Forças Hidrostáticas em Superfícies Planas Submersas

Transporte de Calor e Massa

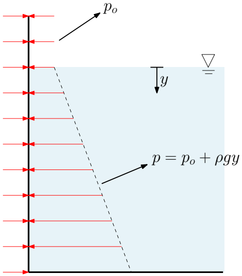
Professor: Adriano Possebon Rosa

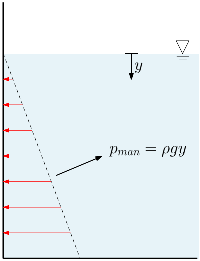
Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

Aplicações: projetos de represas, tanques de armazenamento, embarcações.

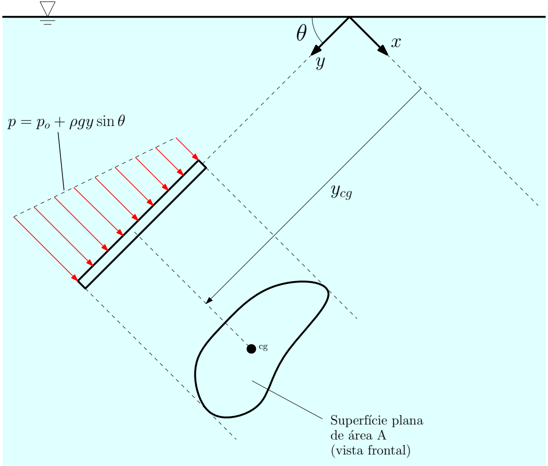
A força exercida sobre uma superfície por um fluido em repouso é normal à superfície no ponto de contato.



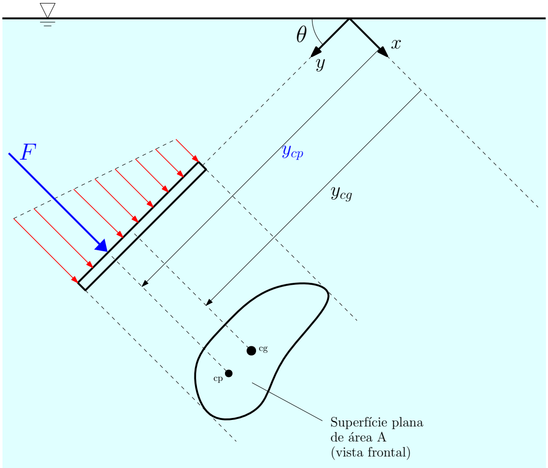


Na maioria dos casos, o outro lado da placa está aberto para a atmosfera. A pressão atmosférica atua em ambos os lados da placa, produzindo uma resultante nula.

Superfície plana: caso geral. Considere a superfície superior de uma placa plana de forma arbitrária totalmente submersa em um líquido, como mostra a figura.



Pergunta: Qual é a **intensidade da força resultante** e o **ponto de aplicação?** Neste caso, já sabemos a direção da força: é sempre perpendicular à superfície.



Sumário

A pressão é dada por

$$p = p_o + \rho g y \sin\theta \tag{1}$$

A força em uma pequena superfície de área dA é pdA

Integrando (somando), a força resultante total na superfície é dada por:

$$\begin{aligned} F_R = \int p dA = \int (p_o + \rho g y \sin\theta) dA = \\ = \int p_o dA + \int \rho g y \sin\theta dA = \\ = p_o A + \rho g \sin\theta \int y dA \end{aligned} \tag{2}$$

Mas

$$\int y dA \tag{3}$$

é o primeiro momento de área e está relacionado com a coordenada y do **centroide** (centro geométrico da superfície) por:

$$y_{cg} = \frac{1}{A}\int y dA \qquad \leftrightarrow \qquad y_{cg}A = \int y dA \tag{4}$$

Assim:

$$F_R = p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A \tag{5}$$

Essa é a **Força Resultante** que age sobre uma superfície plana.

Note que para calcular o valor (intensidade) da força resultante, é usada a posição y_{cg}, do centro geométrico da superfície, pois $\rho g \sin\theta y_{cg}$ é a **pressão média** que atua na superfície.

No entanto, o local de atuação dessa força não é em y_{cg}, pois a pressão não é uniformemente distribuída. O local de aplicação se chama **centro de pressão**, assunto da próxima seção.

Sumário

Precisamos agora encontrar o ponto de aplicação de F_R, ou seja, precisamos determinar y_{cp}.

Enunciado da Mecânica: dois sistemas de forças paralelas são equivalentes se tiverem a mesma intensidade e o mesmo momento com relação a um ponto.

$$F_R y_{cp} = \int y p dA = \int y \left[p_o + \rho g y \sin\theta\right] dA \tag{6}$$

$$F_R y_{cp} = p_o \int y dA + \rho g \sin\theta \int y^2 dA \tag{7}$$

$$F_R y_{cp} = p_o y_{cg} A + \rho g \sin\theta \int y^2 dA \tag{8}$$

Mas

$$\int y^2 dA$$

é o **segundo momento de área** (ou momento de inércia de área) com relação ao eixo x (origem),

$$\int y^2 dA = I_{xx,o} \ . \tag{9}$$

I_{xx} pode ser calculado ou encontrado tabelado para diversas geometrias. Geralmente é dado com relação ao sistema de coordenadas com origem no centro geométrico da superfície.

Mas nós queremos o momento de inércia com relação à nossa origem do sistema de coordenadas.

Podemos usar o Teorema dos Eixos Paralelos:

$$I_{xx,o} = I_{xx,cg} + y_{cg}^2 A \tag{10}$$

Assim, voltando na equação (8):

$$F_R y_{cp} = p_o y_{cg} A + \rho g \sin\theta I_{xx,o} \tag{11}$$

$$F_R y_{cp} = p_o y_{cg} A + \rho g \sin\theta \left(I_{xx,cg} + y_{cg}^2 A\right) \tag{12}$$

$$F_R y_{cp} = p_o y_{cg} A + \rho g \sin\theta y_{cg}^2 A + \rho g \sin\theta I_{xx,cg} \tag{13}$$

$$F_R y_{cp} = y_{cg} \left(p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A\right) + \rho g \sin\theta I_{xx,cg} \tag{14}$$

Já calculamos, na equação (5), o valor da força resultante. Reescrevendo aqui:

$$F_R = p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A \tag{15}$$

Substituindo esse valor na equação (14):

$$(p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A)\, y_{cp} = y_{cg}\,(p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A) + \rho g \sin\theta I_{xx,cg}$$

$$y_{cp} = \frac{y_{cg}\,(p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A)}{p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A} + \frac{\rho g \sin\theta I_{xx,cg}}{p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A} \tag{16}$$

Resultado:

$$y_{cp} = y_{cg} + \frac{\rho g \sin\theta I_{xx,cg}}{p_o A + \rho g \sin\theta y_{cg} A} \tag{17}$$

Reorganizando:

$$y_{cp} = y_{cg} + \frac{I_{xx,cg}}{A\left[y_{cg} + \frac{p_o}{\rho g \sin\theta}\right]} \tag{18}$$

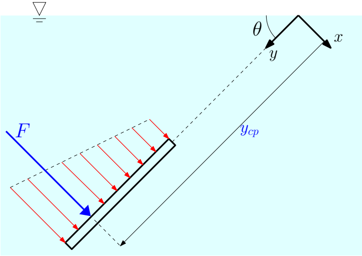
Essa é a coordenada y do centro de pressão (ponto de aplicação da força resultante).

Note que y_{cp} é sempre maior que y_{cg}.

Em muitos casos **a pressão atmosférica age dos dois lados**. Nessas situações, a força e y_{cp} são dados por:

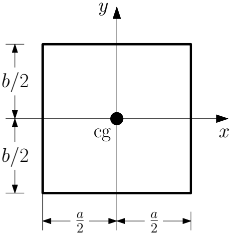
$$F_R = \rho g y_{cg} \sin\theta A \tag{19}$$

$$y_{cp} = y_{cg} + \frac{I_{xx,cg}}{A y_{cg}} \tag{20}$$

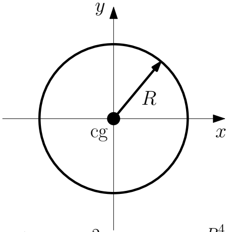


Precisamos do momento de inércia de área.

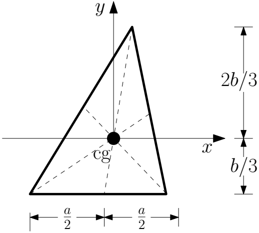
Sumário



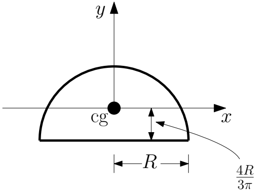
$$A = ab;\ I_{xx,cg} = \frac{ab^3}{12}$$



$$A = \pi R^2;\ I_{xx,cg} = \frac{\pi R^4}{4}$$



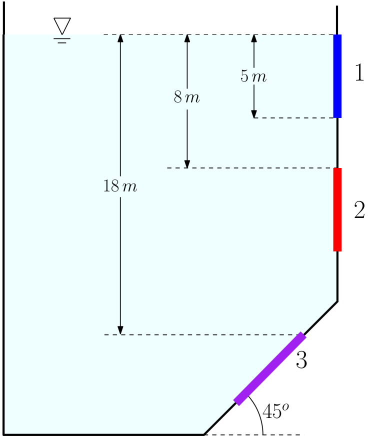
$$A = \frac{ab}{2};\ I_{xx,cg} = \frac{ab^3}{36}$$



$$A = \frac{\pi R^2}{2};\ I_{xx,cg} = 0,11R^4$$

Sumário

Exemplo. Calcule as forças aplicadas e as profundidades dos respectivos centros de pressão nas 3 superfícies quadradas abaixo, com lados de $5\,m$, submersas em água.



Resposta. Como a pressão atmosférica atua dos dois lados em todas as superfícies, seu efeito se anula e p_o pode então ser desprezada nesse problema. Para a **superfície** 1 temos:

$$F_R = \rho g y_{cg} \sin\theta A =$$

$$= \left(998 \frac{kg}{m^3}\right) \times \left(9,81 \frac{m}{s^2}\right) \times (2,5\, m) \times (\sin 90^o) \times (5\, m \times 5\, m) =$$

$$= 611898,75\, N$$

Assim, a força é de

$$F_R = 612\, kN$$

A posição do centro de pressão é dada por:

$$y_{cp} = y_{cg} + \frac{I_{xx,cg}}{Ay_{cg}} = \frac{b}{2} + \frac{b^4/12}{b^2 \times b/2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{6} = \frac{2b}{3} = \frac{10}{3}\,m$$

A posição do centro de pressão é $y_{cp} = 3,33\,m$. Como essa superfície está na vertical, a profundidade do centro de pressão coincide com o y_{cp}. Além disso, note que o centro de pressão está $83\,cm$ abaixo do centro geométrico.

Para a **superfície** 2 temos (note que $y_{cg} = 8 + 2,5 = 10,5\,m$):

$$F_R = \rho g y_{cg} \sin\theta A =$$

$$= 998 \times 9,81 \times (8 + 2,5) \times 1 \times (5 \times 5) = 2569974\,N$$

Assim, a força resultante atuando sobre a superfície 2 é

$$F_R = 2,57 \times 10^6 N = 2,57\,MN$$

A posição do centro de pressão é dada por:

$$y_{cp} = y_{cg} + \frac{I_{xx,cg}}{Ay_{cg}} = 10,5 + \frac{5 \times 5^3/12}{5 \times 5 \times 10,5} = 10,698\, m$$

Note que agora o centro de pressão está $19\, cm$ abaixo do centro geométrico.

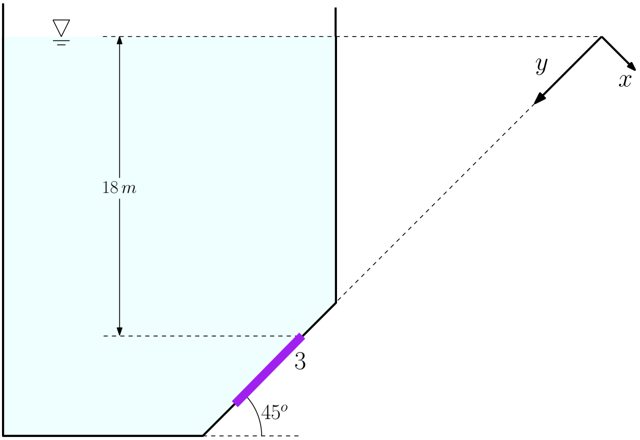
Assim, para a superfície 2 temos

$$y_{cp} = 10,7\, m$$

Para a **superfície** 3 temos:

$$F_R = \rho g y_{cg} \sin\theta A$$

A superfície está inclinada. Agora a profundidade do centro geométrico não é igual a y_{cg}. Para calcular y_{cg} temos que estender o plano da superfície sólida até a superfície livre. Veja a figura no próximo slide.



Temos daí que:

$$y_{cg} = \frac{18}{\sin\theta} + 2,5 = 27,956\,m$$

Assim,

$$F_R = \rho g y_{cg} \sin\theta A = 998 \times 9,81 \times 27,956 \times \sin 45^o \times (5 \times 5) =$$

$$= 4838375\,N$$

Portanto, a força resultante atuando na superfície 3 é

$$F_R = 4,84 \times 10^6\,N = 4,84\,MN$$

A posição do centro de pressão é dada por:

$$y_{cp} = y_{cg} + \frac{I_{xx,cg}}{A y_{cg}} = 27,956 + \frac{5 \times 5^3/12}{5 \times 5 \times 27,956} = 28,031\, m$$

Conclusão:

$$y_{cp} = 28,03\, m$$

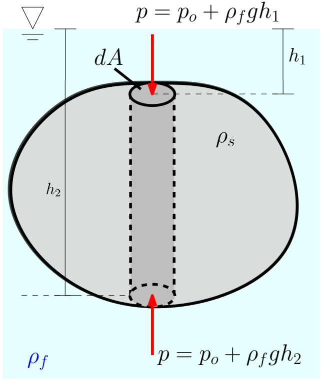
A profundidade do centro de pressão é dada por $y_{cp} \sin\theta = 19,82\, m$.

A diferença entre y_{cp} e y_{cg} diminui com a profundidade do corpo.

Sumário

Se um corpo está submerso ou flutua em um fluido, esse fluido exerce uma força vertical para cima sobre o corpo. Essa força é denominada **empuxo** ou **força de flutuação** (*buoyant force*).

A força de flutuação é causada pelo **aumento** de pressão em um fluido com a profundidade: a pressão embaixo do corpo é maior do que a pressão em cima.



ρ_s é a densidade do corpo submerso (sólido) e ρ_f é a densidade do fluido. Assim, a força agindo no cilindro devido à diferença de pressão é dada por:

$$dF_B = -(p_o + \rho_f g h_1)dA + (p_o + \rho_f g h_2)dA \tag{21}$$

$$dF_B = \rho_f g(h_2 - h_1)dA = \rho_f g d\forall \tag{22}$$

Integrando em todo o corpo:

$$F_B = \int \rho_f g d\forall = \rho_f g \forall \tag{23}$$

Princípio de Arquimedes: A força de flutuação sobre um corpo imerso em um fluido é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo, e age para cima no centroide do volume deslocado,

$$F_B = \rho_f g \forall \ . \tag{24}$$

A força de flutuação não depende da distância entre o corpo e a superfície livre. Ela também não depende da densidade do corpo sólido.

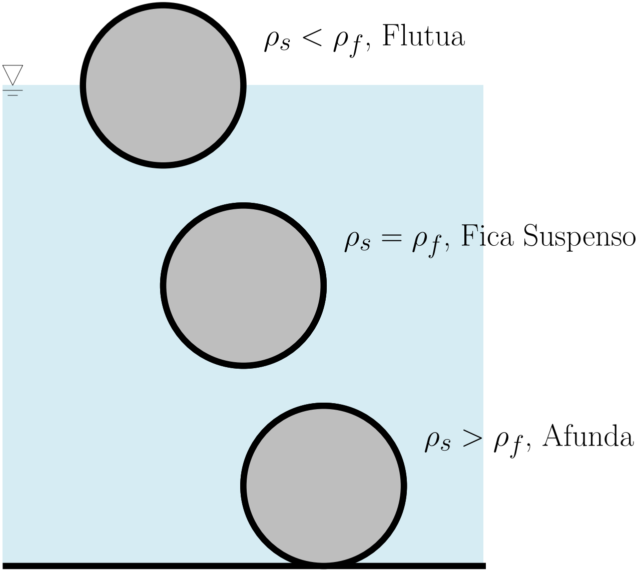
Então na direção vertical temos a força de flutuação F_B e a força peso W. A força resultante é

$$F_B - W = \rho_f g \forall - \rho_s g \forall \quad (25)$$

$$F_B - W = (\rho_f - \rho_s) g \forall \quad (26)$$

Conclusão. Um corpo imerso em um fluido

1. permanece em repouso em qualquer ponto do fluido quando $\rho_s = \rho_f$;
2. vai até fundo do reservatório quando $\rho_s > \rho_f$;
3. sobe à superfície do fluido e flutua quando $\rho_s < \rho_f$.


$\rho_s < \rho_f$, Flutua
$\rho_s = \rho_f$, Fica Suspenso
$\rho_s > \rho_f$, Afunda

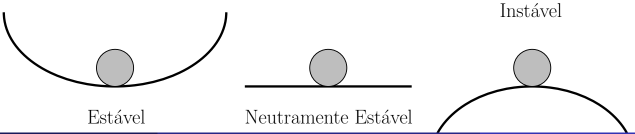
Estabilidade.

Um corpo em equilíbrio pode estar em equilíbrio **estável**, **neutralmente estável** ou **instável**.

No equilíbrio estável, quando o corpo se afasta do equilíbrio, surge uma força de restauração que o leva de volta à posição inicial.

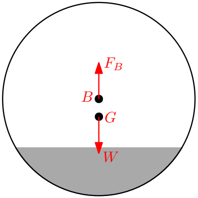
No equilíbrio neutralmente estável (ou indiferente) o corpo permanece na sua nova localização após o distúrbio, pois não surge nenhuma tendência (força ou torque) para retorná-lo ou afastá-lo da posição original.

No equilíbrio instável, qualquer perturbação faz com que o corpo se afaste da configuração inicial. O corpo não retorna à posição original, mas sim diverge dela.

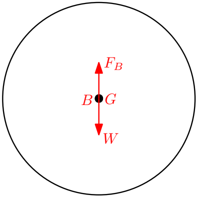


Considere agora um corpo imerso em um fluido. A **estabilidade rotacional** de um corpo imerso depende dos locais relativos do centro de gravidade G do corpo e do centro de flutuação B, que é o centroide do volume deslocado.

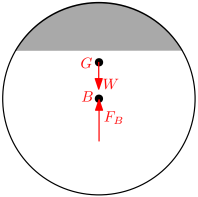
O corpo será estável se tiver o fundo pesado. Nesse caso um torque de restauração aparece sempre que o corpo sai de sua configuração inicial.



Estável



Neutramente Estável



Instável