# Trabalho 3

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Instruções:

- O trabalho é individual. Você pode discutir os exercícios com os seus colegas, mas cada um deve fazer o seu próprio trabalho e desenvolver seus próprios códigos.
- Você pode utilizar qualquer linguagem de programação (recomendo o python).
- Responda aos exercícios com texto, gráficos e explicações. Comente todos os gráficos que você incluir no relatório.
- O relatório com as respostas deve ser enviado em formato pdf, por meio do Moodle.
- Os códigos devem ser enviados separadamente, também no Moodle.

## Sistemas de Equações Lineares

**Exercício 1.** Use o método de Gauss-Seidel para resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 20 & -4 \\ -2 & 15 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

**Exercício 2.** O objetivo aqui é **resolver** o sistema apresentado no início da aula "Sistemas de Equações Algébricas Lineares" (ver a equação 11 daquela aula). Aquele sistema foi resultado da discretização da barra considerando uma divisão em $N = 5$ partes iguais e resultou em $n = N - 1 = 4$ equações. Aqui você deve considerar que a discretização é para um número $N$ arbitrário de partes iguais, que vai resultar em um número $n = N - 1$ de equações no sistema. Note que a matriz $\mathbf{A}$ é $n \times n$ e tridiagonal.

Você vai resolver esse sistema usando 4 métodos iterativos diferentes: **Jacobi, Gauss-Seidel, SOR e Gradiente Conjugado**. Em todos os métodos iterativos, inicia-se a solução com um chute inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (pode ser todos os pontos do interior iguais a zero). O próximo valor, $\boldsymbol{x}^{(1)}$, é obtido a partir de algum método iterativo. São feitas $M$ iterações até que o método convirja. O critério utilizado para convergência pode ser, por exemplo, $|x_i^{(M+1)} - x_i^{(M)}|_{max} \leq \epsilon$, em que $\epsilon$ é a tolerância. Os algoritmos correspondentes a cada um dos métodos são apresentados na sequência.

**Método de Jacobi**

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} + R_i^{(ITER)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ R_i^{(ITER)} &= \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

**Método de Gauss-Seidel**

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} + R_i^{(ITER)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ R_i^{(ITER)} &= \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i}^{n} A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

**SOR**

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} + \omega R_i^{(ITER)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ R_i^{(ITER)} &= \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i}^{n} A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

Aqui, $\omega$ é o fator de sobre-relaxação e deve estar entre 1 e 2.

**Gradiente Conjugado**

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \\ &\boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{r}^{(0)} \\ &ITER = 0 \\ &\text{Faça:} \\ &\qquad \alpha^{(ITER)} = \frac{\boldsymbol{r}^{(ITER)} \cdot \boldsymbol{r}^{(ITER)}}{\boldsymbol{p}^{(ITER)} \cdot \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(ITER)}\right)} \\ &\qquad \boldsymbol{x}^{(ITER+1)} = \boldsymbol{x}^{(ITER)} + \alpha^{(ITER)} \boldsymbol{p}^{(ITER)} \\ &\qquad \boldsymbol{r}^{(ITER+1)} = \boldsymbol{r}^{(ITER)} - \alpha^{(ITER)} \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(ITER)}\right) \\ &\qquad \text{se } \max(\text{abs}(\boldsymbol{r})) < \epsilon: \\ &\qquad\qquad PARE \\ &\qquad \beta^{(ITER)} = \frac{\boldsymbol{r}^{(ITER+1)} \cdot \boldsymbol{r}^{(ITER+1)}}{\boldsymbol{r}^{(ITER)} \cdot \boldsymbol{r}^{(ITER)}} \\ &\qquad \boldsymbol{p}^{(ITER+1)} = \boldsymbol{r}^{(ITER+1)} + \beta^{(ITER)} \boldsymbol{p}^{(ITER)} \\ &\qquad ITER = ITER + 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Faça um programa com 4 funções, cada uma resolvendo o sistema por um dos métodos acima apresentados. As entradas para cada função são a matriz $\boldsymbol{A}$, o vetor $\boldsymbol{b}$ e a tolerância $\epsilon$. A saída de cada função é o vetor $\boldsymbol{x}$ (e o número de iterações ou tempo de execução, quando necessários). Faça **três investigações:**

i) Faça um gráfico de $n \times M$ para os 4 métodos: estude o número de iterações necessárias para a convergência para diferentes valores de $n$. Assuma $\epsilon = 10^{-7}$ e $n$ até 100 (ou mais). Qual método converge com o menor número de iterações?

ii) Faça um gráfico de $n \times$ *tempo de execução* para os 4 métodos: estude o tempo que o computador levou para rodar com diferentes valores de $n$. Assuma $\epsilon = 10^{-7}$ e $n$ até 100 (ou mais). Qual método é o mais rápido?

iii) Faça um gráfico de $iter \times R_{max}$ para o 4 métodos, em que $R_{max}$ é o valor máximo (absoluto) do resíduo de cada iteração. Cada iteração tem uma matriz de resíduos, então você plotar o valor máximo desse resíduo em cada iteração. Use $n = 20$ ou 40.

## Equação do Calor (2D permanente)

**Exercício 3.** Equação do calor bidimensional em regime permanente (Equação de Laplace):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad 0 < y < 1\,; \tag{6}$$

$$T(x,0) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{7}$$

$$T(x,1) = 1\,, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{8}$$

$$T(0,y) = 0\,, \qquad 0 < y < 1 \tag{9}$$

$$T(1,y) = 0\,, \qquad 0 < y < 1 \tag{10}$$

Resolva o problema usando diferença finitas centradas e SOR. Faça gráficos de contorno e 3D da solução. Compare a solução usando 10 pontos em cada direção e depois 100 pontos. Quanto tempo leva para o computador rodar o problema? Qual é o valor ótimo de $\omega$? Esse valor depende do tamanho da malha?

**Exercício 4.** Resolva a equação do calor 2D permanente com geração de calor (Equação de Poisson):

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad 0 < y < 1\,; \tag{11}$$

$$T(x,0) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{12}$$

$$T(x,1) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{13}$$

$$T(0,y) = 0\,, \qquad 0 < y < 1 \tag{14}$$

$$T(1,y) = 0\,, \qquad 0 < y < 1 \tag{15}$$

Resolva esse problema usando diferenças finitas centradas e SOR e compare com a solução analítica $T(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$.

## Equação do Calor (1D transiente, implícito)

**Exercício 5.** Resolva o problema

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{16}$$

$$T(0,t) = 1\,, \quad T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{17}$$

$$T(x,0) = 0\,, \quad 0 < x < 1 \tag{18}$$

usando os métodos BTCS,

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2}\,, \tag{19}$$

e Crank-Nicolson,

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{k} - 2T_i^{k} + T_{i-1}^{k}}{\Delta x^2}\right)\,. \tag{20}$$

Compare os resultados obtidos com os 3 métodos numéricos (FTCS (do Trabalho 2), BTCS e Crank-Nicolson) com a solução analítica,

$$T(x,t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[n\pi x\right] \exp\left[-n^2\pi^2 t\right]\,. \tag{21}$$

**Exercício 6.** Considere agora o problema dado por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 0.5\,, \quad t > 0 \tag{22}$$

$$T(0,t) = 0\,, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0.5\;,\; t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{23}$$

$$T(x,0) = 200x\,, \quad 0 \leq x \leq 0.5\;, \tag{24}$$

cuja, solução exata é

$$T(x,t) = \frac{800}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left[(2n+1)\pi x\right] \exp\left[-(2n+1)^2\pi^2 0.01t\right]\,. \tag{25}$$

Resolva essa problema usando os métodos BTCS e Crank-Nicolson. Compare as soluções com a solução analítica.

# Equação do Calor (2D transiente, implícito)

**Exercícios 7 e 8.** O objetivo aqui é encontrar a solução para a equação do calor bidimensional transiente,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \tag{26}$$

usando diferenças finitas (implícitas, BTCS),

$$\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^{k} - 2T_{i,j}^{k} + T_{i-1,j}^{k}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{k} - 2T_{i,j}^{k} + T_{i,j-1}^{k}}{\Delta y^2}\,, \tag{27}$$

com diferentes condições de contorno. Sugestões: faça gráficos tridimensionais de $T$ em função de $x$ e $y$ para diferentes $t$ e faça também gráficos de contorno; compare com as soluções analíticas (note que as soluções analíticas são para o regime permanente); escolha, por exemplo, um $t$ pequeno (0.05) para mostrar o início, um $t$ intermediário (0.2), e um $t$ maior para mostrar a condição final (1 ou 2); interprete fisicamente os gráficos.

**Exercício 7.**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t > 0 \tag{28}$$

$$T(x,0,t) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \tag{29}$$

$$T(x,1,t) = \sin(\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \tag{30}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{31}$$

$$T(1,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{32}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1 \tag{33}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t\to\infty) = \frac{\sinh(\pi y)\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \tag{34}$$

**Exercício 8.**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \quad 0 < x < 0.5\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t > 0 \tag{35}$$

$$T(x,0,t) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 0.5\,, \quad t \ge 0 \tag{36}$$

$$T(x,1,t) = \sin(\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 0.5\,, \quad t \ge 0 \tag{37}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0.5,y,t) = 0\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{39}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 0.5\,, \quad 0 < y < 1 \tag{40}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t\to\infty) = \frac{\sinh(\pi y)\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \tag{41}$$