

# Sistemas de Equações Algébricas Lineares

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Tecnologia

Universidade de Brasília

## 1 Motivação

Considere a equação do calor para o caso **unidimensional permanente** ( $T = T(x)$ ),

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

para  $0 < x < 1$  e com condições de contorno dadas por

$$T(x=0) = 0 \quad \text{e} \quad T(x=1) = 1. \quad (2)$$

Utilizando expansões em série de Taylor, podemos aproximar a segunda derivada de  $T$  com relação a  $x$  por

$$\frac{d^2 T}{dx^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (3)$$

Essa aproximação contém um erro  $O(\Delta x^2)$ . Da substituição dessa aproximação de volta na equação governante (1), resulta

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = 0. \quad (4)$$

Essa é a EDF (Equação de Diferenças Finitas) desse problema. Podemos reescrevê-la como

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0. \quad (5)$$

Note que agora **não** é possível encontrar diretamente o valor de cada  $T_i$  pois, ao tentar isolá-los em (5), temos

$$T_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1}}{2}, \quad (6)$$

o que não ajuda muito, pois não conhecemos os valores da temperatura nos pontos vizinhos de  $i$ . As temperaturas estão **acopladas**: para encontrar o valor de  $T_i$  em um ponto  $i$ , é necessário encontrar em todos os pontos.

Vamos analisar um caso particular em que o domínio é dividido em 5 partes iguais, ou seja,  $N = 5$ . A figura (1) mostra o nosso domínio discretizado. Pelas condições de contorno, os pontos dos extremos já estão definidos. Assim,

$$T_0 = 0 \quad \text{e} \quad T_5 = 1. \quad (7)$$

Temos que descobrir, portanto, os valores de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ .

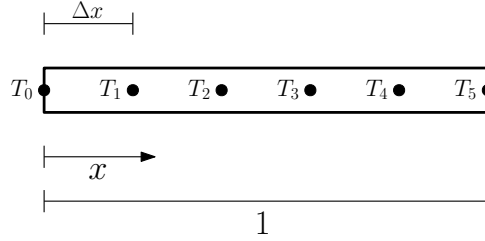


Figura 1: Barra discretizada com comprimento 1.

A equação geral, para qualquer ponto  $i$ , é a equação (5). Vamos abrir essa equação em cada ponto:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad T_2 - 2T_1 + T_0 = 0 \\ i = 2 & \quad T_3 - 2T_2 + T_1 = 0 \\ i = 3 & \quad T_4 - 2T_3 + T_2 = 0 \\ i = 4 & \quad T_5 - 2T_4 + T_3 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Somando essas 4 equações com as condições de contorno, resulta no seguinte conjunto de equações lineares acopladas:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_2 - 2T_1 + T_0 &= 0 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 &= 0 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 &= 0 \\ T_5 - 2T_4 + T_3 &= 0 \\ T_5 &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Podemos deixar assim, ou podemos substituir os valores dos pontos dos cantos nas equações dos seus vizinhos. Isso é feito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T_2 - 2T_1 &= 0 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 &= 0 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 &= 0 \\ -2T_4 + T_3 &= -1 \end{aligned} \quad (10)$$

Esse é o nosso **Sistema de Equações Algébricas Lineares**. Na forma matricial, ele pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

**Temos 4 equações e 4 incógnitas.** Encontrar a solução numérica aproximada da EDO original é equivalente a **encontrar a solução para esse sistema.**

Em muitos problemas numéricos (Volumes Finitos, Elementos Finitos, Elementos de Contorno), a etapa final da solução consiste na resolução de um sistema de equações lineares. **Por isso, o estudo de métodos para resolver esses sistemas é muito importante.** Nas próximas seções veremos alguns desses métodos. Antes, porém, serão apresentadas algumas definições sobre matrizes que nos serão úteis.

## 2 Definições

No caso geral, temos um **sistema com  $n$  equações** dado por

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (12)$$

Na representação indicial,

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Na representação matricial,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} . \quad (14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes (*input*),  $\mathbf{b}$  é a matriz dos termos independentes (*input*) e  $\mathbf{x}$  é a matriz de incógnitas (*output*).

Na componente  $A_{ij}$  da matriz  $\mathbf{A}$ ,  $i$  representa a equação e  $j$  representa a variável, como mostra a figura (2).

**Exemplo:** com  $n = 2$  temos

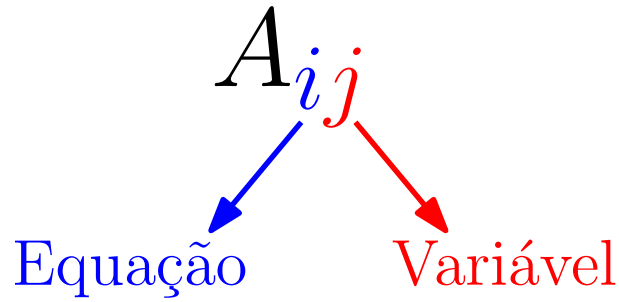


Figura 2: Componente da matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (18)$$

Nessa situação, temos 4 possibilidades (ver figura 3):

- i) Solução Única
- ii) Sem solução
- iii) Número infinito de soluções
- iv) Solução trivial ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) para um sistema homogêneo ( $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ )

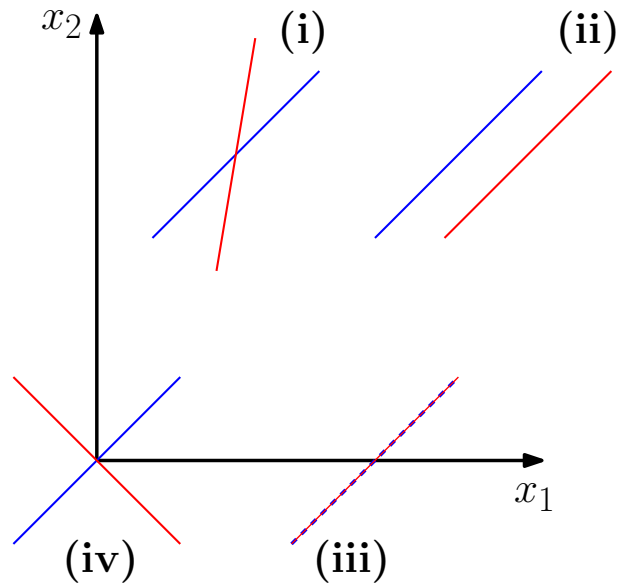


Figura 3: Possibilidades para o caso em que  $n = 2$ .

## 2.1 Produto de matrizes

Vamos definir o produto entre matrizes como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}b_j \quad (19)$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \quad (20)$$



## 2.2 Tipos Especiais de Matrizes

**Matriz Quadrada:** mesmo número de linhas e colunas.

**Vetor coluna:**  $n$  linhas e 1 coluna.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

**Vetor linha:** 1 linha e  $n$  colunas.

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \quad (22)$$

**Matriz diagonal:**  $D_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \quad (23)$$

**Matriz identidade:**  $D_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $D_{ij} = 1$  se  $i = j$  ou  $D_{ij} = \delta_{ij}$ .

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (25)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (26)$$

**Matriz Triangular Superior:**  $U_{ij} = 0$  se  $i > j$ .

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix} \quad (27)$$

**Matriz Tridiagonal:**



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & 0 \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 \\ 0 & T_{32} & T_{33} & T_{34} & 0 \\ 0 & 0 & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ 0 & 0 & 0 & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \quad (28)$$

**Matriz Transposta:**  $A_{ij}^T = A_{ji}$ .

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (29)$$

**Matriz Simétrica:**  $A_{ij} = A_{ji}$ , ou  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (30)$$

**Matriz Esparsa:** a maioria dos elementos é zero.

**Matriz Diagonal Dominante:** temos

$$|A_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

O valor absoluto do elemento da diagonal principal é maior ou igual que a soma dos valores absolutos dos outros elementos da mesma linha, **com a desigualdade válida em pelo menos uma linha.**

Exemplo de matriz diagonal dominante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

**Matriz Inversa:**  $\mathbf{A}^{-1}$ . Propriedade:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (33)$$

Para o sistema que estamos tentando encontrar a solução:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (34)$$

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (35)$$

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (36)$$

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (37)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (38)$$

### 2.3 Determinante

O **determinante** é um número associado a uma matriz quadrada e será representado por  $\det(\mathbf{A})$  ou por  $|\mathbf{A}|$ .

Para  $n = 2$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (40)$$

Para  $n = 3$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31} \quad (42)$$

Para  $n \geq 4$ : método dos cofatores.

Se  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , a matriz  $\mathbf{A}$  é singular (não admite inversa) e o **sistema linear correspondente não tem solução única** (pode ter infinitas soluções ou não ter solução).

## 3 Métodos de Solução de Sistemas Lineares

Temos dois tipos de métodos usados para resolver sistemas lineares: os **Métodos Diretos** e os **Métodos Iterativos**.

**Métodos Diretos** são aqueles que dão a **solução exata** (a menos do erro de máquina) após um certo número de passos. Exemplos de Métodos Diretos:

1. Eliminação Simples
2. Eliminação de Gauss
3. Decomposição LU
4. Eliminação de Gauss-Jordan

## 5. Algoritmo de Thomas

**Métodos Iterativos**, por sua vez, obtêm uma **solução aproximada** para o sistema de equações, a partir de uma resposta inicial (*chute*) e de um algoritmo de iteração. Alguns exemplos de Métodos Iterativos:

1. Gauss-Jacobi
2. Gauss-Seidel
3. SOR
4. Gradiente Conjugado
5. Multigrid

## 4 Método Direto: Eliminação de Gauss

Os métodos diretos consistem, basicamente, na aplicação de uma sequência de operações entre as equações para que se consiga isolar as incógnitas. O método mais conhecido é o de **eliminação de Gauss**. O objetivo é transformar o sistema original

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (43)$$

em um sistema do tipo

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{c} , \quad (44)$$

em que  $\mathbf{U}$  é uma matriz triangular superior. Para isso, vamos considerar a matriz  $\mathbf{A}^*$  do sistema,

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

que envolve as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$ . Podemos realizar as seguintes operações de linha (sem que o resultado seja alterado):

- qualquer linha pode ser multiplicada por uma constante (*scaling*);
- a ordem das linhas pode ser trocada (*pivoting*);
- qualquer linha pode ser trocada por uma combinação linear desta linha com qualquer outra linha (*elimination*).

Vamos ver como resolver um sistema usando o método de eliminação no exemplo a seguir.

**Exemplo:** considere o sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - 1x_2 - 1x_3 &= 1 \\ -1x_1 + 2x_2 - 1x_3 &= 1 \\ -1x_1 - 1x_2 + 6.5x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (46)$$



Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 6.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

A primeira linha será chamada de  $L_1$ , a segunda linha de  $L_2$  e a terceira de  $L_3$ . Vamos começar.

PASSO 1:

$$L_2 \leftarrow L_2 - (A_{21}/A_{11})L_1 \quad (50)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - (A_{31}/A_{11})L_1 \quad (51)$$

Resulta:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1.75 & -1.25 & 1.25 \\ 0 & -1.25 & 6.25 & 1.25 \end{bmatrix} \quad (52)$$

PASSO 2:

$$L_3 \leftarrow L_3 - (A_{32}/A_{22})L_2 \quad (53)$$

Resulta:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1.75 & -1.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 37.5/7 & 15/7 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Com isso, nosso sistema passa a ser

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1.75 & -1.25 \\ 0 & 0 & 37.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.25 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Transformamos a matriz  $\mathbf{A}$  em uma matriz diagonal superior. O último passo consiste em resolver o problema começando pela última equação.

PASSO 4 (substituição para trás):

$$x_3 = \frac{b_3}{A_{33}} \quad (56)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - A_{23}x_3}{A_{22}} \quad (57)$$

$$x_1 = \frac{b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3}{A_{11}} \quad (58)$$

Assim:

$$x_3 = 0.4 \quad (59)$$

$$x_2 = \frac{1.25 + 1.25 \times 0.4}{1.75} = 1 \quad (60)$$

$$x_1 = \frac{1 + 1 \times 1 + 1 \times 0.4}{4} = 0.6 \quad (61)$$

**Solução final:**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Chegamos na solução exata após um certo número de passos. Esse é um método direto típico.

Nosso foco aqui, porém, será nos **Métodos Iterativos**. Esses métodos são mais vantajosos para os nossos problemas, que envolvem matrizes esparsas. Temos pelo menos 3 vantagens:

- no método iterativo não é necessário montar a matriz **A** (esse é um problema sério em duas e três dimensões);
- com um *chute* inicial bom, o método iterativo converge com algumas poucas iterações;
- o método direto nos dá a solução exata, mas muitas vezes uma solução aproximada já é o suficiente, pois já existe um erro associado à própria aproximação das derivadas no problema.

Nas próximas seções veremos alguns métodos iterativos.

## 5 Métodos Iterativos

Métodos Iterativos resolvem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (63)$$

por meio de um algoritmo de repetição/iteração. Começamos com uma iteração inicial

$$\mathbf{x}^{(0)} . \quad (64)$$

O número entre parênteses indica a iteração. Essa solução,  $\mathbf{x}^{(0)}$ , juntamente com a equação original, é usada para calcular uma solução melhorada  $\mathbf{x}^{(1)}$ . Depois,  $\mathbf{x}^{(1)}$  é usada para calcular  $\mathbf{x}^{(2)}$  e assim sucessivamente. O processo é repetido até que a convergência seja alcançada, ou seja, até que não haja mais variação significativa entre a solução dada em uma iteração e a próxima.

### 5.1 Método de Jacobi

Considere o nosso sistema com  $n$  equações:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (65)$$

Separando o termo em que  $i = j$  do somatório, podemos reescrever esse sistema como:

$$A_{ii}x_i + \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j = b_i. \quad (66)$$

Isolando  $x_i$ , temos

$$x_i = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j \right). \quad (67)$$

Essa última equação sugere um procedimento iterativo para encontrar um valor de  $\mathbf{x}$  melhorado, dado um valor inicial (bem parecido com o método do ponto fixo). Seguindo essa ideia:

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j^{(0)} \right). \quad (68)$$

Depois, com os valores de  $\mathbf{x}^{(1)}$ , podemos encontrar os valores de  $\mathbf{x}^{(2)}$ :

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j^{(1)} \right). \quad (69)$$

De maneira geral, para conhecendo o valor de  $\mathbf{x}^{(ITER)}$ , podemos encontrar  $\mathbf{x}^{(ITER+1)}$ :

$$x_i^{(ITER+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j^{(ITER)} \right). \quad (70)$$

**Esse é o Método de Jacobi.** Vamos só trabalhar um pouco mais nessa última equação, para destacar a variação entre iterações consecutivas. Vamos adicionar e subtrair  $x_i^{(ITER)}$  no lado direito da equação (70):

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} - x_i^{(ITER)} + \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j^{(ITER)} \right) \\ &= x_i^{(ITER)} + \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - A_{ii}x_i^{(ITER)} - \sum_{j=1, i \neq j}^n A_{ij}x_j^{(ITER)} \right) \\ &= x_i^{(ITER)} + \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Assim, o **Método de Jacobi** pode ser apresentado como:

$$x_i^{(ITER+1)} = x_i^{(ITER)} + R_i^{(ITER)} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (72)$$

em que

$$R_i^{(ITER)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^{(ITER)} \right). \quad (73)$$

$R_i$  é chamado de **resíduo**. As iterações convergem se a matriz  $\mathbf{A}$  é diagonal dominante. Vamos ver alguns exemplos.

**Exemplo 1.** Vamos resolver o seguinte sistema usando o método de Jacobi:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned} \quad (74)$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Começando com o chute inicial:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Para a primeira iteração:

$$\begin{aligned} R_1^{(0)} &= \frac{1}{A_{11}} (b_1 - A_{12}x_2^{(0)} - A_{13}x_3^{(0)}) \\ &= \frac{1}{4} (7 - 4 \times 0 - 2 \times 0 - 1 \times 0) = 1.75 \end{aligned} \quad (77)$$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + R_1^{(0)} = 0 + 1.75 = 1.75 \quad (78)$$

$$\begin{aligned} R_2^{(0)} &= \frac{1}{A_{22}} (b_2 - A_{21}x_1^{(0)} - A_{23}x_3^{(0)}) \\ &= \frac{1}{3} (4 - 0 \times 0 - 3 \times 0 - 1 \times 0) = 1.33 \end{aligned} \quad (79)$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + R_2^{(0)} = 0 + 1.33 = 1.33 \quad (80)$$



$$\begin{aligned} R_3^{(0)} &= \frac{1}{A_{33}} \left( b_3 - A_{31}x_1^{(0)} - A_{32}x_2^{(0)} - A_{33}x_3^{(0)} \right) \\ &= \frac{1}{5} (9 - 2 \times 0 - 2 \times 0 - 5 \times 0) = 1.80 \end{aligned} \quad (81)$$

$$x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + R_3^{(0)} = 0 + 1.80 = 1.80 \quad (82)$$

Portanto, a primeira iteração nos dá

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.33 \\ 1.80 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Repetindo os mesmos passos para a segunda iteração, temos

$$\begin{aligned} R_1^{(1)} &= \frac{1}{A_{11}} \left( b_1 - A_{11}x_1^{(1)} - A_{12}x_2^{(1)} - A_{13}x_3^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{4} (7 - 4 \times 1.75 - 2 \times 1.33 - 1 \times 1.80) = -1.12 \end{aligned} \quad (84)$$

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + R_1^{(1)} = 1.75 - 1.12 = 1.63 \quad (85)$$

$$\begin{aligned} R_2^{(1)} &= \frac{1}{A_{22}} \left( b_2 - A_{21}x_1^{(1)} - A_{22}x_2^{(1)} - A_{23}x_3^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{3} (4 - 0 \times 1.75 - 3 \times 1.33 - 1 \times 1.80) = -0.60 \end{aligned} \quad (86)$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + R_2^{(1)} = 1.33 - 0.60 = 0.73 \quad (87)$$

$$\begin{aligned} R_3^{(1)} &= \frac{1}{A_{33}} \left( b_3 - A_{31}x_1^{(1)} - A_{32}x_2^{(1)} - A_{33}x_3^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{5} (9 - 2 \times 1.75 - 2 \times 1.33 - 5 \times 1.80) = -1.23 \end{aligned} \quad (88)$$

$$x_3^{(2)} = x_3^{(1)} + R_3^{(1)} = 1.80 - 1.23 = 0.57 \quad (89)$$

Portanto, a segunda iteração nos dá

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.73 \\ 0.57 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Repetindo esse processo iterativo, temos:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.24 \\ 1.14 \\ 1.25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.86 \\ 0.92 \\ 0.85 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.08 \\ 1.05 \\ 1.09 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.97 \\ 0.95 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (91)$$

$$\dots \quad \mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1.01 \\ 1.01 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (92)$$

E assim por diante. Note que as soluções obtidas pelo processo iterativo se aproximam cada vez mais da solução exata,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

mas nunca a alcançam. Outro ponto importante é que essa convergência parece ser muito **lenta**.

**Exemplo 2.** Vamos resolver agora o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \quad (94)$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (95)$$

Essas equações são **idênticas** às equações do exemplo anterior, mas estão em uma ordem diferente. Agora a matriz **A** do sistema não é mais **diagonalmente dominante**.

Vamos resolver, novamente, usando o método de Jacobi, começando com o chute inicial:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Para a primeira iteração:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + R_1^{(0)} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} R_1^{(0)} &= \frac{1}{A_{11}} \left( b_1 - A_{11}x_1^{(0)} - A_{12}x_2^{(0)} - A_{13}x_3^{(0)} \right) \\ &= \frac{1}{4} (7 - 4 \times 0 - 2 \times 0 - 1 \times 0) = 1.75 \end{aligned} \quad (98)$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + R_2^{(0)} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} R_2^{(0)} &= \frac{1}{A_{22}} \left( b_2 - A_{21}x_1^{(0)} - A_{22}x_2^{(0)} - A_{23}x_3^{(0)} \right) \\ &= \frac{1}{2} (9 - 2 \times 0 - 2 \times 0 - 5 \times 0) = 4.50 \end{aligned} \quad (100)$$

$$x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + R_3^{(0)} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} R_3^{(0)} &= \frac{1}{A_{33}} (b_3 - A_{31}x_1^{(0)} - A_{32}x_2^{(0)} - A_{33}x_3^{(0)}) \\ &= \frac{1}{1} (4 - 0 \times 0 - 3 \times 0 - 1 \times 0) = 4.00 \end{aligned} \quad (102)$$

Portanto, a primeira iteração nos dá

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 4.50 \\ 4.00 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Repetindo esse processo iterativo, temos:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.50 \\ -7.25 \\ -9.50 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 7.75 \\ 29.75 \\ 25.75 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} -19.5625 \\ -67.625 \\ -85.25 \end{bmatrix} \dots \quad (104)$$

$$\dots \quad \mathbf{x}^{(10)} = \begin{bmatrix} -11533 \\ -39387 \\ -47866 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (105)$$

E assim por diante. Note que as soluções obtidas **não convergem para a solução exata. Isso acontece porque a matriz dos coeficientes não é diagonal dominante.**

**Conclusão:** as equações nos dois exemplos são idênticas, mas a forma como são arranjadas é diferente, o que faz com que o método funcione em um caso e não funcione no outro.

## 5.2 Convergência e Critério de Parada

Ter uma **matriz de coeficientes diagonalmente dominante** é **condição suficiente** para garantir que os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR (esses dois últimos serão apresentados daqui a pouco) converjam para qualquer chute inicial. Se a matriz dos coeficientes não é diagonalmente dominante, deve ser usado um método direto para resolver o sistema.

O número de iterações para a convergência depende:

- do grau de dominância da diagonal principal;
- do método usado;
- da solução inicial (chute inicial);
- do critério de parada.

### 5.2.1 Critério de convergência ou parada

Como não sabemos a solução exata, vamos usar a variação entre a solução de uma iteração e a próxima como critério de parada. A **tolerância**  $\epsilon$  é um valor definido por quem está resolvendo o problema. Temos dois tipos de critérios de parada: os absolutos e os relativos.

**Critérios absolutos:** você deve parar quando

$$\left| (R_i^{(ITER)})_{MAX} \right| \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \left| R_i^{(ITER)} \right| \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad \left[ \sum_{i=1}^n \left( R_i^{(ITER)} \right)^2 \right]^{1/2} \leq \epsilon \quad (106)$$

**CrITÉRIOS relativos:** você deve parar quando

$$\left| \frac{(R_i^{(ITER)})_{MAX}}{x_i^{(ITER)}} \right| \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{R_i^{(ITER)}}{x_i^{(ITER)}} \right| \leq \epsilon$$
$$\text{ou} \quad \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{R_i^{(ITER)}}{x_i^{(ITER)}} \right)^2 \right]^{1/2} \leq \epsilon \quad (107)$$

**Atenção:** use apenas um dos critérios acima em seu código. O critério aparece como condição para sair do *loop* de iterações.

### 5.3 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é muito parecido com o método de Jacobi. A diferença é que na nova iteração já são utilizados os valores de  $x_i$  que já foram atualizados. Vamos ver os detalhes do desenvolvimento desse método.

Considere, novamente, o nosso sistema com  $n$  equações:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (108)$$

Vamos dividir a somatória em 3 partes: para  $i < j$ , para  $i = j$  e para  $i > j$ . Assim:

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j + A_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad (109)$$

Isolando  $x_i$ , temos

$$x_i = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j \right) \quad (110)$$

Essa última equação sugere um procedimento iterativo para encontrar um valor de  $\mathbf{x}$  melhorado, dado um valor inicial. No entanto, note que os valores de  $x_i$  na primeira somatória do lado direito já foram calculados na nova iteração. Assim, vamos utilizar esses valores novos, em vez de utilizar os valores antigos. Seguindo essa ideia, o processo iterativo é dado por:

$$x_i^{(ITER+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{(ITER)} \right) \quad (111)$$

**Esse é o Método de Gauss-Seidel.** Vamos só trabalhar um pouco mais nessa última equação, para destacar a variação entre iterações consecutivas. Vamos adicionar e subtrair  $x_i^{(ITER)}$  no lado direito da equação (111):



$$\begin{aligned}x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} - x_i^{(ITER)} + \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \\&= x_i^{(ITER)} + \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - A_{ii} x_i^{(ITER)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \quad (112) \\&= x_i^{(ITER)} + \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(ITER)} \right)\end{aligned}$$

Assim, o **Método de Gauss-Seidel** pode ser apresentado como:

$$x_i^{(ITER+1)} = x_i^{(ITER)} + R_i^{(ITER)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (113)$$

em que

$$R_i^{(ITER)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \quad (114)$$

A diferença entre Jacobi e Gauss-Seidel está nessa primeira somatória do lado direito da equação (114). O método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente (com um número menor de iterações) porque já utiliza na própria iteração os novos valores recentemente calculados.

No entanto, o método de Jacobi é paralelizável e o método de Gauss-Seidel não. Por quê?

**Exemplo.** Vamos resolver o seguinte sistema utilizando o método de Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned}4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\3x_2 + x_3 &= 4 \\2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 9\end{aligned} \quad (115)$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Vamos resolver usando o método de Gauss-Seidel, começando com o chute inicial:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (117)$$

Para a primeira iteração:

$$\begin{aligned}R_1^{(0)} &= \frac{1}{A_{11}} \left( b_1 - A_{11}x_1^{(0)} - A_{12}x_2^{(0)} - A_{13}x_3^{(0)} \right) \\&= \frac{1}{4} (7 - 4 \times 0 - 2 \times 0 - 1 \times 0) = 1.75\end{aligned} \quad (118)$$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + R_1^{(0)} = 0 + 1.75 = 1.75 \quad (119)$$

$$\begin{aligned} R_2^{(0)} &= \frac{1}{A_{22}} \left( b_2 - A_{21}x_1^{(1)} - A_{22}x_2^{(0)} - A_{23}x_3^{(0)} \right) \\ &= \frac{1}{3} (4 - 0 \times 1.75 - 3 \times 0 - 1 \times 0) = 1.33 \end{aligned} \quad (120)$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + R_2^{(0)} = 0 + 1.33 = 1.33 \quad (121)$$

$$\begin{aligned} R_3^{(0)} &= \frac{1}{A_{33}} \left( b_3 - A_{31}x_1^{(1)} - A_{32}x_2^{(1)} - A_{33}x_3^{(0)} \right) \\ &= \frac{1}{5} (9 - 2 \times 1.75 - 2 \times 1.33 - 5 \times 0) = 0.57 \end{aligned} \quad (122)$$

$$x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + R_3^{(0)} = 0 + 0.57 = 0.57 \quad (123)$$

Portanto, a primeira iteração nos dá

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.33 \\ 0.57 \end{bmatrix} \quad (124)$$

Repetindo os mesmo passos, para a segunda iteração temos

$$\begin{aligned} R_1^{(1)} &= \frac{1}{A_{11}} \left( b_1 - A_{11}x_1^{(1)} - A_{12}x_2^{(1)} - A_{13}x_3^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{4} (7 - 4 \times 1.75 - 2 \times 1.33 - 1 \times 0.57) = -0.81 \end{aligned} \quad (125)$$

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + R_1^{(1)} = 1.75 - 0.81 = 0.94 \quad (126)$$

$$\begin{aligned} R_2^{(1)} &= \frac{1}{A_{22}} \left( b_2 - A_{21}x_1^{(2)} - A_{22}x_2^{(1)} - A_{23}x_3^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{3} (4 - 0 \times 0.94 - 3 \times 1.33 - 1 \times 0.57) = -0.19 \end{aligned} \quad (127)$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + R_2^{(1)} = 1.33 - 0.19 = 1.14 \quad (128)$$

$$\begin{aligned} R_3^{(1)} &= \frac{1}{A_{33}} \left( b_3 - A_{31}x_1^{(2)} - A_{32}x_2^{(2)} - A_{33}x_3^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{5} (9 - 2 \times 0.94 - 2 \times 1.14 - 5 \times 0.57) = 0.40 \end{aligned} \quad (129)$$

$$x_3^{(2)} = x_3^{(1)} + R_3^{(1)} = 0.57 + 0.40 = 0.97 \quad (130)$$

Portanto, a segunda iteração nos dá

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.14 \\ 0.97 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Repetindo esse processo iterativo, temos:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.01 \\ 1.02 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.99 \\ 1.01 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (132)$$

E assim por diante. Note que as soluções obtidas pelo processo iterativo se aproximam cada vez mais da solução exata,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (133)$$

mas nunca a alcançam (pra ver isso é necessário utilizar mais algarismos). Note também que agora o processo de **convergência** é **muito mais rápido** do que no caso com Jacobi. Aqui, com 4 iterações já temos um erro próximo a 1%. No método de Jacobi foram necessárias 9 iterações para alcançar precisão semelhante.

## 6 Método SOR

O método de Gauss-Seidel pode ser melhorado com a inclusão de um fator  $\omega$  para multiplicar o resíduo em cada iteração. Esse novo método é conhecido como SOR (*Successive-over-relaxation*), e é dado por

$$x_i^{(ITER+1)} = x_i^{(ITER)} + \omega R_i^{(ITER)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (134)$$

em que

$$R_i^{(ITER)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i}^n A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \quad (135)$$

$\omega$  é o fator de relaxação e geralmente

$$1 < \omega < 2. \quad (136)$$

Para  $\omega = 1$  temos o método de Gauss-Seidel e para  $\omega = 2$  o método diverge. O valor ótimo de  $\omega$ , ou seja, o valor para o qual o número de iterações é mínimo, deve ser determinado por tentativa e erro. Esse valor se aproxima de 2 para grandes sistemas.

## 7 Implementação

Em anexo é apresentada a implementação em Python dos dois exemplos aqui do texto. Nesses exemplos temos sistemas com 3 equações. **A generalização desses casos e a implementação da solução usando funções do Python vai ficar para vocês.**

## Bibliografia

HOFFMAN, J. D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 1. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1992.

KIUSALAAS, J. *Numerical Methods in Engineering with Python 3*, 1. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2013.