Pressão e Estática dos Fluidos

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

Pressão: força normal exercida por um fluido por unidade de área.

Estática dos Fluidos: estuda fluidos em repouso e em movimento de corpo rígido. Não há movimento relativo (ou deformação angular), o que implica na ausência de tensões tangenciais. Fluidos nessa condição suportam apenas tensões normais.

Fluidos em repouso:

$$\vec{V} = \vec{0}; \qquad p = ???$$

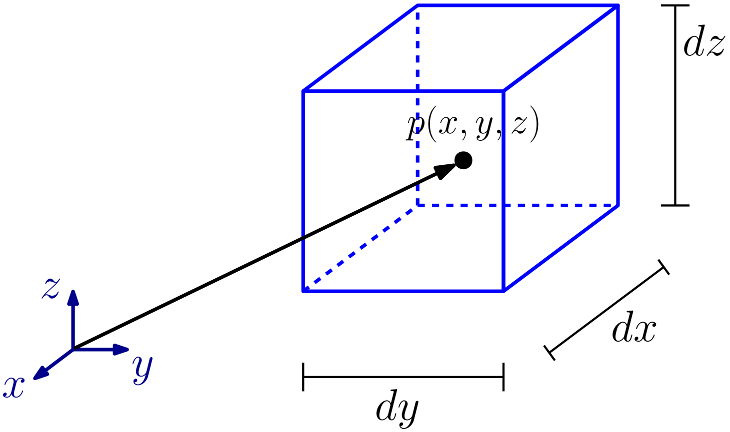
A pressão é um escalar:

$$p = p(x, y, z, t)$$

A pressão atua contra a superfície. Pressão positiva corresponde a um esforço de compressão.

Sumário

Considere um elemento de fluido em torno de um ponto (x, y, z).



Massa do elemento: dm.

Volume do elemento: $d\forall = dxdydz$.

Densidade:

$$\rho = \frac{dm}{d\forall}$$

Assim:

$$dm = \rho d\forall = \rho\, dxdydz$$

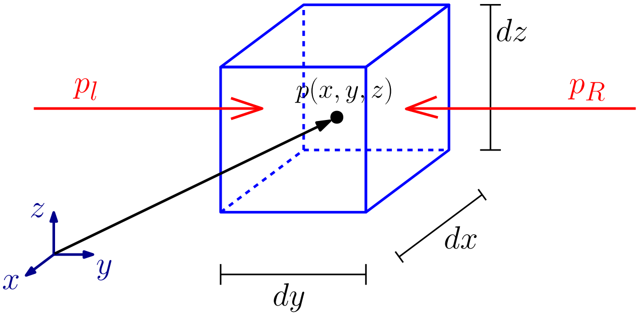
Pressão no centro do elemento: $p(x, y, z)$

A força total de superfície agindo no elemento é $d\vec{F}_s$.

$$d\vec{F}_s = dF_{s,x}\hat{\imath} + dF_{s,y}\hat{\jmath} + dF_{s,z}\hat{k} \tag{1}$$

Vamos olhar primeiro na direção y:

$$dF_{s,y} = p_L\,dxdz - p_R\,dxdz \tag{2}$$



Fazendo uma expansão em série de Taylor das pressões nas paredes (desprezando termos de ordem maior ou igual a dois):

$$p_R = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} \tag{3}$$

$$p_L = p + \frac{\partial p}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right) \tag{4}$$

Só pra lembrar...

$$f(x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(\Delta x)^3 + \cdots$$

Substituindo (3) e (4) em (2):

$$dF_{s,y} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dxdz \tag{5}$$

$$dF_{s,y} = \left(-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} + p - p\right) dxdz \tag{6}$$

Temos então:

$$dF_{s,y} = -\frac{\partial p}{\partial y}(dxdydz) \tag{7}$$

De maneira análoga, para as outras direções:

$$dF_{s,x} = -\frac{\partial p}{\partial x}(dxdydz) \tag{8}$$

e

$$dF_{s,z} = -\frac{\partial p}{\partial z}(dxdydz) \tag{9}$$

Juntando tudo:

$$d\vec{F}_s = dF_{s,x}\hat{\imath} + dF_{s,y}\hat{\jmath} + dF_{s,z}\hat{k} \tag{10}$$

$$d\vec{F}_s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)(dxdydz) \tag{11}$$

Mas esse vetor $(-\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k})$ é o gradiente de p, $\vec{\nabla}p$.

Conclusão:

$$d\vec{F}_s = -\vec{\nabla}p(dxdydz) \tag{12}$$

Essa é a força de superfície agindo em um elemento de fluido. Ela é causada pelos elementos vizinhos.

Note que o valor da pressão não importa. **O que importa é a sua variação no espaço: o gradiente de p.**

Segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Para o elemento de fluido que estamos estudando:

$$d\vec{F}_v + d\vec{F}_s = (dm)\vec{a} \tag{13}$$

dm é a massa do elemento.

$\vec{a}$ é a sua aceleração.

$d\vec{F}_v$ são as forças de volume agindo nesse elemento (são forças que agem à distância, como a gravitacional).

$d\vec{F}_s$ são as forças de superfície agindo nesse elemento (são forças de curto alcance, são causadas pelos elementos de fluido vizinhos).

Temos $\vec{a} = \vec{0}$, pois o fluido está em repouso.

Além disso,

$$d\vec{F}_v = (dm)\vec{g} = \rho(dxdydz)\vec{g} \tag{14}$$

De maneira geral, a aceleração gravitacional é dada por

$$\vec{g} = g_x\hat{\imath} + g_y\hat{\jmath} + g_z\hat{k} \tag{15}$$

Substituindo (12) e (14) em (13):

$$d\vec{F}_v + d\vec{F}_s = \vec{0} = \rho\vec{g}(dxdydz) - (\vec{\nabla}p)(dxdydz) \tag{16}$$

Assim:

$$-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = \vec{0} \tag{17}$$

Essa é a **equação governante de um fluido em repouso.**

Trata-se de uma equação vetorial, com 3 equações (ou componentes):

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 \tag{18}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \tag{19}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0 \tag{20}$$

Por conveniência, vamos definir o eixo z como sendo paralelo ao vetor $\vec{g}$ (o eixo z vai apontar para cima). Portanto:

$$g_x = g_y = 0 \qquad\qquad g_z = -g \tag{21}$$

Resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{24}$$

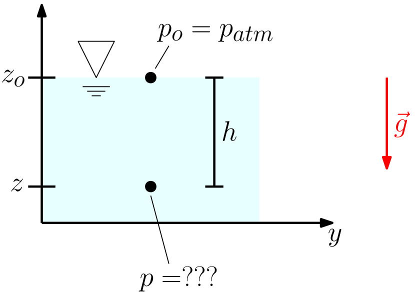
A pressão depende apenas de z.

Resulta:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{25}$$

Essa é a **equação fundamental para um fluido em repouso.**

Queremos agora calcular a pressão em um ponto em um reservatório com fluido em repouso.



Reescrevendo na forma diferencial:

$$dp = -\rho g dz \tag{26}$$

Integrando os dois lados, temos:

$$\int_{p_o}^{p} dp = -\int_{z_o}^{z} \rho g dz \tag{27}$$

Assumindo que a densidade ρ e a aceleração gravitacional são constantes:

$$p - p_o = -\rho g(z - z_o) \tag{28}$$

Mas $z_o - z = h$. Então:

$$p = p_o + \rho g(z_o - z) = p_o + \rho g h \tag{29}$$

A equação para a pressão nessas condições se torna:

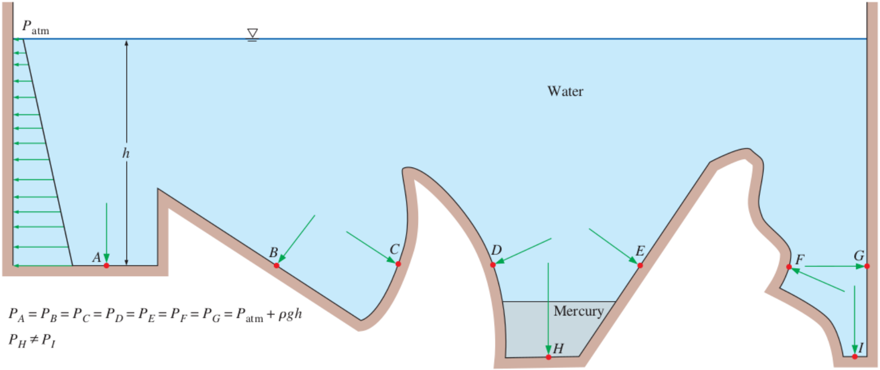
$$p = p_o + \rho g h \tag{30}$$

A pressão em um fluido aumenta com a profundidade porque mais fluido se apoia nas camadas inferiores, e o efeito desse peso extra em uma camada mais profunda é equilibrado por um aumento na pressão.

Em uma mesma profundidade, a pressão não muda nas direções x e y.

A pressão é igual em todos os pontos de um plano horizontal para um determinado fluido.

A pressão em um fluido em repouso não depende da forma ou da seção transversal do contêiner.



Sumário

Pressão é força por área. No Sistema Internacional:

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa \tag{31}$$

Outras unidades:

$$\begin{aligned} 1\,atm &= 101325\,Pa = 760\,mmHg = 10,34\,mca = \\ &= 14,7\,psi = 1,0332\,\frac{kgf}{cm^2} = 0,987\,bar \end{aligned} \tag{32}$$

$psi = lbf/in^2$ é *pound-force per square inch*, ou libra-força por polegada quadrada. Sistema Inglês. No Brasil é usado na indústria automotiva.

$1\,atm$ é a pressão atmosférica ao nível do mar.

$1\,bar = 100000\,Pa = 100\,kPa$

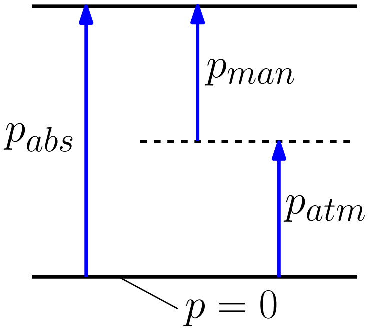
Sumário

A pressão deve ser dada em relação a um nível de referência.

Pressão absoluta: o nível de referência é o vácuo absoluto (pressão absoluta zero).

Pressão manométrica: o nível de referência é a pressão atmosférica.

$$p_{man} = p_{abs} - p_{atm} \tag{33}$$

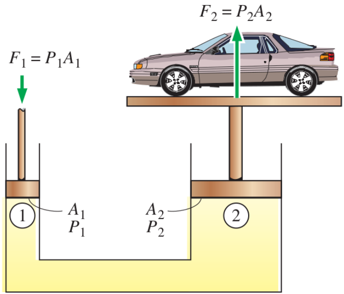


Sumário

Lei de Pascal: a pressão aplicada a um fluido confinado aumenta a pressão em todo o fluido na mesma medida.

Exemplos: freios e elevadores hidráulicos.

$$p_1 = p_2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \rightarrow \qquad F_2 = F_1 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)$$

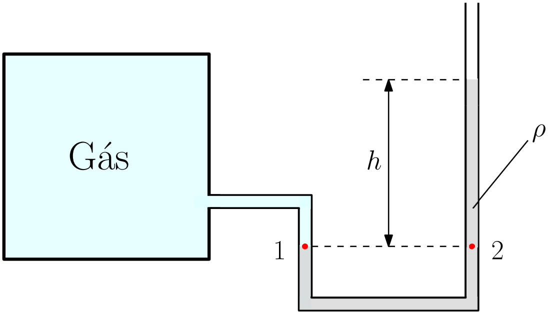


Sumário

Manômetro é um dispositivo que usa colunas estáticas de um ou mais fluidos para determinar a **diferença de pressão** entre dois pontos.

Vamos ver alguns exemplos nos próximos slides.

Exemplo 1. Medindo a pressão de um gás.

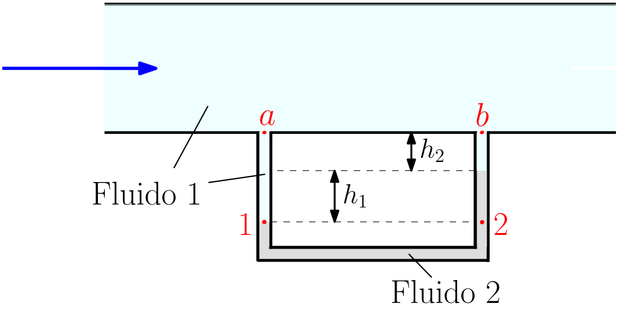


$$p_1 = p_2 = p_{atm} + \rho g h \tag{34}$$

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h \tag{35}$$

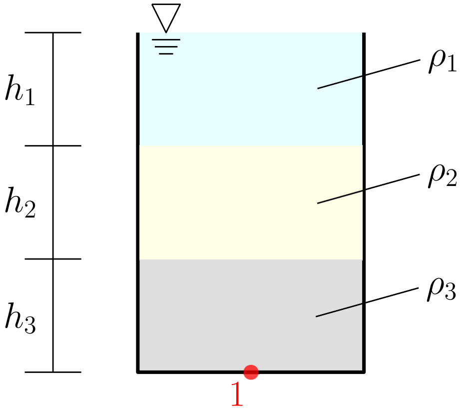
$$p_{1,man} = \rho g h \tag{36}$$

Exemplo 2. Medindo a queda de pressão entre dois pontos em um escoamento horizontal.



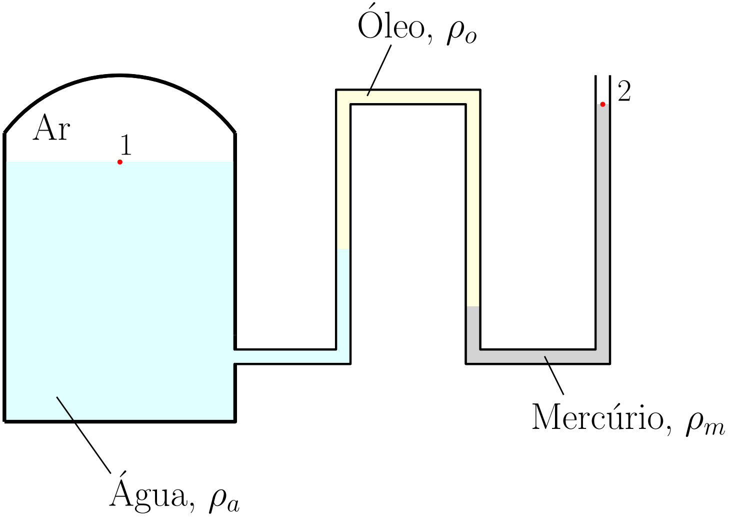
$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_2 \\
p_1 &= p_a + \rho_1 g (h_1 + h_2) \\
p_2 &= p_b + \rho_2 g h_1 + \rho_1 g h_2 \\
p_a + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g h_2 &= p_b + \rho_2 g h_1 + \rho_1 g h_2 \\
p_a - p_b &= (\rho_2 - \rho_1) g h_1 \qquad (37)
\end{aligned}
$$

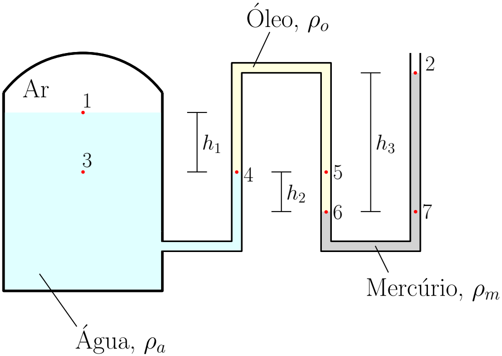
Exemplo 3. Camadas de fluidos.



$$p_1 = p_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 \tag{38}$$

Exemplo 4. Manômetro de vários fluidos. Determinar $p_1 - p_2$.





Método 1: igualando as pressões que estão na mesma altura e no mesmo fluido.

$$p_3 = p_1 + \rho_a g h_1 = p_4$$

$$p_4 = p_5$$

$$p_6 = p_5 + \rho_o g h_2$$

$$p_6 = p_7 = p_2 + \rho_m g h_3$$

Desse sistema de equações temos:

$$p_1 + \rho_a g h_1 = p_6 - \rho_o g h_2 = p_2 + \rho_m g h_3 - \rho_o g h_2 \tag{39}$$

Resulta:

$$p_1 - p_2 = \rho_m g h_3 - \rho_o g h_2 - \rho_a g h_1 \tag{40}$$

Essa é a diferença entre a pressão do ar no tanque, p_1, e a pressão p_2. Se o manômetro está aberto para a atmosfera, então $p_2 = p_{atm}$ e

$$p_{1,man} = \rho_m g h_3 - \rho_o g h_2 - \rho_a g h_1 \tag{41}$$

Método 2: partindo do ponto inicial (1), vai somando (quando desce) ou subtraindo (quando sobe) as pressões até chegar no ponto final (2).

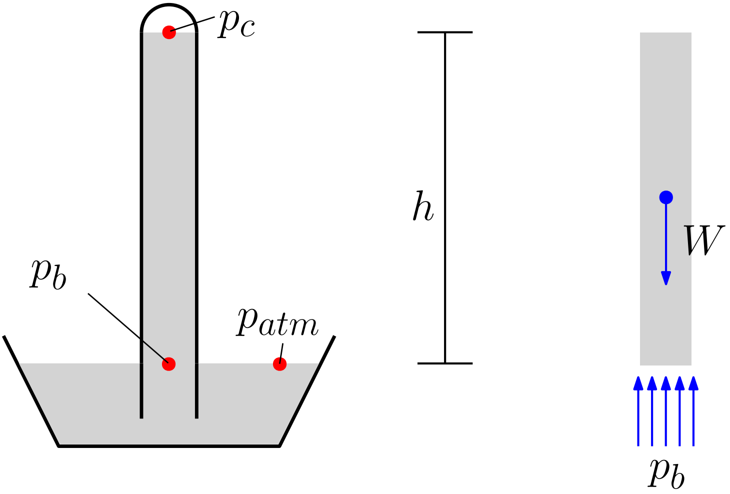
$$p_1 + \rho_a g h_1 + \rho_a g h_2 - \rho_a g h_2 - \rho_o g h_1 + \rho_o g h_1 + \rho_o g h_2 - \rho_m g h_3 = p_2$$

Resulta:

$$p_1 - p_2 = \rho_m g h_3 - \rho_o g h_2 - \rho_a g h_1 \tag{42}$$

Sumário

Dispositivo usado para medir a pressão atmosférica.



Temos $p_b = p_{atm}$, pois os pontos estão na mesma altura e no mesmo fluido (em repouso).

p_c é a pressão de vapor. $p_c \approx 0$ no caso do mercúrio.

Do equilíbrio de forças para o volume de fluido temos (A é a área transversal do cilindro):

$$W = p_{atm} A \tag{43}$$

Mas

$$W = \rho g \forall = \rho g A h \tag{44}$$

Resulta

$$p_{atm} A = \rho g A h \qquad \rightarrow \qquad p_{atm} = \rho g h \tag{45}$$

A pressão atmosférica pode ser medida por meio da altura de coluna de um fluido.

Para o **mercúrio**: $\rho = 13595\, kg/m^3$. Resulta: $h = 760\, mm$.

$1\, atm = 760\, mmHg \quad \rightarrow \quad mmHg$ pode ser usado como unidade de pressão.

Para a **água**: $\rho = 998\, kg/m^3$. Resulta: $h = 10,3\, m$.