Trabalho 2

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Instruções:

- O trabalho é individual. Você pode discutir os exercícios com os seus colegas, mas cada um deve fazer o seu próprio trabalho e desenvolver seus próprios códigos.
- Você pode utilizar qualquer linguagem de programação (recomendo o python).
- Responda aos exercícios com texto, gráficos e explicações. Comente todos os gráficos que você incluir no relatório.
- O relatório com as respostas deve ser enviado em formato pdf por meio do Moodle.
- Os códigos devem ser enviados separadamente, também no Moodle.

Equações Diferenciais Ordinárias

Para os exercícios de 1 a 5: resolva numericamente a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y) \ , \qquad y(t_o) = y_o \tag{1}$$

usando os métodos de Euler Explícito,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_n \ , \tag{2}$$

Euler Implícito,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_{n+1} \ , \tag{3}$$

Runge-Kutta de segunda ordem,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) \ , \tag{4}$$

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n) \ , \tag{5}$$

$$k_2 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_1) \ , \tag{6}$$

e Runge-Kutta de quarta ordem,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \ , \tag{7}$$

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n) \ , \tag{8}$$

$$k_2 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \ , \tag{9}$$

$$k_3 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \ , \tag{10}$$

$$k_4 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3) \ . \tag{11}$$

Em todos esses problemas, compare, por meio de gráficos, os resultados usando esses métodos com a solução analítica da EDO. Utilize um passo de tempo Δt conveniente.

Exercício 1. $y' = 2 - 2t + 4t^2 - 4t^3 - 4t^4 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = 1 + 2t - t^2 + \frac{4}{3}t^3 - t^4 - \frac{4}{5}t^5$.

Exercício 2. $y' = 1 + \frac{y}{t} \ , \quad 1 \leq t \leq 2 \ , \quad y(1) = 2$. Solução analítica: $y(t) = t \ln t + 2t$.

Exercício 3. $y' = t^2 y \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = \exp(t^3/3)$.

Exercício 4. $y' = ty^2 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = -\frac{2}{t^2-2}$. Observação: Nesse caso não é necessário resolver usando o método de Euler Implícito.

Exercício 5. Considere novamente a equação $y' = 2-2t+4t^2-4t^3-4t^4 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Para um tempo fixo $t = 1$, faça um estudo do erro (módulo da diferença entre o valor y calculado e o valor exato) em função do valor do Δt utilizado. Compare os resultados obtidos com os 4 métodos. Disserte.

Exercício 6. O deslocamento angular $\theta(t)$, em radianos, de um pêndulo é dado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \qquad \text{com } \theta(0) = \theta_0 \text{ e } \theta'(0) = \theta'_0 \ , \tag{12}$$

com $g = 9.81 \, m/s^2$ sendo a aceleração gravitacional e L o comprimento do pêndulo. Para pequenos valores de θ, essa equação pode ser simplificada para

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \ . \tag{13}$$

Faça gráficos de θ em função de t, com um período de oscilação, para $\theta(0) = 0.1$ e $\theta(0) = 0.5$, $\theta'(0) = 0$ e $L = 0.1, 1.0$ e $10 \, m$. Utilize a equação exata e a simplificada. Compare os resultados.

Exercício 7. O crescimento populacional de uma dada espécie pode ser modelado por uma EDO do tipo

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \ , \quad N(0) = N_0 \ , \tag{14}$$

em que N é a população, aN representa a taxa de nascimento e bN^2 representa a taxa de mortalidade causada por doenças e competição por alimentos. Se $N_0 = 100000$, $a = 0,1$ e $b = 10^{-7}$, calcule $N(t)$ para t entre 0 e 20 anos. Varie o coeficiente b e veja como isso afeta no número de indivíduos. Resolva este problema usando o método de Euler Explícito e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Compare as soluções.

Exercício 8. As populações de duas espécies competindo pela mesma fonte de alimentação podem ser modeladas pelo par de EDOS

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(a_1 - b_1 N_1 - c_1 N_2), \qquad \text{com } N_1(t=0) = N_{1,0} \tag{15}$$

e

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(a_2 - b_2 N_2 - c_2 N_1), \qquad \text{com } N_2(t=0) = N_{2,0}\ . \tag{16}$$

Nessas equações, N_i é o número de indivíduos da espécie i, $a_i N_i$ representa a taxa de nascimento, $b_i N_i^2$ representa a taxa de mortalidade e $c_i N_i N_j$ representa a taxa de mortalidade devido à competição por alimentos. Se $N_{1,0} = N_{2,0} = 10^5$, $a_1 = 0.1$, $b_1 = 8 \times 10^{-7}$, $c_1 = 10^{-6}$, $a_2 = 0.1$, $b_2 = 8 \times 10^{-7}$ e $c_2 = 10^{-7}$, calcule $N_1(t)$ e $N_2(t)$ entre 0 e 10 anos.

Equação do Calor (1D transiente, explícito)

Exercícios 9 ao 13. Objetivo: resolver numericamente a equação do calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{17}$$

usando diferenças finitas (explícitas, FTCS)

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \tag{18}$$

com diferentes condições de contorno.

Sugestões: faça gráficos de T em função de x para diferentes t; compare com as soluções analíticas; escolha, por exemplo, um t pequeno (0.01) para mostrar o início, um t intermediário (0.1 ou 0.2, dependendo do problema), e um t maior para mostrar a condição final (1 ou 2); faça a simulação com diferentes Δt, para ver quais levam a uma resposta que faz sentido e quais "explodem"; interprete fisicamente os gráficos.

Exercício 9.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 2\,, \quad t > 0 \tag{19}$$

$$T(0,t) = T(2,t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{20}$$

$$T(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, \quad 0 \le x \le 2 \tag{21}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \exp\left[\frac{-\pi^2 t}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2}x\right] \tag{22}$$

Exercício 10.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{23}$$

$$T(0,t) = T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{24}$$

$$T(x,0) = 1\,, \quad 0 < x < 1 \tag{25}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\left[(2n-1)\pi x\right] \exp\left[-(2n-1)^2\pi^2 t\right] \,. \tag{26}$$

Exercício 11.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{27}$$

$$T(0,t) = 1\,, \quad T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{28}$$

$$T(x,0) = 0\,, \quad 0 < x < 1 \tag{29}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[n\pi x\right] \exp\left[-n^2\pi^2 t\right] \,. \tag{30}$$

Exercício 12.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{31}$$

$$T(0,t) = T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{32}$$

$$T(x,0) = \begin{cases} 200x\,, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 200(1-x)\,, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \tag{33}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left[(2n+1)\pi x\right] \exp\left[-(2n+1)^2\pi^2 0.01 t\right] \,. \tag{34}$$

Exercício 13. Condição de contorno de Neumann (da derivada).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 0.5\,, \quad t > 0 \tag{35}$$

$$T(0,t) = 0\,, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0.5\ ,\ t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{36}$$

$$T(x,0) = 200x\,, \quad 0 \leq x \leq 0.5 \tag{37}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left[(2n+1)\pi x\right] \exp\left[-(2n+1)^2 \pi^2 0.01 t\right] \,. \tag{38}$$

Equação do Calor (2D transiente, explícito)

Exercícios 14 ao 17. O objetivo aqui é encontrar a solução para a equação do calor bidimensional transiente,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \,, \tag{39}$$

usando diferenças finitas (explícitas, FTCS),

$$\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k}}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^{k} - 2T_{i,j}^{k} + T_{i-1,j}^{k}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{k} - 2T_{i,j}^{k} + T_{i,j-1}^{k}}{\Delta y^2} \,, \tag{40}$$

com diferentes condições de contorno. Sugestões: faça gráficos tridimensionais de T em função de x e y para diferentes t e faça também gráficos de contorno; compare com as soluções analíticas (note que as soluções analíticas são para o regime permanente); escolha, por exemplo, um t pequeno (0.05) para mostrar o início, um t intermediário (0.2), e um t maior para mostrar a condição final (1 ou 2); faça a simulação com diferentes Δt, para ver quais levam a uma resposta que faz sentido e quais “explodem” ; interprete fisicamente os gráficos.

Exercício 14.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \,, \quad 0 < x < 1 \,, \quad 0 < y < 1 \,, \quad t > 0 \tag{41}$$

$$T(x,0,t) = 0 \,, \qquad 0 \le x \le 1 \,, \quad t \ge 0 \tag{42}$$

$$T(x,1,t) = \sin(\pi x) \,, \qquad 0 \le x \le 1 \,, \quad t \ge 0 \tag{43}$$

$$T(0,y,t) = 0 \,, \qquad 0 < y < 1 \,, \quad t \ge 0 \tag{44}$$

$$T(1,y,t) = 0 \,, \qquad 0 < y < 1 \,, \quad t \ge 0 \tag{45}$$

$$T(x,y,0) = 0 \,, \qquad 0 < x < 1 \,, \quad 0 < y < 1 \tag{46}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t \to \infty) = \frac{\sinh(\pi y)\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \tag{47}$$

Exercício 15.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \,, \quad 0 < x < 0.5 \,, \quad 0 < y < 1 \,, \quad t > 0 \tag{48}$$

$$T(x,0,t) = 0 \,, \qquad 0 \le x \le 0.5 \,, \quad t \ge 0 \tag{49}$$

$$T(x,1,t) = \sin(\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 0.5\,, \quad t \ge 0 \tag{50}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{51}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0.5,y,t) = 0\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{52}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 0.5\,, \quad 0 < y < 1 \tag{53}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t\to\infty) = \frac{\sinh(\pi y)\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \tag{54}$$

Exercício 16.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t > 0 \tag{55}$$

$$T(x,0,t) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \tag{56}$$

$$T(x,1,t) = \begin{cases} 75x\,, & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 150(1-x)\,, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}\,, \quad t \ge 0 \tag{57}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{58}$$

$$T(1,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{59}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1 \tag{60}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t\to\infty) = \frac{450}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2\sinh n\pi}\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)\,. \tag{61}$$

Exercício 17.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{62}$$

A placa da figura 1 tem dimensão 1 por 1. Todas as paredes têm temperatura 0. Os pontos do centro (cor preta) da placa têm temperatura 1 (fixa, não varia com o tempo). Como condição inicial considere todos os pontos que não estão no centro com temperatura 0.

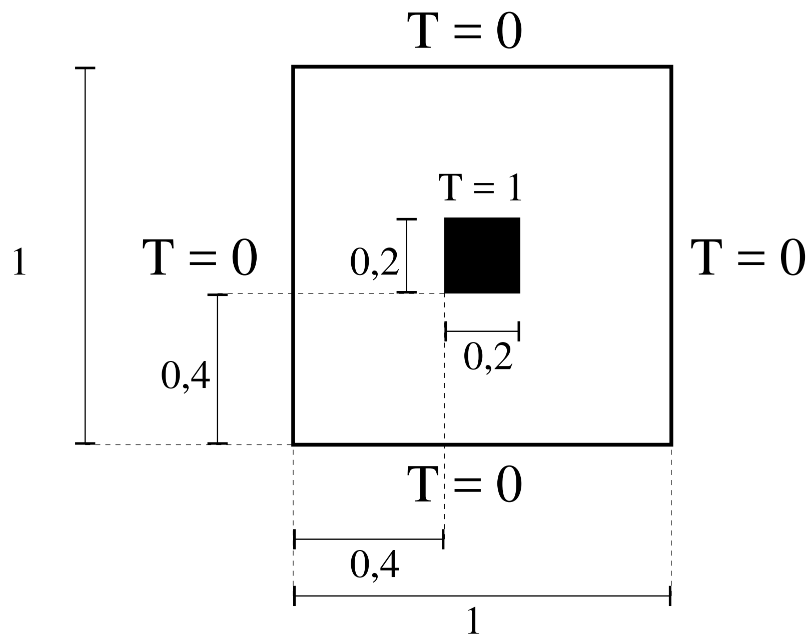

Figura 1: Problema 4.