Equação do Momento

Transporte de Calor e Massa

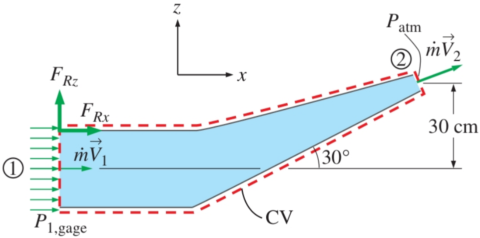
Professor: Adriano Possebon Rosa

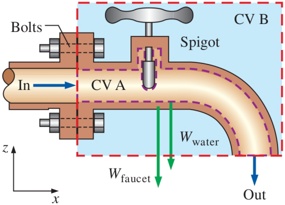
Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

O objetivo desta aula é calcular forças de reação em escoamentos usando a **equação do momento** e a abordagem de **Volume de Controle**.

Vamos calcular, por exemplo, a força necessária para manter um cotovelo de uma tubulação e força em uma torneira.





Sumário

As **leis de Newton** são relações entre os movimentos dos corpos e as forças que atuam sobre eles.

Primeira lei: um corpo em repouso permanece em repouso, e um corpo em movimento permanece em movimento à mesma velocidade, em uma trajetória retilínea, quando a força líquida que age sobre ele é nula.

Terceira lei: quando um corpo exerce uma força em um segundo corpo, o segundo corpo exerce uma força igual e oposta sobre o primeiro corpo.

Segunda lei:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

m é a massa e $\vec{V}$ é a velocidade.

O produto $m\vec{V}$ é chamado de momento, momento linear ou quantidade de movimento.

Segunda lei de Newton: a taxa de variação do momento de um corpo é igual à força que atua sobre o corpo.

A Segunda lei de Newton também é conhecida como **equação do momento**.

Princípio da conservação do momento: o momento de um sistema permanece constante quando a força resultante que atua sobre ele é nula.

Força, aceleração, velocidade e momento são quantidades **vetoriais**.

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

$$F_x = \frac{d(mu)}{dt} \qquad F_y = \frac{d(mv)}{dt} \qquad F_z = \frac{d(mw)}{dt}$$

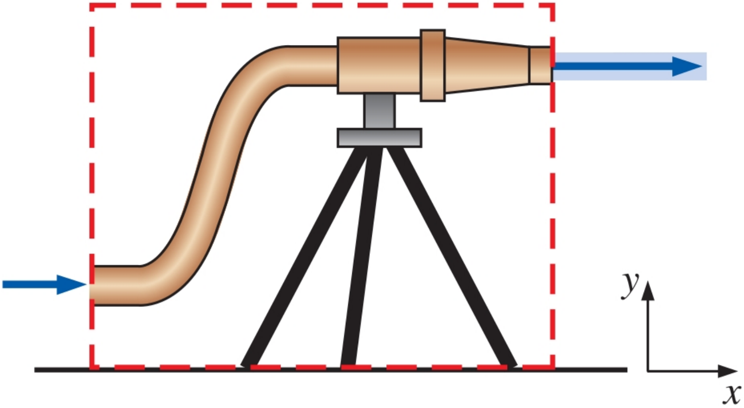
Sumário

Volume de Controle (VC): região arbitrária do espaço escolhida para análise. Fluido escoa para dentro e para fora do **VC**.

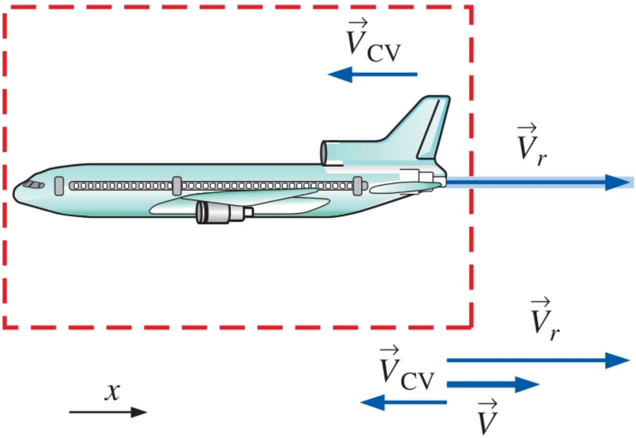
A taxa de escoamento de qualquer quantidade que entra ou sai de um **VC** depende da velocidade do escoamento em relação à superfície de controle.

No caso geral, um **VC** pode ser móvel e deformável. Vamos focar nosso estudo em **VCs** fixos e com forma constante.

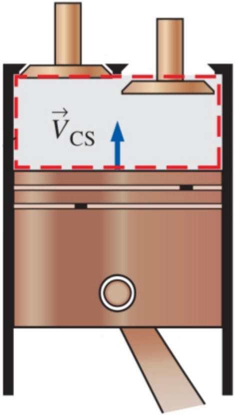
Volume de Controle fixo.



Volume de Controle móvel.



Volume de Controle deformável.



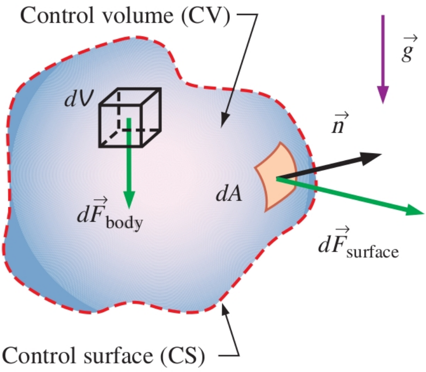
Sumário

Temos dois tipos de forças:

- **forças de volume** (gravitacional)
- **forças de superfície** (forças de pressão, forças viscosas e forças de contato)

Força total agindo no VC:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{volume}} + \sum \vec{F}_{\text{superfície}}$$



A ***Superfície de Controle*** tem um vetor $\hat{n}$ que é unitário, perpendicular à superfície em cada ponto e aponta para fora.

Para a **força de volume**, temos apenas a força gravitacional:

$$\sum \vec{F}_{\text{volume}} = \vec{F}_{\text{gravitacional}}$$

Já a **força total de superfície** será a soma das forças de **pressão**, das forças **viscosas** e das forças de **reação** do contato com superfícies sólidas. Assim:

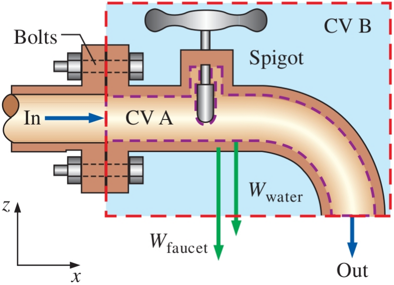
$$\sum \vec{F}_{\text{superfície}} = \sum \vec{F}_{\text{pressao}} + \sum \vec{F}_{\text{viscosas}} + \sum \vec{F}_{\text{reação}}$$

Geralmente, o nosso objetivo, nos estudos com a equação do momento na forma integral, é calcular essas forças de reação, $\sum \vec{F}_{\text{reação}}$, que são as **forças necessárias para manter o escoamento**.

Comentários sobre o VC.

- A **pressão atmosférica** age em todas as direções e, portanto, pode ser ignorada quando fazemos balanços de força. Devemos usar a pressão manométrica.
- Devemos selecionar o VC de modo que as forças nas quais não estamos interessados permaneçam internas e, portanto, não compliquem a análise. Um **VC bem selecionado** expõe apenas as forças que devem ser determinadas (como as forças de reação) e um número mínimo de outras forças.

Como exemplo de como selecionar bem um VC, considere a análise de um VC de água que escoa de forma permanente através de uma torneira com uma válvula.



Queremos calcular a **força resultante no flange** para garantir que seus parafusos sejam suficientemente fortes.

Temos duas opções de **VC**: o **VC A**, que está em roxo, e o **VC B**, que está em vermelho.

No **VC A**, restrito ao fluido, existem forças de pressão que variam ao longo da SC e forças viscosas ao longo da parede do tubo e nas localizações dentro da válvula.

O VC B é uma opção mais interessante neste caso porque não estamos preocupados com os detalhes internos do escoamento, nem com a geometria interna do VC.

No caso do **VC B**, atribuímos uma força de reação total que age nas partes da SC que passam pelo flange.

Sumário

A **lei da conservação do momento para um sistema** é dada por:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)_{sist}$$

$\left(m\vec{V}\right)_{sist}$ é o momento do sistema.

Forma geral para um sistema:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{sis} \rho\vec{V}\, d\forall$$

A soma de todas as forças externas que agem no sistema é igual à taxa de variação temporal do momento do sistema.

Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, d\forall + \int_{SC} \rho b \left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) \, dA$$

Faça $B = m\vec{V}$ e $b = \vec{V}$.

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)_{sist} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{V} \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) \, dA$$

Mas

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)_{sist} = \sum \vec{F}$$

Resulta

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{V}\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)\, dA} \qquad (1)$$

$\sum \vec{F}$ é a soma de todas as forças externa agindo no VC.

$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{V}\, d\forall$ é a taxa de variação no tempo do momento linear no VC.

$\int_{SC} \rho \vec{V} \left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)\, dA$ é o fluxo total de momento para fora do VC.

O fluxo total para fora é a diferença enter o fluxo saindo do VC e do fluxo entrando. O próprio escoamento é responsável por esse fluxo.

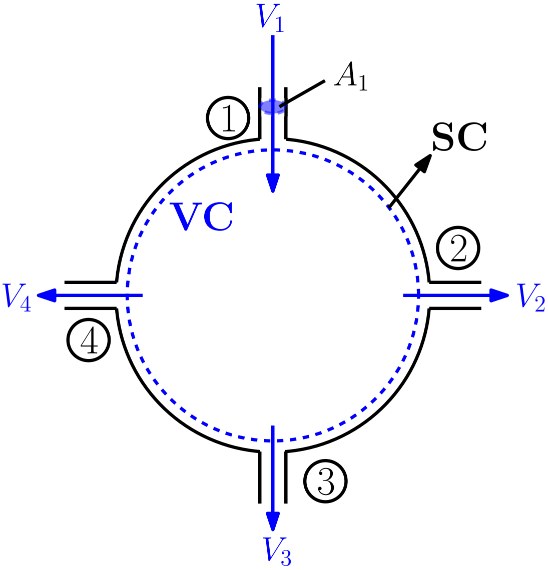
A equação 1 é a **equação geral da conservação de momento**. Agora vamos para as simplificações.

Regime permanente:

$$\sum \vec{F} = \int_{SC} \rho \vec{V} \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) \, dA$$

Vamos considerar as **velocidades médias** nas entradas e saídas. Neste caso, a vazão em massa através de uma entrada e saída é

$$\dot{m} = \int_{A} \rho \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) \, dA = \rho V_{med} A$$


V_1
A_1
1
SC
VC
2
V_4
V_2
4
3
V_3

Assim,

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) \, dA = \int_{SC} \vec{V} \rho \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) \, dA \approx \vec{V}_{med} \, \dot{m}$$

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) \, dA \approx \dot{m} \, \vec{V}_{med}$$

Dessa forma, nossa equação final se torna

$$\boxed{\sum \vec{F} = \sum_{s} \dot{m}\,\vec{V} - \sum_{e} \dot{m}\,\vec{V}} \tag{2}$$

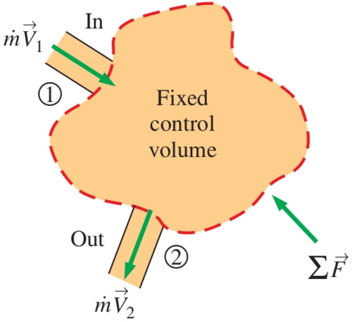
s é saindo e e significa entrando.

A força total que age no VC é igual ao fluxo de momento total para fora menos o fluxo de momento para dentro.

Em muitos casos práticos temos apenas uma entrada e uma saída. O que resulta em

$$\boxed{\sum \vec{F} = \dot{m}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)} \tag{3}$$

Aqui 1 é a entrada e 2 é a saída.



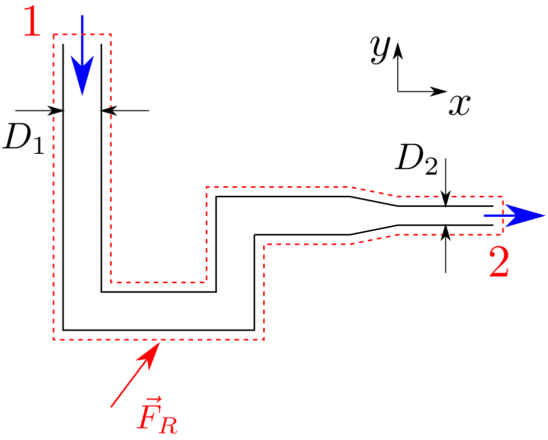
Pronto! Deduzimos a equação do momento para um VC.

Agora vamos para os **exemplos** de aplicação dessa equação.

Vamos trabalhar com a lei da conservação do momento como representada nas equações 2 e 3.

Sumário

Exemplo 1. Determine o fluxo de massa e a força de reação que age sobre o trecho de tubulação apresentado abaixo. O fluido é óleo ($\rho = 850\,kg/m^3$). O escoamento está em regime permanente. Entrada (1): $V_1 = 1,1\,m/s$, $D_1 = 0,05\,m$ e $p_1 = 40\,kPa$. Saída (2): $D_2 = 0,04\,m$ e $p_2 = 30\,kPa$.



Solução. Primeiro vamos calcular o fluxo de massa e a velocidade na saída. Lei da conservação de massa:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s$$

Mas como o escoamento está em regime permanente,

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \dot{m}_e = \dot{m}_s = \dot{m}$$

$$\dot{m}_e = \rho_1 V_1 A_1 = 850\,kg/m^3 \times 1,1\,m/s \times \frac{\pi \times (0,05\,m)^2}{4}$$

$$\dot{m}_e = 1,835\,kg/s$$

Para encontrar V_2, vamos analisar o fluxo de massa na saída:

$$\dot{m}_s = \rho_2 V_2 A_2 = 850\,kg/m^3 \times V_2 \times \frac{\pi \times (0,04\,m)^2}{4} = \dot{m}_e = 1,835 kg/s$$

Resulta:

$$V_2 = 1,718\,m/s$$

Equação do momento:

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$$

Na direção x:

$$\sum F_x = F_{Rx} - p_2 A_2 = \dot{m}\left(u_2 - u_1\right)$$

Na direção y:

$$\sum F_y = F_{Ry} - p_1 A_1 = \dot{m}\left(v_2 - v_1\right)$$

Temos:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = V_2 \quad v_1 = -V_1 \quad v_2 = 0 \quad p_1 = 40\,kPa \quad p_2 = 30\,kPa$$

Em x:

$$F_{Rx} = 30000\,Pa \times \frac{\pi \times (0,04\,m)^2}{4} + 1,835\,kg/s \times (1,718 - 0)\,m/s$$

$$F_{Rx} = 40,851\,N$$

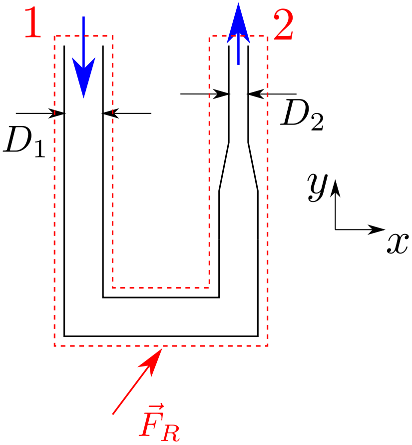
Em y:

$$F_{Ry} = 40000\,Pa \times \frac{\pi \times (0,05\,m)^2}{4} + 1,835\,kg/s \times (0 + 1,1)\,m/s$$

$$F_{Ry} = 80,558\,N$$

Resposta: o fluxo de massa é de $1,835\,kg/s$ e a força de reação que age no VC é $\vec{F_R} = 40,9N\,\hat{\imath} + 80,6N\,\hat{\jmath}$.

Exemplo 2. Determine o fluxo de massa e a força de reação que age sobre o trecho de tubulação apresentado abaixo. O fluido é óleo ($\rho = 850\,kg/m^3$). O escoamento está em regime permanente. Entrada (1): $V_1 = 1,1\,m/s$, $D_1 = 0,05\,m$ e $p_1 = 40\,kPa$. Saída (2): $D_2 = 0,04\,m$ e $p_2 = 30\,kPa$.



Solução. Este exemplo é bem parecido com o exemplo anterior. A vazão e as velocidades na entrada e na saída são idênticas. Assim:

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s = \dot{m} = 1,835\,kg/s$$

$$V_1 = 1,1\,m/s \qquad V_2 = 1,718\,m/s$$

O que vai mudar é a direção da saída. Equação do momento:

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$$

Na direção x:

$$\sum F_x = F_{Rx} = \dot{m}\,(u_2 - u_1)$$

Na direção y:

$$\sum F_y = F_{Ry} - p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m}\,(v_2 - v_1)$$

Temos:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad v_1 = -V_1 \quad v_2 = V_2 \quad p_1 = 40\,kPa \quad p_2 = 30\,kPa$$

Assim:

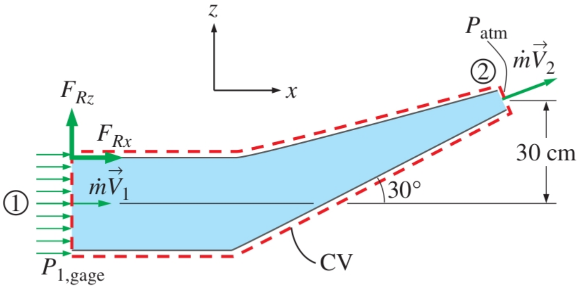
$$F_{Rx} = 0$$

$$F_{Ry} = 40000\,Pa \times \frac{\pi \times (0,05\,m)^2}{4} + 30000\,Pa \times \frac{\pi \times (0,04\,m)^2}{4}$$
$$+1,835\,kg/s \times (1,718 + 1,1)\,m/s$$

$$F_{Ry} = 121,41\,N$$

Resposta: o fluxo de massa é de $1,835\,kg/s$ e a força de reação que age no VC é $\vec{F_R} = 121,4N\,\hat{j}$.

Exemplo 3. Um cotovelo redutor é usado para desviar o fluxo de água ($\rho = 1000\,kg/m^3$) a uma vazão de $14\,kg/s$ em um tubo horizontal inclinado a 30^o para cima. O cotovelo libera água na atmosfera. A área de seção transversal do cotovelo é de $113\,cm^2$ na entrada e $7\,cm^2$ na saída. A diferença de elevação entre os centros da saída e da entrada é de $30\,cm$. O peso do cotovelo e da água dentro dele é considerado insignificante. Determine (a) a pressão manométrica no centro da entrada do cotovelo e (b) a força de ancoragem necessária para manter o cotovelo no lugar.



Solução. Temos apenas uma saída e uma entrada. Vamos usar a equação 3.

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$$

Velocidades:

$$\vec{V}_1 = u_1\hat{\imath} + w_1\hat{k}$$

$$\vec{V}_2 = u_2\hat{\imath} + w_2\hat{k}$$

$$u_1 = V_1 \qquad w_1 = 0$$

$$u_2 = V_2\cos\theta \qquad w_2 = V_2\sin\theta$$

Na direção x:

$$\sum F_x = P_1A_1 + F_{Rx} = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

Na direção z:

$$\sum F_z = F_{Rz} = \dot{m}(w_2 - w_1)$$

Note que a pressão na saída é zero, já que a saída é para a atmosfera.

Na seção 1:

$$\dot{m} = \rho V_1 A_1 \qquad V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1}$$

$$V_1 = \frac{14\,kg/s}{1000\,kg/m^3 \times 0,0113\,m^2} = 1,24\,m/s$$

Na seção 2:

$$\dot{m} = \rho V_2 A_2 \qquad V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2}$$

$$V_2 = \frac{14\,kg/s}{1000\,kg/m^3 \times 0,0007\,m^2} = 20\,m/s$$

Para encontrar a pressão P_1, na entrada, podemos usar a equação de Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$z_1 = 0 \qquad P_2 = 0 \qquad z_2 = 0,3\,m$$

$$P_1 = \rho g \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 \right)$$

$$P_1 = 1000\,kg/m^3 \times 9,81\,m/s^2 \left(\frac{(20\,m/s)^2 - (1,24\,m/s)^2}{2 \times 9,81\,m/s^2} + 0,3\,m \right)$$

$$P_1 = 202,2\,kPa$$

Vamos substituir esses valores nas equações da força em cada direção.

Na direção x:

$$P_1 A_1 + F_{Rx} = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

$$202000\, N/m^2 \times 0,0113\, m^2 + F_{Rx} =$$
$$= 14\, kg/s(20\, m/s \times \cos 30^o - 1,24\, m/s)$$

$$F_{Rx} = -2057\, N$$

Na direção z:

$$F_{Rz} = \dot{m}(w_2 - w_1)$$

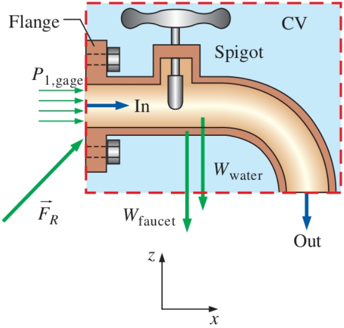
$$F_{Rz} = 14\,kg/s(20\,m/s \times \sin 30^o)$$

$$F_{Rz} = 140\,N$$

Conclusão: a força atuando no cotovelo para mantê-lo no lugar é

$$\vec{F}_R = (-2057\,\hat{\imath} + 140\,\hat{k})\,N$$

Exemplo 4. Água ($\rho = 1000\,kg/m^3$) flui a uma taxa de aproximadamente 70 litros por minuto através de uma torneira com flange e uma válvula parcialmente fechada. O diâmetro interno do tubo é de $2\,cm$, e a pressão manométrica no local do flange é de $89\,kPa$. A massa total da montagem da torneira mais a água dentro dela é de $6\,kg$. Calcule a força líquida no flange.



$$\vec{F}_R = F_{Rx}\,\hat{\imath} + F_{Rz}\,\hat{k}$$

Solução. Temos apenas uma saída e uma entrada. Vamos usar a equação 3.

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$$

Velocidades:

$$\vec{V}_1 = u_1\hat{\imath} + w_1\hat{k}$$

$$\vec{V}_2 = u_2\hat{\imath} + w_2\hat{k}$$

$$u_1 = V_1 \qquad w_1 = 0$$

$$u_2 = 0 \qquad w_2 = -V_2 = -V_1$$

Na direção x:

$$\sum F_x = P_1A_1 + F_{Rx} = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

Na direção z:

$$\sum F_z = F_{Rz} - W_{\text{torneira+água}} = \dot{m}(w_2 - w_1)$$

$$P_1 = 89\,kPa = 89000\,N/m^2$$

$$\dot{\forall} = 70\,L/min = \frac{0,07}{60}\,m^3/s = 0,00117\,m^3/s$$

$$\dot{\forall} = V_1 \times A_1 = V_1 \times \pi \times D^2/4$$

$$V_1 = \frac{4\dot{\forall}}{\pi \times D^2}$$

$$V_1 = \frac{4 \times 0,00117\,m^3/s}{\pi \times (0,02\,m)^2}$$

$$V_1 = 3,71\,m/s = V_2$$

$$\dot{m} = \rho\dot{\forall} = 1000\,kg/m^3 \times 0,00117\,m^3/s = 1,17\,kg/s$$

$$W_{\text{torneira+água}} = 6\,kg \times 9,81\,m/s^2 = 58,86\,N$$

Vamos substituir esses valores nas equações da força em cada direção.

Na direção x:

$$P_1 A_1 + F_{Rx} = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

$$F_{Rx} = \dot{m}(u_2 - u_1) - P_1 A_1$$

$$F_{Rx} = 1,17\,kg/s \times (0 - 3,71\,m/s) - 89000\,N/m^2 \times \frac{\pi \times (0,02\,m)^2}{4}$$

$$F_{Rx} = -32,3\,N$$

Na direção z:

$$F_{Rz} - W_{\text{torneira+água}} = \dot{m}(w_2 - w_1)$$

$$F_{Rz} = \dot{m}(w_2 - w_1) + W_{\text{torneira+água}}$$

$$F_{Rz} = 1,17\,kg/s \times (-3,71\,m/s - 0) + 58,86\,N$$

$$F_{Rz} = 54,5\,N$$

Conclusão: a força atuando no volume de controle é

$$\vec{F}_R = (-32,3\,\hat{\imath} + 54,5\,\hat{k})\,N$$