Revisão de Cálculo Vetorial

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

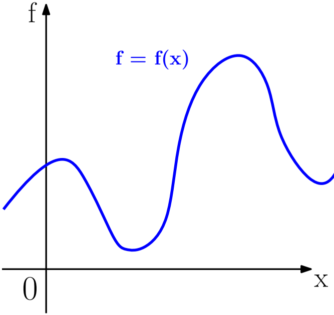
Função de uma variável.

$$f = f(x) \tag{1}$$

Uma função f é uma lei tal que para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um conjunto B.

Gráfico é o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$



Polinômio. Uma função P é denominada um polinômio se:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o \qquad (2)$$

com n inteiro não negativo e com a_o, a_1, $\cdots$, a_n, constantes reais.

Polinômio de grau 1: $P(x) = ax + b$ (função linear).

Polinômio de grau 2: $P(x) = ax^2 + bx + c$ (função quadrática).

Polinômio de grau 3: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (função cúbica).

Funções potência: $f(x) = x^a$, com a constante.

Funções trigonométricas: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$, $\cdots$

Funções exponenciais: $f(x) = a^x$, com $a > 0$. Caso particular: $f(x) = e^x = \exp x$.

Funções logarítmicas: $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$. Caso particular: $\log_e x = \ln x$.

Derivada.

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Diferencial:

$$df = f'(x)dx \tag{5}$$

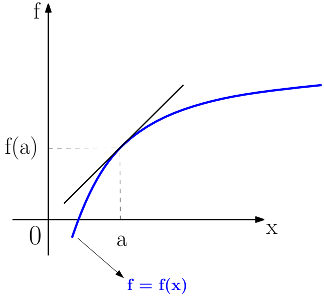
df e dx são diferenças infinitesimais (muito pequenas) em f e em x.

Derivada é uma função. Derivada em um ponto $x = a$:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) \tag{6}$$

A derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $f = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

A reta tangente a $f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ cuja inclinação é igual a $f'(a)$.



Série de Taylor: forma de aproximar o valor de $f(x)$ em um ponto x a partir de uma série de potências utilizando derivadas de f em um ponto a próximo.

$$f(x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(\Delta x)^3 + \cdots \quad (7)$$

Com $\Delta x = x - a$.

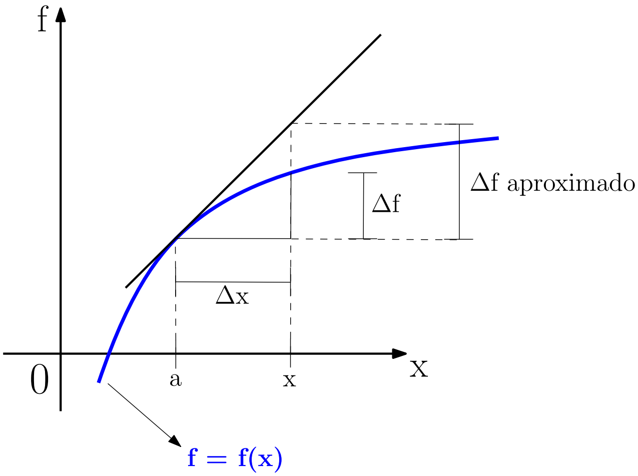
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(\Delta x)^n \quad (8)$$

$$\Delta f = f(x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(\Delta x)^3 + \cdots$$

Aproximação de primeira ordem:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(\Delta x) \tag{9}$$

$$\Delta f = f(x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x \tag{10}$$



Regra da cadeia. Se f é função de u ($f = f(u)$) e u é função de x ($u = u(x)$) então:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \tag{11}$$

Exemplo:

$$f = u^n \qquad \frac{df}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{12}$$

Algumas propriedades e derivadas.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x)) = f'(x) + g'(x) \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{15}$$

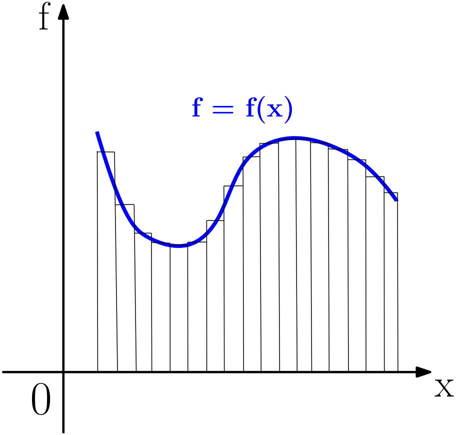
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \tag{17}$$

Tabela com derivadas.

Integral.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{18}$$



Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\int_b^a f(x)dx \tag{19}$$

Com

$$\frac{dF(x)}{dt} = f(x) \tag{20}$$

Integral indefinida:

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x) \tag{21}$$

Algumas integrais:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1 \tag{22}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{23}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{24}$$

Tabela com integrais.

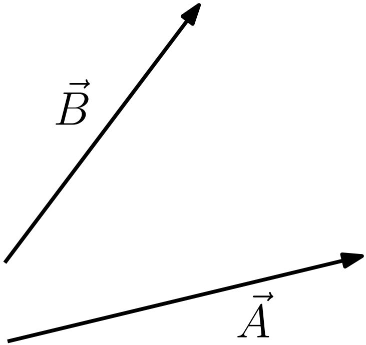
Escalar: grandeza definida apenas por sua magnitude. Exemplos: massa, densidade, temperatura.

Vetor: grandeza definida por uma direção e uma magnitude. Exemplos: deslocamento, velocidade, força, aceleração.

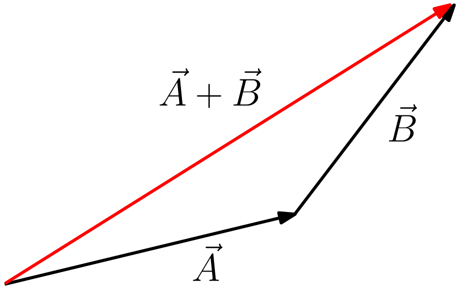
Campo escalar: associa um valor (número) a cada posição no espaço.

Campo vetorial: associa um vetor a cada posição no espaço. Campo vetorial é vetor cujas componentes dependem da posição no espaço.

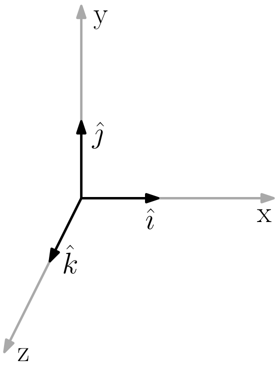
Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$:



Vetor $\vec{A} + \vec{B}$:



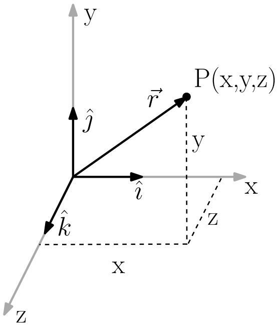
Sistema de coordenadas cartesianas.



$\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são vetores unitários (comprimento igual a 1).

Eixos x, y e z.

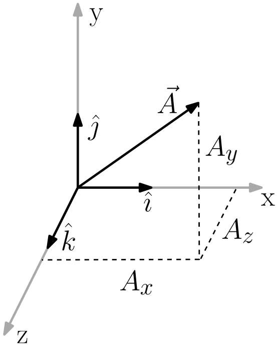
Vetor posição $\vec{r}$ de um ponto $P(x, y, z)$.



$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Vetor que vai da origem ao ponto.

Vetor $\vec{A}$.



$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

A_x, A_y e A_z são chamadas de componentes do vetor $\vec{A}$ nesse sistema de coordenadas. Em um novo sistema de coordenadas o vetor continua o mesmo, mas suas componentes mudam.

Vetores:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{25}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \tag{26}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k} \tag{27}$$

Multiplicação por um escalar α:

$$\alpha\vec{A} = (\alpha A_x)\hat{\imath} + (\alpha A_y)\hat{\jmath} + (\alpha A_z)\hat{k} \tag{28}$$

Módulo ou comprimento:

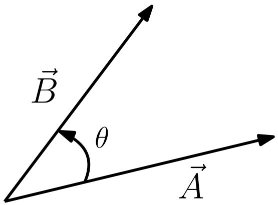
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z} = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = A \tag{29}$$

Vetor unitário: comprimento igual a 1.

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{30}$$

Produto escalar entre dois vetores:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta \qquad (31)$$



Produto vetorial entre dois vetores:

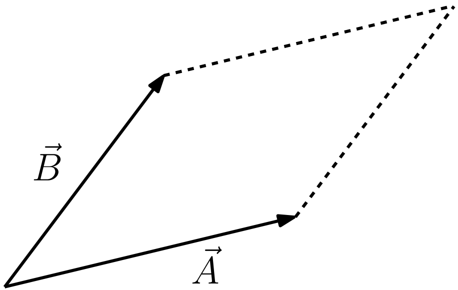
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \tag{32}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \tag{33}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \hat{n} \tag{34}$$

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ representa a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.



Produto escalar triplo:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \tag{35}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} =$$

$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

Produto vetorial triplo:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{36}$$

Função de várias variáveis. Campo escalar:

$$T = T(x, y, z) \tag{37}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x + \Delta x, y, z) - T(x, y, z)}{\Delta x} \tag{38}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{T(x, y + \Delta y, z) - T(x, y, z)}{\Delta y} \tag{39}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{T(x, y, z + \Delta z) - T(x, y, z)}{\Delta z} \tag{40}$$

A variação total (diferencial total) de T depende da direção em que nos movemos:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz \tag{41}$$

Podemos reescrever como o produto escalar de dois vetores:

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{\ell} \tag{42}$$

Onde $\vec{\nabla} T$ é chamado de gradiente de T e é definido como

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \tag{43}$$

E o segundo é o vetor de deslocamento infinitesimal $d\vec{\ell}$:

$$d\vec{\ell} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k} \tag{44}$$

Ou seja:

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot \left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k} \right) =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz \tag{45}$$

Definição. Operador nabla $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{46}$$

Não é um vetor, é um **operador vetorial**. Mas podemos fazer algumas operações como se fosse um vetor.

Gradiente de um escalar:

$$\vec{\nabla} T = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \tag{47}$$

Voltando no diferencial:

$$dT = (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{\ell} = |(\vec{\nabla} T)||d\vec{\ell}| \cos\theta \tag{48}$$

O vetor $\vec{\nabla} T$ aponta na direção de maior aumento da função T. A magnitude $|\vec{\nabla} T|$ dá o valor da taxa de aumento de T nessa direção.

Campo vetorial. Associa um vetor a cada ponto do domínio.

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\imath} + A_y(x, y, z)\hat{\jmath} + A_z(x, y, z)\hat{k} \qquad (49)$$

Exemplo: $\vec{A} = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}$

Divergente de um vetor:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \tag{50}$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(A_x(x, y, z)\hat{\imath} + A_y(x, y, z)\hat{\jmath} + A_z(x, y, z)\hat{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{51}$$

Interpretação física: pensando no contexto de um fluido, o divergente do vetor velocidade em um dado ponto (x, y, z) nos dá a variação do volume de fluido nesse ponto.

Rotacional de um vetor: produto vetorial de $\vec{\nabla}$ com esse vetor.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \tag{52}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Interpretação física: pensando novamente em um fluido, o rotacional em um ponto (x, y, z) nos dá a velocidade de rotação do fluido nesse ponto.

Laplaciano de uma função escalar:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \tag{53}$$

$$\nabla^2 T = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) = \tag{54}$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\imath}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial T}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{55}$$

O laplaciano está relacionado com a difusão.

Teoremas Integrais.

Teorema da Divergência:

$$\int_{\forall} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, d\forall = \int_{S} \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS \tag{56}$$

Teorema de Stokes:

$$\int_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} \, dS = \oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \tag{57}$$