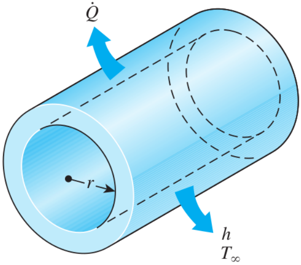
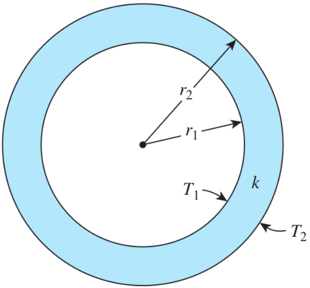
Condução Radial em Cilindros

Transporte de Calor e Massa

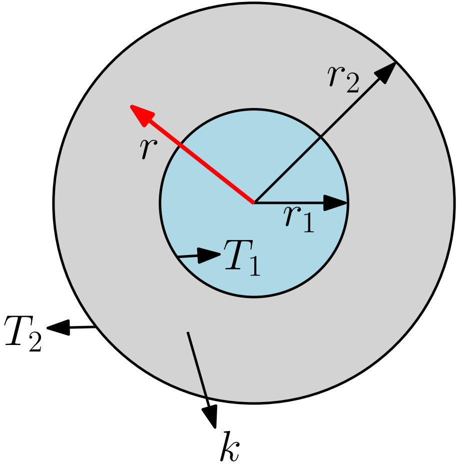
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

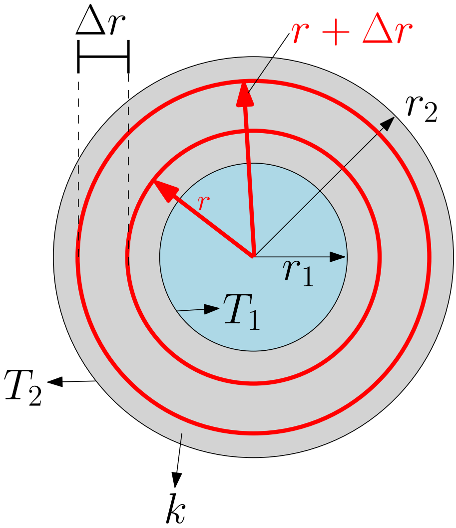

$\dot{Q}$
r
h
T_∞

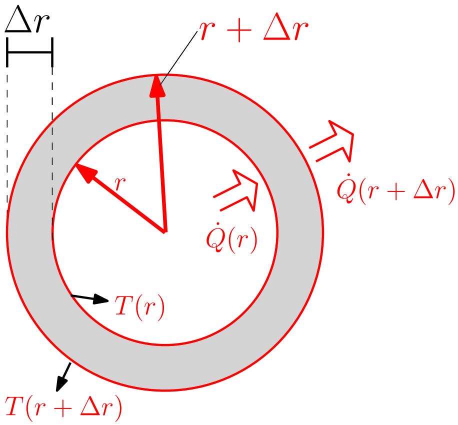

r_2
r_1
T_1
k
T_2

Sumário



r_2
r
r_1
T_1
T_2
k


Δr
$r + \Delta r$
r_2
r
r_1
T_1
T_2
k


Δr
$r + \Delta r$
r
$\dot{Q}(r)$
$\dot{Q}(r + \Delta r)$
$T(r)$
$T(r + \Delta r)$

Considere um cilindro oco de comprimento L cuja superfície interna, de raio r_1, se encontra a uma temperatura T_1 e a superfície externa, de raio r_2, a uma temperatura T_2. Queremos saber o valor de $\dot{Q}$ e a distribuição de temperatura radial.

$$0 < r_1 \leq r \leq r_2 \tag{1}$$

$$T = T(r, \theta, t) = T(r, t) \tag{2}$$

Lei de Fourier:

$$\dot{Q} = -kA\frac{\partial T}{\partial r} \tag{3}$$

Será que, em regime permanente, a taxa de transferência de calor é semelhante à da parede plana, ou seja,

$$\dot{Q} = kA\left(\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1}\right) \text{ ?????????} \tag{4}$$

Veremos que **não**.

Vamos aplicar a primeira lei da termodinâmica para um elemento de casca cilíndrica.

Vamos seguir os mesmos passos da dedução para uma parede plana, da semana passada.

A diferença aqui é que a área de entrada de calor é diferente da área de saída. Disso vai resultar uma equação com uma cara diferente para a temperatura.

Conhecemos a primeira lei:

$$E(t + \Delta t) - E(t) = E_{entra} - E_{sai} \tag{5}$$

Vamos detalhar esses termos.

Energia que entra e que sai:

$$E_{entra} = \dot{Q}(r)\Delta t \tag{6}$$

$$E_{sai} = \dot{Q}(r + \Delta r)\Delta t \tag{7}$$

Variação de energia durante o processo (energia interna):

$$E(t + \Delta t) - E(t) = mc\Big(T(t + \Delta t) - T(t)\Big) \tag{8}$$

Mas $m = \rho V$.

$$E(t + \Delta t) - E(t) = (\rho V)c\Big(T(t + \Delta t) - T(t)\Big) \tag{9}$$

O volume V dessa casca cilíndrica é

$$V = \left(\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2\right)L \tag{10}$$

Trabalhando um pouco nessa equação (vai fazer sentido daqui a pouco):

$$V = \pi L\left((r+\Delta r)^2 - r^2\right) \tag{11}$$

$$V = \pi L\left(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2\right) \tag{12}$$

$$V = \pi L\left(2r\Delta r + \Delta r^2\right) \tag{13}$$

$$V = 2\pi r\Delta r L\left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right) \tag{14}$$

Substituindo (14) em (9):

$$E(t+\Delta t) - E(t) = \rho c(2\pi r \Delta r L)\left(1+\frac{\Delta r}{2r}\right)\Big(T(t+\Delta t) - T(t)\Big) \quad (15)$$

Agora sim, substituindo (15), (6) e (7) em (5):

$$\begin{aligned}\rho c(2\pi r \Delta r L)\left(1+\frac{\Delta r}{2r}\right)\Big(T(t+\Delta t) - T(t)\Big) &= \\ = \dot{Q}(r)\Delta t - \dot{Q}(r+\Delta r)\Delta t\end{aligned} \quad (16)$$

Ou

$$\begin{aligned}\rho c(2\pi r \Delta r L)\left(1+\frac{\Delta r}{2r}\right)\Big(T(t+\Delta t) - T(t)\Big) &= \\ = \Delta t\Big(\dot{Q}(r) - \dot{Q}(r+\Delta r)\Big)\end{aligned} \quad (17)$$

Passado o primeiro Δr pro lado esquerdo (dividindo) e o Δt pro lado esquerdo (dividindo):

$$2\pi r L\rho c\left(1+\frac{\Delta r}{2r}\right)\left(\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}\right)= \\ =-\left(\frac{\dot{Q}(r+\Delta r)-\dot{Q}(r)}{\Delta r}\right) \tag{18}$$

Fazendo o limite em que $\Delta r \to 0$ e $\Delta t \to 0$ temos

$$2\pi r L\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r}\right) \tag{19}$$

Note que o termo $(1+\Delta r/2r)$ tende a 1 quando Δr tende a zero.

Repetindo:

$$2\pi r L \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right) \tag{20}$$

Temos duas incógnitas (T e $\dot{Q}$) e uma equação. Precisamos de uma outra equação.

Essa outra equação é a Lei de Fourier:

$$\dot{Q} = -kA \frac{\partial T}{\partial r} = -k(2\pi r L) \frac{\partial T}{\partial r} \tag{21}$$

Foi usado $A = 2\pi r L$, que é a área da casca cilíndrica, perpendicular ao fluxo de calor.

Substituindo (21) em (20), temos

$$2\pi r L\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-k(2\pi r L)\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{22}$$

Simplificando (cortando as constantes que aparecem dos dois lados):

$$r\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{23}$$

Assumindo k constante (hipótese, aproximação):

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{24}$$

Lembrando que nós definimos uma propriedade α, chamada de difusividade térmica, dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \tag{25}$$

A equação final é então:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{26}$$

Essa é a equação de condução de calor radial em um cilindro. Note a diferença com relação à equação para o caso da parede plana.

Sumário

Em regime permanente, a temperatura não depende do tempo. Temos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{27}$$

ou

$$T = T(r) \tag{28}$$

Nesse caso, a equação (26) se torna:

$$\frac{\alpha}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{29}$$

Vamos resolver essa equação.

Primeiramente,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{30}$$

Integrando com relação a r dos dois lados:

$$r\frac{dT}{dr} = C_1 \tag{31}$$

Ou

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \tag{32}$$

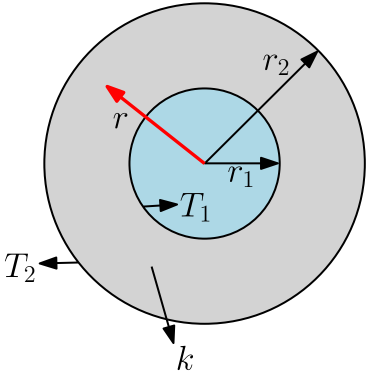
Vamos integrar dos dois lados novamente.

Resulta:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \tag{33}$$

Essa é a solução geral do problema, ou seja, é a função que resolve a equação diferencial dada por (29).

Para resolver o problema, precisamos encontrar C_1 e C_2 que fazem com que a solução satisfaça também as condições de contorno.



Condições de Contorno:

$$T(r = r_1) = T_1 \tag{34}$$

$$T(r = r_2) = T_2 \tag{35}$$

Usando a solução geral (33):

$$T(r = r_1) = C_1 \ln r_1 + C_2 = T_1 \tag{36}$$

$$T(r = r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2 = T_2 \tag{37}$$

Temos duas equações e duas incógnitas (C_1 e C_2).

$$T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \tag{38}$$

$$T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \tag{39}$$

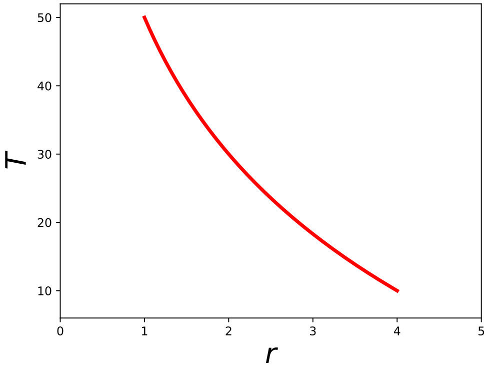
Resolvendo para C_1 e C_2, temos:

$$T(r) = \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}(T_2 - T_1) + T_1 \tag{40}$$

Esse é o perfil de temperatura. **É a solução do problema.** Note que quando $r = r_1$ temos T_1 e quando $r = r_2$ temos T_2.

$$T(r) = \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}(T_2 - T_1) + T_1 \tag{41}$$

Gráfico para $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $T_1 = 50$ e $T_2 = 10$.



Note que agora não temos mais uma reta. A inclinação muda. Por quê???

E o $\dot{Q}$?

Da lei de Fourier:

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi r L)\frac{dT}{dr} \tag{42}$$

Mas, de (40):

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r}\frac{(T_2 - T_1)}{\ln(r_2/r_1)} \tag{43}$$

Assim:

$$\dot{Q} = -k(2\pi r L)\frac{1}{r}\frac{(T_2 - T_1)}{\ln(r_2/r_1)} = 2\pi L k \frac{(T_1 - T - 2)}{\ln(r_2/r_1)} \tag{44}$$

Portanto:

$$\dot{Q} = 2\pi L k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} \tag{45}$$

$\dot{Q}$ representa a perda de calor radial no cilindro.

Note que $\dot{Q}$ é constante, não depende de r. Estamos em regime permanente, isso era esperado.

A área aumenta com r, e dT/dr diminui, compensando esse efeito de modo a manter $\dot{Q}$ constante.

Sumário

Usando a ideia de resistência térmica de condução, podemos reescrever a equação (45) como

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{cil}} \tag{46}$$

Com

$$R_{cil} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} \tag{47}$$

é a **Resistência de Condução da Camada Cilíndrica.**

Sumário

Exemplo. Água a $15\,°C$ escoa por um tubo de aço ($k = 50\,W/m \cdot °C$) que tem diâmetro externo de $104\,mm$ e $2\,mm$ de espessura de parede. A temperatura do ar em volta é de $-10\,°C$. Sabendo que o coeficiente de troca de calor por convecção interno é $30\,kW/m^2 \cdot °C$ e o externo é $20\,W/m^2 \cdot° C$, (a) determine a taxa de perda de calor para o ambiente por metro de comprimento de tubo (ver figura) e (b) determine a nova taxa sabendo que foi colocado em volta do tubo um isolante com diâmetro externo de $300\,mm$ e $k = 0,05\,W/m \cdot °C$ (ver figura).

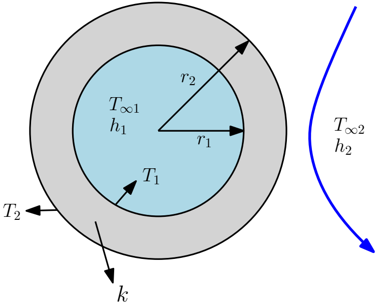
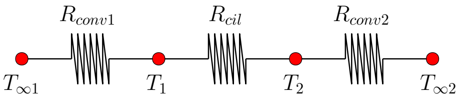


Figura: Problema a



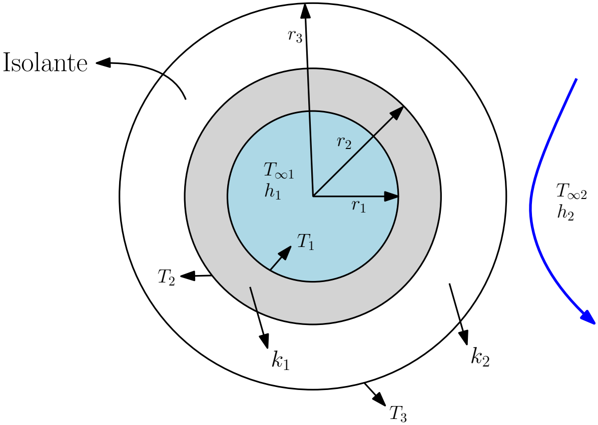
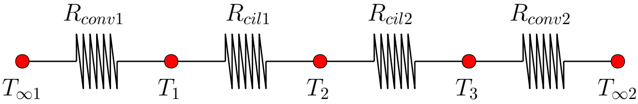


Figura: Problema b



Solução: vamos considerar um tubo com $1\,m$ de comprimento.

(a)

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} = \frac{15\,^{\circ}C - (-10\,^{\circ}C)}{R_{total}} = \frac{25\,^{\circ}C}{R_{total}} \tag{48}$$

$$R_{total} = R_{conv1} + R_{cil} + R_{conv2} \tag{49}$$

$$R_{conv1} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{30000 \times 2\pi \times 0,05 \times 1} = 1,061 \times 10^{-4} \frac{^{\circ}C}{W} \tag{50}$$

$$R_{cil} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} = \frac{\ln(52/50)}{2\pi \times 1 \times 50} = 1,248 \times 10^{-4} \frac{^{\circ}C}{W} \tag{51}$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{20 \times 2\pi \times 0,052 \times 1} = 0,1530 \frac{^\circ C}{W} \qquad (52)$$

$$R_{total} = 1,061 \times 10^{-4} + 1,248 \times 10^{-4} + 0,1530 = 0,1532 \frac{^\circ C}{W} \qquad (53)$$

$$\dot{Q} = \frac{25\,^\circ C}{R_{total}} = \frac{25\,^\circ C}{0,1532 \frac{^\circ C}{W}} = 163,19\,W \qquad (54)$$

Resposta:

$$\dot{Q} = 163\,\frac{W}{m} \qquad (55)$$

(b)

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} = \frac{15\,°C - (-10\,°C)}{R_{total}} = \frac{25\,°C}{R_{total}} \tag{56}$$

$$R_{total} = R_{conv1} + R_{cil1} + R_{cil2} + R_{conv2} \tag{57}$$

$$R_{conv1} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{30000 \times 2\pi \times 0,05 \times 1} = 1,061 \times 10^{-4} \frac{°C}{W} \tag{58}$$

$$R_{cil1} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1} = \frac{\ln(52/50)}{2\pi \times 1 \times 50} = 1,248 \times 10^{-4} \frac{°C}{W} \tag{59}$$

$$R_{cil2} = \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} = \frac{\ln(150/52)}{2\pi \times 1 \times 0,05} = 3,372 \frac{°C}{W} \tag{60}$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{20 \times 2\pi \times 0,150 \times 1} = 0,0531 \frac{°C}{W} \tag{61}$$

$$R_{total} = 1,061 \times 10^{-4} + 1,248 \times 10^{-4} + 3,372 + 0,0531 = \\ = 3,425 \frac{^\circ C}{W} \tag{62}$$

$$\dot{Q} = \frac{25\,^\circ C}{R_{total}} = \frac{25\,^\circ C}{4,4332 \frac{^\circ C}{W}} = 7,298\,W \tag{63}$$

Resposta:

$$\dot{Q} = 7,3\,\frac{W}{m} \tag{64}$$

(A resposta está em W/m porque o enunciado do problema pede para determinar $\dot{Q}$ por metro do tubo.)