha na figura (9). No problema abordado neste trabalho, a função de corrente está relacionada com a velocidade por

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} . \quad (156)$$

Assim:

$$\nabla^2 \Psi = -(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z , \quad (157)$$

com $\Psi = 0$ nas paredes (as paredes são interpretadas como uma linha de corrente, já que não há fluido atravessando-as). Assim:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (158)$$

No algoritmo de diferenças finitas:

$$\begin{aligned} & \frac{\Psi_{i+1,j}^k - 2\Psi_{i,j}^k + \Psi_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^k - 2\Psi_{i,j}^k + \Psi_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} = \\ & - \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^k - v_{i-\frac{1}{2},j}^k}{\Delta x} \right) + \left(\frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^k - u_{i,j-\frac{1}{2}}^k}{\Delta y} \right) . \end{aligned} \quad (159)$$

Programando (Ψ é uma matriz com dimensões $(0 : N, 0 : N)$):

$$\begin{aligned} & \frac{\Psi[i+1,j] - 2\Psi[i,j] + \Psi[i-1,j]}{\Delta x^2} + \frac{\Psi[i,j+1] - 2\Psi[i,j] + \Psi[i,j-1]}{\Delta y^2} = \\ & - \left(\frac{v[i,j] - v[i-1,j]}{\Delta x} \right) + \left(\frac{u[i,j] - u[i,j-1]}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (160)$$

Detalhes: A equação (159) é iterada entre $1 \leq i \leq N_x - 1$ e $1 \leq j \leq N_y - 1$. As condições de contorno são: $\Psi[i,j] = 0$ para $i = 0$ ou $i = N_x$ ou $j = 0$ ou $j = N_y$.

Observação: para visualizar a recirculação na cavidade é necessário uma tolerância muito pequena para a função de corrente, da ordem de 10^{-8} , pois os valores de Ψ na região de recirculação são da ordem de 10^{-6} . Note que os valores de Ψ na região central da cavidade são negativos e os valores de Ψ nos cantos (nas regiões de recirculação) são positivos e com um valor numérico bem menor. O algoritmo (6) apresenta os passos necessários para calcular a função de corrente.

5.6 Algoritmos

Nesta seção são apresentados os algoritmos para implementação do método de projeção. Os algoritmos (1) e (2) fornecem um método para calcular u_{star} e v_{star} , respectivamente. O algoritmo (3) corresponde à obtenção da nova pressão, com todas as condições de contorno já estabelecidas. Os algoritmos (4) e (5) dão as novas velocidades, no novo passo de tempo. O algoritmo (6) corresponde ao cálculo da função de corrente. Por fim, o algoritmo (7) dá o procedimento completo para realizar a simulação. Neste algoritmo, t_{final} representa o tempo final de simulação. Deve-se atentar para as restrições relacionadas aos valores de Δx , Δy e Δt , apresentadas na subseção (5.4).

Algorithm 1 Calculate u_{star}

INPUT: $u, v, Re, N_x, N_y, \Delta x, \Delta y, \Delta t$ **OUTPUT:** u_{star}

```
for i = 1,  $N_x - 1$  do
  for j = 0,  $N_y - 1$  do
     $v_{interp} = \frac{1}{4} [v[i, j+1] + v[i-1, j+1] + v[i, j] + v[i-1, j]]$ 
     $adv = \left[ u[i, j] \left( \frac{u[i+1, j] - u[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + v_{interp} \left( \frac{u[i, j+1] - u[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right]$ 
     $visc = \left[ \frac{u[i+1, j] - 2u[i, j] + u[i-1, j]}{Re\Delta x^2} + \frac{u[i, j+1] - 2u[i, j] + u[i, j-1]}{Re\Delta y^2} \right]$ 
     $u_{star}[i, j] = u[i, j] + \Delta t(-adv + visc)$ 
  end for
end for
BOUNDARY UPDATE:
for i = 0,  $N_x$  do
   $u_{star}[i, -1] = -u_{star}[i, 0]$ 
   $u_{star}[i, N_y] = 2U[i] - u_{star}[i, N_y - 1]$ 
end for
```

Algorithm 2 Calculate v_{star}

INPUT: $u, v, Re, N_x, N_y, \Delta x, \Delta y, \Delta t$ **OUTPUT:** v_{star}

```
for i = 0,  $N_x - 1$  do
  for j = 1,  $N_y - 1$  do
     $u_{interp} = \frac{1}{4} [u[i+1, j] + u[i, j] + u[i+1, j-1] + u[i, j-1]]$ 
     $adv = \left[ u_{interp} \left( \frac{v[i+1, j] - v[i-1, j]}{2\Delta x} \right) + v[i, j] \left( \frac{v[i, j+1] - v[i, j-1]}{2\Delta y} \right) \right] +$ 
     $visc = \left[ \frac{v[i+1, j] - 2v[i, j] + v[i-1, j]}{Re\Delta x^2} + \frac{v[i, j+1] - 2v[i, j] + v[i, j-1]}{Re\Delta y^2} \right]$ 
     $v_{star}[i, j] = v[i, j] + \Delta t(-adv + visc)$ 
  end for
end for
BOUNDARY UPDATE:
for j = 0,  $N_y$  do
   $v_{star}[-1, j] = -v_{star}[0, j]$ 
   $v_{star}[N_x, j] = -v_{star}[N_x - 1, j]$ 
end for
```

Algorithm 3 Calculate Pressure

INPUT: $u_{star}, v_{star}, N_x, N_y, \Delta x, \Delta y, \Delta t, \omega, tol$ **OUTPUT:** p

error = 100

while error > tol **do**R-max \leftarrow 0**for** i = 0, $N_x - 1$ **do****for** j = 0, $N_y - 1$ **do****if** i = 0 e j = 0 **then**

$$\lambda \leftarrow -\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)$$

$$R = \left(\frac{u_{star}[i+1,j]-u_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta x}\right) + \left(\frac{v_{star}[i,j+1]-v_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta y}\right) - \left[\frac{p[i+1,j]-p[i,j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i,j+1]-p[i,j]}{\Delta y^2}\right]$$

else if i = 0 e j = $N_y - 1$ **then**

$$\lambda \leftarrow -\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)$$

$$R = \left(\frac{u_{star}[i+1,j]-u_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta x}\right) + \left(\frac{v_{star}[i,j+1]-v_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta y}\right) - \left[\frac{p[i+1,j]-p[i,j]}{\Delta x^2} + \frac{-p[i,j]+p[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]$$

else if i = $N_x - 1$ e j = 0 **then**

$$\lambda \leftarrow -\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)$$

$$R = \left(\frac{u_{star}[i+1,j]-u_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta x}\right) + \left(\frac{v_{star}[i,j+1]-v_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta y}\right) - \left[\frac{-p[i,j]+p[i-1,j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i,j+1]-p[i,j]}{\Delta y^2}\right]$$

else if i = $N_x - 1$ e j = $N_y - 1$ **then**

$$\lambda \leftarrow -\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)$$

$$R = \left(\frac{u_{star}[i+1,j]-u_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta x}\right) + \left(\frac{v_{star}[i,j+1]-v_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta y}\right) - \left[\frac{-p[i,j]+p[i-1,j]}{\Delta x^2} + \frac{-p[i,j]+p[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]$$

else if i = 0 e j \neq 0 e j \neq $N_y - 1$ **then**

$$\lambda \leftarrow -\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)$$

$$R = \left(\frac{u_{star}[i+1,j]-u_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta x}\right) + \left(\frac{v_{star}[i,j+1]-v_{star}[i,j]}{\Delta t \Delta y}\right) - \left[\frac{p[i+1,j]-p[i,j]}{\Delta x^2} + \frac{p[i,j+1]-2p[i,j]+p[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]$$

```
else if i = Nx - 1 e j ≠ 0 e j ≠ Ny - 1 then
    λ ← - ( 1 / Δx2 + 2 / Δy2 )
    R = ( (ustar[i+1,j] - ustar[i,j]) / ΔtΔx ) + ( (vstar[i,j+1] - vstar[i,j]) / ΔtΔy ) -
        [ -p[i,j] + p[i-1,j] / Δx2 + p[i,j+1] - 2p[i,j] + p[i,j-1] / Δy2 ]
else if j = 0 e i ≠ 0 e i ≠ Nx - 1 then
    λ ← - ( 2 / Δx2 + 1 / Δy2 )
    R = ( (ustar[i+1,j] - ustar[i,j]) / ΔtΔx ) + ( (vstar[i,j+1] - vstar[i,j]) / ΔtΔy ) -
        [ p[i+1,j] - 2p[i,j] + p[i-1,j] / Δx2 + p[i,j+1] - p[i,j] / Δy2 ]
else if j = Ny - 1 e i ≠ 0 e i ≠ Nx - 1 then
    λ ← - ( 2 / Δx2 + 1 / Δy2 )
    R = ( (ustar[i+1,j] - ustar[i,j]) / ΔtΔx ) + ( (vstar[i,j+1] - vstar[i,j]) / ΔtΔy ) -
        [ p[i+1,j] - 2p[i,j] + p[i-1,j] / Δx2 + -p[i,j] + p[i,j-1] / Δy2 ]
else
    λ ← - ( 2 / Δx2 + 2 / Δy2 )
    R = ( (ustar[i+1,j] - ustar[i,j]) / ΔtΔx ) + ( (vstar[i,j+1] - vstar[i,j]) / ΔtΔy ) -
        [ p[i+1,j] - 2p[i,j] + p[i-1,j] / Δx2 + p[i,j+1] - 2p[i,j] + p[i,j-1] / Δy2 ]
end if
R ← R / λ
p[i,j] ← p[i,j] + ωR
if |R| > R-max then
    R-max ← |R|
end if
end for
end for
error ← R-max
end while
BOUNDARY UPDATE:
for i = 0, Nx - 1 do
    p[i,-1] = p[i,0]
    p[i,Ny] = p[i,Ny - 1]
end for
for j = 0, Ny - 1 do
    p[-1,j] = p[0,j]
    p[Nx,j] = p[Nx - 1,j]
end for
p[-1,-1] = p[0,0]
p[-1, Ny] = p[0,Ny - 1]
p[Nx, -1] = p[Nx - 1, 0]
p[Nx, Ny] = p[Nx - 1, Ny - 1]
```

Algorithm 4 Calculate the new u

INPUT: $u_{star}, p, N_x, N_y, \Delta x, \Delta t$

OUTPUT: u

```
for i = 1, Nx - 1 do
    for j = -1, Ny do
        u[i,j] ← ustar[i,j] - Δt ( (p[i,j] - p[i-1,j]) / Δx )
    end for
end for
```

Algorithm 5 Calculate the new v

INPUT: $v_{star}, p, N_x, N_y, \Delta y, \Delta t$ **OUTPUT:** v

```
for i = -1,  $N_x$  do
  for j = 1,  $N_y - 1$  do
     $v[i, j] \leftarrow v_{star}[i, j] - \Delta t \left( \frac{p[i, j] - p[i, j-1]}{\Delta y} \right)$ 
  end for
end for
```

Algorithm 6 Calculate the Stream Function

INPUT: $u, v, N_x, N_y, \Delta x, \Delta y, \Delta t, tol$ **OUTPUT:** Ψ

```
for i = 0,  $N_x$  do
  for j = 0,  $N_y$  do
     $\Psi[i, j] \leftarrow 0$ 
  end for
end for
 $\lambda \leftarrow - \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right)$ 
error = 100
while error > tol do
  R-max  $\leftarrow 0$ 
  for i = 1,  $N_x - 1$  do
    for j = 1,  $N_y - 1$  do
       $R \leftarrow - \left( \frac{v[i, j] - v[i-1, j]}{\Delta x} \right) + \left( \frac{u[i, j] - u[i, j-1]}{\Delta y} \right)$ 
       $- \left[ \frac{\Psi[i+1, j] - 2\Psi[i, j] + \Psi[i-1, j]}{\Delta x^2} + \frac{\Psi[i, j+1] - 2\Psi[i, j] + \Psi[i, j-1]}{\Delta y^2} \right]$ 
       $R \leftarrow R/\lambda$ 
       $\Psi[i, j] \leftarrow \Psi[i, j] + \omega R$ 
      if  $|R| > R\text{-max}$  then
         $R\text{-max} \leftarrow |R|$ 
      end if
    end for
  end for
  error  $\leftarrow R\text{-max}$ 
end while
```

Algorithm 7 The Complete Code

INPUT: $U, Re, N_x, N_y, \Delta t, t_{final}, tol$ **OUTPUT:** u, v, p, Ψ

```
 $u = 0$   
 $v = 0$   
 $p = 0$   
for  $i = 0, N_x$  do  
     $u[i, N_y] = 2U[i]$   
end for  
 $u_{star} \leftarrow u$   
 $v_{star} \leftarrow v$   
 $t = 0$   
while  $t < t_{final}$  do  
     $t \leftarrow t + \Delta t$   
    Calculate  $u_{star}$   
    Calculate  $v_{star}$   
    Calculate Pressure  
    Calculate the new  $u$   
    Calculate the new  $v$   
    Calculate the Stream Function (Optional)  
end while  
Calculate the Stream Function
```

5.7 Detalhes da Implementação em Python

Índices Negativos: o python aceita índices negativos. O índice -1 , por exemplo, se refere ao último elemento de um vetor. Então é possível usar os índices como estão apresentados nos algoritmos da subseção anterior. A matriz u possui índices i e j que vão de 0 a N_x e de -1 a N_y , respectivamente. Uma maneira de criar essa matriz seria:

```
u = np.zeros((Nx+1,Ny+2),float)
```

Nesse caso o índice $j = N_y + 1$ jamais seria utilizado. Esses elementos da matriz u seriam acessados exclusivamente por meio do índice $j = -1$.

A matriz da pressão poderia ser criada da seguinte maneira:

```
p = np.zeros((Nx+2,Ny+2),float)
```

Assim, os índices $i = -1$ e $j = -1$ poderiam ser acessados sem problema. Novamente, esses elementos jamais seriam acessados pelos índices $i = N_x + 1$ e $j = N_y + 1$.

Loops usando o range: nos algoritmos acima, os loops são descritos de maneira genérica. Um loop “for $i = 0, N_x$ ” indica que o i deve variar de 0 a N_x (inclusive). Esse loop no python seria:

```
for i in range(0,Nx+1):
```

É necessário, portanto, adaptar todos os limites superiores dos loops ao programar no python usando o range. Não é necessário adaptar os índices das matrizes utilizados dentro ou fora dos loops. Também não é necessário adaptar os índices dos condicionais (“if”).

Plotando vetores velocidade. As componentes da velocidade estão localizadas em posições diferentes no domínio. **Para plotar os vetores é necessário que ambas as componentes estejam no mesmo ponto.** Uma maneira de fazer isso é criando uma matriz uplot e uma outra matriz vplot, ambas com dimensão $0:N_x$ e $0:N_y$, e ambas representando componentes da velocidade localizadas no canto da célula (na posição \times na figura 9). **Para isso é necessário tirar a média de u e v nesses pontos.** Uma maneira de tirar essa média e de plotar os vetores seria:

```
uplot = np.zeros((Nx+1,Ny+1),float)
vplot = np.zeros((Nx+1,Ny+1),float)
for i in range(0,Nx+1):
    for j in range(0,Ny+1):
        uplot[i,j] = 0.5*(u[i,j]+u[i,j-1])
        vplot[i,j] = 0.5*(v[i,j]+v[i-1,j])
plt.quiver(x,y,np.transpose(uplot),np.transpose(vplot))
plt.show()
```

Para plotar linhas de corrente utilize streamplot em vez de quiver. Mas atenção na hora de interpretar os resultados com streamplot, pois as linhas são um pouco confusas. **O mais recomendável é utilizar um plot de linhas de contorno da função de corrente calculada com o algoritmo apresentado na seção anterior.** Para plotar a pressão é necessário criar uma matriz pplot como pontos na posição \times também, representando a média dos 4 pontos próximos.

Dicas: programe por partes e teste cada parte repetidas vezes. Tentar programar tudo de uma vez pode não ser uma boa ideia. Evite linhas compridas: separe a equação em vários termos e some esses termos na linha seguinte. Um erro muito comum é, ao tentar calcular $\frac{1}{\Delta x^2}$, escrever

```
1.0/dx*dx
```

no python. O correto seria escrever

$1.0/(dx*dx)$

Separe o seu código em funções, como apresentado nos algoritmos. Isso vai fazer com que o seu código fique pronto para a utilização do **numba**. Mas atenção: verifique se o seu código está funcionando bem **antes** de utilizar o numba.

6 Material para Referência

No Moodle tem uma pasta com alguns arquivos sobre simulação numérica de cavidade. Entre os arquivos temos:

1. dois roteiros do professor John Hinch (ver [site](#)), que foram a inspiração para a elaboração do presente roteiro;
2. um artigo de Kim e Moin, com um método de projeção de segunda ordem;
3. um artigo de Shankar e Deshpande, com uma revisão sobre o problema da cavidade;
4. um artigo de Marchi, Suero e Araki com várias tabelas com resultados do problema da cavidade. Você pode comparar os seus resultados com os resultados desse artigo (veja a tabela 6).

Use esses trabalhos para entender um pouco mais sobre o problema e para comparar com os seus resultados.

Referências

- [1] F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*. AMGH Editora Ltda, New York, 6 edition, 2011.
- [2] Y. A. Çengel and J. M. Cimbala. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. McGrawHill, New York, 3 edition, 2014.
- [3] A. J. Chorin. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Math Comput*, 22:745–762, 1968.
- [4] R. Temam. Sur l’Approximation de la Solution des Equations de Navier-Stokes par la Methode des pas Fractionnaires II. *Archiv Ration Mech Anal*, 33:377–385, 1969.