Sistemas Aglomerados

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Na análise de sistemas aglomerados (ou concentrados) o comportamento da temperatura é **transiente**, ou seja, depende do tempo.

Mas a temperatura é aproximada como **uniforme** dentro do corpo, sendo a mesma em todos os pontos do domínio.

Temos então:

$$T(x,t) \approx T(t)$$

Essa aproximação é válida para situações específicas em que o **número de Biot** é pequeno.

Número de Biot:

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

k é a condutividade térmica, h é o coeficiente de transferência de calor por convecção e L_c é um comprimento característico (próximo slide).

É um parâmetro adimensional. A dimensão é 1.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{\text{convecção}}{\text{condução}}$$

O número de Bi dá a razão entre a convecção na superfície e a condução no interior.

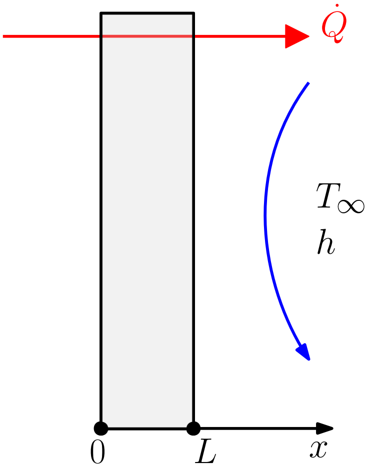
L_c é um comprimento característico do objeto. É definido como sendo o volume do corpo dividido pela área de sua superfície.

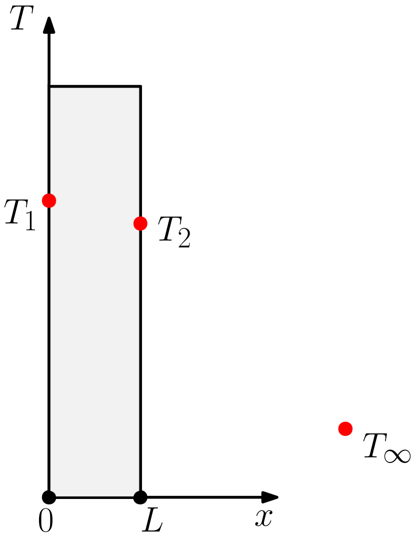
$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

Se $Bi < 0,1$, então a análise de sistemas aglomerados é boa. Para $Bi > 0,1$ deve-se ter cuidado (essa análise deve ser usada como uma primeira solução).

De onde vem o número de Biot?

Considere uma placa de metal sujeita à convecção de um dos lados.





$$\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{conv} \tag{1}$$

$$-kA\frac{dT}{dx} = hA(T_2 - T_\infty) \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} \tag{3}$$

$$-k\frac{T_2 - T_1}{L} = h(T_2 - T_\infty) \tag{4}$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_\infty} = \frac{hL}{k} = \textbf{Bi} \tag{5}$$

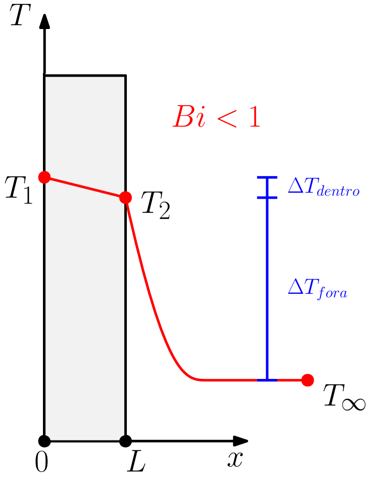
$T_1 - T_2$ é a variação de temperatura dentro da placa, e $T_2 - T_\infty$ é a variação de temperatura fora da placa.

Assim:

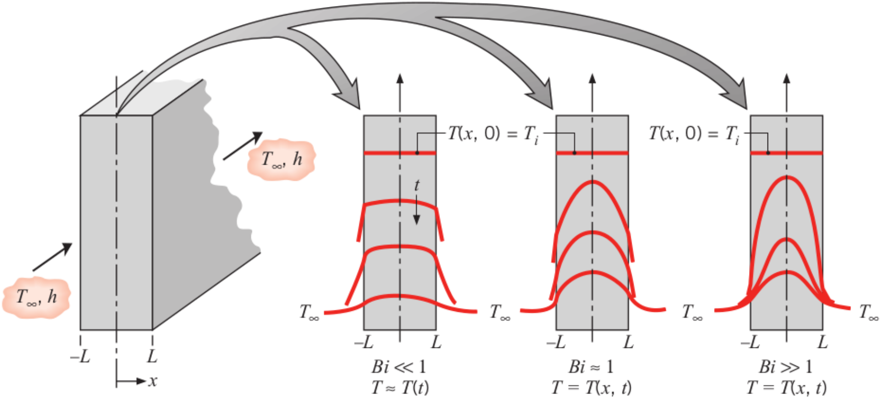
$$Bi = \frac{\Delta T_{dentro}}{\Delta T_{fora}} \tag{6}$$

Se $Bi \ll 1$, então $\Delta T_{dentro} \ll \Delta T_{fora}$.

Duas situações distintas:



A análise usando aproximação de sistema aglomerado é válida na situação da esquerda somente.



T_∞, h
T_∞, h
$-L$
L
x
$T(x, 0) = T_i$
$T(x, 0) = T_i$
t
T_∞
T_∞
T_∞
T_∞
$-L$
L
$-L$
L
$-L$
L
$Bi \ll 1$
$T \approx T(t)$
$Bi \approx 1$
$T = T(x, t)$
$Bi \gg 1$
$T = T(x, t)$

Se a temperatura dentro do corpo é (aproximadamente) uniforme, ou seja, se $Bi < 0,1$, então podemos usar a **aproximação de sistema aglomerado**.

$$T_1 \approx T_2 \approx T(t)$$

Durante um pequeno intervalo de tempo dt a temperatura aumenta uma quantidade dT.

dt é uma diferencial de tempo; dT é uma diferencial de temperatura.

Da **primeira lei da termodinâmica**, aplicada à placa, temos que a transferência de calor por convecção saindo do corpo durante dt é igual à diminuição da energia interna do corpo durante dt.

(Estamos considerando um corpo aquecido em um ambiente frio, então a temperatura vai diminuir com o tempo.)

Ou seja:

$$\dot{Q}_{conv}dt = \Delta U = m\,c\,dT \tag{7}$$

Temos

$$hA_s(T_\infty - T(t))dt = m\,c\,dT \tag{8}$$

Ou:

$$m\,c\,\frac{dT(t)}{dt} = -hA_s\Big(T(t) - T_\infty\Big) \tag{9}$$

Mudança de variável:

$$\theta(t) = T(t) - T_\infty \tag{10}$$

A derivada:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{dT(t)}{dt} + \frac{dT_\infty}{dt} = \frac{dT(t)}{dt} \tag{11}$$

Substituindo (11) e (10) de volta em (9):

$$m\,c\,\frac{d\theta(t)}{dt} = -hA\theta(t) \tag{12}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{hA_s}{mc}\theta(t) = -b\theta(t) \tag{13}$$

Onde

$$b = \frac{hA_s}{mc} \tag{14}$$

Assim,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -b\theta(t) \tag{15}$$

$$\frac{1}{\theta}\,d\theta = -b\,dt \tag{16}$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{\theta}\, d\theta = -\int b\, dt \tag{17}$$

$$\ln \theta = -b\, t + C_1 \tag{18}$$

$$\theta(t) = e^{-bt+C_1} = e^{-bt} e^{C_1} = C e^{-bt} \tag{19}$$

Solução geral do problema:

$$\theta(t) = C e^{-bt} \tag{20}$$

Voltando para a temperatura:

$$\Big(T(t) - T_\infty\Big) = Ce^{-bt} \tag{21}$$

Essa é a solução geral. Ainda precisamos determinar a constante C. Para isso precisamos de uma condição de contorno. Quando a condição de contorno é no tempo, chamamos de **condição inicial**.

Condição inicial:

$$T(t = 0) = T_i \tag{22}$$

T_i é temperatura no início do processo. É um dado do problema.

Comparando a solução geral (21) com a condição inicial (22), temos

$$T(t=0) - T_\infty = Ce^{-b\times 0} = C = T_i - T_\infty \tag{23}$$

Conclusão:

$$C = T_i - T_\infty \tag{24}$$

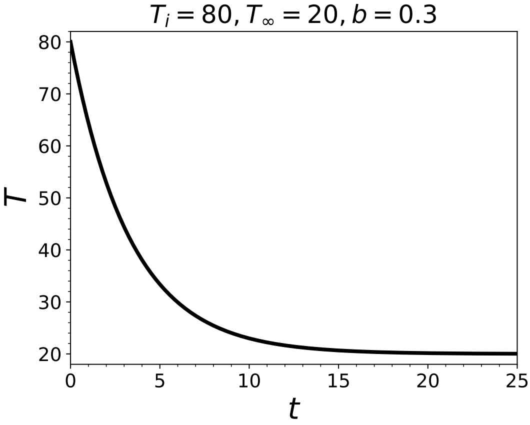
Substituindo de volta, temos a solução final para o problema.

Solução final:

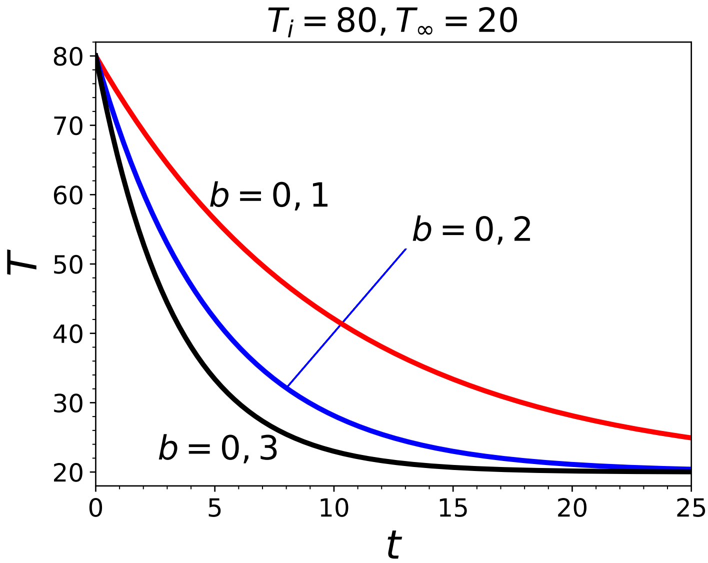
$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \tag{25}$$

De outra forma:

$$T(t) = T_\infty + (T_i - T_\infty)e^{-bt} \tag{26}$$



Efeito de b.



Nos problemas de sistemas aglomerados geralmente queremos determinar quanto tempo um dado corpo leva para atingir uma temperatura definida ou determinar propriedades do corpo a partir de medições de temperatura e tempo.

Exemplo. Em um processo de endurecimento brusco, barras de aço cilíndricas ($\rho = 7832\,kg/m^3$, $c = 434\,J/(kg.K)$ e $k = 63,9\,W/(m.K)$) são aquecidas em um forno a $850°C$ e depois resfriadas em um reservatório de água até atingirem uma temperatura de $95°C$. A água no reservatório está a uma temperatura de $40°C$ e o coeficiente de transferência de calor por convecção é $450\,W/(m^2.K)$. As barras de aço têm diâmetro de $50\,mm$ e comprimento de $2\,m$. Determine (a) o tempo necessário nesse processo de resfriamento e (b) a quantidade de calor transferida à água durante o processo.

Resposta (a): o primeiro passo é calcular o número de Biot.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{450 \times L_c}{63,9} \tag{27}$$

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{(\pi D^2/4)L}{\pi DL} = \frac{D}{4} = \frac{0,05}{4} = 0,0125\,m \tag{28}$$

$$Bi = \frac{450 \times 0,0125}{63,9} = 0,088 < 0,1 \tag{29}$$

Assim podemos usar a aproximação de sistemas aglomerados.

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \tag{30}$$

$T_i = 850\,°C$; $T_\infty = 40\,°C$; $T(t) = 95\,°C$; $t = ???$

$$b = \frac{hA_s}{mc} = \frac{hA_s}{\rho V c} = \frac{h}{\rho c}\frac{A_s}{V} = \frac{h}{\rho c L_c} = \frac{450}{7832 \times 434 \times 0,0125} \tag{31}$$

$$b = 0,01059\, s^{-1} \tag{32}$$

Substituindo os valores em (30):

$$\frac{95-40}{850-40} = e^{-0{,}01059t} \tag{33}$$

$$-0,01059t = \ln\left(\frac{95-40}{850-40}\right) \tag{34}$$

$$t = 254\,s \tag{35}$$

A temperatura das barras leva $254\,s$ para ir de $850\,°C$ a $95\,°C$, quando colocadas nesse reservatório de água.

Resposta (b): A quantidade total de calor transferida durante o processo de resfriamento é igual a

$$Q = mc(T_i - T(t)) = \rho V c(T_i - T(t)) = \rho c \frac{\pi D^2 L}{4}(T_i - T(t)) \quad (36)$$

$$Q = \frac{7832 \times 434 \times \pi \times (0,05^2) \times 2}{4}(850 - 95) = 1,01 \times 10^7 \, J \quad (37)$$

$$Q = 10,1 \, MJ \quad (38)$$

Para que a temperatura do reservatório de água não aumente, o reservatório tem que ser muito grande ou deve ser resfriado externamente.