Tarefa 5: Problema da Cavidade com Formulação Vorticidade - Função de Corrente

Métodos Numéricos em Termofluidos - ENM - UnB

Professor: Adriano Possebon Rosa

O objetivo nesta tarefa é resolver o problema do escoamento bidimensional de um fluido Newtoniano em uma cavidade usando a formulação vorticidade - função de corrente.

1 O Problema

Considere um fluido Newtoniano incompressível com viscosidade μ e massa específica ρ confinado em uma cavidade quadrada de lado L, como mostra a figura (1). O escoamento é bidimensional, com o campo vetorial de velocidade dado por

$$\mathbf{u} = u(x,y,t)\hat{\boldsymbol{e}}_x + v(x,y,t)\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{1}$$

e o campo escalar de pressão dado por

$$p = p(x,y,t) \ . \tag{2}$$

As paredes laterais e a parede inferior estão paradas. A parede superior possui velocidade $U(x) = U_o \sin^2(\pi x/L)$.

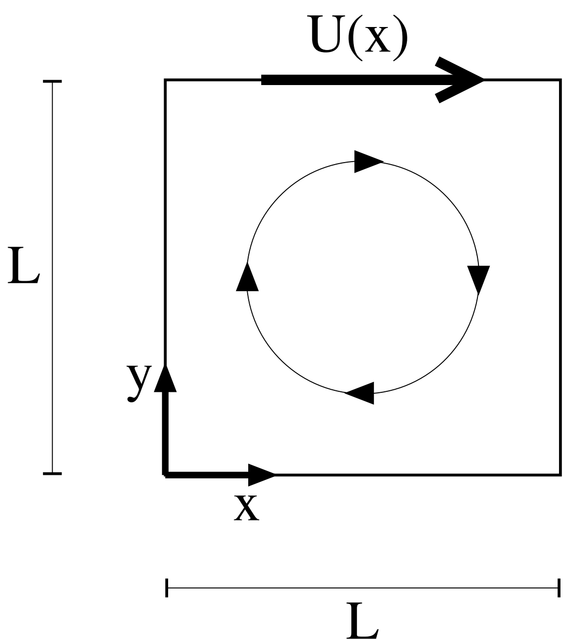

Figure 1: Escoamento em uma cavidade bidimensional.

2 Equações Governantes

As equações governantes para esse problema são a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

e a equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \ . \tag{4}$$

Usando a intensidade de velocidade U_o e o tamanho L da cavidade, as equações acima podem ser adimensionalizadas. O resultado é (todas as variáveis já estão na forma adimensional):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

e

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \ , \tag{6}$$

em que

$$Re = \frac{\rho U_o L}{\mu} \tag{7}$$

é o número de Reynolds. O domínio para essa forma adimensional é $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$ e a velocidade da parede superior se torna $U(x) = \sin^2(\pi x)$.

A equação da continuidade é satisfeita automaticamente se introduzimos uma função de corrente Ψ definida como:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \ . \tag{8}$$

A vorticidade, no caso bidimensional, é dada por:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \Psi \ . \tag{9}$$

O rotacional da equação de Navier-Stokes fornece uma equação para a vorticidade:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \omega = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \ . \tag{10}$$

Usando a definição de Ψ na equação acima, resulta:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \omega = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \ . \tag{11}$$

3 Aproximação Usando Diferenças Finitas

Para resolver numericamente as equações (9) e (11), o domínio é discretizado com N intervalos na direção x e N intervalos na direção y. Os incrementos espaciais são $\Delta x = \Delta y = 1/N$. A função de corrente $\Psi(x, y, t)$ é aproximada pela sua equivalente numérica $\Psi(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t) = \Psi^k_{i,j}$, com $0 \le i, j \le N$ e $k \ge 0$. O mesmo vale para a vorticidade ω.

Usando a aproximação de diferenças finitas, a equação da vorticidade se torna:

$$\begin{aligned} &\frac{\omega^{k+1}_{i,j} - \omega^k_{i,j}}{\Delta t} + \left(\frac{\Psi^k_{i,j+1} - \Psi^k_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)\left(\frac{\omega^k_{i+1,j} - \omega^k_{i-1,j}}{2\Delta x}\right) - \left(\frac{\Psi^k_{i+1,j} - \Psi^k_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{\omega^k_{i,j+1} - \omega^k_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) = \\ &= \frac{1}{Re}\left(\frac{\omega^k_{i+1,j} - 2\omega^k_{i,j} + \omega^k_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\omega^k_{i,j+1} - 2\omega^k_{i,j} + \omega^k_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) \ . \end{aligned} \tag{12}$$

A equação que correlaciona a função de corrente e a vorticidade, por sua vez, pode ser escrita como:

$$\frac{\Psi^{k+1}_{i+1,j} - 2\Psi^{k+1}_{i,j} + \Psi^{k+1}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi^{k+1}_{i,j+1} - 2\Psi^{k+1}_{i,j} + \Psi^{k+1}_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\omega^{k+1}_{i,j} \ . \tag{13}$$

Portanto, em cada passo tempo, primeiro calculamos diretamente o novo ω, que é o $\omega_{i,j}^{k+1}$. Em seguida usamos a equação (13) e o novo valor de ω para calcular $\Psi_{i,j}^{k+1}$.

A condição de contorno para Ψ é: $\Psi_{i,j} = 0$ para todos os pontos que estejam em alguma das paredes. Assim, $\Psi_{i,j} = 0$ se $i = 0$, ou se $i = N$, ou se $j = 0$, ou se $j = N$.

A condição inicial para Ψ é $\Psi_{i,j}^0 = 0$ para todos os pontos do domínio.

Já a condição de contorno para ω é atualizada em todo passo de tempo e é específica para cada parede:

Parede inferior ($j = 0$):

$$\omega_{i,0}^k = \frac{2\left(\Psi_{i,0}^k - \Psi_{i,1}^k\right)}{\Delta y^2} \tag{14}$$

Parede superior ($j = N$):

$$\omega_{i,N}^k = \frac{2\left(\Psi_{i,N}^k - \Psi_{i,N-1}^k\right)}{\Delta y^2} - \frac{2U_i}{\Delta_y} \tag{15}$$

Parede esquerda ($i = 0$):

$$\omega_{0,j}^k = \frac{2\left(\Psi_{0,j}^k - \Psi_{1,j}^k\right)}{\Delta x^2} \tag{16}$$

Parede direita ($i = N$):

$$\omega_{N,j}^k = \frac{2\left(\Psi_{N,j}^k - \Psi_{N-1,j}^k\right)}{\Delta x^2} \tag{17}$$

Essas condições são válidas para todos os instantes de tempo k, para $k \geq 0$. Assim, a condição inicial para ω é:

$$\omega_{ij}^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq N; \\ -\frac{2U_i}{\Delta y} & \text{se } j = N. \end{cases} \tag{18}$$

4 Restrições

Para evitar instabilidades numéricas, devemos obedecer às seguintes restrições quanto aos tamanhos do passo de tempo Δt e do incremento espacial Δx:

$$\Delta x < \frac{1}{Re} \quad \text{e} \tag{19}$$

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2 \ . \tag{20}$$

5 Tarefa

Resolva o problema proposto, usando essa formulação vorticidade - função de corrente juntamente com o método das diferenças finitas, para 3 números de Reynolds diferentes: $Re = 1$, $Re = 10$ e $Re = 100$. Plote os gráficos da função de corrente e da vorticidade para cada um dos casos. Compare os seus resultados com os resultados apresentados no roteiro enviado por e-mail (para $Re = 10$). Os códigos utilizados devem ser apresentados em anexo na tarefa. A tarefa pode ser entregue em formato digital.