Equação da Energia e de Bernoulli

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

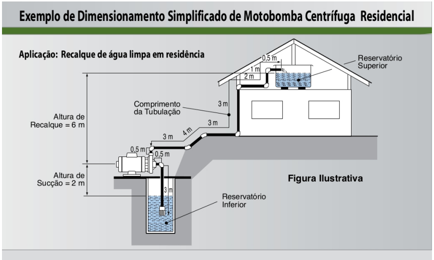
Neste tópico do nosso curso, vamos estudar a equação da energia aplicada ao escoamento de um fluido, usando a abordagem de Volume de Controle.

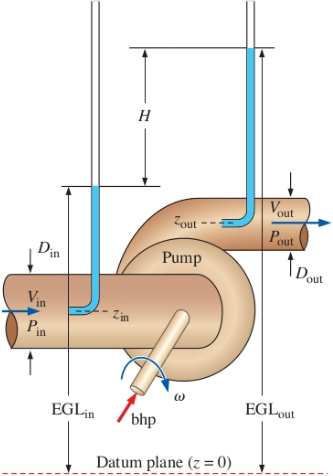
Vamos abordar a relação entre pressão, velocidade e elevação e vamos analisar o efeito de **bombas** e **turbinas** no escoamento.

Vamos também ver um caso especial da equação da energia, que é a **Equação de Bernoulli**, muito utilizada na Mecânica dos Fluidos.

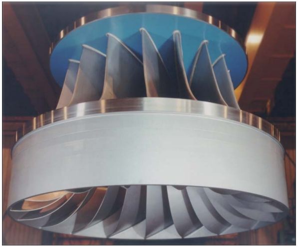
Bombas.

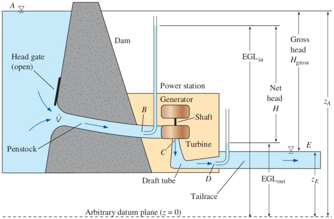

ME
BC
MBV
MSA
BCA
ME Multiplic


Exemplo de Dimensionamento Simplificado de Motobomba Centrífuga Residencial
Aplicação: Recalque de água limpa em residência
0,5 m
1 m
2 m
Reservatório Superior
Comprimento da Tubulação
3 m
Altura de Recalque = 6 m
3 m
4 m
3 m
0,5 m
0,5 m
Altura de Sucção = 2 m
3 m
Figura Ilustrativa
Reservatório Inferior


H
V_{out}
z_{out}
P_{out}
D_{in}
Pump
D_{out}
V_{in}
z_{in}
P_{in}
ω
EGL_{in}
bhp
EGL_{out}
Datum plane ($z = 0$)

Turbinas.




A
Dam
Head gate
(open)
EGL$_{in}$
Gross
head
H_{gross}
Power station
Net
head
H
Generator
B
Shaft
z_A
$\dot{V}$
Turbine
Penstock
C
E
Draft tube
D
EGL$_{out}$
z_E
Tailrace
Arbitrary datum plane ($z = 0$)

Sumário

Primeira Lei da Termodinâmica ou Princípio da Conservação de Energia: a energia não pode ser criada nem destruída durante um processo, ela só pode mudar de forma.

A variação de energia em um sistema é igual à energia que entra menos a energia que sai:

$$\Delta E_{sist} = E_e - E_s$$

Uma dada quantidade de energia entra no **Sistema** ou **Volume de Controle** através da fronteira.

As interações energéticas de um Sistema com a sua vizinhança se dão por meio de **Calor** Q e **Trabalho** W:

$$\Delta E_{sist} = Q + W$$

Para um sistema, em termos de taxas, temos:

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{total} \tag{1}$$

Nessa equação: dE_{sist}/dt é a variação no tempo do conteúdo total de energia do sistema; $\dot{Q}_{total}$ é a taxa total de transferência de calor para o sistema; $\dot{W}_{total}$ é a entrada de potência total no sistema.

A energia do sistema é a soma das energias térmica U, cinética EC e potencial EP:

$$E_{sist} = U + EC + EP$$

Dividindo pela massa, temos a energia específica:

$$e = u + ec + ep = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

e tem unidade de J/kg, no SI.

Vamos trabalhar na equação (8), abrindo os temos de calor e trabalho.

Calor.

Uma interação de energia é uma **Transferência de Calor** apenas se ela ocorrer por causa de uma diferença de temperatura.

$\dot{Q}$ é a taxa de transferência de calor. A unidade é $J/s = W$.

Energia térmica é diferente de **calor**.
Energia térmica é uma forma de energia que um sistema/VC possui, e está associada à sua temperatura.
Calor é uma forma de transferência de energia causada por diferença de temperatura.
Ou seja, calor é um dos mecanismos que pode afetar a energia térmica.

Processo adiabático: não há transferência de calor.
Processo isotérmico: não há variação de temperatura.

Trabalho.

Uma interação de energia é considerada **trabalho** se estiver associada a uma força que age por uma certa distância.

Exemplos: pistão, eixo giratório, fio elétrico.

$\dot{W}$ é a taxa de realização de trabalho. Tem unidade de $J/s = W$.

Alguns dispositivos realizam trabalho sobre o fluido, aumentando sua energia. Exemplos: **compressores, bombas e ventiladores**.

Outros dispositivos diminuem a energia mecânica do fluido, já que este último realiza trabalho sobre o dispositivo. Exemplo: **turbinas**.

O **trabalho total** realizado sobre o fluido pode ser separado em trabalho de eixo $\dot{W}_{eixo}$, trabalho de pressão $\dot{W}_{pressao}$, trabalho de viscosidade $\dot{W}_{viscosidade}$ e outros $\dot{W}_{outros}$. Assim:

$$\dot{W}_{total} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{pressao} + \dot{W}_{viscosidade} + \dot{W}_{outros}$$

$\dot{W}_{outros}$ se refere ao trabalho realizado por outras forças, como elétrica, magnética e de tensão superficial. Vamos desconsiderar esse termo em nossa análise.

Também vamos desconsiderar o termo $\dot{W}_{viscosidade}$, pois ele é muito menor que os outros, na maioria dos casos.

Assim:

$$\dot{W}_{total} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{pressao}$$

Trabalho é o produto da força pelo deslocamento:

$$W = Fd$$

Dividindo pelo tempo, temos que a taxa de realização de trabalho (também chamada de **potência**), é igual à força vezes a velocidade:

$$\dot{W} = FV$$

A força exercida pela pressão é dada pelo produto da pressão pela área. Assim, o trabalho (potência) exercido pela pressão pode ser escrito como

$$\dot{W} = PAV$$

Considerando que o trabalho é realizado na fronteira do sistema, temos que

$$\dot{W} = \int_A P V_n dA \ .$$

V_n é a componente normal da velocidade na superfície, ou seja,

$$V_n = \vec{V} \cdot \hat{n} \ .$$

Por fim, lembrando que $\hat{n}$ aponta para fora do volume, quando $\vec{V} \cdot \hat{n}$ é positivo, significa que trabalho está sendo realizado pelo sistema sobre a vizinhança, ou seja, a energia mecânica do fluido está diminuindo. Precisamos acrescentar um sinal negativo à definição de trabalho.

Assim,

$$\dot{W}_{pressao} = -\int_A P \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) dA \ . \tag{2}$$

Agora podemos voltar na equação da energia,

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{total} \ ,$$

e reescrevê-la como

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{eixo} - \int_A P \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) dA \ .$$

Vamos passar para uma análise de Volume de Controle usando o Teorema do Transporte de Reynolds.

Faça

$$B = E$$

e

$$b = e = u + \frac{V^2}{2} + gz \ .$$

Assim:

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho e d\forall + \int_{SC} \rho e \left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) dA =$$
$$= \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{eixo} - \int_{SC} \rho \frac{P}{\rho} \left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) dA \ .$$

O termo P/ρ é chamado de **trabalho de escoamento**, que é o trabalho necessário para empurrar o fluido de ou para um VC, por unidade de massa.

Passando P/ρ para o lado esquerdo da equação:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho e d\forall + \int_{SC}\rho\left(e+\frac{P}{\rho}\right)\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA = \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{eixo} \tag{3}$$

Na forma como a equação está apresentada, podemos interpretar o termo P/ρ como sendo uma **energia de escoamento**, sendo uma parte da energia de um fluido em deslocamento.

Vamos trabalhar mais um pouco na equação (3).

Antes, vamos relembrar duas informações aqui. A primeira é que e é a energia específica, calculada como

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \ .$$

A segunda é que a vazão em massa de fluido através de uma dada superfície é dada por

$$\dot{m} = \int_A \rho \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) dA \ .$$

Um outro conceito importante é o de **entalpia**, representada pela letra h, que é uma propriedade do fluido representada pela soma da energia interna com a energia de escoamento. Assim,

$$h = u + \frac{P}{\rho} \ .$$

Considerando valores médios nas entradas e saídas, podemos aproximar a integral na superfície SC como somatórios. Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho e d\forall + \sum_{s}\dot{m}\left(e+\frac{P}{\rho}\right) - \sum_{e}\dot{m}\left(e+\frac{P}{\rho}\right) = \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{eixo} \; .$$

O somatório com subscrito *s* indica o fluxo de saída do volume de controle. O somatório com *e* indica as grandezas que estão entrando no VC.

Vamos considerar mais duas condições que são muito encontradas na prática: escoamento **permanente** e uma **única entrada e uma única saída**.

Vamos considerar o índice 1 para a entrada e o índice 2 para a saída. Assim:

$$\dot{m}_2 \left(e_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) - \dot{m}_1 \left(e_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) = \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{eixo} \ .$$

Pela conservação de massa, devemos ter

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 = \dot{m} \ .$$

Escrevendo a energia mecânica em termo de suas componentes:

$$\dot{m} \left(u_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) - \dot{m} \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) =$$
$$= \dot{Q}_{total} + \dot{W}_{eixo} \ .$$

Podemos reescrever essa equação colocando os termos que levam energia ao VC do lado esquerdo e os termos que tiram energia do VC do lado direito. Ou seja:

$$\begin{aligned} &\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \dot{W}_{eixo} = \\ &= \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) + \left[\dot{m}\left(u_2 - u_1\right) - \dot{Q}_{total}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

O último termo do lado direito representa as **perdas mecânicas** que ocorrem no escoamento (por exemplo, com o aumento de temperatura do fluido devido ao atrito). Vamos denominar esse termo de **perda de energia mecânica:**

$$\dot{E}_{mec,perda} = \dot{m}\left(u_2 - u_1\right) - \dot{Q}_{total} \ .$$

Para finalizar, vamos separar o trabalho de eixo em **trabalho de turbina** (retira energia do escoamento) e **trabalho de bomba** (adiciona energia ao escoamento):

$$\dot{W}_{eixo} = \dot{W}_{bomba} - \dot{W}_{turbina} \ .$$

Substituindo essa expressão para o trabalho de eixo e a definição de perda mecânica de volta na equação (4), temos

$$\begin{aligned} \dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \dot{W}_{bomba} - \dot{W}_{turbina} = \\ = \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) + \dot{E}_{mec,perda} \end{aligned} \qquad (5)$$

Temos, assim, a **Equação Geral da Energia:**

$$\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \dot{W}_{bomba} = \\ = \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) + \dot{W}_{turbina} + \dot{E}_{mec,perda} \tag{6}$$

Essa é a equação da energia para um volume de controle em regime permanente no caso de uma entrada e um saída.

O termo $\dot{E}_{mec,perda}$ é sempre maior ou igual a zero, sendo igual a zero no caso ideal (perdas irreversíveis no escoamento são desconsideradas).

Essa equação é válida no regime permanente, ou seja, não há variação da energia do Volume de Controle ao longo tempo. Isso significa que a energia que é adicionada ao VC deve ser igual à energia que é subtraída.

Energia pode ser adicionada ao VC pelo fluido entrando e por meio de uma bomb. Energia deixa o VC por meio do fluido saindo, por meio de uma turbina e devido às perdas irreversíveis.

Antes de estudarmos problemas com a equação geral da energia, vamos explorar um caso mais simples.

Considere que não há perdas no escoamento e também não há bomba e nem turbina.

Neste caso, a equação geral da energia se torna

$$\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) = \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right)$$

Ou

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}$$

Essa é a **Equação de Bernoulli**.

Ela nos diz que a **energia mecânica do escoamento se conserva** quando não temos máquinas de fluxo (bombas e turbinas) e desprezamos as perdas por atrito.

Nesse caso:

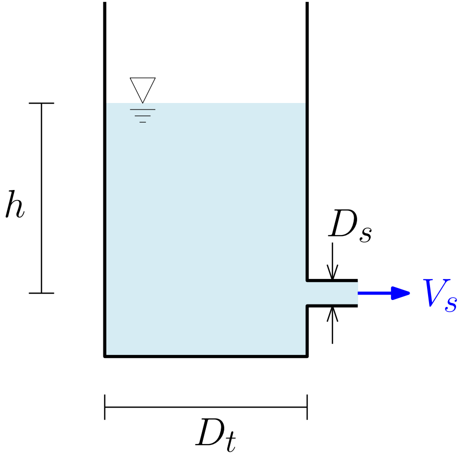
$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{constante}$$

Apesar das aproximações (restrições), a **equação de Bernoulli**, juntamente com a equação da conservação de massa, é amplamente utilizada em diversas aplicações da Mecânica dos Fluidos.

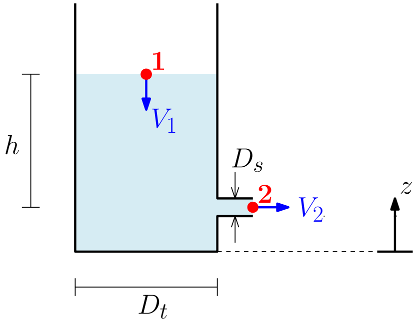
Vamos ver, na próxima seção, alguns exemplos de aplicações da Equação de Bernoulli.

Sumário

Exemplo 1. O tanque da figura, contendo água e aberto para a atmosfera, possui diâmetro D_t e está sendo esvaziado por um pequeno tubo lateral com diâmetro D_s. Determine a velocidade de saída da água.



Solução. Ponto 1: superfície livre do reservatório. Ponto 2: saída do bocal.



Equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{cte}$$

Temos então:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Mas $p_1 = p_{atm} = p_2$. Assim:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

$$\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = gz_1 - gz_2 = g(z_1 - z_2) = gh$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2gh \tag{7}$$

Temos duas incógnitas (V_1 e V_2) e apenas uma equação. Precisamos de mais uma informação. Essa informação é a conservação de massa.

Conservação de massa entre as regiões 1 e 2:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$$

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = V_2 \frac{(\pi D_s^2/4)}{(\pi D_t^2/4)} = V_2 \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^2$$

Substituindo esse resultado em (7):

$$V_2^2 - V_1^2 = V_2^2 - \left(V_2 \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^2\right)^2 = V_2^2 - V_2^2 \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^4 = 2gh$$

$$V_2^2 \left(1 - \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^4\right) = 2gh$$

$$V_2^2 = \frac{2gh}{1 - \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^4}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^4}}$$

Essa é a velocidade média de saída da água pelo tubo lateral.

O que acontece se $D_s \ll D_t$? Nesse caso

$$1 - \left(\frac{D_s}{D_t}\right)^4 \approx 1 \ .$$

Assim, quando o diâmetro do reservatório é muito maior do que o diâmetro da saída, temos

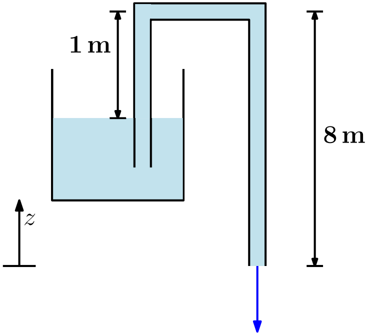
$$V_2 \approx \sqrt{2gh}$$

e

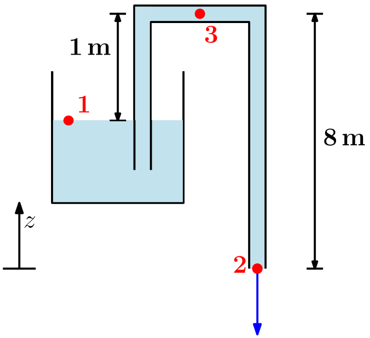
$$V_1 \approx 0 \ .$$

Essa é a velocidade teórica de saída, é o limite máximo possível. A velocidade real vai se aproximar desse limite.

Exemplo 2. O tubo em U da figura funciona como um sifão. O ponto mais alto deste tubo está a $1\,m$ acima da superfície livre da água, e a saída situa-se a $7\,m$ abaixo dessa superfície. Desprezando os efeitos viscosos, determine a velocidade do jato livre e a pressão absoluta do fluido no ponto mais alto do sifão.



Solução. Ponto 1: superfície livre. Ponto 2: saída do tubo. Ponto 3: parte mais alta do tubo. Primeiro vamos calcular V_2 e depois p_3.



Equação de Bernoulli para os pontos 1 e 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + z_1 g = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + z_2 g$$

Mas $p_1 = p_{atm} = p_2$ e vamos considerar que a área seção transversal do reservatório é muito maior que a área da seção do tubo, o que resulta em $V_1 \approx 0$. Assim:

$$z_1 g = \frac{V_2^2}{2} + z_2 g$$

$$V_2^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 7} = 11,7\, m/s$$

Essa é a velocidade com que a água sai do tubo. Vamos agora aplicar a equação do Bernoulli nos pontos 1 e 3. Note que $V_3 = V_2$, pela conservação de massa.

Temos:

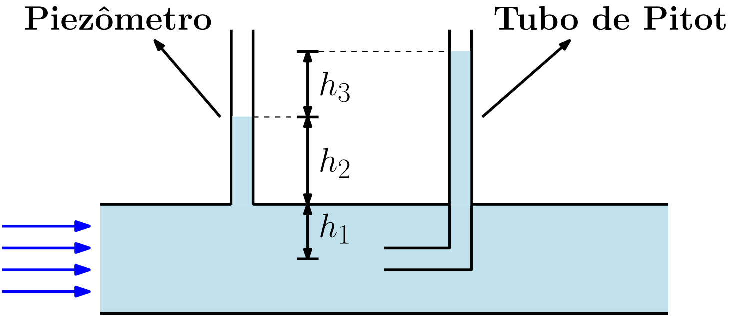
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + z_1 g = \frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} + z_3 g$$

$$p_3 = p_1 + \rho g(z_1 - z_3) - \rho \frac{V_3^2}{2}$$

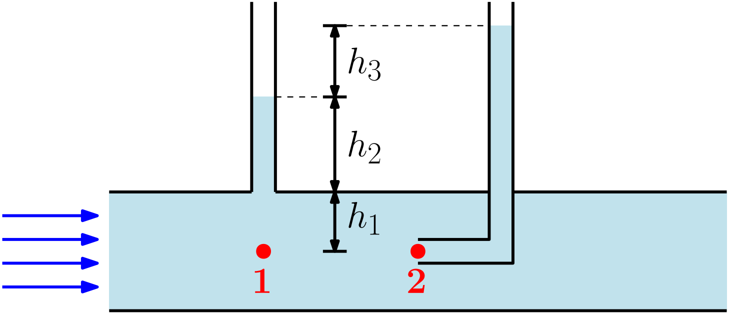
$$p_3 = 101000 + 1000 \times 9,81 \times (-1) - 1000 \times \frac{11,7^2}{2}$$

$$p_3 = 22,8\, kPa \ .$$

Exemplo 3. Um piezômetro (pressão estática) e um tubo de Pitot (pressão de estagnação) são colocados em um tubo horizontal, por onde ocorre o escoamento de água. Para as alturas de coluna indicadas, determine a velocidade no centro do tubo.



Solução. Tomamos os pontos 1 e 2 ao longo do eixo central do tubo, com o ponto 1 diretamente abaixo do piezômetro e o ponto 2 na entrada do tubo de Pitot.



Equação de Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + z_1 g = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + z_2 g$$

Mas $z_1 = z_2$ e $V_2 = 0$. Resulta:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho}$$

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 \tag{8}$$

p_1 é a pressão estática, $\rho V_1^2/2$ é a pressão dinâmica e p_2 é a pressão estática.

As pressões de manômetro nos pontos 1 e 2 podem ser expressas como:

$$p_1 = \rho g(h_1 + h_2)$$

$$p_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

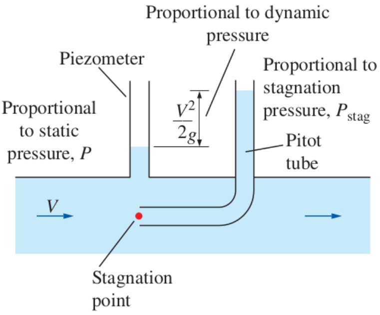
Substituindo de volta em (8):

$$\rho g(h_1 + h_2) + \frac{\rho V_1^2}{2} = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

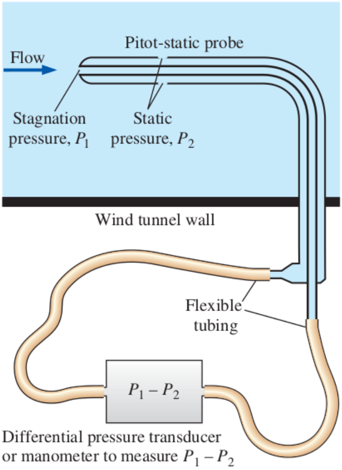
$$\frac{\rho V_1^2}{2} = \rho g h_3$$

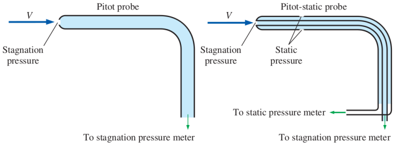
$$V_1 = \sqrt{2gh_3} \tag{9}$$

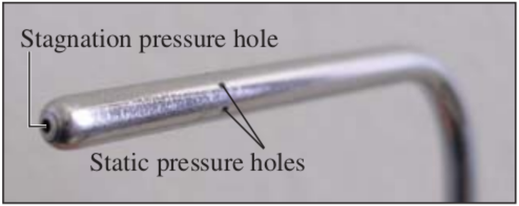
Observe que para determinar a velocidade do escoamento, tudo que precisamos é de h_3, ou seja, o excesso de fluido no tubo de Pitot causado pela velocidade do escoamento.



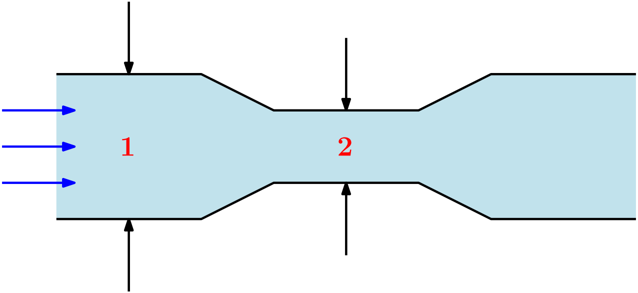
$$V = \sqrt{\frac{2(P_{stag} - P)}{\rho}}$$






Stagnation pressure hole
Static pressure holes

Exemplo 4. Um tubo de Venturi, utilizado para determinar a velocidade em um dado escoamento, consiste em um tubo cuja área da seção transversal varia até um mínimo e depois volta a ter a mesma seção inicial. Aplique a equação de Bernoulli para obter a velocidade em 2.



Solução. Temos a equação de Bernoulli para os pontos 1 e 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + z_1 g = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + z_2 g \ .$$

Mas $z_1 = z_2$. Assim:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \ .$$

Conservação de massa:

$$\rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 \qquad \rightarrow \qquad V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Temos então:

$$V_2^2 - V_2^2 \frac{A_2^2}{A_1^2} = 2\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho}\right) \ .$$

$$V_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) = 2\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho}\right) \ .$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\left(p_1 - p_2\right)}{\rho\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}} \ .$$

Podemos determinar p_1 e p_2 com dois piezômetros.

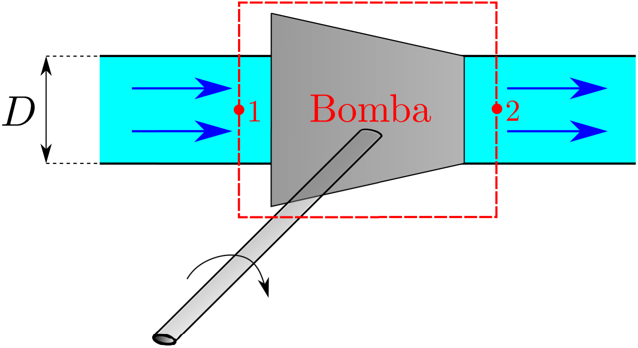
Sumário

Agora vamos resolver alguns exemplos levando em consideração a presença de bombas e turbinas no escoamento.

Vamos usar a equação geral da energia:

$$\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \dot{W}_{bomba} =$$
$$= \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) + \dot{W}_{turbina} + \dot{E}_{mec,perda}$$

Exemplo 5. Uma bomba é utilizada para manter o escoamento de água ($\rho = 1000\,kg/m^3$) a uma vazão de $0,04\,m^3/s$ em uma tubulação de $15\,cm$ de diâmetro. Se a diferença de pressão entre um ponto a montante da bomba e um ponto a jusante é de $400\,kPa$, determine a taxa de trabalho de eixo realizada pela bomba nesse escoamento. Despreze as perdas.



Solução. Equação da energia:

$$\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \dot{W}_{bomba} =$$
$$= \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) + \dot{W}_{turbina} + \dot{E}_{mec,perda}$$

Temos $\dot{W}_{turbina} = \dot{E}_{mec,perda} = 0$.

As alturas dos dois pontos são iguais, $z_1 = z_2$.

Como o diâmetro é constante, a montante e a jusante da bomba, a velocidade também é a mesma, ou seja, $V_1 = V_2$.

A densidade é constante: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Assim, a equação da energia pode ser escrita como

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho_1}\right) + \dot{W}_{bomba} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho_2}\right)$$

Ou

$$\dot{W}_{bomba} = \frac{\dot{m}}{\rho}\left(P_2 - P_1\right)$$

Do enunciado temos que $\rho = 1000\,kg/m^3$ e $P_2 - P_1 = 400\,kPa$.

A vazão em massa é dada por

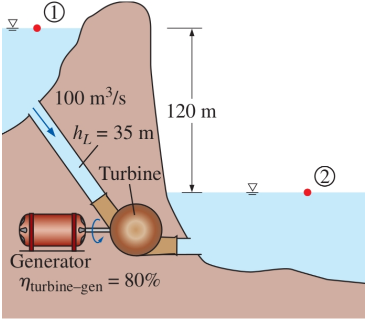
$$\dot{m} = \rho \times \dot{\forall} = 1000\,kg/m^3 \times 0,04\,m^3/s = 40\,kg/s$$

$$\dot{W}_{bomba} = \frac{40\,kg/s}{1000\,kg/m^3} \times 400000\,Pa = 16000\,W = 16\,kW$$

Assim, a bomba adiciona $16\,kW$ de potência de trabalho de eixo ao escoamento, resultando no aumento de pressão observado.

Este exemplo mostra que a bomba aumenta a energia mecânica do escoamento, mas não necessariamente a sua velocidade.

Exemplo 6. Em uma usina hidrelétrica, $100\,m^3/s$ de água ($\rho = 1000\,kg/m^3$) escoam de uma elevação de $120\,m$ até uma turbina, onde a energia elétrica é gerada. A perda de carga irreversível total do sistema de tubulação do ponto 1 até o ponto 2 é determinada como $35\,m$. Se a eficiência geral da turbina/gerador for de $80\,\%$, estime a saída de potência elétrica.



Solução. Equação da energia:

$$\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2}+gz_1+\frac{P_1}{\rho_1}\right)+\dot{W}_{bomba}=$$
$$=\dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\frac{P_2}{\rho_2}\right)+\dot{W}_{turbina}+\dot{E}_{mec,perda}$$

Não há bomba: $\dot{W}_{bomba}=0$.

As velocidades dos pontos 1 e 2 são nulas. As pressões nesses pontos são iguais à pressão atmosférica. Dessa forma: $V_1=V_2=P_1=P_2=0$.

A diferença de altura entre os dois pontos é de $120\,m$, ou seja, $z_1-z_2=120\,m$.

Assim, a equação da energia pode ser escrita como

$$\dot{W}_{turbina} = \dot{m}g\left(z_1 - z_2\right) - \dot{E}_{mec,perda}$$

A perda de carga é dada em termos de uma altura, uma carga $h_{perda} = 35\,m$. A perda em termos de potência é dada por

$$\dot{E}_{mec,perda} = \dot{m}gh_{perda}$$

Assim:

$$\dot{W}_{turbina} = \dot{m}g\left(z_1 - z_2\right) - \dot{m}gh_{perda} = \dot{m}g\left(z_1 - z_2 - h_{perda}\right)$$

Substituindo os valores:

$$\dot{W}_{turbina} = 100\,m^3/s \times 1000\,kg/m^3 \times 9,81\,m/s^2 \times (120\,m - 35\,m)$$

$$\dot{W}_{turbina} = 83385000\,W = 83,4\,MW$$

Esse é o trabalho que o fluido realiza sobre a turbina. Note que a turbina utiliza a energia mecânica do fluido (energia potencial gravitacional, no caso). Uma parte da energia mecânica se perde, por conta do atrito ($\dot{E}_{mec,perda}$).

No entanto, temos ainda que considerar que o conjunto turbina-gerador não é perfeito, levando a perdas internas. Assim, de toda a energia mecânica retirada do escoamento ($83,4\,MW$), apenas $80\,\%$ é efetivamente transformada em energia elétrica utilizável:

$$\dot{W}_{eletrica} = \eta \times \dot{W}_{turbina} = 0,8 \times 83,4\,MW = 66,7\,MW$$

Concluímos que a potência elétrica gerada é de $66,7\,MW$.

Sumário

Esta seção é opcional.

A **Equação de Bernoulli** pode ser obtida diretamente a partir da **Equação de Navier-Stokes**.

Como vimos, a Equação de Bernoulli apresenta uma relação aproximada entre **pressão, velocidade e elevação** válida para regiões em que o escoamento é **incompressível**, **em regime permanente e com forças de atrito (viscosas) resultantes desprezíveis**.

Equação de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}\ .$$

Permanente e sem forças viscosas:

$$\rho\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}+\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\cancelto{0}{\mu\nabla^2\vec{V}}\ .$$

Assim:

$$\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p\ . \tag{10}$$

Vamos trabalhar um pouco nessa equação (10).

Identidade vetorial:

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(V^2\right) - \vec{V} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right) \ . \tag{11}$$

Aqui, $V = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = |\vec{V}|$ é o módulo da velocidade.

A aceleração gravitacional é dada por:

$$\vec{g} = -g\hat{k} \ ,$$

com g constante. Mas

$$\vec{\nabla} z = \hat{k} \ .$$

Então, podemos escrever:

$$\vec{g} = \vec{\nabla}\left(-gz\right) = -\vec{\nabla}\left(gz\right) \ . \tag{12}$$

Substituindo (11) e (12) em (10):

$$\frac{1}{2}\rho\vec{\nabla}\left(V^2\right) + \vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\left(gz\right) = \rho\vec{V} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right) \ .$$

Escoamento incompressível, ρ constante:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) + \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\left(\rho gz\right) = \rho\vec{V} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right) \ .$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gz\right) = \rho\vec{V} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right) \ .$$

Vamos assumir que o escoamento é **irrotacional**, ou seja, $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$. Assim:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gz\right) = \vec{0} \ .$$

Então:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = cte \ . \tag{13}$$

Cada termo representa um tipo de pressão:

- $\rho V^2/2$ é a **pressão dinâmica**. Representa o aumento de pressão quando o fluido em movimento é parado.
- p é a **pressão estática** (não incorpora nenhum efeito dinâmico). É a pressão termodinâmica.
- $\rho g z$ é a **pressão hidrostática**. Ela representa os efeitos da altura.

A soma das 3 pressões é a **pressão total**. A soma das pressões dinâmica e estática é chamada de **pressão de estagnação**.

Podemos dividir por ρ e pensar em termos de energia também:

$$\underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{Cinética}} + \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{Escoamento}} + \underbrace{gz}_{\text{Gravitacional}} = cte \ . \tag{14}$$

Ou podemos ainda pensar em termos de alturas (ou cargas):

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = cte \ . \tag{15}$$

As equações (13), (14) e (15) representam a Equação de Bernoulli, que pode ser enunciada (pensando em energia) como: **a soma das energias cinética, potencial gravitacional e de escoamento** de uma partícula de fluido é constante quando o escoamento é:

1. Permanente
2. Incompressível
3. Sem atrito (invíscido)
4. Irrotacional .

Apesar das aproximações (restrições), a equação de Bernoulli, juntamente com a equação da conservação de massa, é amplamente utilizada em diversas aplicações da Mecânica dos Fluidos.