Universidade de Brasília

Tópicos Complementares

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

1 Introdução

Nesta aula são discutidos alguns tópicos complementares que serão a base para a elaboração do artigo científico. Os tópicos são abordados de forma introdutória e em cada um deles são apresentadas referências para aqueles leitores que queiram se aprofundar no tema.

2 Problema da Convecção Natural

O objetivo aqui é apresentar o problema de **convecção natural bidimensional** para o caso de uma cavidade quadrada de lado L, representada na figura (1). A parede esquerda é mantida a uma temperatura fixa T_H e a parede direita é mantida a T_C, com $T_H > T_C$, durante todo o processo. As paredes de cima e de baixo são isoladas termicamente, ou seja, $\dot{Q} = 0$ nessas paredes. Resolver esse problema significa obter as distribuições de velocidade e temperatura dentro da cavidade, assim como obter o número de Nusselt. Vamos começar com a dedução das equações governantes.

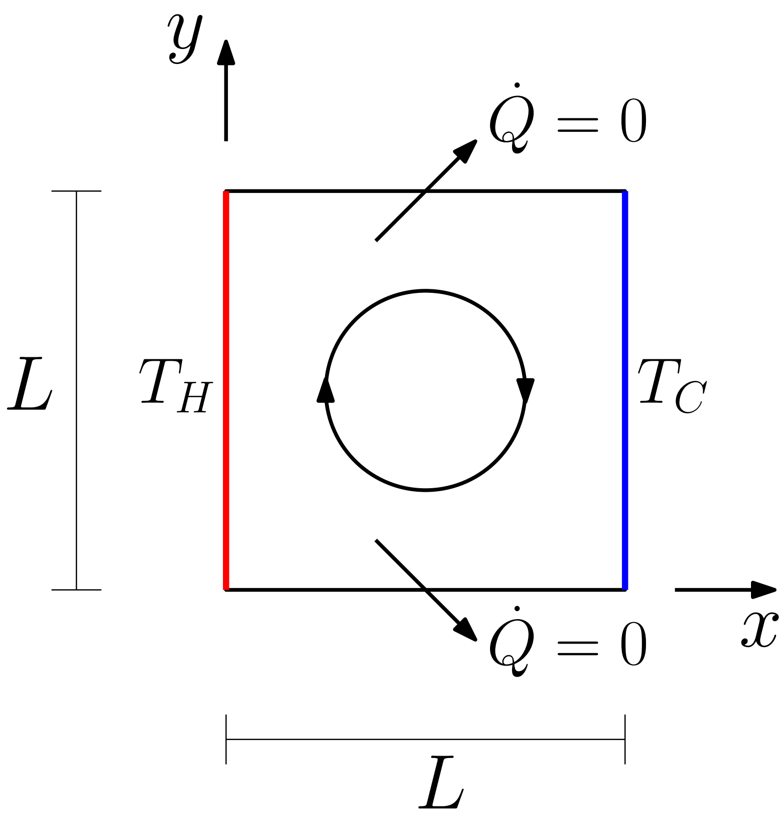

Figura 1: Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada.

2.1 Equação da Energia

A energia de um sistema é dada por

$$E = E_{int} + \frac{m(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})}{2} \ , \tag{1}$$

em que m é a massa, $\boldsymbol{u}$ é a velocidade e

$$E_{int} = mcT \tag{2}$$

representa a energia interna, onde T é a temperatura e c é o calor específico do material. A energia específica, ou energia por unidade de massa, é dada por

$$e = cT + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{2} = cT + \frac{u^2}{2} \ . \tag{3}$$

Primeira lei da Termodinâmica para um sistema: a taxa de variação de energia do sistema é igual ao calor que chega ao sistema somado ao trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema. Na forma de equação, temos

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \ , \tag{4}$$

em que $\dot{Q}$ é a quantidade de calor que chega ao sistema por unidade de tempo e $\dot{W}$ é o trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema. Assim, temos

$$\dot{Q} = -\int_S (\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \ dS = -\int_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}) \ dV \ . \tag{5}$$

Na equação (5) foi usado o teorema da divergência par obter a segunda igualdade. Aqui, $\dot{\boldsymbol{q}}$ é o vetor fluxo de calor. Usando a lei de Fourier

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -k\boldsymbol{\nabla}T \tag{6}$$

na equação (5) e considerando a condutividade térmica do fluido, k, constante, resulta:

$$\dot{Q} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (k\boldsymbol{\nabla}T) \ dV = \int_V k\nabla^2 T \, dV \ . \tag{7}$$

O trabalho, por sua vez, é dado por

$$\dot{W} = \int_V (\rho\boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u} \, dV + \int_S (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{u} \, dS \ . \tag{8}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões, e representa as forças superficiais que são aplicadas no sistema, por unidade de área. A componente σ_{ij} atua no plano i e na direção j. Para um fluido Newtoniano,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \ , \tag{9}$$

em que p é a pressão, $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade, μ é a viscosidade do fluido (constante) e

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T\right] \tag{10}$$

é o tensor taxa de deformação. Usando o teorema da divergência:

$$\int_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u})\; dS = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u})\; dV \ . \tag{11}$$

Então, o trabalho pode ser reescrito como:

$$\dot{W} = \int_V (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u}\, dV + \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u})\; dV \ . \tag{12}$$

A energia do sistema é:

$$E = \int_V \rho e\, dV \ . \tag{13}$$

Assim, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho e\, dV = \dot{Q} + \dot{W} \ . \tag{14}$$

Usando o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho e\, dV = \int_V \left[\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} e\right]\, dV = \int_V \rho \frac{De}{Dt}\, dV \ . \tag{15}$$

Assim:

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt}\, dV = \int_V k\nabla^2 T\, dV + \int_V (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u}\, dV + \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u})\; dV \ . \tag{16}$$

Ou:

$$\int_V \left[\rho \frac{De}{Dt} - k\nabla^2 T - (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u})\right]\, dV = 0 \ . \tag{17}$$

Como a integral na equação (17) é zero para qualquer limite de integração, podemos concluir que o integrando é nulo sempre, pelo Teorema da Localização. Assim:

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= k\nabla^2 T + (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= k\nabla^2 T + (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla u}) \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Substituindo a expressão para a energia específica:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} + \frac{\rho}{2}\frac{Du^2}{Dt} = k\nabla^2 T + (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla u}) \ . \tag{19}$$

A equação de Cauchy é dada por:

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \ . \tag{20}$$

Fazendo o produto escalar da equação de Cauchy por $\boldsymbol{u}$ resulta:

$$\frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} = \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \ . \tag{21}$$

Substituindo (21) em (19):

$$\rho c \frac{DT}{Dt} + \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = k \nabla^2 T + (\rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}) \ . \tag{22}$$

Assim:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}) \ . \tag{23}$$

Considerando um fluido Newtoniano, temos

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + (-p\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{D}) : (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}) \ . \tag{24}$$

Ou:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - p(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) + 2\mu \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \ . \tag{25}$$

Mas $\boldsymbol{D} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}$. Considerando um fluido incompressível ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$), temos:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + 2\mu \left(\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D} \right) \ . \tag{26}$$

O último termo dessa equação,

$$\Phi = 2\mu D_{ij} D_{ij} \ , \tag{27}$$

é chamado de função de dissipação viscosa. Em muitos escoamentos, Φ é muito menor do que os outros termos da equação (neste trabalho vamos assumir essa hipótese). Portanto, a equação para a energia é dada por:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \right) = \alpha \nabla^2 T \ . \tag{28}$$

Aqui, $\alpha = k/(\rho c)$ é a difusividade térmica e tem unidade de m^2/s no SI.

Comentários:

- a velocidade interfere no campo de temperatura, pois aparece no termo advectivo da equação (28);

- o trabalho total do tensor de tensões é dado por:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}) \tag{29}$$

O primeiro termo do lado direito da equação contribui para uma variação na energia cinética do elemento, como pode ser observado na equação (21). O segundo termo contribui para um aumento na energia interna, ou seja, para um aumento de temperatura, como pode ser visto na equação (23).

Número de Nusselt. A lei de resfriamento por convecção de Newton, para o caso estudado no presente trabalho, é dada por:

$$\dot{Q} = h\left(T_H - T_C\right) \ , \tag{30}$$

em que $\dot{Q}$ é a taxa de transferência de calor por convecção por unidade de área e h é o coeficiente de transferência de calor por convecção. O número de Nusselt Nu é o coeficiente de transferência de calor adimensionalizado:

$$Nu = \frac{hL_c}{k} \ . \tag{31}$$

Como nas paredes o fluido está em repouso, o calor é transmitido apenas por condução, ou seja,

$$\dot{Q} = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} \ , \tag{32}$$

na parede esquerda, por exemplo. $\dot{Q} = 0$ nas paredes de cima e de baixo, já que estas são termicamente isoladas. Esse calor que chega da parede esquerda por condução é transferido por convecção no fluido, de maneira que temos a igualdade:

$$\dot{Q} = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h\left(T_H - T_C\right) \ . \tag{33}$$

Isolando h:

$$h = -\frac{k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}}{(T_H - T_C)} \ . \tag{34}$$

Substituindo (34) em (31) resulta:

$$Nu = -\frac{k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}}{(T_H - T_C)}\frac{L_c}{k} \ . \tag{35}$$

No caso em que o fluido está em repouso, ou seja, temos transferência apenas por condução pelo meio, resulta que $Nu = 1$.

2.2 Aproximação de Boussinesq

A variação de temperatura leva a uma variação de massa específica que faz aparecer uma força de empuxo. Precisamos relacionar a variação de temperatura T com a variação de massa específica ρ. A propriedade que nos dá essa relação é o coeficiente de expansão volumétrica β, definido como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \ . \tag{36}$$

β é uma propriedade do fluido e o subíndice P indica que essa definição é válida para pressão constante. Fazendo uma aproximação da equação (36), podemos reescrevê-la como:

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho_o}\frac{\Delta\rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{(\rho-\rho_o)}{(T-T_o)} \ . \tag{37}$$

ρ_o e T_o representam a massa específica e a temperatura do fluido longe da parede (ou em alguma configuração de referência), respectivamente. Assim, ρ e T são pequenos desvios de ρ_o e T_o. Isolando ρ em (37) temos:

$$\rho = \rho_o - \beta\rho_o\Delta T \ . \tag{38}$$

A equação de Navier-Stokes é:

$$\rho_o\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\right) = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{g} \ . \tag{39}$$

Substituindo a relação (38) na equação (39), resulta:

$$\rho_o\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\right) = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho_o\boldsymbol{g} - \rho_o\boldsymbol{g}\beta\left(T-T_o\right) \ . \tag{40}$$

Considerando que a aceleração gravitacional é dada por

$$\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{e}}_y \ , \tag{41}$$

e definindo uma nova pressão como sendo

$$p^* = p + \rho_o g y \ , \tag{42}$$

temos

$$\rho_o\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\right) = -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho_o g\beta\left(T-T_o\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y \ . \tag{43}$$

Nessa equação já foi usada a nova pressão (sem o asterisco). Note que a força extra que aparece atua apenas na direção y , que é a direção da aceleração gravitacional. Ao conjunto de passos que leva à equação (43) é dado o nome de aproximação de Boussinesq [1, 2].

2.3 Equações Governantes

As equações governantes desse problema são a equação da conservação de massa (fluido incompressível),

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \ , \tag{44}$$

a equação de Navier-Stokes com a correção de Boussinesq,

$$\rho_o \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \right) = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho_o g \beta \left(T - T_o \right) \hat{\boldsymbol{e}}_y \ , \tag{45}$$

e a equação da energia (temperatura),

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \right) = \alpha \nabla^2 T \ . \tag{46}$$

Nas equações, $\alpha = k/(\rho_o c)$, T_o é uma temperatura de referência e ρ_o é a massa específica do fluido nessa temperatura. No nosso problema específico, a temperatura de referência é T_C.

2.4 Adimensionalização

Para adimensionalizar as equações governantes do problema, (44), (45) e (46), vamos utilizar L como um comprimento característico, α/L como uma velocidade característica, L^2/α como um tempo característico e $\rho_o \alpha^2/L^2$ como uma pressão característica. Assim, as grandezas características usadas para adimensionalizar as equações são:

$$L_c = L \ , \qquad u_c = \frac{\alpha}{L} \ , \qquad t_c = \frac{L^2}{\alpha} \qquad \text{e} \qquad p_c = \rho_o \frac{\alpha^2}{L^2} \ . \tag{47}$$

As variáveis adimensionais são:

$$\boldsymbol{\nabla}^* = L \boldsymbol{\nabla} \qquad \boldsymbol{u}^* = \frac{\boldsymbol{u}}{u_c} = \boldsymbol{u} \frac{L}{\alpha} \ , \qquad t^* = t \frac{\alpha}{L^2} \qquad p^* = p \frac{p L^2}{\rho_o \alpha^2} \ , \qquad \theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C} \ . \tag{48}$$

Note que θ é a temperatura adimensional. Substituindo essas variáveis de volta nas equações governantes resulta:

$$\boldsymbol{\nabla}^* \cdot \boldsymbol{u}^* = 0 \ , \tag{49}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{\nabla}^* \boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{\nabla}^* p^* + Pr \nabla^{*2} \boldsymbol{u}^* + Ra Pr \theta \hat{\boldsymbol{e}}_y \ e \tag{50}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{\nabla}^* \theta = \nabla^{*2} \theta \ . \tag{51}$$

Na equação (50),

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho_o}{k/(\rho_o c)} = \frac{\mu c}{k} \tag{52}$$

é o número de Prandtl e

$$Ra = \frac{g\beta\,(T_H - T_C)\,L_c^3}{\nu\alpha} \tag{53}$$

é o número de Rayleigh.

2.5 Implementação Numérica: Método de Projeção

As equações que devem ser resolvidas são (já na forma adimensional)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0\ , \tag{54}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}p + Pr\nabla^2\boldsymbol{u} + RaPr\theta\hat{\boldsymbol{e}}_y \qquad e \tag{55}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = \nabla^2\theta\ . \tag{56}$$

A figura (2) mostra o problema proposto na forma adimensional. A velocidade possui valor zero em todas as paredes. Para a temperatura, as condições de contorno são:

- $\theta = 1$ para a parede esquerda;
- $\theta = 0$ para a parede direita;
- $\dot{Q} = \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$ paras as paredes de cima e de baixo.

Uma maneira de resolver numericamente essas equações governantes é por meio do método de projeção, acoplado com o método de diferenças finitas para aproximar as derivadas. Os passos para resolver as equações são:

$$\text{PASSO 1}\begin{cases} \frac{\boldsymbol{u}^{*}-\boldsymbol{u}^{k}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^k = Pr\nabla^2\boldsymbol{u}^k + RaPr\theta^k\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \\ \boldsymbol{u}^{*} = \boldsymbol{0} \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{57}$$

$$\text{PASSO 2}\begin{cases} \frac{\theta^{k+1}-\theta^{k}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta^k = \nabla^2\theta^k \\ \\ \theta = 1 \text{ em } x = 0\,;\ \theta = 0 \text{ em } x = 1 \\ \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1 \end{cases} \tag{58}$$

$$\text{PASSO 3}\begin{cases} \nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^{*} \\ \\ \boldsymbol{\nabla}p^{k+1}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{59}$$

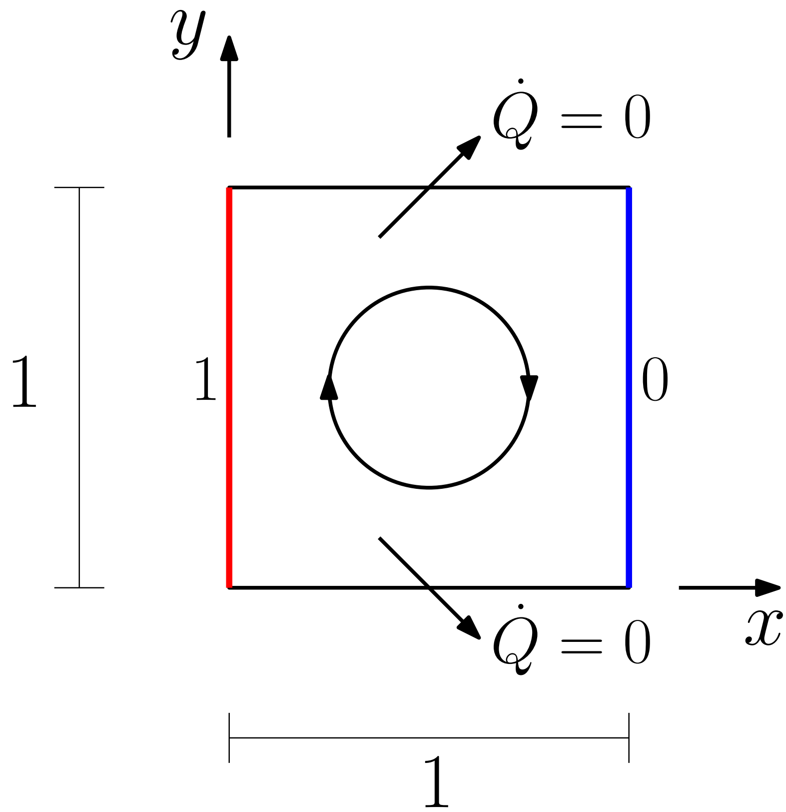

Figura 2: Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada. Problema adimensional.

$$\text{PASSO 4}\left\{\ \boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^{*} - \Delta t \boldsymbol{\nabla} p^{k+1}\right. \tag{60}$$

Posição da temperatura: usando uma malha defasada, a temperatura pode ser posicionada no centro do elemento, no mesmo local onde se encontra a pressão.

Número de Nusselt. Na forma adimensional, a equação (35) é dada por:

$$Nu = -\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} . \tag{61}$$

Esse é o número de Nusselt local, ou seja, para cada valor y da parede esquerda. O número de Nusselt médio Nu_m é dado por:

$$Nu_m = -\int_0^1 \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} dy . \tag{62}$$

3 Entrada e Saída de Fluido

Muitos problemas em fluidos envolvem a entrada e a saída de fluido de um domínio. Para entendermos como essas condições de contorno são implementadas, vamos considerar o escoamento de um fluido entre duas placas planas paralelas, como mostra a figura (3). Vamos considerar como base a metodologia desenvolvida para o problema da cavidade cisalhante. As paredes de cima e de baixo são sólidas e estão paradas. As condições de contorno aqui serão iguais às da cavidade, sendo necessário apenas zerar a velocidade da tampa. Ou seja, para as paredes sólidas, temos

$$u = v = 0$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \ .$$

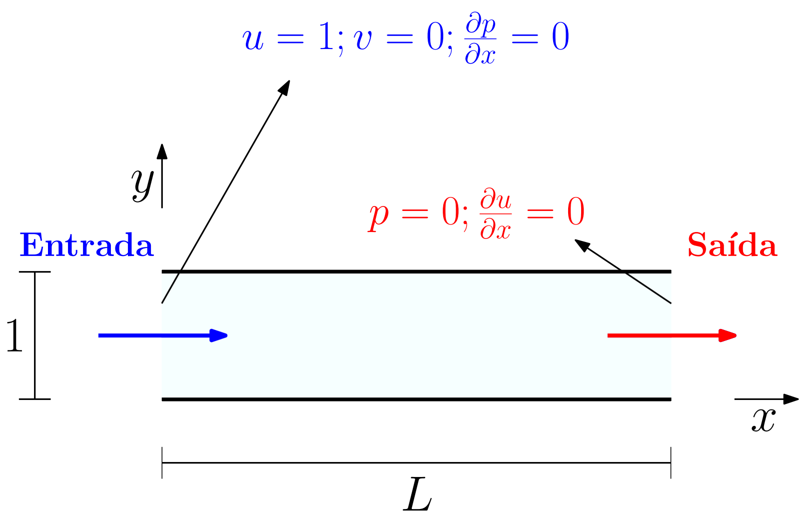

Figura 3: Escoamento entre placas planas, com entrada e saída de fluido.

O que era a parede esquerda da cavidade agora se torna a entrada de fluido. Na entrada nós vamos especificar a velocidade e "liberar" a pressão. Dessa forma, vamos impor

$$u = 1 \ , v = 0$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \ .$$

Assim, a condição de contorno para a pressão na entrada é a mesma da parede sólida. Assim, não é preciso alterar a equação da pressão nessa parede. Para v também não é necessário alterar nada, já que continua zero. É preciso alterar apenas as condições para u, já que agora $u = 1$.

Na saída, nós vamos fazer o oposto: vamos "liberar" as velocidades e vamos fixar a pressão. Assim, na saída as condições de contorno são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

e

$$p = 0 \ .$$

Agora é necessário modificar as equações das 3 incógnitas nas proximidades da saída. Muito cuidado com a pressão: é necessário alterar as equações do método SOR.

Para testar, faça simulações com $Re = 100$ e $L = 10$. Use 100 pontos na direção x e 10 na direção y, com um Δt de 0.01. Você vai observar a região de entrada e depois uma convergência do escoamento para o perfil parabólico. Compare seus resultados com a solução analítica.

4 Problema do Degrau

Um problema com entrada e saída bem interessante é o problema do degrau, representado na figura (4). Agora, na superfície da esquerda, temos metade sendo entrada e metade sendo parede sólida. Nesse caso você deve aplicar as condições de contorno de parede para $0 \leq y \leq 0.5$ e as condições de contorno de entrada de fluido para $0.5 < y \leq 1$.

O resultado é bem complexo, com o aparecimento de uma recirculação em baixo, próximo da entrada e, para Re maiores, uma segunda recirculação em cima, a jusante da entrada. Um valor de interesse é o tamanho da primeira recirculação que se forma após o degrau. Você pode comparar os seus resultados com outros resultados numéricos da literatura [3, 4] ou com resultados experimentais [5]. Aqui L deve ser pelo menos 15 para que você tenha bons resultados. As figuras (5) e (6) mostram o resultado para $Re = 400$, sendo a segunda um gráfico de contorno da pressão.

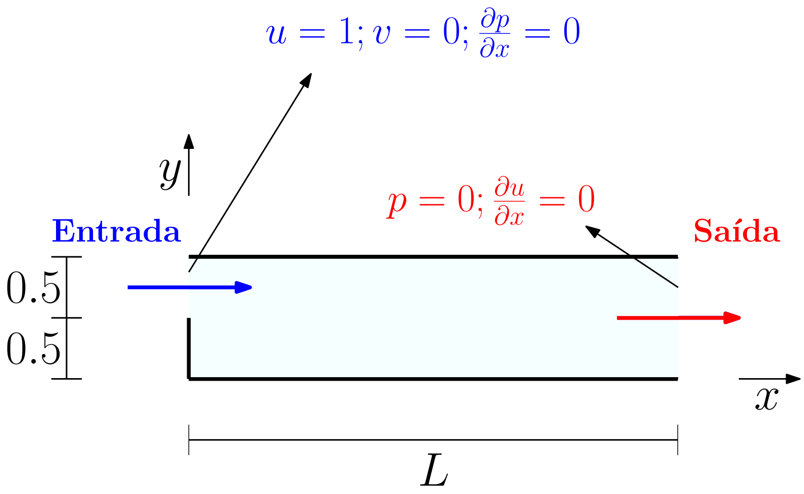

Figura 4: Escoamento com degrau, com entrada e saída de fluido.

5 Método de Projeção de Primeira Ordem Implícito

Uma desvantagem do Método de Projeção de Primeira Ordem Explícito, que foi o que vimos no estudo do Problema da Cavidade Cisalhante, é que há uma restrição no passo de tempo Δt causada pelo termo difusivo. Uma das maneiras de contornar esse obstáculo é implementando a versão implícita desse método:

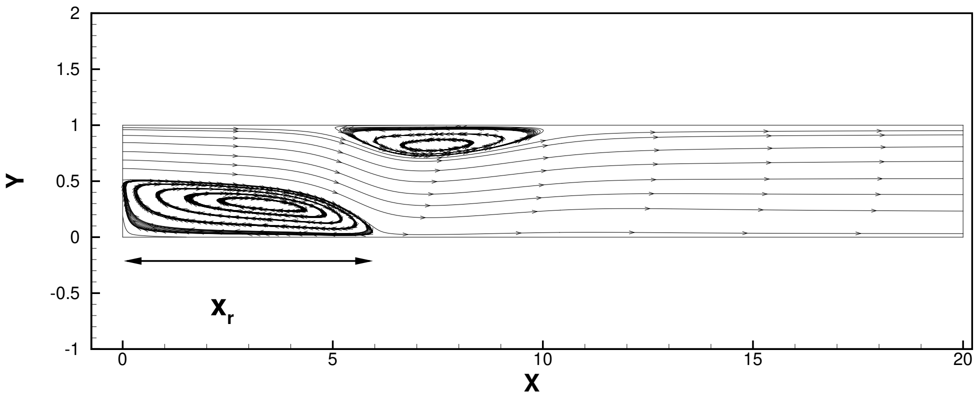

Figura 5: Linhas de corrente do escoamento com degrau, para $Re = 400$. Foram usados 400 pontos na direção x e 50 na direção y.

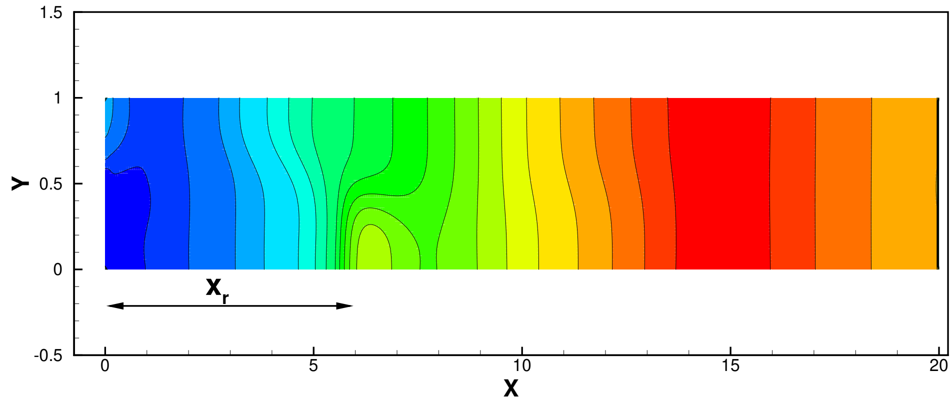

Figura 6: Campo de pressão do escoamento com degrau, para $Re = 400$. Foram usados 400 pontos na direção x e 50 na direção y.

$$\text{PASSO 1} \begin{cases} \frac{\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}^k}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^k \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^k = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{u}^* \\ \\ \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_b \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{63}$$

$$\text{PASSO 2} \begin{cases} \nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^* \\ \\ \boldsymbol{\nabla} p^{k+1} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{64}$$

$$\text{PASSO 3} \left\{ \; \boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^* - \Delta t \boldsymbol{\nabla} p^{k+1} \right. \tag{65}$$

Agora, porém, faz-se necessário resolver 3 sistemas de equações lineares em cada passo de tempo: um para u_{star}, um para v_{star} e um para a pressão p. Nesta seção vamos ver uma metodologia para implementar esse método, usando uma malha defasada.

Para u_{star} temos:

$$\frac{u_{star}[i,j]-u[i,j]}{\Delta t}+u[i,j]\left(\frac{u[i+1,j]-u[i-1,j]}{2\Delta x}\right)+C_1\left(\frac{u[i,j+1]-u[i,j-1]}{2\Delta y}\right)=$$
$$\frac{1}{Re}\left[\frac{u_{star}[i+1,j]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}+\right.$$
$$\left.\frac{u_{star}[i,j+1]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]\,, \tag{66}$$

em que

$$C_1=\frac{1}{4}\Big[v[i,j+1]+v[i-1,j+1]+v[i,j]+v[i-1,j]\Big]\,. \tag{67}$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned}u_{star}[i,j]-\frac{\Delta t}{Re}&\left[\frac{u_{star}[i+1,j]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}+\right.\\&\left.\frac{u_{star}[i,j+1]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]=\\&=u[i,j]-\Delta t\left\{u[i,j]\left(\frac{u[i+1,j]-u[i-1,j]}{2\Delta x}\right)\right.\\&\left.+C_1\left(\frac{u[i,j+1]-u[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right\}\,.\end{aligned} \tag{68}$$

Ou:

$$\begin{aligned}&u_{star}[i,j]\left[1+\frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2}+\frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]=\\&=u[i,j]-\Delta t\left\{u[i,j]\left(\frac{u[i+1,j]-u[i-1,j]}{2\Delta x}\right)+C_1\left(\frac{u[i,j+1]-u[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right\}\\&+\frac{\Delta t}{Re}\left[\frac{u_{star}[i+1,j]+u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}+\frac{u_{star}[i,j+1]+u_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]\,.\end{aligned} \tag{69}$$

Com isso, conseguimos isolar $u_{star}[i,j]$. Usando o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver um sistema de equações lineares, podemos escrever, após algumas operações de soma e subtração de u_{star} no lado direito da equação (69),

$$u_{star}[i,j]\leftarrow u_{star}[i,j]+R\,, \tag{70}$$

em que R é o incremento em cada iteração para encontrar o u_{star} correto. A partir da equação (69), R é dado por:

$$R = \lambda \Bigg\{ \Bigg[u[i,j] - \Delta t u[i,j] \left(\frac{u[i+1,j] - u[i-1,j]}{2\Delta x} \right) - \Delta t C_1 \left(\frac{u[i,j+1] - u[i,j-1]}{2\Delta y} \right) \Bigg]$$
$$- \Bigg[u_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re} \Bigg(\frac{u_{star}[i+1,j] - 2u_{star}[i,j] + u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2} +$$
$$\frac{u_{star}[i,j+1] - 2u_{star}[i,j] + u_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2} \Bigg) \Bigg] \Bigg\} , \tag{71}$$

em que

$$\lambda = \left[1 + \frac{2\Delta t}{Re \Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re \Delta y^2} \right]^{-1} . \tag{72}$$

As condições de contorno são aplicadas diretamente à u_{star}. Assim, $u_{star}[i,-1] = -u_{star}[i,0]$ e $u_{star}[i,N_y] = 2U[i] - u_{star}[i,N_y-1]$. Essas condições devem ser substituídas na equação (71), com atenção ao fato de que o valor de λ também se altera. Os detalhes podem ser encontrados no algoritmo (1).

O procedimento para a obtenção de v_{star} é análogo. A equação, em sua versão implícita, é dada por:

$$\frac{v_{star}[i,j] - v[i,j]}{\Delta t} + C_2 \left(\frac{v[i+1,j] - v[i-1,j]}{2\Delta x} \right) + v[i,j] \left(\frac{v[i,j+1] - v[i,j-1]}{2\Delta y} \right) =$$
$$\frac{1}{Re} \Bigg[\frac{v_{star}[i+1,j] - 2v_{star}[i,j] + v_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2} +$$
$$\frac{v_{star}[i,j+1] - 2v_{star}[i,j] + v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2} \Bigg] . \tag{73}$$

Nessa equação, C_2 corresponde ao valor de u interpolado:

$$C_2 = \frac{1}{4} \Big[u[i+1,j] + u[i,j] + u[i+1,j-1] + u[i,j-1] \Big] . \tag{74}$$

Reescrevendo:

$$v_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re} \Bigg[\frac{v_{star}[i+1,j] - 2v_{star}[i,j] + v_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2} +$$
$$\frac{v_{star}[i,j+1] - 2v_{star}[i,j] + v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2} \Bigg] =$$
$$= v[i,j] - \Delta t \Bigg\{ C_2 \left(\frac{v[i+1,j] - v[i-1,j]}{2\Delta x} \right) + v[i,j] \left(\frac{v[i,j+1] - v[i,j-1]}{2\Delta y} \right) \Bigg\} . \tag{75}$$

Ou:

$$
\begin{aligned}
&v_{star}[i,j]\left[1+\frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2}+\frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]= \\
&=v[i,j]-\Delta t\left\{C_2\left(\frac{v[i+1,j]-v[i-1,j]}{2\Delta x}\right)+v[i,j]\left(\frac{v[i,j+1]-v[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right\} \\
&+\frac{\Delta t}{Re}\left[\frac{v_{star}[i+1,j]+v_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}+\frac{v_{star}[i,j+1]+v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\right]\ .
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Com isso, conseguimos isolar $v_{star}[i,j]$. Usando o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver um sistema de equações lineares, podemos escrever, após algumas operações de soma e subtração de v_{star} no lado direito da equação (76),

$$
v_{star}[i,j] \leftarrow v_{star}[i,j]+R\ , \tag{77}
$$

em que R é o incremento em cada iteração para encontrar o v_{star} correto. A partir da equação (76), R é dado por:

$$
\begin{aligned}
R=\lambda\Bigg\{&\left[v[i,j]-\Delta t C_2\left(\frac{v[i+1,j]-v[i-1,j]}{2\Delta x}\right)-\Delta t v[i,j]\left(\frac{v[i,j+1]-v[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right] \\
-&\Bigg[v_{star}[i,j]-\frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{v_{star}[i+1,j]-2v_{star}[i,j]+v_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}+ \\
&\frac{v_{star}[i,j+1]-2v_{star}[i,j]+v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\ ,
\end{aligned}
\tag{78}
$$

em que

$$
\lambda=\left[1+\frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2}+\frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}\ . \tag{79}
$$

As condições de contorno são aplicadas diretamente à v_{star}. Assim, $v_{star}[-1,j]=-v_{star}[0,j]$ e $v_{star}[N_x,j]=-v_{star}N_x-1,j]$. Essas condições devem ser substituídas na equação (78), com atenção ao fato de que o valor de λ também se altera. Os detalhes podem ser encontrados no algoritmo (2).

No caso do método implícito apresentado nesta seção, o algoritmo completo para resolver o problema da cavidade é igual ao algoritmo (**??**), com a diferença de que agora u_{star} é dado pelo algoritmo (1) e v_{star} pelo algoritmo (2).

Algorithm 1 Calculate u_{star}

INPUT: u_{star}, u, v, N_x, N_y, Δx, Δy, Δt, tol
OUTPUT: u_{star}

error = 100
while error > tol **do**
  R-max = 0
  for i = 1, N_x - 1 **do**
    for j = 0, N_y - 1 **do**

$$C_1 = \frac{1}{4}\Big[v[i,j+1] + v[i-1,j+1] + v[i,j] + v[i-1,j]\Big]$$

if $j = 0$ **then**

$$\lambda = \left[1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{3\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}$$

$$R = \lambda\Bigg\{\Bigg[u[i,j] - \Delta t u[i,j]\left(\frac{u[i+1,j]-u[i-1,j]}{2\Delta x}\right) - \Delta t C_1\left(\frac{u[i,j+1]-u[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\Bigg] - \Bigg[u_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{u_{star}[i+1,j]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2} + \frac{u_{star}[i,j+1]-3u_{star}[i,j]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$$

else if $j = N_y - 1$ **then**

$$\lambda = \left[1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{3\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}$$

$$R = \lambda\Bigg\{\Bigg[u[i,j] - \Delta t u[i,j]\left(\frac{u[i+1,j]-u[i-1,j]}{2\Delta x}\right) - \Delta t C_1\left(\frac{u[i,j+1]-u[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\Bigg] - \Bigg[u_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{u_{star}[i+1,j]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2} + \frac{2U[i]-3u_{star}[i,j]+u_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$$

else

$$\lambda = \left[1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}$$

$$R = \lambda\Bigg\{\Bigg[u[i,j] - \Delta t u[i,j]\left(\frac{u[i+1,j]-u[i-1,j]}{2\Delta x}\right) - \Delta t C_1\left(\frac{u[i,j+1]-u[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\Bigg] - \Bigg[u_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{u_{star}[i+1,j]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2} + \frac{u_{star}[i,j+1]-2u_{star}[i,j]+u_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$$

end if
$u_{star}[i,j] \leftarrow u_{star}[i,j] + R$
if |R| > R-max **then**
  R-max ← |R|
end if
    end for
  end for
  error ← R-max
end while

BOUNDARY UPDATE:
for j = 0, N_y -1 **do**
    $u_{star}[0, j] = 0$
    $u_{star}[N_x, j] = 0$
end for
for i = 0, N_x **do**
    $u_{star}[i, -1] = -u_{star}[i, 0]$
    $u_{star}[i, N_y] = 2U[i] - u_{star}[i, N_y - 1]$
end for

6 Método de Projeção de Segunda Ordem

O erro associado aos métodos de projeção de primeira ordem, explícito e implícito, são de primeira ordem no tempo e de segunda ordem no espaço. Nesta seção é apresentado um método de projeção de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço. Este método foi desenvolvido por Bell, Colella e Glaz [6] e modificado por Brown, Cortez e Minion [7]. Os passos para a implementação desse método são:

$$\text{PASSO 1}\begin{cases} \frac{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{u}^k}{\Delta t} + \left(\boldsymbol{u}^{k+1/2}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}^{k+1/2} = \frac{1}{2Re}\nabla^2\left(\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}^k\right) - \nabla p^{k-1/2} \\ \\ \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_b \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{80}$$

$$\text{PASSO 2}\begin{cases} \nabla^2\phi^{k+1} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^* \\ \\ \boldsymbol{\nabla}\phi^{k+1}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{81}$$

$$\text{PASSO 3}\left\{\ \boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^* - \Delta t\boldsymbol{\nabla}\phi^{k+1}\right. \tag{82}$$

$$\text{PASSO 4}\left\{\ p^{k+1/2} = p^{k-1/2} + \phi^{k+1} - \frac{\Delta t}{2Re}\nabla^2\phi^{k+1}\right. \tag{83}$$

Note que agora existe uma função ϕ, que tem um comportamento parecido com a pressão p. Os termos advectivos no passo 1 são obtidos por meio de uma interpolação no tempo dada por:

$$f^{k+1/2} = \frac{3}{2}f^k - \frac{1}{2}f^{k-1}\ . \tag{84}$$

Dessa forma, apenas o termo difusivo fica implícito na equação (80) e o sistema de equações algébricas resultante é linear. Três sistemas de equações lineares devem ser resolvidos em cada passo de tempo: um para u_{star}, um para v_{star} e um para ϕ. A pressão é obtida em um instante de tempo intermediário entre k e $k+1$.

Algorithm 2 Calculate v_{star}

INPUT: u, v, N_x, N_y, Δx, Δy, Δt, tol
OUTPUT: v_{star}

error = 100
while error > tol **do**
  R-max = 0
  for i = 0, N_x - 1 **do**
    for j = 1, N_y - 1 **do**
      $C_2 = \frac{1}{4}\Big[u[i+1,j] + u[i,j] + u[i+1,j-1] + u[i,j-1]\Big]$
      if $i = 0$ **then**
        $\lambda = \left[1 + \frac{3\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}$
        $R = \lambda\Bigg\{\left[v[i,j] - \Delta t C_2\left(\frac{v[i+1,j]-v[i-1,j]}{2\Delta x}\right) - \Delta t v[i,j]\left(\frac{v[i,j+1]-v[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right] - \Bigg[v_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{v_{star}[i+1,j]-3v_{star}[i,j]}{\Delta x^2}$
        $\frac{v_{star}[i,j+1]-2v_{star}[i,j]+v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$
      else if $i = N_x - 1$ **then**
        $\lambda = \left[1 + \frac{3\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}$
        $R = \lambda\Bigg\{\left[v[i,j] - \Delta t C_2\left(\frac{v[i+1,j]-v[i-1,j]}{2\Delta x}\right) - \Delta t v[i,j]\left(\frac{v[i,j+1]-v[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right] - \Bigg[v_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{-3v_{star}[i,j]+v_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}$
        $\frac{v_{star}[i,j+1]-2v_{star}[i,j]+v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$
      else
        $\lambda = \left[1 + \frac{2\Delta t}{Re\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{Re\Delta y^2}\right]^{-1}$
        $R = \lambda\Bigg\{\left[v[i,j] - \Delta t C_2\left(\frac{v[i+1,j]-v[i-1,j]}{2\Delta x}\right) - \Delta t v[i,j]\left(\frac{v[i,j+1]-v[i,j-1]}{2\Delta y}\right)\right] - \Bigg[v_{star}[i,j] - \frac{\Delta t}{Re}\Bigg(\frac{v_{star}[i+1,j]-2v_{star}[i,j]+v_{star}[i-1,j]}{\Delta x^2}$
        $\frac{v_{star}[i,j+1]-2v_{star}[i,j]+v_{star}[i,j-1]}{\Delta y^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$
      end if
      $v_{star}[i,j] \leftarrow v_{star}[i,j] + R$
      if |R| > R-max **then**
        R-max ← |R|
      end if
    end for
  end for
  error ← R-max
end while

BOUNDARY UPDATE:
for j = 0, N_y **do**
  $v_{star}[-1, j] = -v_{star}[0, j]$
  $v_{star}[N_x, j] = -v_{star}[N_x - 1, j]$
end for
for i = 0, $N_x - 1$ **do**
  $v_{star}[i, 0] = 0$
  $v_{star}[i, N_y] = 0$
end for

7 Formulação Vorticidade-Função de Corrente

Vamos abordar o problema da cavidade cisalhante quadrada, de lado L e tampa se movendo com velocidade U_0, usando a formulação vorticidade-função de corrente.

7.1 Equações Governantes

As equações governantes para esse problema são a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{85}$$

e a equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \ . \tag{86}$$

Usando a intensidade de velocidade U_0 e o tamanho L da cavidade, as equações acima podem ser adimensionalizadas. O resultado é (todas as variáveis já estão na forma adimensional):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{87}$$

e

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \ , \tag{88}$$

em que

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} \tag{89}$$

é o número de Reynolds. O domínio para essa forma adimensional é $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e a velocidade da parede superior se torna $U(x) = 1$.

Em vez de resolvermos diretamente u, v e p, que são chamadas de variáveis primitivas, vamos resolver o problema nas variáveis vorticidade ω e função de corrente Ψ. A equação da continuidade é satisfeita automaticamente se definirmos Ψ como:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \ . \tag{90}$$

A vorticidade, no caso bidimensional, por sua vez, é dada por:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \Psi \ . \tag{91}$$

O rotacional da equação de Navier-Stokes fornece uma equação para a vorticidade:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \omega = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \ . \tag{92}$$

Usando a definição de Ψ na equação acima, resulta:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \omega = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \ . \tag{93}$$

Assim, temos duas equações (91 e 93) e duas incógnitas (ω e Ψ). Esse é o novo sistemas de equações que iremos resolver usando diferenças finitas.

7.2 Aproximação Usando Diferenças Finitas

Para resolver numericamente as equações (91) e (93), o domínio é discretizado com N espaços na direção x e N espaços na direção y. Os incrementos espaciais são $\Delta x = \Delta y = 1/N$. A função de corrente $\Psi(x, y, t)$ é aproximada pela sua equivalente numérica $\Psi(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t) = \Psi^k_{i,j}$, com $0 \leq i, j \leq N$ e $k \geq 0$. O mesmo vale para a vorticidade ω. Note que neste caso a malha não é deslocada: as variáveis ω e Ψ estão no mesmo lugar do domínio numérico, que corresponde às quinas das células computacionais.

Usando a aproximação de diferenças finitas, a equação da vorticidade se torna:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{k+1}_{i,j} - \omega^k_{i,j}}{\Delta t} + \left(\frac{\Psi^k_{i,j+1} - \Psi^k_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)\left(\frac{\omega^k_{i+1,j} - \omega^k_{i-1,j}}{2\Delta x}\right) & \\ - \left(\frac{\Psi^k_{i+1,j} - \Psi^k_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{\omega^k_{i,j+1} - \omega^k_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) &= \\ = \frac{1}{Re}\left(\frac{\omega^k_{i+1,j} - 2\omega^k_{i,j} + \omega^k_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\omega^k_{i,j+1} - 2\omega^k_{i,j} + \omega^k_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) & \ . \end{aligned} \tag{94}$$

A equação que relaciona a função de corrente e a vorticidade, por sua vez, pode ser escrita como:

$$\frac{\Psi^{k+1}_{i+1,j} - 2\Psi^{k+1}_{i,j} + \Psi^{k+1}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi^{k+1}_{i,j+1} - 2\Psi^{k+1}_{i,j} + \Psi^{k+1}_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\omega^{k+1}_{i,j} \ . \tag{95}$$

Portanto, em cada passo tempo, primeiro calculamos diretamente o novo ω, que é o $\omega^{k+1}_{i,j}$. Em seguida usamos a equação (95) e o novo valor de ω para calcular $\Psi^{k+1}_{i,j}$.

A condição de contorno para Ψ é: $\Psi_{i,j} = 0$ para todos os pontos que estejam em alguma das paredes. Assim, $\Psi_{i,j} = 0$ se $i = 0$, ou se $i = N$, ou se $j = 0$, ou se $j = N$.

A condição inicial para Ψ é $\Psi^0_{i,j} = 0$ para todos os pontos do domínio.

Já a condição de contorno para ω é atualizada em todo passo de tempo e é específica para cada parede:

Parede inferior ($j = 0$):

$$\omega^k_{i,0} = \frac{2\left(\Psi^k_{i,0} - \Psi^k_{i,1}\right)}{\Delta y^2} \tag{96}$$

Parede superior ($j = N$):

$$\omega^k_{i,N} = \frac{2\left(\Psi^k_{i,N} - \Psi^k_{i,N-1}\right)}{\Delta y^2} - \frac{2U_i}{\Delta_y} \tag{97}$$

Parede esquerda ($i = 0$):

$$\omega^k_{0,j} = \frac{2\left(\Psi^k_{0,j} - \Psi^k_{1,j}\right)}{\Delta x^2} \tag{98}$$

Parede direita ($i = N$):

$$\omega^k_{N,j} = \frac{2\left(\Psi^k_{N,j} - \Psi^k_{N-1,j}\right)}{\Delta x^2} \tag{99}$$

Essas condições são válidas para todos os instantes de tempo k, para $k \geq 0$. Assim, a condição inicial para ω é:

$$\omega^0_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq N; \\ -\frac{2U_i}{\Delta y} & \text{se } j = N. \end{cases} \tag{100}$$

7.3 Restrições

Para evitar instabilidades numéricas, devemos obedecer às seguintes restrições quanto aos tamanhos do passo de tempo Δt e do incremento espacial Δx:

$$\Delta t < \Delta x \ ,$$

$$\Delta x < \frac{1}{Re}$$

e

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2 \ . \tag{101}$$

8 Cálculo da Ordem do Método

É sempre bom checar os resultados que estamos obtendo numericamente. Não podemos simplesmente confiar nos números que o computador exporta apenas porque é um computador. É importante ter um bom conhecimento sobre o problema que está sendo investigado, sobre como seria a solução esperada e também sobre quais seriam os tipos de resultados absurdos (concentração negativa, temperatura absoluta negativa, velocidade muito alta, etc).

Um resultado numérico tem erros causados pela precisão de máquina e pela aproximação discreta, além de poder ter erros humanos, gerados no momento da implementação (erro de programação ou erro de conta, por exemplo). Por isso precisamos apurar se o código implementado fornece resultados confiáveis.

Para saber se os resultados numéricos são válidos, podemos compará-los com resultados analíticos, numéricos ou experimentais. Apenas por uma questão de nomenclatura, quando comparamos com resultados analíticos (para casos simples) ou numéricos (já consagrados na literatura), estamos verificando o nosso código. Já quando comparamos com resultados experimentais estamos validando.

Uma forma de investigar os resultados e ver se eles estão se comportando bem é por meio de uma análise de convergência de malha. Isso é feito a partir da resolução de um mesmo problema com malhas cada vez mais finas: a solução deve convergir para um valor constante à medida em que Δt (ou Δx) tende a zero.

Outra forma é a partir de uma análise da ordem do método implementado. A ordem é a taxa na qual o erro do método numérico diminui na medida em que o passo de tempo (ou o tamanho da malha) se aproxima de zero. Vimos, ao longo do curso, diferentes métodos numéricos. Alguns eram $O(\Delta t)$, outros $O(\Delta t^2)$. No espaço, vimos métodos $O(\Delta x)$ e $O(\Delta x^2)$. Na prática, podemos testar a ordem para ver se a implementação foi feita de forma correta e se o código se comporta realmente na ordem esperada.

Vamos ver como a ordem é calculada. Considere h como sendo o parâmetro relacionado à discretização do domínio temporal ou espacial. Assim, h pode ser o tamanho da malha (Δx ou Δy) ou o tamanho do passo de tempo (Δt). A solução exata para um dado problema é f, enquanto a solução numérica aproximada, usando h como parâmetro, é dada por f_h.

O erro é a diferença entre o valor numérico e o exato. Se o método é de ordem p, podemos dizer que

$$|f_h - f| \approx Ch^p \ ,$$

em que C é uma constante. Dividindo h por dois e resolvendo o mesmo problema, encontramos um outro resultado, que chamaremos de $f_{h/2}$. Assim,

$$|f_{h/2} - f| \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^p} \ .$$

Da mesma forma, para $h/4$ temos

$$|f_{h/4} - f| \approx C\left(\frac{h}{4}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^{2p}} \ .$$

Nas raras situações em que conhecemos a solução exata do problema, podemos calcular a ordem do método comparando as soluções usando h e $h/2$. Isso é feito da seguinte forma:

$$\frac{f_h - f}{f_{h/2} - f} \approx \frac{Ch^p}{Ch^p/2^p} = 2^p \ . \tag{102}$$

Nas situações mais comuns, quando não temos uma solução exata, podemos calcular a ordem do método usando os resultados das malhas h, $h/2$ e $h/4$:

$$\frac{f_h - f_{h/2}}{f_{h/2} - f_{h/4}} \approx \frac{Ch^p - \frac{Ch^p}{2^p}}{\frac{Ch^p}{2^p} - \frac{Ch^p}{2^{2p}}} = \frac{Ch^p - \frac{Ch^p}{2^p}}{\frac{1}{2}\left(\frac{Ch^p}{2^p} - \frac{Ch^p}{2^{2p}}\right)} = 2^p \ . \tag{103}$$

Assim, é possível calcular a ordem do método usando os resultados de 3 simulações diferentes. Uma observação importante é que muitas vezes a ordem teórica só é alcançada quando h é muito pequeno.

Todo o material desta seção foi retirado do livro de diferenças finitas do Leveque [8].

Referências

[1] A. Bejan. *Convection Heat Transfer*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 4th edition, 2013.

[2] Y. Cengel and A. Ghajar. *Heat and Mass Transfer*. McGraw Hill Education, New York, 5th edition, 2015.

[3] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59:308–323, 1985.

[4] G. Biswas, M. Breuer, and F. Durst. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluid Engineering*, 126:362–374, 2004.

[5] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, and B. Schonung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 127:473–496, 1983.

[6] J. B. Bell, P. Colella, and H. M. Glaz. A Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 85:257–283, 1989.

[7] D. L. Brown, R. Cortez, and M. L. Minion. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 168:464–499, 2001.

[8] R. J. Leveque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 1st edition, 2007.