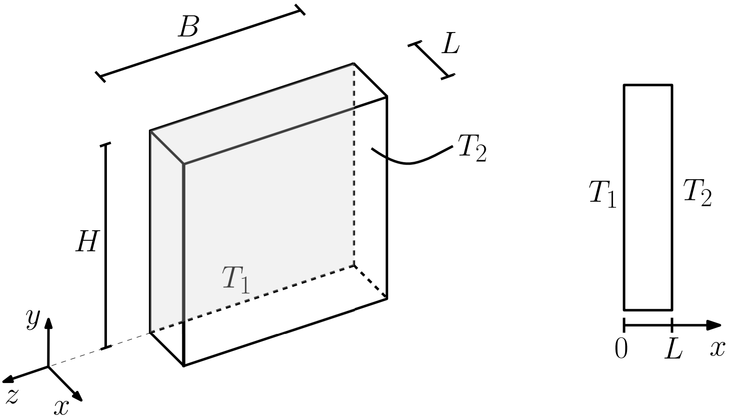
Resistência Térmica

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário



$$E_{entra} - E_{sai} = \Delta E \quad (1)$$

E é a energia (interna) da parede (ou placa, ou janela). Em termos de taxas:

$$\dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} = \frac{dE}{dt} \tag{2}$$

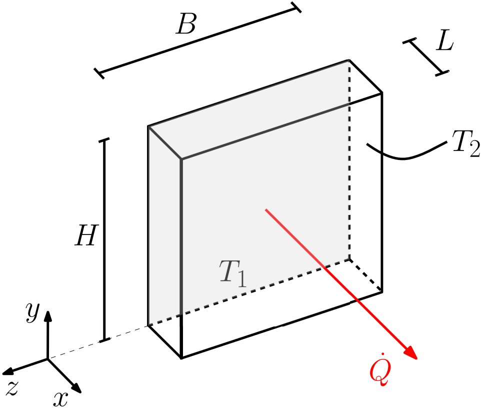
Não há trabalho:

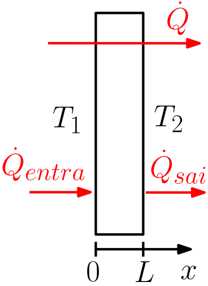
$$\dot{Q}_{entra} - \dot{Q}_{sai} = \frac{dE}{dt} \tag{3}$$

Em regime permanente:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{4}$$

$$\dot{Q}_{entra} = \dot{Q}_{sai} = \dot{Q} = \text{constante} \tag{5}$$





Lei de Fourier:

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx} = \text{constante (nesse problema)} \tag{6}$$

Integrando:

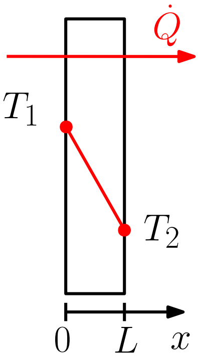
$$\dot{Q}dx = -kAdT \tag{7}$$

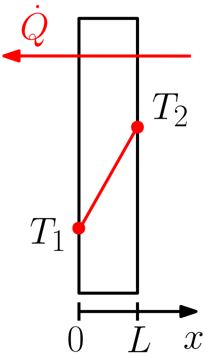
$$\int_0^L \dot{Q}dx = -\int_{T_1}^{T_2} kAdT \tag{8}$$

$$\dot{Q} = -kA\left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) \tag{9}$$

Ou

$$\dot{Q} = kA\left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right) \tag{10}$$





Atenção para o sinal. Estamos assumindo que $\dot{Q}$ é positivo quando vai para a direita, no sentido positivo do eixo x. Se $T_1 > T_2$ então $\dot{Q}$ é positivo. Se $T_1 < T_2$, então $\dot{Q}$ é negativo. Isso está de acordo com as equações acima. Lembre-se de que $k > 0$, $A > 0$ e $L > 0$.

Note que estamos usando T_1 e T_2, no lugar de T_0 e T_L, como na semana passada. Isso vai facilitar mais pra frente pois vão aparecer mais temperaturas.

Sumário

Temos:

$$\dot{Q} = kA\left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right) \tag{11}$$

Podemos reescrever como

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond}} \tag{12}$$

ou ainda

$$T_1 - T_2 = R_{cond}\dot{Q} \tag{13}$$

R_{cond} é a Resistência Térmica da Parede ou Resistência de Condução da Parede, e é definida como

$$R_{cond} = \frac{L}{kA} \tag{14}$$

A unidade de resistência térmica é $°C/W$.

Note que a resistência térmica depende da **geometria** e do **material**.

Quanto **maior** a resistência, mais **difícil** é a transferência de calor.

Esse conceito de Resistência Térmica vai nos ajudar a resolver problemas com **várias paredes** e **diferentes mecanismos** de troca de calor.

Temos uma analogia com corrente elétrica:

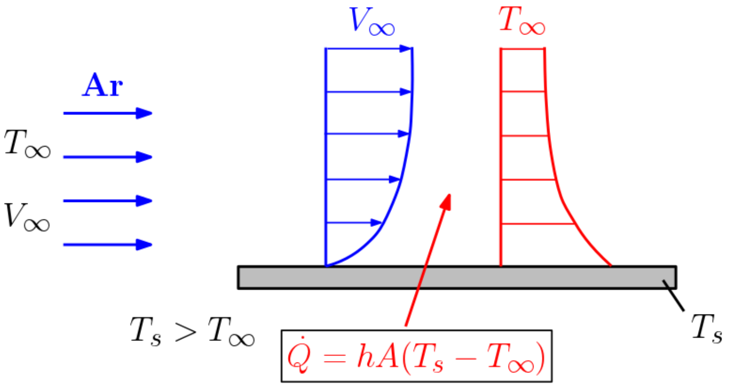
$$i = \frac{V_1 - V_2}{R_e} \tag{15}$$

i é a corrente ($\dot{Q}$ no nosso caso), $V_1 - V_2$ é a diferença de potencial ($T_1 - T_2$ no nosso problema) e R_e é a resistência elétrica (R_{cond} no nosso problema).

No caso da corrente elétrica, quando há uma diferença de potencial temos corrente elétrica (cargas em movimento).

No caso de condução, quando há uma diferença de temperatura temos transferência de calor (energia em movimento).

Sumário



V_∞
T_∞
Ar
T_∞
V_∞
$T_s > T_\infty$
$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty)$
T_s

Para a **convecção**, temos a Lei de **Resfriamento de Newton**:

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty) \tag{16}$$

Podemos reescrever essa equação como:

$$\dot{Q}_{conv} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{conv}} \tag{17}$$

Em que

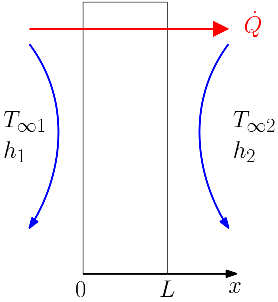
$$R_{conv} = \frac{1}{hA} \tag{18}$$

é a **Resistência Térmica de Convecção.**

Sumário

Aplicação 1

Considere o problema de transferência de calor através de uma parede, em regime permanente. A parede está separando dois ambientes.



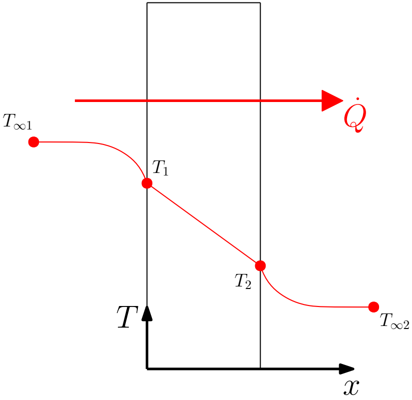
Problema de convecção + condução + convecção.

Em regime permanente:

Taxa de Convecção para a Parede = Taxa de Condução Através da Parede = Taxa de Convecção a partir Parede = Taxa Constante $\dot{Q}$.

Traduzindo:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{conv1} = \dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{conv2} \tag{19}$$


$\dot{Q}$
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
$T_{\infty 2}$
T
x

Usando as Leis que conhecemos:

$$\dot{Q} = \underbrace{h_1 A(T_{\infty 1} - T_1)}_{\dot{Q}_{conv1}} = \underbrace{kA\frac{(T_1 - T_2)}{L}}_{\dot{Q}_{cond}} = \underbrace{h_2 A(T_2 - T_{\infty 2})}_{\dot{Q}_{conv2}} \tag{20}$$

Ou, utilizando o conceito de resistência térmica:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_{conv2}} \tag{21}$$

Com

$$R_{conv1} = \frac{1}{h_1 A} \qquad R_{cond} = \frac{L}{kA} \qquad R_{conv2} = \frac{1}{h_2 A} \tag{22}$$

Início do Comentário.

Identidade Matemática: se

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = c \tag{23}$$

então

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = c \tag{24}$$

Fim do Comentário.

Voltando na equação (21), temos então

$$\dot{Q} = \frac{(T_{\infty 1} - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_{\infty 2})}{R_{conv1} + R_{cond} + R_{conv2}} \tag{25}$$

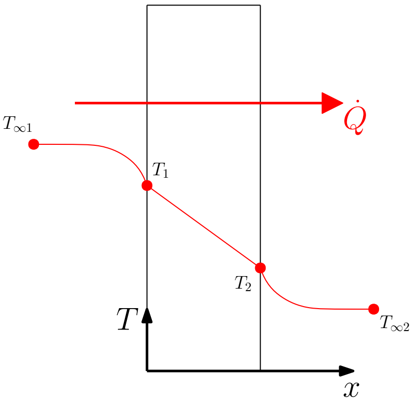
Resulta:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \tag{26}$$

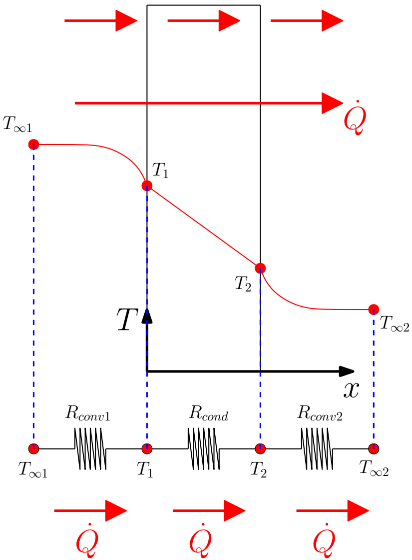
Em que

$$R_{total} = R_{conv1} + R_{cond} + R_{conv2} \tag{27}$$

é a **Resistência Total** nesse problema.



$\dot{Q}$
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
$T_{\infty 2}$
T
x



$\dot{Q}$
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
$T_{\infty 2}$
T
x
R_{conv1}
R_{cond}
R_{conv2}
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
$T_{\infty 2}$
$\dot{Q}$
$\dot{Q}$
$\dot{Q}$

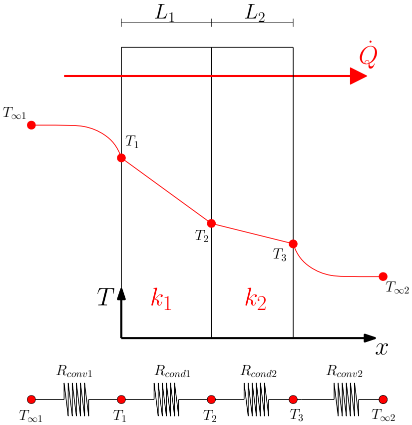
Observação 1: nesta aplicação as resistências estão arranjadas em série.

Observação 2: quanto maior a resistência térmica, menor é a transferência de calor, para uma mesma diferença de temperatura.

Observação 3: uma vantagem no uso de Resistências Térmicas é que não precisamos calcular as temperaturas da superfície das paredes (temperaturas intermediárias).

Aplicação 2

Considere o problema de transferência de calor através de uma parede, em regime permanente. A parede está separando dois ambientes. A parece é feita de duas camadas de materiais diferentes.



Problema de convecção + condução + condução + convecção.

Em regime permanente: Taxa de Convecção para a Parede = Taxa de Condução Através da Primeira Camada da Parede = Taxa de Condução Através da Segunda Camada da Parede = Taxa de Convecção a partir Parede = Taxa Constante $\dot{Q}$.

Traduzindo:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{conv1} = \dot{Q}_{cond1} = \dot{Q}_{cond2} = \dot{Q}_{conv2} \tag{28}$$

Usando as Leis que conhecemos:

$$\dot{Q} = \underbrace{h_1 A(T_{\infty 1} - T_1)}_{\dot{Q}_{conv1}} = \underbrace{kA\frac{(T_1 - T_2)}{L}}_{\dot{Q}_{cond1}} = \underbrace{kA\frac{(T_2 - T_3)}{L}}_{\dot{Q}_{cond2}} = \underbrace{h_2 A(T_3 - T_{\infty 2})}_{\dot{Q}_{conv2}} \quad (29)$$

Ou, utilizando o conceito de resistência térmica:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond1}} = \frac{T_2 - T_3}{R_{cond2}} = \frac{T_3 - T_{\infty 2}}{R_{conv2}} \quad (30)$$

Com

$$R_{conv1} = \frac{1}{h_1 A} \quad R_{cond1} = \frac{L_1}{k_1 A} \quad R_{cond2} = \frac{L_2}{k_2 A} \quad R_{conv2} = \frac{1}{h_2 A}$$

Temos então (da identidade matemática):

$$\dot{Q} = \frac{(T_{\infty 1} - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_{\infty 2})}{R_{conv1} + R_{cond1} + R_{cond2} + R_{conv2}} \qquad (31)$$

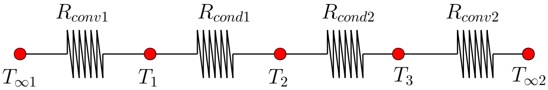
Resulta:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \qquad (32)$$

Em que

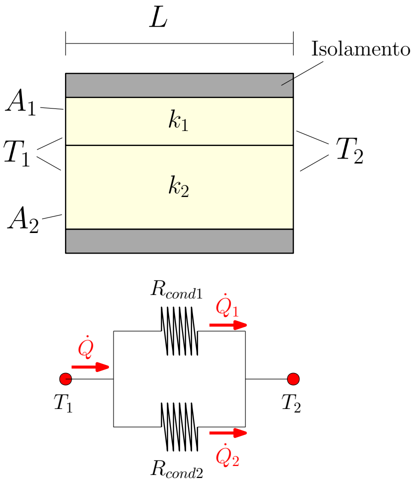
$$R_{total} = R_{conv1} + R_{cond1} + R_{cond2} + R_{conv2} \qquad (33)$$

é a **Resistência Total** nesse problema.



Aplicação 3

Paredes em paralelo.



$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{cond2}} \tag{34}$$

$$R_{cond1} = \frac{L}{k_1 A_1} \qquad\qquad R_{cond2} = \frac{L}{k_2 A_2} \tag{35}$$

Reescrevendo:

$$\dot{Q} = (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_{cond1}} + \frac{1}{R_{cond2}}\right) = \frac{T_1 - T_2}{R_{total}} \tag{36}$$

Comparando, temos:

$$\frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{R_{cond1}} + \frac{1}{R_{cond2}} \tag{37}$$

Ou

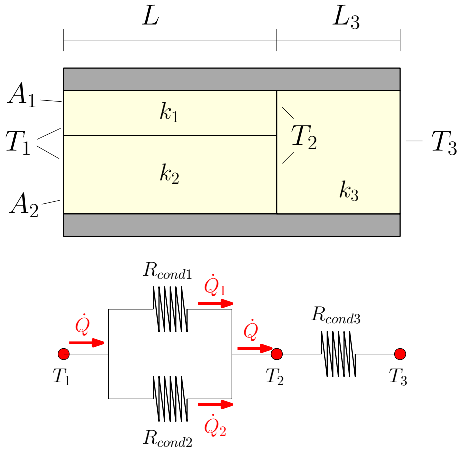
$$R_{total} = \frac{R_{cond1} R_{cond2}}{R_{cond1} + R_{cond2}} \tag{38}$$

Essa é a Resistência Total, ou Equivalente, para duas paredes em paralelo.

Aqui estamos assumindo a hipótese de que os pontos em qualquer linha perpendicular à direção x estão a uma mesma temperatura. A temperatura só varia na direção x (unidimensional).

Aplicação 4

Duas paredes em série e uma em paralelo.

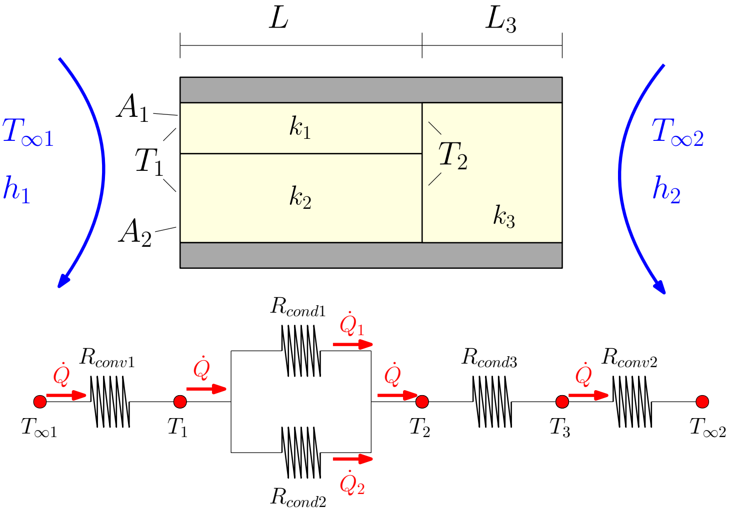


$$R_{Total} = R_{eq12} + R_{cond3} \tag{39}$$

$$\frac{1}{R_{eq12}} = \frac{1}{R_{cond1}} + \frac{1}{R_{cond2}} \tag{40}$$

Aplicação 5

Caso geral.



$$R_{total} = R_{conv1} + R_{eq12} + R_{cond3} + R_{conv2} \tag{41}$$

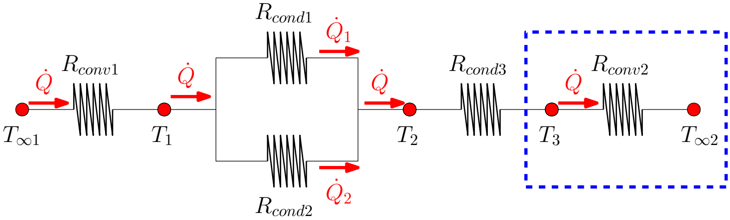
$$\frac{1}{R_{eq12}} = \frac{1}{R_{cond1}} + \frac{1}{R_{cond2}} \tag{42}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \tag{43}$$

Como calcular T_3?

Já conhecemos $\dot{Q}$. O mesmo $\dot{Q}$ passa em todas as partes do nosso "circuito".

Então vamos olhar para a última parte do circuito, de maneira isolada.



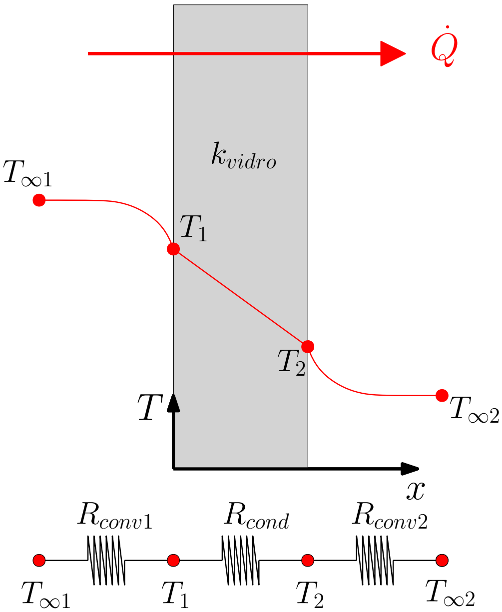
$$\dot{Q} = \frac{T_3 - T_{\infty 2}}{R_{conv2}} \tag{44}$$

Já conhecemos $\dot{Q}$, $T_{\infty 2}$ e R_{conv2}. Só falta T_3. Assim:

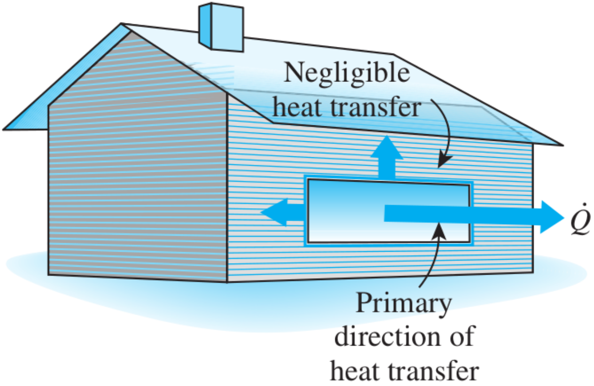
$$T_3 = T_{\infty 2} + R_{conv2}\dot{Q} \tag{45}$$

Sumário

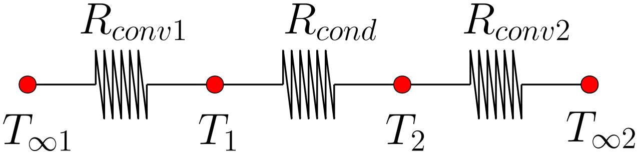
Exemplo 1. Considere uma janela simples de vidro ($k = 0,78\,W/(m.^{\circ}C)$), como mostra a figura. Essa janela está cercada por dois ambientes: o interno, com $h_1 = 10\,W/(m^2.^{\circ}C)$ e $T_{\infty 1} = 20\,^{\circ}C$; e o externo, com $h_2 = 40\,W/(m^2.^{\circ}C)$ e $T_{\infty 2} = -10\,^{\circ}C$. A janela tem altura de $0,8\,m$, largura de $1,5\,m$ e espessura (direção da troca de calor) de $8\,mm$. Calcule $\dot{Q}$ e a temperatura do vidro na superfície em contato com o ambiente interno.



$\dot{Q}$
k_{vidro}
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
T
$T_{\infty 2}$
x
R_{conv1}
R_{cond}
R_{conv2}
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
$T_{\infty 2}$


Negligible
heat transfer
$\dot{Q}$
Primary
direction of
heat transfer

Solução: pause aqui e tente resolver.



Queremos calcular $\dot{Q}$. Pela fórmula:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} = \frac{20°C - (-10°C)}{R_{total}} = \frac{30°C}{R_{total}} \tag{46}$$

Precisamos calcular R_{total}.

$$R_{total} = R_{conv1} + R_{cond} + R_{conv2} \tag{47}$$

$$R_{conv1} = \frac{1}{h_1 A} = \frac{1}{10\frac{W}{m^2.°C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,08333\,\frac{°C}{W} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} R_{cond} =& \frac{L}{kA} = \frac{8\,mm}{0,78\frac{W}{m.°C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = \\ &= \frac{0,008\,m}{0,78\frac{W}{m.°C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,00855\frac{°C}{W} \end{aligned} \quad (49)$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{h_2 A} = \frac{1}{40\frac{W}{m^2.°C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,02083\,\frac{°C}{W} \quad (50)$$

$$R_{total} = 0,08333\,\frac{°C}{W} + 0,00855\frac{°C}{W} + 0,02083\,\frac{°C}{W} = 0,1127\,\frac{°C}{W} \quad (51)$$

Portanto:

$$\dot{Q} = \frac{30°C}{R_{total}} = \frac{30°C}{0,1127\,\frac{°C}{W}} = 266,16\,W \quad (52)$$

Resposta:

$$\dot{Q} = 266\,W \quad (53)$$

Queremos saber também o valor da temperatura na superfície da janela em contato com o ambiente interno. Ou seja, o valor de T_1.

Temos, para a primeira parte do circuito:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv1}} \tag{54}$$

Isolando T_1:

$$T_1 = T_{\infty 1} - R_{conv1}\dot{Q} \tag{55}$$

Esse $\dot{Q}$ é o mesmo que calculamos, pois o calor que passa por todos os elementos é o mesmo (regime permanente).

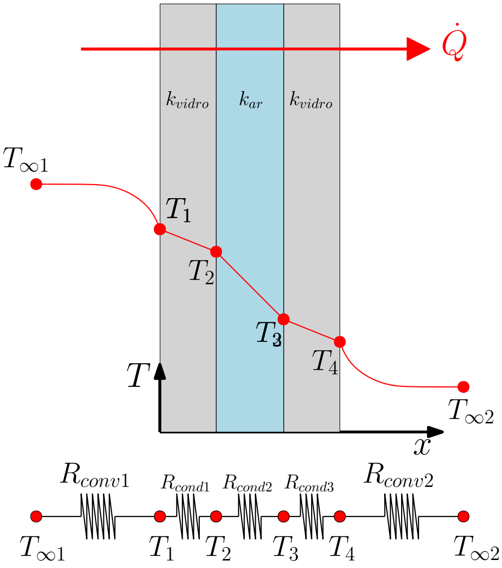
Resulta:

$$T_1 = 20°C - 0,08333\,\frac{°C}{W} \times 266,16\,W = -2,179\,°C \tag{56}$$

Resposta:

$$T_1 = -2,2\,°C \tag{57}$$

Exemplo 2. Esse exemplo é bem parecido com o exemplo 1, mas agora temos uma janela de vidro duplo. Essa janela é formada por duas camadas de vidro ($k = 0,78\,W/(m.^\circ C)$), cada uma com $4\,mm$ de espessura, com ar ($k = 0,026\,W/(m.^\circ C)$ aprisionado entre elas, em uma espessura de $10\,mm$, como mostra a figura. O ar está parado pois o espaço é muito pequeno para permitir que ele se mova. Todo o calor na camada de ar é transmitido por condução. Todos os outros parâmetros são idênticos àqueles do exemplo 1. Nessa nova configuração, calcule $\dot{Q}$ e a temperatura do vidro na superfície em contato com o ambiente interno.


$\dot{Q}$
k_{vidro}
k_{ar}
k_{vidro}
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
T_3
T_4
T
$T_{\infty 2}$
x
R_{conv1}
R_{cond1}
R_{cond2}
R_{cond3}
R_{conv2}
$T_{\infty 1}$
T_1
T_2
T_3
T_4
$T_{\infty 2}$

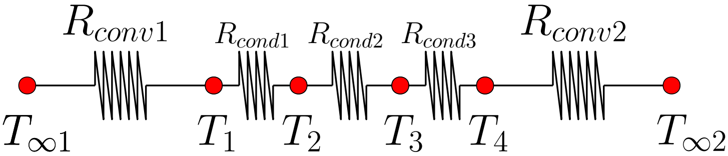
Solução: pause aqui e tente resolver.

Queremos calcular $\dot{Q}$. Pela fórmula:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} = \frac{20°C - (-10°C)}{R_{total}} = \frac{30°C}{R_{total}} \tag{58}$$

Precisamos calcular R_{total}.

$$R_{total} = R_{conv1} + R_{cond1} + R_{cond2} + R_{cond3} + R_{conv2} \tag{59}$$



$$R_{conv1} = \frac{1}{h_1 A} = \frac{1}{10\frac{W}{m^2.^\circ C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,08333\,\frac{^\circ C}{W} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} R_{cond1} = & R_{cond3} = \frac{L_1}{k_1 A} = \frac{4\,mm}{0,78\frac{W}{m.^\circ C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = \\ & = \frac{0,004\,m}{0,78\frac{W}{m.^\circ C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,004274\frac{^\circ C}{W} \end{aligned} \tag{61}$$

$$R_{cond2} = \frac{L_2}{k_2 A} = \frac{0,010\,m}{0,026\frac{W}{m.^\circ C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,3205\frac{^\circ C}{W} \tag{62}$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{h_2 A} = \frac{1}{40\frac{W}{m^2.^\circ C} \times 0,8\,m \times 1,5\,m} = 0,02083\,\frac{^\circ C}{W} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} R_{total} =& 0,08333\,\frac{^\circ C}{W} + 0,004274\frac{^\circ C}{W} + 0,3205\frac{^\circ C}{W} + \\ &+ 0,004274\frac{^\circ C}{W} + 0,02083\,\frac{^\circ C}{W} = 0,4332\,\frac{^\circ C}{W} \end{aligned} \tag{64}$$

Portanto:

$$\dot{Q} = \frac{30^\circ C}{R_{total}} = \frac{30^\circ C}{0,4332\,\frac{^\circ C}{W}} = 69,25\,W \tag{65}$$

Resposta:

$$\dot{Q} = 69\,W \tag{66}$$

Queremos saber também o valor da temperatura na superfície da janela em contato com o ambiente interno. Ou seja, o valor de T_1.

Temos, para a primeira parte do circuito:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv1}} \tag{67}$$

Isolando T_1:

$$T_1 = T_{\infty 1} - R_{conv1}\dot{Q} \tag{68}$$

Esse $\dot{Q}$ é o mesmo que calculamos, pois o calor que passa por todos os elementos é o mesmo (regime permanente).

Resulta:

$$T_1 = 20°C - 0,08333\,\frac{°C}{W} \times 69,25\,W = 14,229\,°C \qquad (69)$$

Resposta:

$$T_1 = 14\,°C \qquad (70)$$

Conclusões:

- comparando os exemplos 1 e 2 podemos perceber que houve uma queda significativa na troca de calor (quase 75%). Ou seja, o ambiente interno está perdendo menos calor para o ambiente externo, o que resulta em uma necessidade menor de aquecimento interno;
- além disso, a temperatura na superfície do vidro em contato com o ambiente interno foi de $-2\,°C$ para $14\,°C$. Isso leva a um maior conforto térmico para as pessoas no ambiente interno, pois essa temperatura está diretamente ligada à troca de calor por radiação;
- vidro duplo também ajuda no isolamento acústico;
- janela dupla é mais cara.