Conservação de Massa

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

Lei da Conservação de Massa:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 \ . \tag{1}$$

No TTR, faça:

$$B = m \qquad \rightarrow \qquad b = 1 \ .$$

Na forma mais simples, resulta:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \frac{dm_{vc}}{dt} + \dot{m}_s - \dot{m}_e$$

$$0 = \frac{dm_{sist}}{dt} = \frac{dm_{vc}}{dt} + \dot{m}_s - \dot{m}_e$$

$$\boxed{\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s} \qquad (2)$$

$\dot{m}_s$ é o fluxo de massa saindo do Volume de Controle e $\dot{m}_e$ é o fluxo de massa entrando.

Na forma mais geral:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall + \int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA = 0 \ .$$

Assim:

$$\boxed{\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall + \int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA = 0 \ .} \tag{3}$$

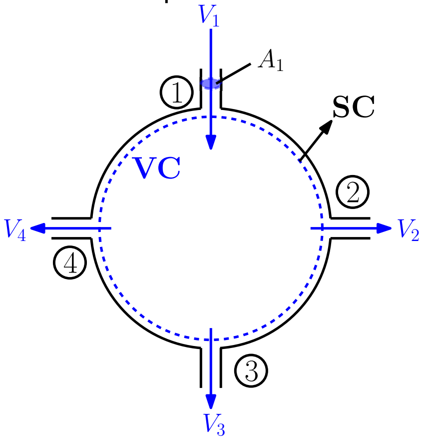
Essa é a forma integral da lei de conservação de massa para um VC.

Sumário

Em regime permanente, a equação se torna:

$$\int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA = 0 \ .$$

Escoamento permanente com entradas e saídas unidimensionais:



Para a entrada 1:

$$\int_{SC_1} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA \approx -\rho V_1 A_1$$

Para a saída 2:

$$\int_{SC_2} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA \approx \rho V_2 A_2$$

Somando tudo:

$$\int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA = \sum_i (\rho V_i A_i)_{\text{saídas}} - \sum_i (\rho V_i A_i)_{\text{entradas}} = 0$$

Assim:

$$\boxed{\sum_i (\rho V_i A_i)_{\text{saídas}} = \sum_i (\rho V_i A_i)_{\text{entradas}}} \tag{4}$$

Ou seja, em regime permanente, **a vazão total de massa que entra em um Volume de Controle é igual à vazão total de massa que sai dele.**

Considerando as entradas e saídas da figura:

$$\rho V_2 A_2 + \rho V_3 A_3 + \rho V_4 A_4 = \rho V_1 A_1$$

Ou:

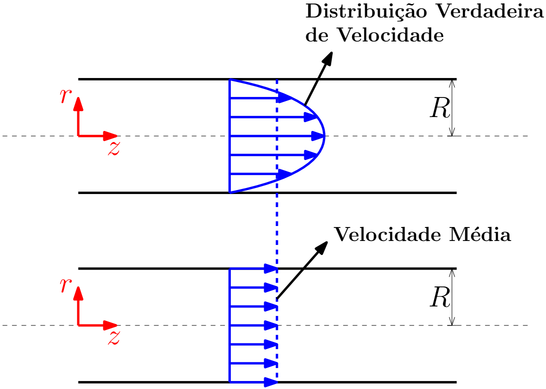
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \dot{m}_4$$

Nas equações anteriores V_i é a **velocidade média** na seção i. Vamos definir com mais precisão a velocidade média nos próximos slides.

Sumário

Velocidade Média é uma velocidade constante (uniforme) que nos dá a mesma vazão volumétrica, quando multiplicada pela área, daquela obtida a partir da distribuição verdadeira de velocidade.

Considere o escoamento em um tubo.



Temos uma distribuição de velocidade, pois a velocidade vai de zero, nas paredes, até um valor máximo no centro.

A vazão volumétrica através de uma superfície S é dada por:

$$\dot{\forall} = \int_S (\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA$$

Queremos encontrar uma velocidade V_m, uniforme na seção, tal que

$$V_m A = \dot{\forall} \ .$$

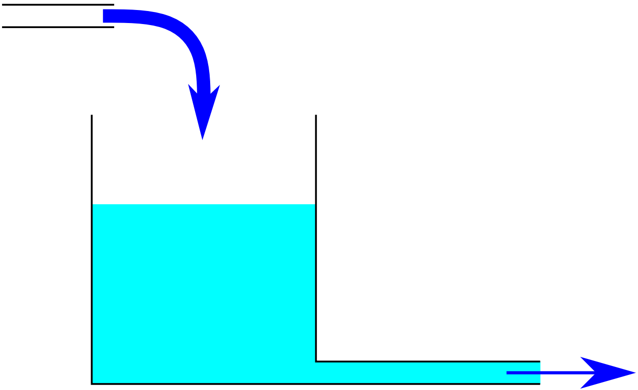
Assim:

$$\boxed{V_m = \frac{1}{A}\int_S (\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA\ .} \tag{5}$$

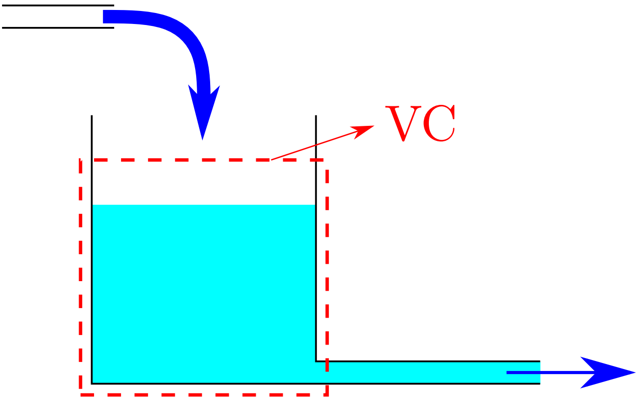
Essa é a definição de **Velocidade Média**. Dado um campo de velocidade $\vec{V}$, podemos calcular a velocidade média que passa através de uma superfície S.

Sumário

Exemplo. Um tanque recebe fluido incompressível ($\rho = 1000\,kg/m^3$) à taxa de $2\,kg/s$. Na saída temos que a velocidade é de $1\,m/s$ e o diâmetro do tubo é de $8\,cm$. A massa de fluido no tanque está aumentando ou diminuindo?



Solução. Selecionando o volume de controle.



$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s$$

$$\dot{m}_e = 2\,kg/s$$

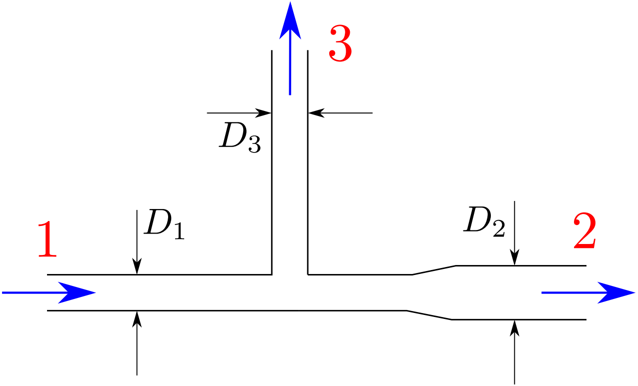
$$\dot{m}_s = \rho V A = 1000\,kg/m^3 \times 1m/s \times \frac{\pi \times 0,08^2}{4} m^2 = 5,02\,kg/s$$

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s = 2\,kg/s - 5,02\,kg/s$$

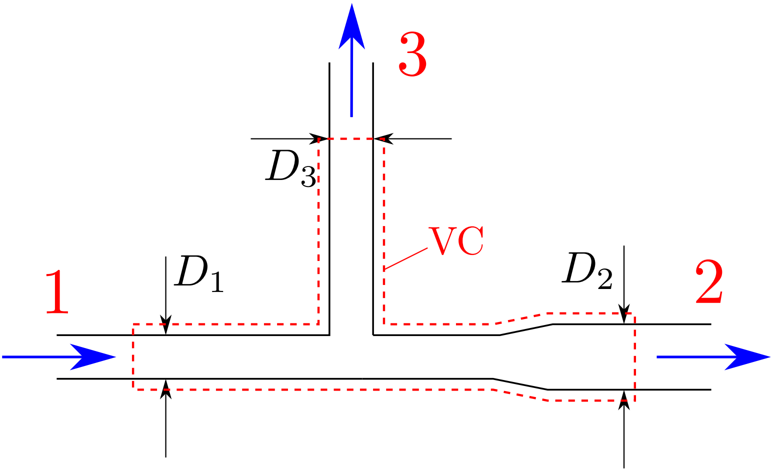
$$\frac{dm_{vc}}{dt} = -3,02\,kg/s$$

Resposta: a massa no tanque está diminuindo (sinal negativo), a uma taxa de $3,02\,kg/s$.

Exemplo. No escoamento incompressível e em regime permanente através do dispositivo abaixo, determine a velocidade V_3. Dados: $D_1 = 4\,cm$, $D_2 = 6\,cm$, $D_3 = 4\,cm$, $V_1 = 1\,m/s$ e $V_2 = 0,4\,m/s$.



Solução. Selecionando o volume de controle.



A variação de massa no VC ao longo do tempo é zero, pois o escoamento está em regime permanente.

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s = 0$$

Temos uma entrada

$$\dot{m}_e = \dot{m}_1 = \rho V_1 A_1$$

Temos duas saídas

$$\dot{m}_s = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = \rho V_2 A_2 + \rho V_3 A_3$$

Assim:

$$V_3 = \frac{V_1 A_1 - V_2 A_2}{A_3}$$

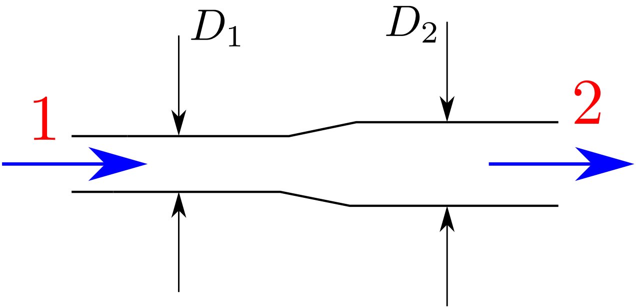
Substituindo os valores:

$$V_3 = \frac{1 \times \pi \times 0,04^2/4 - 0,4 \times \pi \times 0,06^2/4}{\pi \times 0,04^2/4}$$

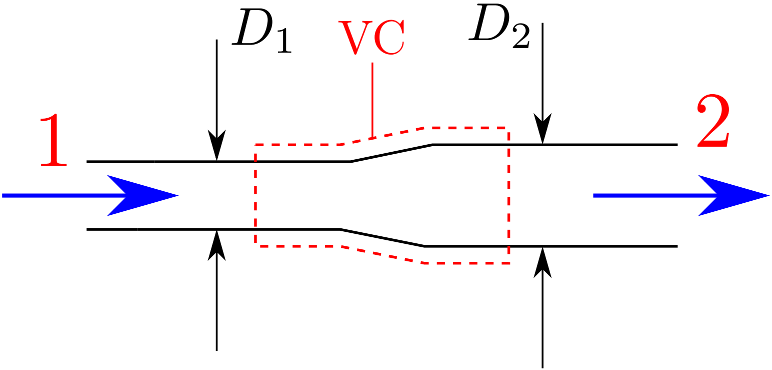
Resposta: a velocidade V_3 é

$$V_3 = 0,1\, m/s$$

Exemplo. Determine o fluxo de massa e a velocidade na saída do bocal difusor representado na figura abaixo. O gás é oxigênio ($R = 260\,J/(kg \cdot K)$). O escoamento é compressível e está em regime permanente. Na entrada: $A = 0,4\,m^2$, $T = 140\,^oC$, $p = 150\,kPa$ e $V = 200\,m/s$. Na saída: $A = 0,6\,m^2$, $T = 165\,^oC$ e $p = 200\,kPa$.



Solução. Selecionando o volume de controle.



A variação de massa no VC ao longo do tempo é zero, pois o escoamento está em regime permanente.

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s = 0$$

Na entrada

$$\dot{m}_e = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 \times 200\, m/s \times 0,4\, m^2$$

Neste caso o escoamento é compressível, o que significa que a densidade não é constante. Temos que calcular a densidade na entrada e na saída.
Para calcular a densidade, vamos usar a lei dos gases ideais:

$$p = \rho R T \qquad \rightarrow \qquad \rho = \frac{p}{RT}$$

R é a constante individual do gás (é a constante universal dividida pela massa molar). Em 1:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{150\,kPa}{260\,J/(kg.K)) \times 413\,K} = 1,4\,kg/m^3$$

O fluxo de massa é

$$\dot{m}_e = \rho_1 V_1 A_1 = 1,4\,kg/m^3 \times 200\,m/s \times 0,4\,m^2 = 112\,kg/s$$

Este é o fluxo de massa na entrada e na saída, já que o escoamento está em regime permanente. Agora vamos calcular a velocidade na saída.

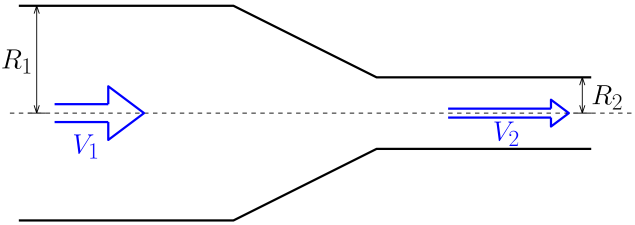
$$\dot{m}_s = \rho_2 V_2 A_2 \qquad \rightarrow \qquad V_2 = \frac{\dot{m}_e}{\rho_2 A_2}$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{200\,kPa}{260\,J/(kg.K)) \times 438\,K} = \; kg/m^3 = 1,76\,kg/m^3$$

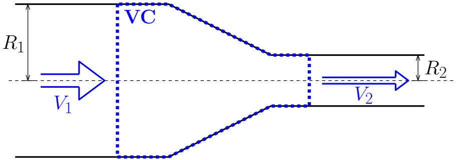
$$V_2 = \frac{112\,kg/s}{1,76\,kg/m^3 \times 0,6\,m^2} = 106,06\,m/s$$

Resposta: o fluxo de massa na entrada e na saída é de $112\,kg/s$ e a velocidade na saída é de $106\,m/s$.

Exemplo. Considere o escoamento de um líquido através de uma parte convergente de uma tubulação circular, como mostra a figura. Determine a razão entre a velocidade média V_1 e a velocidade média V_2.



Vamos escolher o Volume de Controle de acordo com a figura abaixo.



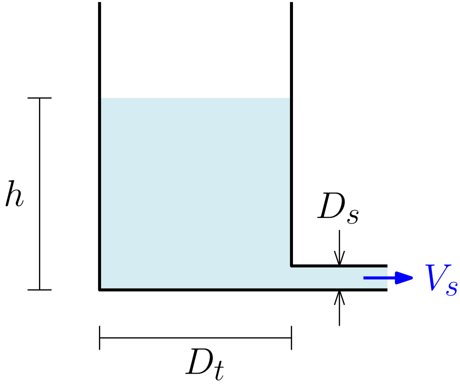
$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \frac{dm_{vc}}{dt} + \dot{m}_s - \dot{m}_e = 0$$

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s$$

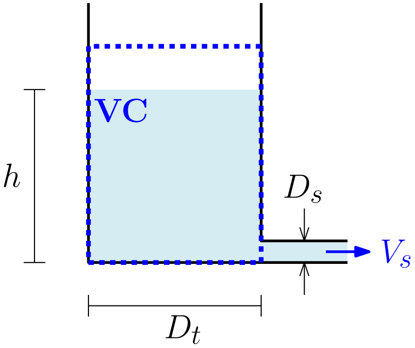
$$\rho Q_1 = \rho Q_2$$

$$\rho V_1 \pi R_1^2 = \rho V_2 \pi R_2^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

Exemplo. O tanque da figura possui diâmetro D_t e está sendo esvaziado por um tubo lateral com diâmetro D_s. A velocidade média de saída do líquido é V_s. Determine a taxa de variação de h, ou seja, dh/dt.



Solução.



Vamos escolher o Volume de Controle da figura ao lado.

$$\forall = \left(\frac{\pi D_t^2}{4}\right) h$$

Assim:

$$\frac{d\forall}{dt} = \left(\frac{\pi D_t^2}{4}\right) \frac{dh}{dt}$$

Temos a lei de conservação de massa:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} + \dot{m}_s - \dot{m}_e = 0$$

Temos:

$$m_{vc} = \rho \forall \qquad \rightarrow \qquad \frac{dm_{vc}}{dt} = \rho \frac{d\forall}{dt}$$

As vazões:

$$\dot{m}_e = 0 \qquad \dot{m}_s = \rho V_s A_s = \rho V_s \frac{\pi D_s^2}{4}$$

Substituindo esses resultados de volta na lei de conservação:

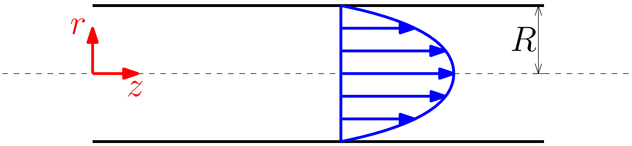
$$\rho \frac{\pi D_t^2}{4} \frac{dh}{dt} = -\rho \frac{V_s \pi D_s^2}{4}$$

Resposta:

$$\frac{dh}{dt} = -V_s \left(\frac{D_s}{D_t} \right)^2$$

Exemplo. Calcule a velocidade média no escoamento em um tubo circular de raio R, dado o perfil de velocidade (coordenadas cilíndricas)

$$\vec{V} = V_o \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \hat{e}_z \ .$$



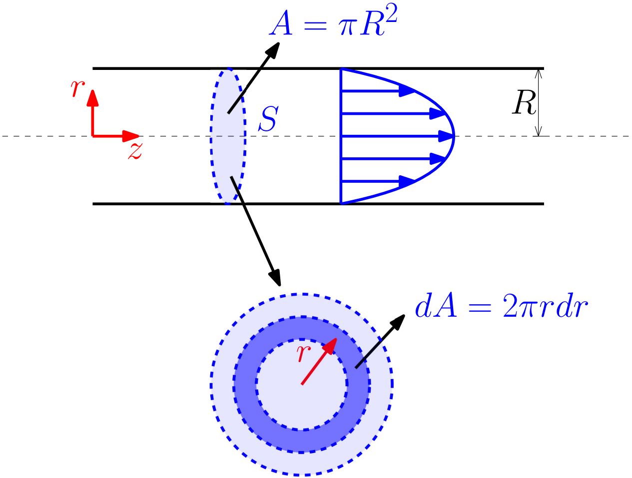
Solução. Note que V_o é a velocidade máxima, em $r = 0$ (centro do tubo). Estamos usando coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_z \hat{e}_z$$

Daí temos:

$$v_r = v_\theta = 0 \qquad v_z = V_o \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Vamos considerar nossa superfície S como sendo um círculo perpendicular ao escoamento. Nesse caso $\hat{n} = \hat{e}_z$ e $dA = 2\pi r dr$. A área dessa superfície é πR^2.



Assim, da definição de velocidade média:

$$V_m = \frac{1}{A}\int_S (\vec{V}\cdot\hat{n})\, dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left[V_o\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\hat{e}_z\right]\cdot\hat{e}_z(2\pi r dr)$$

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_o\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r dr = \frac{2V_o}{R^2}\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr$$

$$V_m = \frac{2V_o}{R^2}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{2V_o}{R^2}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4R^2}\right]$$

Resultado:

$$V_m = \frac{V_o}{2}$$

Conclusão: a velocidade média é a metade da velocidade máxima em um escoamento laminar em um tubo circular.

Sumário

Essa análise que fizemos até aqui é uma **análise integral.** Não consideramos a velocidade em cada ponto, mas sim médias espaciais. Vamos desenvolver agora um **estudo diferencial,** encontrando soluções para cada ponto do escoamento.

Considere novamente a equação (3):

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\forall + \int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA = 0 \ . \tag{6}$$

A primeira integral é de **volume**, enquanto a segunda é de **superfície**. Não podemos somá-las nessa condição. Mas podemos usar o **Teorema da Divergência** para transformar a segunda integral em um integral de volume.

Seja um campo vetorial $\vec{f}$. O Teorema da Divergência nos diz que:

$$\int_{\forall} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \, d\forall = \int_{S} \vec{f} \cdot \hat{n} \, dA \tag{7}$$

Comparando o Teorema da Divergência com a equação (6), temos $\vec{f} = \rho \vec{V}$ e

$$\int_{SC} (\rho \vec{V}) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \, d\forall$$

Substituindo esse resultado em (6):

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\forall + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \, d\forall = 0 \ .$$

Agora temos duas integrais de volume. Podemos somar os integrandos:

$$\int_{VC} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \, d\forall \right) = 0 \ . \qquad (8)$$

Temos que a integral de uma dada função

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})$$

é **sempre** igual a zero. Será que essa função é igual a zero?

Teorema da Localização: se a integral de uma função contínua é nula para qualquer intervalo de integração, então essa função é nula.

Aplicando esse teorema à equação (8), temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Conclusão:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \ .} \tag{9}$$

Essa é a **Equação da Continuidade.** Essa é a versão diferencial da Lei de Conservação de Massa, válida para **qualquer fluido**.

Essa equação é válida em todos os pontos do escoamento. Com essa equação ainda não é possível resolver o problema, ou seja, encontrar ρ e $\vec{V}$ (temos 4 incógnitas e 1 equação). Essa equação nos dá uma relação entre a velocidade e a densidade, para que a conservação de massa seja observada sempre.

Essa é a versão geral da equação da continuidade. Vamos ver o que acontece quando o fluido é **incompressível**.

Líquidos quase sempre são tratados como **incompressíveis**, ou seja, a densidade ρ permanece constante durante o escoamento quando **acompanhamos** uma partícula de fluido. Isso significa que a derivada material de ρ é igual a zero para um fluido incompressível.

Dessa maneira, em um fluido incompressível temos

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \ .$$

Mas na equação (9) não aparece $D\rho/Dt$. O que aparece é $\partial\rho/\partial t$. Vamos trabalhar um pouco na equação 9.

Antes, só pra lembrar da definição de derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho \ .$$

Considere a equação da continuidade novamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \ .$$

Abrindo o divergente do produto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0 \ .$$

Ou seja:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0 \ .$$

Se o fluido é incompressível:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0} \tag{10}$$

Essa é a **Equação da Continuidade** para **Fluidos Incompressíveis.**

Essa é uma forte restrição nos campos de velocidade para escoamentos incompressíveis. Para ser incompressível, o campo de velocidade tem que ter divergente nulo. Campos vetoriais com divergente nulo são chamados de **campos solenoidais**.

Comentário: alguns autores preferem falar em Escoamento Incompressível, no lugar de Fluido Incompressível. O argumento é que a aproximação de incompressibilidade pode ser válida para algumas situações e não ser válida em outras, considerando o mesmo fluido.

Em coordenadas cartesianas, temos

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\hat{\imath} + v(x,y,z,t)\hat{\jmath} + w(x,y,z,t)\hat{k}$$

e

$$\rho = \rho(x,y,z,t) \ .$$

Assim, a equação da continuidade geral ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$) é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \ .$$

No caso de um fluido incompressível, a equação da continuidade ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) se reduz a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ .$$

Exemplo. A componente da velocidade u de um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível $u = ax + by$, onde a e b são constantes. A componente da velocidade v é desconhecida. Encontre uma expressão para v como uma função de x e y.

Exemplo. A componente da velocidade u de um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível $u = ax + by$, onde a e b são constantes. A componente da velocidade v é desconhecida. Encontre uma expressão para v como uma função de x e y.

Solução. Queremos encontrar a componente v. O escoamento é permanente: $\vec{V}$ não depende de t. O escoamento é bidimensional: $w = 0$ e $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. O escoamento é incompressível: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Por fim: $u = ax + by$. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (ax + by)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Portanto:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -a \qquad \rightarrow \qquad v = -ay + f(x)$$