Fluido em Movimento de Corpo Rígido

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

No movimento de corpo rígido não há movimento relativo entre as camadas de fluido. Sem movimento relativo, não há deformações nem taxas de deformações.

Assim, não há efeito viscoso pois uma camada de fluido não desliza sobre a outra.

Estamos colocando o fluido para se mover, mas em um movimento simples, por enquanto.

Segunda Lei de Newton para uma partícula de fluido: massa vezes aceleração é igual ao somatório das forças (ver slides 5 e 12 da Semana 8).

A massa é $dm = \rho d\forall$.

Temos duas forças: peso ($\vec{g}\, dm$) e a força causada pela pressão ($\vec{\nabla} p\, d\forall$).

Assim:

$$\vec{a}\,dm = \vec{g}\,dm - (\vec{\nabla}p)\,d\forall \tag{1}$$

Mas $dm = \rho d\forall$. Então:

$$\rho\vec{a}d\forall = \rho\vec{g}\,d\forall - (\vec{\nabla}p)\,d\forall \tag{2}$$

Resulta:

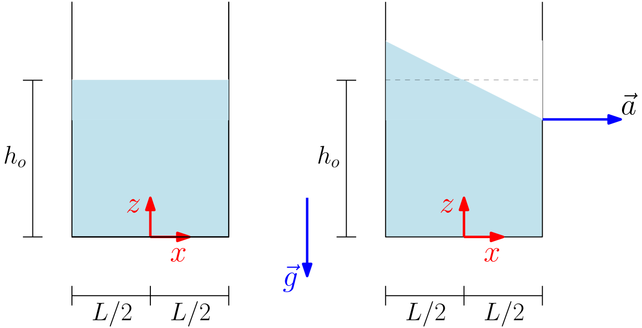
$$\vec{\nabla}p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \tag{3}$$

Essa é a **equação para a pressão** quando temos uma aceleração de corpo rígido atuando no fluido. Agora a pressão equilibra a gravidade e a aceleração imposta.

Veremos dois casos: **aceleração em uma trajetória reta** e **rotação de corpo rígido**.

Sumário

Considere um contêiner parcialmente preenchido com um líquido. O contêiner começa a se mover em uma trajetória horizontal reta com uma aceleração $\vec{a}$ constante.



Temos:

$$\vec{a} = a\,\hat{\imath} \tag{4}$$

e

$$\vec{g} = -g\,\hat{k} \tag{5}$$

Perguntas: qual é a distribuição de pressão no fluido acelerado? Como fica a superfície livre?

Vamos usar a equação (3):

$$\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\,\hat{k} = \rho(-g\,\hat{k} - a\,\hat{\imath}) \tag{7}$$

Temos então 3 equações, uma para cada direção:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \\ \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \tag{8}$$

Da segunda equação temos que

$$p = p(x, z) \ ,$$

ou seja, p não depende de y.

Integrando a primeira equação temos:

$$p(x, z) = -\rho a x + f_1(z) + cte \tag{9}$$

Integrando a terceira equação temos:

$$p(x, z) = -\rho g z + f_2(x) + cte \tag{10}$$

Comparando as equações (9) e (10) resulta:

$$p(x,z) = -\rho a x - \rho g z + cte \tag{11}$$

Vamos assumir (arbitrariamente) que $p(0,0) = p_o$.

Assim:

$$p(x,z) = p_o - \rho a x - \rho g z \tag{12}$$

Essa é a **equação da pressão em um fluido com aceleração de corpo rígido em uma trajetória reta.**

Note que a pressão muda na vertical e na horizontal. Em uma mesma profundidade, a pressão aumenta para a esquerda (no caso de uma aceleração para a direita). Para um x fixo, a pressão varia na direção z da mesma forma que para um fluido em repouso.

E como fica a superfície livre?

Na superfície livre a pressão é a pressão atmosférica, ou seja, $p = 0$ (p é a pressão manométrica).

Assim, na superfície livre temos:

$$0 = p_o - \rho a x - \rho g z_s \tag{13}$$

$$\rho g z_s = p_o - \rho a x \tag{14}$$

$$z_s = \frac{p_o}{\rho g} - \frac{a}{g} x \tag{15}$$

(z_s é a distância no eixo z entre o fundo do tanque e a superfície livre, para um dado x, ou seja, z_s é a coordenada z da superfície livre do líquido.)

Conclusão: a superfície livre é uma reta com inclinação $-a/g$. Vamos definir $h_o = p_o/(\rho g)$.

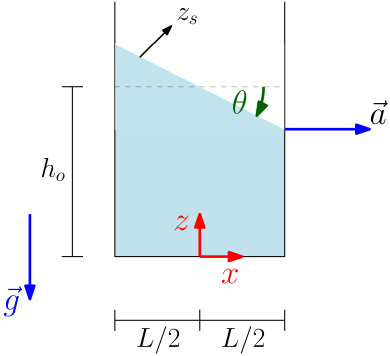
Resulta:

$$z_s = h_o - \frac{a}{g}x \tag{16}$$

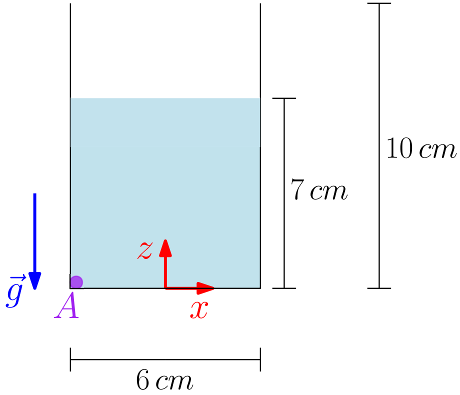
Essa é a equação da superfície livre.

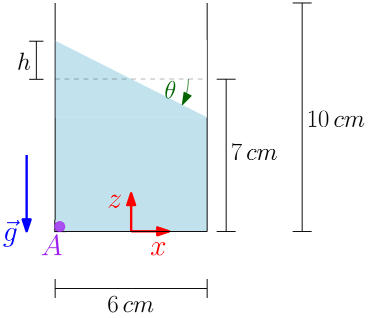
O ângulo de inclinação da superfície livre com relação à horizontal é

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) \ .$$



Exemplo. Uma caneca cilíndrica com $10\,cm$ de altura e $6\,cm$ de diâmetro contém água até a altura de $7\,cm$. Se essa caneca for submetida a uma aceleração na horizontal de intensidade $7\,m/s^2$, a água em seu interior irá derramar? Determine a pressão no ponto A com aceleração.





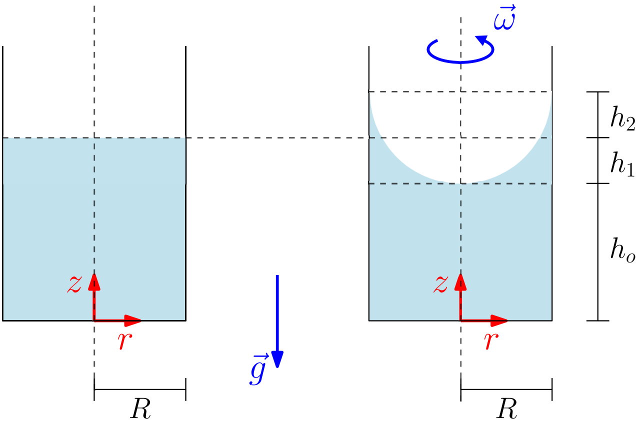
$$\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{7}{9,81} \qquad \theta = 35,5 \tag{17}$$

$$h = 3\,cm \times \frac{7}{9,81} = 2,14\,cm \qquad \text{Não derrama} \tag{18}$$

$$p_A = \rho g(h + 0,07) = 998 \times 9,81 \times (0,0214 + 0,07) = 895\,Pa \tag{19}$$

Sumário

Considere um contêiner cilíndrico vertical parcialmente preenchido com um líquido. Esse contêiner começa a girar cem torno do seu eixo central com uma velocidade angular constante ω.



Queremos determinar a nova **distribuição de pressão** no líquido e queremos também saber como é a **superfície livre**.

A equação para a pressão continua sendo a equação (3):

$$\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \tag{20}$$

Vamos usar agora coordenadas cilíndricas, para facilitar a resolução do problema. Em vez de (x, y, z) temos agora (r, θ, z).

Em coordenadas cilíndricas o gradiente da pressão é dado por:

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\,\hat{e}_z \tag{21}$$

A gravidade é $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ e a partícula de fluido está sujeita a uma aceleração centrípeta

$$\vec{a} = -\omega^2 r\hat{e}_r \tag{22}$$

Assim, a equação para a pressão se torna:

$$\frac{\partial p}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\,\hat{e}_z = \rho\left(-g\hat{e}_z + \omega^2 r\hat{e}_r\right) \tag{23}$$

Temos 3 equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \\ \\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \tag{24}$$

Vamos integrar essas 3 equações.

Da segunda equação temos que $p = p(r, z)$, ou seja, p não é função de θ. Isso já era esperado, pois o problema é simétrico com relação ao eixo central.

Da primeira equação resulta:

$$p(r, z) = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + f_1(z) + cte \tag{25}$$

Por fim, da terceira equação temos:

$$p(r, z) = -\rho g z + f_2(r) + cte \tag{26}$$

A partir dos 3 resultados acima concluímos que

$$p(r, z) = cte + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z \tag{27}$$

Assumindo que $p(0,0) = p_o$, temos:

$$p(r,z) = p_o + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z \tag{28}$$

Essa equação nos dá a variação da pressão em um líquido em rotação de corpo rígido.

Note que a pressão continua variando linearmente com a profundidade, para um dado r fixo. Para um dado z fixo, a pressão aumenta com o quadrado de r, que é a distância com relação ao centro do reservatório.

E como fica a superfície livre?

Na superfície livre temos $p = 0$ (essa pressão é a manométrica).

Fazendo $p = 0$ na equação (28) e sabendo que z_s representa a altura da superfície livre para um dado r, temos:

$$0 = p_o + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z_s \tag{29}$$

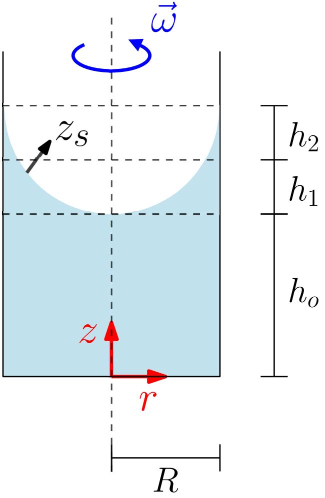
$$\rho g z_s = p_o + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} \tag{30}$$

$$z_s = \frac{p_o}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{31}$$

Vamos definir $h_o = p_o/(\rho g)$.

Resulta:

$$z_s = h_o + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{32}$$



Essa é a equação da superfície livre para um líquido em rotação de corpo rígido.

Trata-se de um **paraboloide de revolução.**

Note na figura no slide anterior que h_1 é o tanto que o líquido desce no centro e h_2 é o tanto que o líquido sobe nas bordas. Para determinar esses valores vamos utilizar a **conservação de massa**.

Como o líquido é incompressível e não houve vazamento, o volume de líquido antes (sem rotação) e depois (com rotação) é o mesmo.

Atenção: a lei nos diz que a massa se conserva, e não o volume. Mas $\rho = m/\forall$ e o fluido é incompressível (ρ constante). Então o volume também vai se conservar.

Volume de líquido antes da rotação:

$$\forall_i = \pi R^2 (h_0 + h_1) \tag{33}$$

Volume de líquido em rotação de corpo rígido:

$$\forall_f = \int_0^R 2\pi r z_s dr = \int_0^R 2\pi r \left(h_0 + \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right) dr \tag{34}$$

Assim:

$$\forall_f = \pi R^2 h_0 + \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g} \tag{35}$$

O volume se conserva:

$$\forall_i = \forall_f \tag{36}$$

$$\pi R^2 h_0 + \pi R^2 h_1 = \pi R^2 h_o + \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g} \tag{37}$$

$$h_1 = \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{38}$$

Para achar h_2, vamos usar a equação para z_s em $r = R$

$$z_s(r = R) = h_o + \frac{R^2\omega^2}{2g} \tag{39}$$

e a geometria do problema, na figura,

$$z_s(r = R) = h_o + h_1 + h_2 \ . \tag{40}$$

Comparando temos

$$h_o + h_1 + h_2 = h_o + \frac{R^2\omega^2}{2g} \tag{41}$$

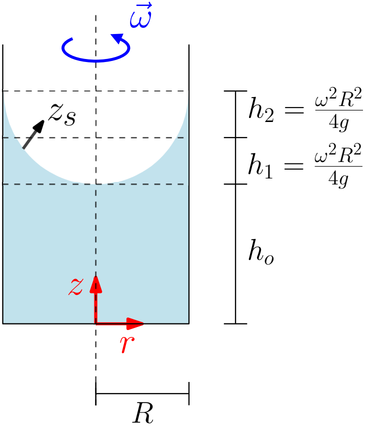
$$h_2 = \frac{R^2\omega^2}{2g} - h_1 = \frac{R^2\omega^2}{2g} - \frac{R^2\omega^2}{4g} = \frac{R^2\omega^2}{4g} \tag{42}$$

Conclusão:

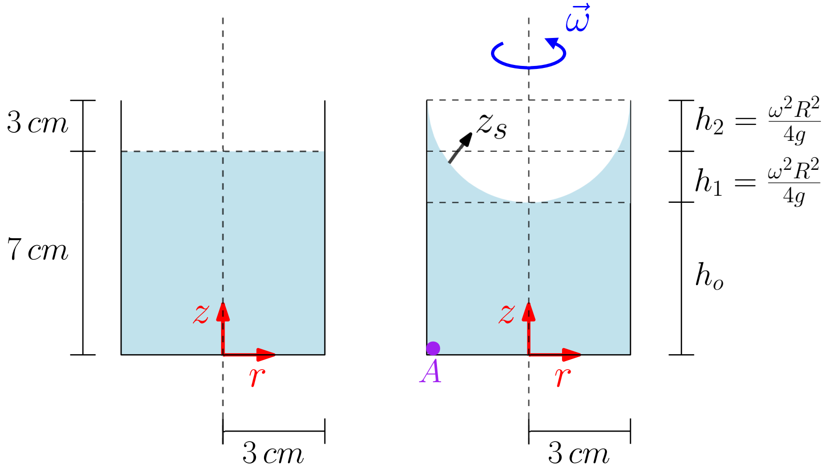
$$h_1 = h_2 = \frac{R^2\omega^2}{4g} \quad (43)$$

O centro do fluido cai $\omega^2 R^2/(4g)$ e as bordas do fluido sobem também $\omega^2 R^2/(4g)$.

Mas atenção: a profundidade do líquido em repouso é $h_o + h_1$.



Exemplo. Uma caneca cilíndrica com $10\,cm$ de altura e $6\,cm$ de diâmetro contém água até a altura de $7\,cm$. Determine a velocidade angular ω para que o líquido comece a derramar. Determine a pressão no ponto A para o líquido em rotação.



Para começar a derramar devemos ter $h_2 = 0,03\,m$. Mas, da equação:

$$h_2 = 0,03 = \frac{\omega^2 R^2}{4g} = \frac{\omega^2 \times 0,03^2}{4 \times 9,81} \tag{44}$$

$$\omega = 36,2\,rad/s = 345\,rpm \tag{45}$$

A pressão no ponto A é dada por:

$$p_A = p_o - \rho g z + \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} = \rho g h_o + \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} \tag{46}$$

$$p_A = 998 \times 9,81 \times 0,04 + \frac{998 \times 36,2^2 \times 0,03^2}{2} = 980\,Pa \tag{47}$$

$$p_A = 980\,Pa \tag{48}$$