Escoamento em Tubo

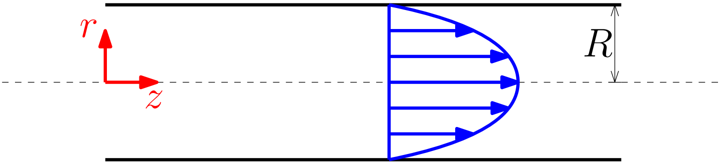
Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

Velocidade em coordenadas cartesianas: $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$.
Velocidade em coordenadas cilíndricas: $\vec{V} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z$.
Volume: $\forall$.



Problema: dados a geometria do tubo, a vazão e as propriedades do fluido, qual é a **queda de pressão** no escoamento?

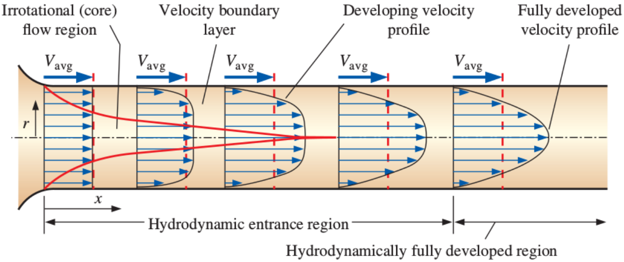
A queda de pressão ao longo do tubo está relacionada à potência de bombeamento necessária para manter o escoamento.

O escoamento é interno, já que o fluido é cercado por superfícies sólidas.

Região de entrada (L_h): comprimento necessário para o fluido apresentar perfil de velocidade **completamente desenvolvido**.

$$L_h \approx 0.05\, ReD \qquad \text{(laminar)}$$

$$L_h \approx 1.359\,(Re^{1/4})D \qquad \text{(turbulento)}$$



Após a região de entrada: $v_r = v_\theta = 0$ e $v_z = v_z(r)$. Em nossas análises nessa semana vamos considerar que **o escoamento está sempre completamente desenvolvido**.

Sumário

Em coordenadas cilíndricas e considerando o escoamento **completamente desenvolvido**:

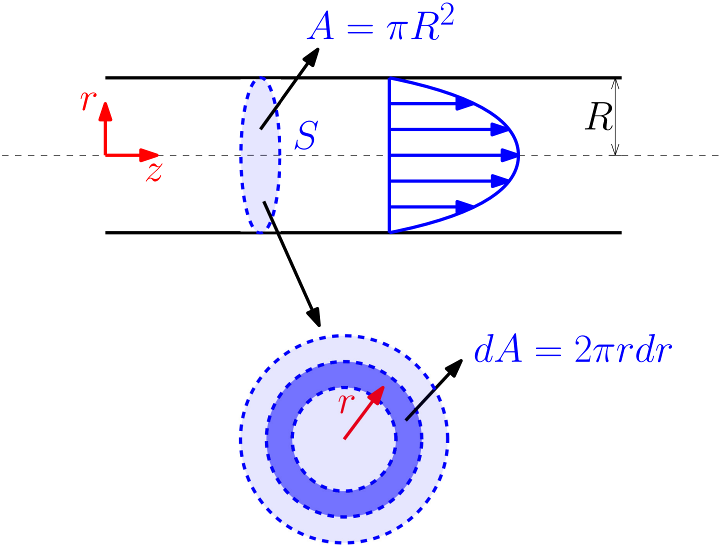
$$\vec{V} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_z \hat{e}_z \ ,$$

$$v_r = v_\theta = 0 \ , \qquad v_z = v_z(r) \ .$$

O **princípio da conservação de massa** deve sempre ser satisfeito. A vazão em massa é dada por

$$\dot{m} = \int_S \rho v_z(r) \, dA \ .$$

em que A é a seção transversal.


$A = \pi R^2$
r
z
S
R
$dA = 2\pi r dr$
r

A vazão volumétrica é dada por:

$$\dot{\forall} = \frac{\dot{m}}{\rho} \ .$$

Velocidade média: velocidade constante que leva à mesma vazão volumétrica.

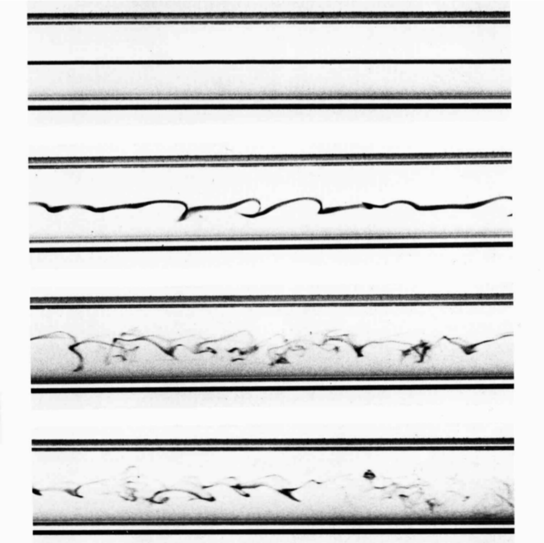
$$\dot{\forall} = \int_S v_z dA = V_m A \ .$$

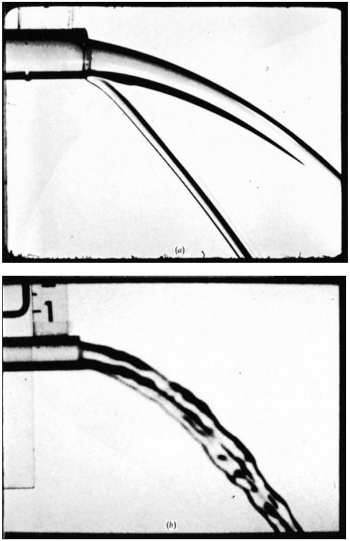
$$V_m = \frac{1}{A} \int_S v_z(r) \, dA \ .$$

Tubo circular de raio R:

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi R v_z(r) \, dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R v_z(r) r \, dr \ .$$

Sumário




(a)
(b)

O escoamento pode ser laminar ou turbulento. Quem dita esse comportamento é o **número de Reynolds**.

O **número de Reynolds** é definido como:

$$\boxed{Re = \frac{\rho V_m D}{\mu}} \qquad (1)$$

Aqui V_m é a velocidade média do escoamento, μ é a viscosidade e $D = 2R$ é o diâmetro do tubo. O **número de Reynolds** pode ser interpretado como uma razão entre forças inerciais e forças viscosas.

Regimes (a partir de observações experimentais):

- $Re < 2300$: Escoamento laminar.
- $Re > 4000$: Escoamento turbulento.
- $2300 < Re < 4000$: **Escoamento de transição.**

Sumário

Considerando **um escoamento laminar desenvolvido**, o campo de velocidade é dado por

$$\vec{V} = v_z(r)\hat{e}_z \ .$$

Substituindo essa velocidade nas equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, resulta

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)\right] \ .$$

Ou:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{dp}{dz} \ .$$

Como o escoamento é **desenvolvido**, o lado esquerdo dessa equação só depende de r e o lado direito só depende de z. Então ambos devem ser constantes. Ou seja, dp/dz é constante, o que significa que **a pressão varia linearmente** ao longo do tubo (direção z).

Rearranjando:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dz} \ .$$

Integrando:

$$r\frac{dv_z}{dr} = \frac{r^2}{2\mu}\frac{dp}{dz} + C_1 \ .$$

Integrando novamente:

$$v_z = \frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dz} + C_1 \ln r + C_2 \ .$$

Para evitar uma singularidade no centro ($r = 0$), devemos ter $C_1 = 0$.

Para encontrar C_2, utilizamos a condição de não deslizamento: $v_z(r = R) = 0$.

Assim:

$$v_z(r = R) = \frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz} + C_2 = 0 \ .$$

Resulta:

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz} \ .$$

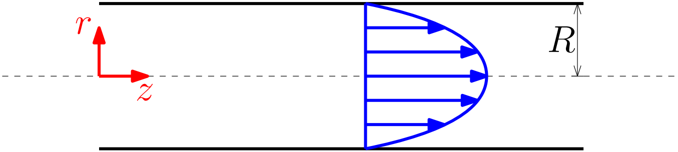
Então:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dz} - \frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz} \ .$$

Ou:

$$v_z(r) = \frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) \ . \qquad (2)$$

Esse é o perfil de velocidade no escoamento laminar completamente desenvolvido. É **parabólico**, com o **máximo** no eixo central e o **mínimo** (zero) na parede do tubo.



Note que a velocidade máxima ocorre em $r = 0$, e é igual a $-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}$. Se o escoamento está para a direita (sentido positivo de z), então dp/dz é negativo, pois a pressão decai ao longo do escoamento. Assim, a velocidade máxima é positiva.

Vamos calcular agora a **velocidade média:**

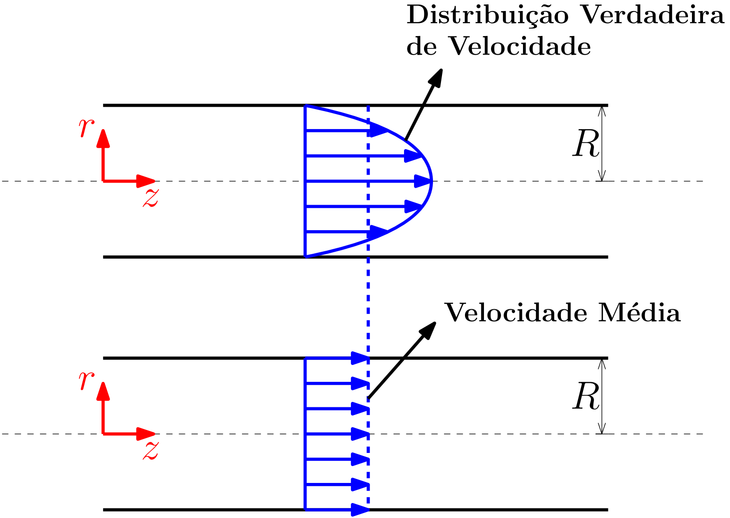
$$V_m = \frac{2}{R^2}\int_0^R v_z(r) r\,dr = \frac{2}{R^2}\int_0^R \left[\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\right] rdr$$

$$V_m = \frac{2}{R^2}\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left[\frac{r^4}{4R^2}-\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

Resulta:

$$V_m = -\frac{1}{8\mu}R^2\frac{dp}{dz}\ .$$

Ou seja, **a velocidade média é a metade da velocidade máxima**. Isso vale apenas para o escoamento laminar. Em escoamento turbulento é diferente.



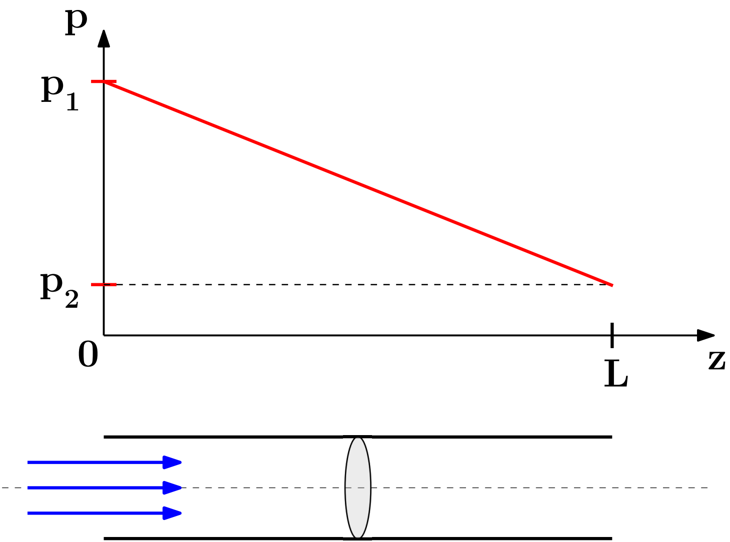
Mas, voltando em (2), considerando o tubo na horizontal, temos

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta P_L}{L} \ .$$

p_1: pressão na entrada; p_2: pressão na saída; L: comprimento do tubo.

ΔP_L é **perda de pressão** no tubo:

$$\Delta P_L = p_1 - p_2 \ .$$


p
p1
p2
0
L
z

Assim:

$$V_m = \frac{1}{8\mu} R^2 \frac{\Delta P_L}{L} \ .$$

Ou:

$$\Delta P_L = \frac{8\mu V_m L}{R^2} \ .$$

Mas:

$$\dot{\forall} = V_m A = \pi R^2 V_m \qquad \rightarrow \qquad V_m = \frac{\dot{\forall}}{\pi R^2}$$

O resultado final é:

$$\boxed{\Delta P_L = \frac{8\mu L\dot{\forall}}{\pi R^4} = \frac{128\mu L\dot{\forall}}{\pi D^4}} \tag{3}$$

Essa equação representa a **Lei de Poiseuille**, que pode ser enunciada da seguinte maneira: para uma vazão especificada, a **perda de pressão** devido aos efeitos viscosos é proporcional ao **comprimento do tubo** e à **viscosidade do fluido**, mas é inversamente proporcional à **quarta** potência do **diâmetro do tubo**.

Exemplo. Óleo a $20\,^oC$ ($\rho = 888\,kg/m^3$ e $\mu = 0,8\,kg/(m \cdot s)$) escoa em um tubo horizontal de $5\,cm$ de diâmetro e $40\,m$ de comprimento. A pressão na entrada do tubo é de $745\,kPa$ e na saída é de $97\,kPa$. Determine a vazão de óleo nesse escoamento e a velocidade média.

Solução. Vamos assumir que o escoamento é laminar.

Nesse caso a vazão é dada por:

$$\dot{V} = \frac{\Delta P_L \pi D^4}{128 \mu L} = \frac{(745000 - 97000) \times \pi \times 0,05^4}{128 \times 0,8 \times 40} = 0,00311\,m^3/s$$

A velocidade, por sua vez, é obtida a partir da vazão:

$$V_m = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0,00311}{\pi \times 0,05^2/4} = 1,58\,m/s$$

Essas são as respostas do problema. Mas precisamos calcular agora o número de Reynolds para confirmar que o escoamento é laminar.

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{888 \times 1,58 \times 0,05}{0,8} = 87,8$$

Como $Re < 2300$ o escoamento é laminar. Ou seja, a hipótese feita no início da solução está correta.

Se o número de Reynolds fosse maior que 2300 teríamos que voltar no início da solução e assumir escoamento turbulento. A equação (3) é válida apenas para escoamentos laminares.

Sumário

Ainda em escoamento laminar, temos que:

$$\Delta P_L = \frac{8\mu V_m L}{R^2} = \frac{32\mu V_m L}{D^2}$$

Podemos reescrever essa equação como:

$$\Delta P_L = f\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{\rho V_m^2}{2}\right) \ , \tag{4}$$

com

$$f = \frac{64\mu}{\rho V_m D} = \frac{64}{Re} \ . \tag{5}$$

f **é chamado de fator de atrito. Para escoamentos laminares:** $f = 64/Re$. **Para escoamentos turbulentos,** f é obtido a partir de observações experimentais. Veremos isso mais adiante.

Sumário

A perda de carga no escoamento é definida como:

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_m^2}{2g} \ .$$

Sumário

Para analisar o escoamento em tubo, podemos modificar a equação de Bernoulli para:

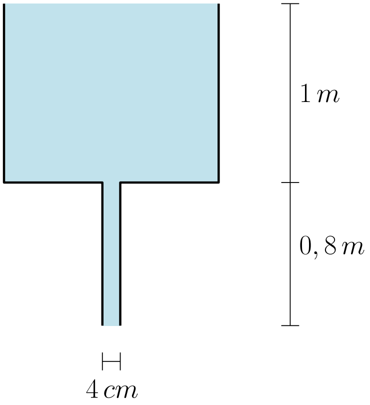
$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta P_L \qquad (6)$$

Dividindo por ρg:

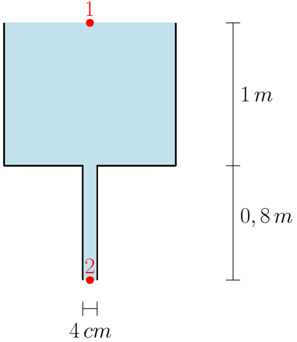
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L \qquad (7)$$

A região de escoamento no tubo está entre os pontos 1 e 2.

Exemplo. Um reservatório contém óleo SAE 10 ($\rho = 870\,kg/m^3$ e $\mu = 0,104\,kg/(m \cdot s)$) e tem um tubo na saída no fundo. Determine a vazão volumétrica Q em m^3/h na saída, neste instante.



Solução. Equação de Bernoulli modificada:



$$\cancel{\frac{p_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 = \cancel{\frac{p_2}{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

$$h_L = \Delta z - \frac{V_2^2}{2g}$$

Assumindo escoamento laminar:

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f\,\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} = \frac{64}{Re}\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} = \frac{32\mu L V_2}{\rho g D^2}$$

Assim

$$\frac{32\mu L V_2}{\rho g D^2} = (z_1 - z_2) - \frac{V_2^2}{2g}$$

Substituindo os valores

$$V_2^2 + 3,83V_2 - 35,32 = 0$$

$$V_2 = 4,33\,m/s$$

Checando o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V_2 D}{\mu} = 1450 \qquad \rightarrow \qquad \text{Laminar !!}$$

A vazão é:

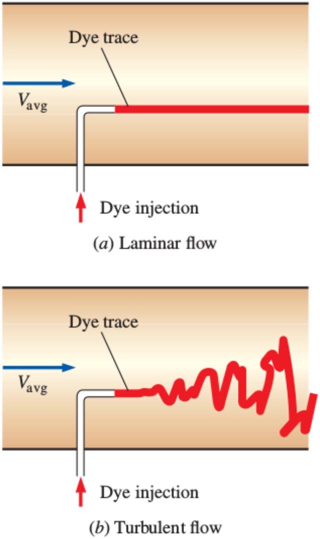
$$\dot{\forall} = AV_2 = 0,00544\,m^3/s = 19,6\,m^3/h$$

Sumário

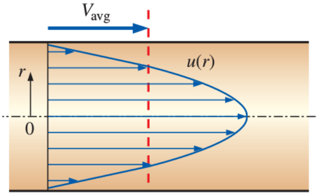
- O escoamento turbulento ocorre em **altos números de Reynolds**.

- O escoamento turbulento é caracterizado por **flutuações** de velocidade em todas as direções. Temos **flutuações** de pressão e de temperatura também.

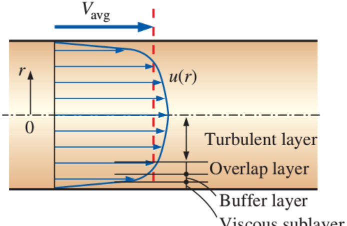
- O transporte de massa, momento e energia para outras regiões é **muito mais intenso** (rápido).



- No caso de um escoamento turbulento em um tubo, o **perfil de velocidade é mais achatado,** resultando em uma velocidade média que é quase igual à velocidade máxima.



Laminar flow



Turbulent flow

- O escoamento turbulento depende da **rugosidade relativa** ϵ/D do tubo, em que ϵ é o tamanho médio da rugosidade (dado obtido a partir tabelas). Essa rugosidade depende do material do tubo.

- **Não temos solução analítica para escoamento turbulento.** A relação entre perda de carga e vazão é dada por gráficos e equações aproximadas, obtidos **experimentalmente**.

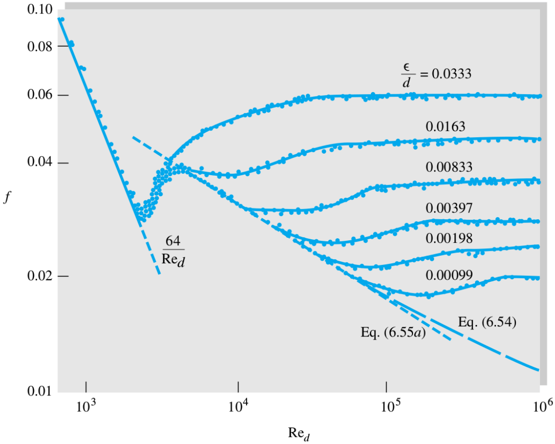
- O método mais utilizado para calcular a perda de carga em escoamentos turbulentos é por meio do **Diagrama de Moody**. Para um dado número de Reynolds e para uma dada rugosidade relativa, o Diagrama de Moody fornece o fator de atrito f.

- Com o fator de atrito, a **perda de pressão** no escoamento é dada da mesma forma como foi definida para o escoamento laminar:

$$\Delta P_L = f\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{\rho V_m^2}{2}\right) \ .$$

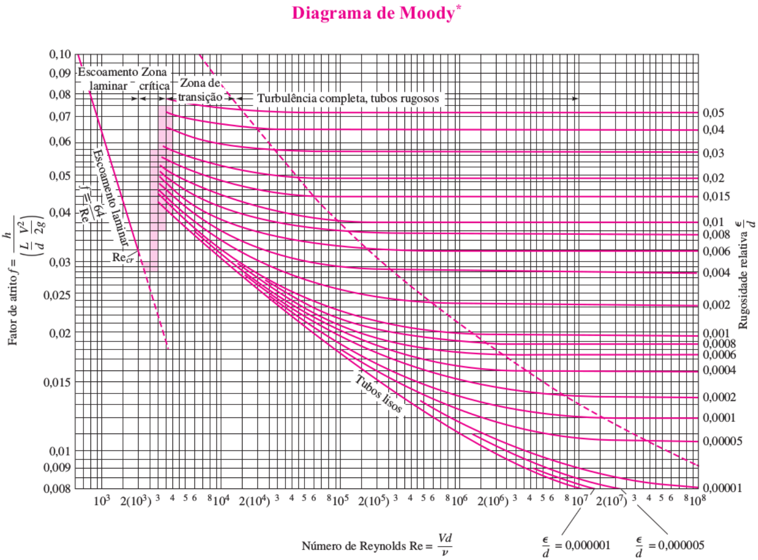
O que muda é que para escoamentos laminares f pode ser calculado "na mão" ($f = 64/Re$). Para escoamentos turbulentos, porém, o fator de atrito f é obtido a partir do **Diagrama de Moody**. Para o escoamento turbulento não há uma solução analítica simples, como no caso laminar.

Na figura abaixo, **os pontos representam resultados experimentais para escoamentos em tubo.** Esses resultados foram usados para a elaboração do Diagrama de Moody (próximo slide).



Observação: note a concordância, em regime laminar, entre os resultados experimentais e o resultado analítico $(64/Re)$.

Esse é o **Diagrama de Moody**. Note que a rugosidade do tubo não interfere no fator de atrito na região laminar.



Rugosidade para alguns materiais.

		ϵ	
Material	**Condição**	**mm**	**Incerteza, %**
Aço	Chapa metálica, nova	0,05	± 60
	Inoxidável, novo	0,002	± 50
	Comercial, novo	0,046	± 30
	Rebitado	3,0	± 70
	Oxidado	2,0	± 50
Ferro	Fundido, novo	0,26	± 50
	Forjado, novo	0,046	± 20
	Galvanizado, novo	0,15	± 40
	Fundido asfaltado	0,12	± 50
Latão	Estirado, novo	0,002	± 50
Plástico	Tubo estirado	0,0015	± 60
Vidro	—	Liso	Liso
Concreto	Alisado	0,04	± 60
	Rugoso	2,0	± 50
Borracha	Alisada	0,01	± 60
Madeira	Aduela	0,5	± 40

- A **equação de Bernoulli modificada** continua valendo, mas agora **o fator de atrito f é obtido a partir do Diagrama de Moody.**

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta P_L$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

Exemplo: Um líquido escoa por um tubo horizontal de cobre de $20\,m$ de comprimento com $5\,mm$ de diâmetro a uma vazão de $0,09\,kg/s$. Dados: $\rho = 665,1\,kg/m^3$; $\mu = 2,361 \times 10^{-4}\,kg/(m \cdot s)$; $\epsilon = 2 \times 10^{-6}\,m$. Determine a perda de pressão no escoamento.

Resposta:

$$\dot{\forall} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{0,09}{665,1} = 1,353 \times 10^{-4}\,m^3/s$$

$$V_m = \frac{\dot{\forall}}{A} = \frac{1,353 \times 10^{-4}}{\pi \times 0,005^2/4} = 6,892\,m/s$$

Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{665,1 \times 6,892 \times 0,005}{0,0002361} = 97070$$

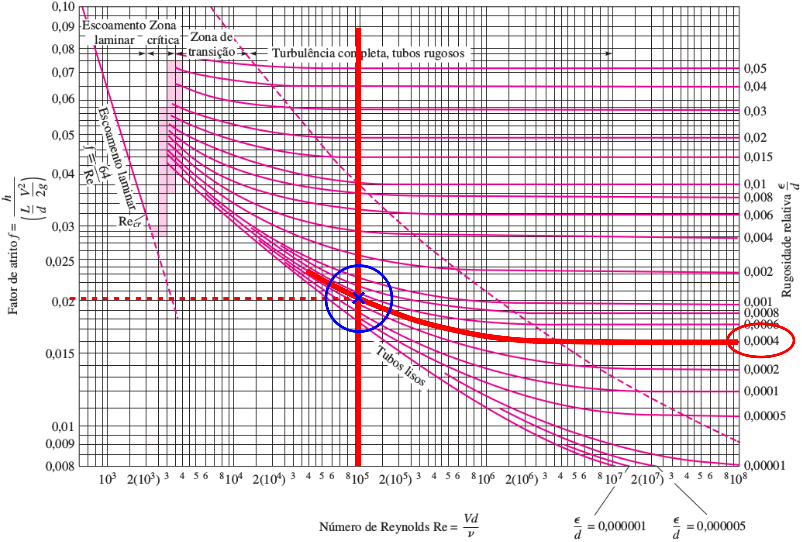
$Re = 97074 > 4000 \qquad \rightarrow \qquad$ Turbulento!

Rugosidade relativa:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{2 \times 10^{-6}}{0,005} = 4 \times 10^{-4}$$

Temos a rugosidade relativa e o número de Reynolds. Vamos usar o Diagrama de Moody para encontrar o fator de atrito f.

Diagrama de Moody*



Fator de atrito $\rightarrow$ Diagrama de Moody $\rightarrow$ $f \approx 0,02$.

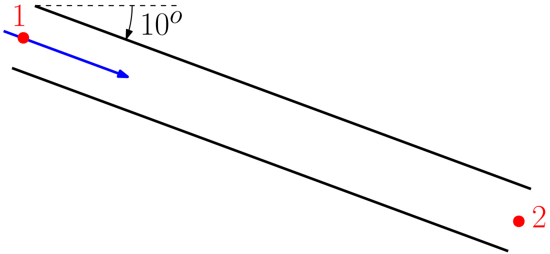
A queda de pressão é dada então por:

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_m^2}{2} = 0,02 \times \frac{20}{0,005} \times \frac{665,1 \times 6,892^2}{2} = 1,26\, MPa$$

A potência necessária para manter o escoamento, ou potência de bomba, é calculada como:

$$\dot{W}_{bomba} = \dot{\forall} \times \Delta P_L = \frac{0,09}{665,1} \times 1,263 \times 10^6 = 0,17\, kW$$

Exemplo: Óleo ($\rho = 900\,kg/m^3$ e $\nu = 10^{-5}\,m^2/s$) escoa a $0,2\,m^3/s$ através de um tubo de ferro fundido novo de $20\,m$ de comprimento e $200\,mm$ de diâmetro, com um ângulo de declive de 10^o no sentido do escoamento. Determine a queda de pressão (diferença de pressão entre a entrada e a saída).



Resposta:

$$V_m = \frac{\dot{\forall}}{A} = \frac{0,2}{\pi R^2} = \frac{0,2}{\pi \times 0,1^2} = 6,37\, m/s$$

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{V_m D}{\nu} = \frac{6,366 \times 0,1}{10^{-5}} = 127323$$

Para um tubo de ferro fundido novo temos $\epsilon = 0,26\, mm$. Assim:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0,26}{200} = 0,0013$$

Do Diagrama de Moody $\rightarrow$ $f = 0,0225.$

Assim:

$$\Delta P_L = f\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{\rho V_m^2}{2}\right) = 41035\,Pa$$

Essa é a queda de pressão no tubo. A diferença de pressão entre a entrada e a saída é obtida a partir da equação de Bernoulli modificada:

$$p_1 + \cancel{\frac{\rho V_1^2}{2}} + \rho g z_1 = p_2 + \cancel{\frac{\rho V_2^2}{2}} + \rho g z_2 + \Delta P_L$$

O ponto 1 está na entrada do tubo e o ponto 2 na saída. V_1 e V_2 são iguais porque o diâmetro do tubo não muda. Além disso, como o tubo tem um declive de 10, temos:

$$z_1 - z_2 = 20 \times \sin 10^o$$

Resulta:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \Delta P_L - \rho g \left[(z_1 - z_2) \right] \\ &= 41035 - 900 \times 9,81 \times (20 \times \sin 10) \\ &= 10372 \, Pa \end{aligned}$$

A diferença de pressão entre a entrada e a saída é de $10372\,Pa$. A perda de pressão é de $41035\,Pa$, mas como a água está descendo, a gravidade ajuda o escoamento.

Conclusão: a **queda de pressão** (diferença de pressão entre a entrada e a saída, ou seja, $p_1 - p_2$) é diferente da **perda de pressão** ΔP_L no caso de um tubo inclinado.