Relações Integrais e o Teorema do Transporte de Reynolds

Transporte de Calor e Massa

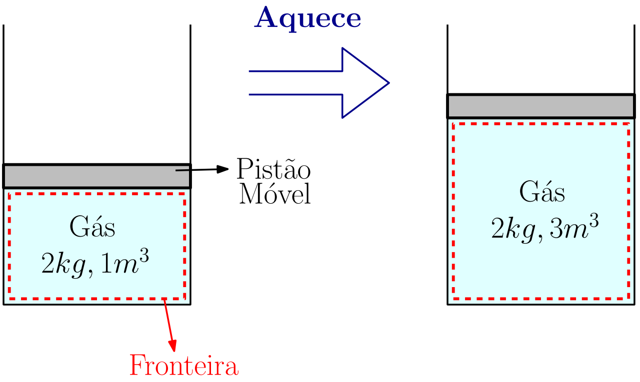
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

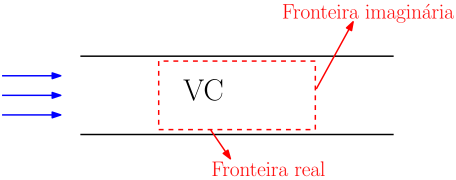
Sumário

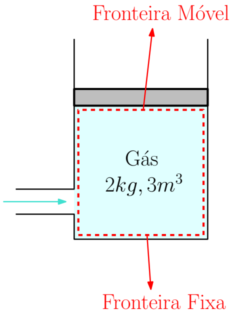
Duas maneiras diferentes de analisar problemas. Na Mecânica dos Fluidos geralmente utilizamos Volume de Controle.

Sistema: quantidade fixa de massa. Nenhuma quantidade de massa pode cruzar a fronteira. Mas energia pode cruzar a fronteira por meio de trabalho ou calor.



Volume de Controle: volume selecionado no espaço, de acordo com o problema. Tanto massa quanto energia podem cruzar a fronteira do **Volume de Controle**. Qualquer região arbitrária no espaço pode ser selecionada como um **Volume de Controle**.





Obs.: **vizinhança** é a região fora do **Sistema** (ou **Volume de Controle**). A superfície, real ou imaginária, que separa o **Sistema** (ou **Volume de Controle**) de sua vizinhança é chamada de **fronteira**.

Sumário

Sumário

A massa de um **sistema** se conserva:

$$m_{sist} = \text{constante} \tag{1}$$

Ou seja:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 \tag{2}$$

Mas a massa do **sistema** é a soma de todas as massas das "partículas de fluido" que formam esse **sistema**. Assim:

$$m_{sist} = \int_{m_{\text{sist}}} dm \tag{3}$$

Mas

$$\rho = \frac{m}{\forall} \qquad \rightarrow m = \rho\forall \qquad \rightarrow dm = \rho d\forall \tag{4}$$

Lembrando que $\forall$ é o volume e $\rho = \rho(x, y, z, t)$ é a densidade (campo escalar). O elemento de fluido possui massa $dm = \rho d\forall$, onde $d\forall$ é o volume desse pequeno elemento.

Temos então:

$$m_{sist} = \int_{m_{\textsf{sist}}} dm = \int_{\forall_{\textsf{sist}}} \rho d\forall \tag{5}$$

Lei da Conservação de Massa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_{\textsf{sist}}} \rho d\forall = 0 \tag{6}$$

Sumário

A Segunda Lei de Newton ou Equação de Balanço para a Quantidade de Movimento nos diz que **a taxa de variação da quantidade de movimento de um corpo é igual à força resultante que atua sobre esse corpo**.

Na forma de equação:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(\vec{p})}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \tag{7}$$

$\vec{p} = m\vec{V}$ é a quantidade de movimento (ou momento linear) do corpo.

Para um **sistema**, nós temos que a quantidade de movimento é a soma das quantidades de movimento de cada elemento do sistema:

$$\vec{p}_{\text{sist}} = \int_{\forall_{\text{sist}}} \rho \vec{V} d\forall \tag{8}$$

Assim, a **segunda lei de Newton para um sistema** é dada por

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{\forall_{\text{sist}}} \rho \vec{V} d\forall \tag{9}$$

Sumário

A **Primeira Lei da Termodinâmica** ou **Princípio da Conservação de Energia**: a energia não pode ser criada nem destruída durante um processo, pode apenas mudar de forma.

Para um **sistema**, nós temos que a **energia** total E_{sist} é a soma das *energias* de cada elemento do sistema:

$$E_{\text{sist}} = \int_{\forall_{\text{sist}}} \rho e d\forall \ , \tag{10}$$

em que e é a energia por unidade de massa.

A variação de energia em um **sistema** é dada por

$$\Delta E_{sist} = E_{entra} - E_{sai} \ . \tag{11}$$

Energia pode ser transferida do ou para o sistema por meio de **calor** Q e **trabalho** W. Assim:

$$\Delta E_{sist} = Q - W \ . \tag{12}$$

Em termos de variação no tempo, temos:

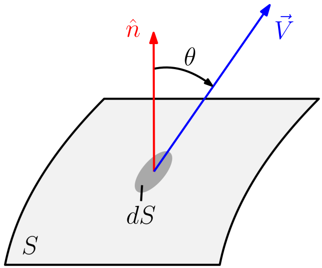
$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_{\text{sist}}} \rho e d\forall = \dot{Q} - \dot{W} \ . \tag{13}$$

Lei da Conservação de Energia para um Sistema:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_{\text{sist}}} \rho e \, d\forall = \dot{Q} - \dot{W} \tag{14}$$

Sumário

Suponha uma superfície S, como a da figura. Imagine essa superfície como uma grade de arame, através da qual passa um fluido.

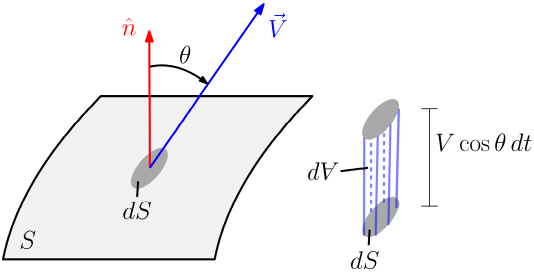


Qual é a quantidade de fluido que passa por unidade de tempo através de S?

$\hat{n}$ é o vetor unitário normal (perpendicular) a S, em um dado ponto, apontando para fora. $\hat{n}$ é puramente geométrico. $\vec{V}$ é o vetor velocidade do escoamento, em cada ponto da superfície.

θ é o ângulo entre o vetor $\hat{n}$ e o vetor $\vec{V}$ em um dado ponto da superfície S.

Durante um pequeno intervalo de tempo dt, um cilindro de fluido de volume $d\forall$ atravessa uma pequena fração da superfície, de área dS. Veja na figura abaixo.



$$d\forall = (V\cos\theta dt)dS$$

$$d\forall = (\vec{V}\cdot\hat{n})dtdS$$

$$\frac{d\forall}{dt} = (\vec{V}\cdot\hat{n})dS$$

A **vazão volumétrica total** Q (ou $\dot{\forall}$) é a soma de todos essas pequenas vazões, considerando toda a superfície S:

$$Q = \int_S \vec{V}\cdot\hat{n}dS \tag{15}$$

Esse é o volume de fluido que escoa através de S por unidade de tempo. Note que Q tem unidade de m^3/s.

A **vazão mássica** ou **fluxo de massa** é:

$$\dot{m} = \int_S \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \qquad [\dot{m}] = kg/s \tag{16}$$

Se ρ é constante temos:

$$\dot{m} = \rho \int_S (\vec{V} \cdot \hat{n})\, dS = \rho\, Q \tag{17}$$

Considerando ainda uma aproximação unidimensional:

$$\int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dS = Q \approx V A \tag{18}$$

$$\dot{m} \approx \rho\, V A \tag{19}$$

Sumário

Como vimos anteriormente, os princípios da Mecânica dos Fluidos são adotados da Mecânica dos Sólidos.

Esses princípios são válidos para **Sistemas**.

No entanto, na Mecânica dos Fluidos em geral é mais conveniente trabalhar com **Volumes de Controle**.

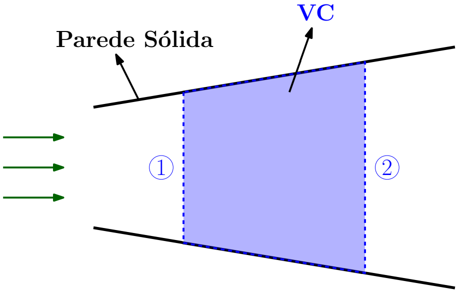
Temos que relacionar as variações no tempo das propriedades (taxas) em um **Sistema** com as variações em um **Volume de Controle**.

Essa relação é feita pelo **Teorema do Transporte de Reynolds**.

Sumário

Sumário

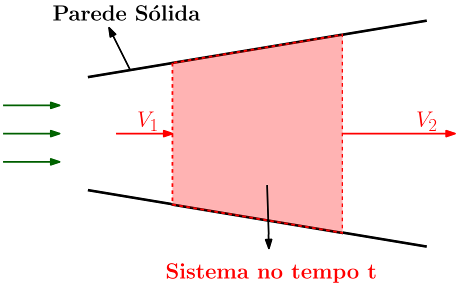
Considere o escoamento de um fluido da esquerda para a direita, como mostrado na figura.



A região em azul é o nosso **Volume de Controle**, entre as seções 1 e 2. Ou seja, essa é a região do espaço que escolhemos para estudar.

A linha tracejada representa a **Superfície de Controle**, que é a superfície que delimita o **Volume de Controle**. Essa superfície separa o Volume de Controle de sua vizinhança.

Vamos definir e acompanhar o movimento de um **Sistema**.



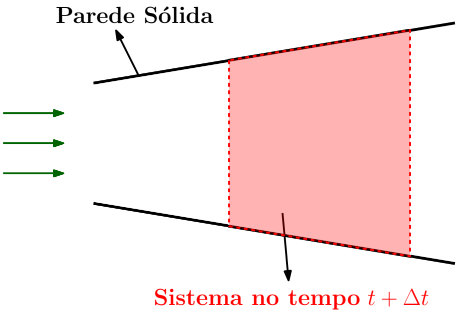
O sistema é definido da seguinte maneira: no tempo t a região do espaço ocupada por esse **Sistema** coincide com o **Volume de Controle.**

Assim, no tempo t o Sistema e o Volume de Controle são idênticos.

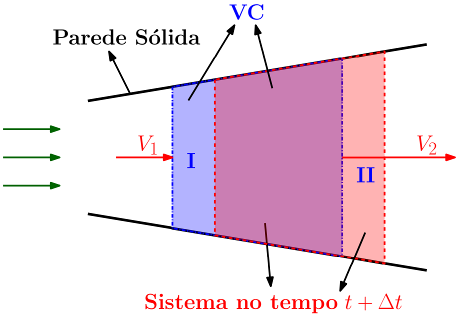
Depois de um tempo Δt, o **Volume de Controle** continua no mesmo lugar, pois está fixo.

Já o **Sistema** se desloca com o escoamento. Na seção 1 com velocidade V_1 e na seção 2 com velocidade V_2.

Assim, no tempo $t + \Delta t$, o **Sistema** se encontra na seguinte configuração.



No instante de tempo $t + \Delta t$, o **Sistema** e o **Volume de Controle** não são mais coincidentes, como mostra a figura abaixo.



Agora o **Sistema** ocupa uma região no espaço formada pelo **Volume de Controle** menos a **Região I** mais a **Região II**. Vamos ver como calcular uma propriedade do sistema nos tempos t e $t + \Delta t$.

Seja B é uma propriedade extensiva. Pode ser a massa m, a quantidade de movimento $m\vec{V}$ ou a energia, por exemplo. Aqui nós vamos ver só m e $m\vec{V}$. Note que B pode ser um escalar ou um vetor.

Existe uma propriedade b intensiva correspondente. b é definida como

$$b = \frac{B}{m} \qquad \text{ou} \qquad b = \frac{dB}{dm} \ .$$

Daí temos que

$$dB = b\, dm = b\rho d\forall \ .$$

Em todo o volume (seja um Sistema ou Volume de Controle):

$$B = \int_{\forall} \rho\, b\, d\forall \tag{20}$$

No tempo t temos:

$$B_{sist}(t) = B_{vc}(t) \tag{21}$$

Em $t + \Delta t$:

$$B_{sist}(t + \Delta t) = B_{vc}(t + \Delta t) + B_{II} - B_{I} \tag{22}$$

Queremos calcular a taxa de variação da propriedade B no sistema:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} \approx \frac{B_{sist}(t + \Delta t) - B_{sist}(t)}{\Delta t} \tag{23}$$

Vamos pegar a equação (22) e subtrair dela a equação (21). Próximo slide.

Ficamos então com

$$B_{sist}(t+\Delta t) - B_{sist}(t) = B_{vc}(t+\Delta t) - B_{vc}(t) + B_{II} - B_I \quad (24)$$

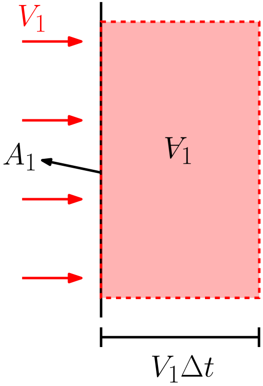
Vamos trabalhar nos termos B_I e B_{II}.

Temos

$$\begin{aligned} B_I =& bm_I = b(\rho \forall_I) = \\ &= \rho b(V_1 \Delta t) A_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_{II} =& bm_{II} = b(\rho \forall_{II}) = \\ &= \rho b(V_2 \Delta t) A_2 \end{aligned}$$



$\forall_1 = A_1 V_1 \Delta t$

Substituindo esses termos B_I e B_{II} de volta na equação (24) resulta

$$\begin{aligned} B_{sist}(t+\Delta t) - B_{sist}(t) =& B_{vc}(t+\Delta t) - B_{vc}(t) + \\ & + \rho b(V_2 \Delta t) A_2 - \rho b(V_1 \Delta t) A_1 \end{aligned} \tag{25}$$

Dividindo todo mundo por Δt:

$$\begin{aligned} \frac{B_{sist}(t+\Delta t) - B_{sist}(t)}{\Delta t} =& \frac{B_{vc}(t+\Delta t) - B_{vc}(t)}{\Delta t} + \\ & + \rho b V_2 A_2 - \rho b V_1 A_1 \end{aligned} \tag{26}$$

Vamos definir

$$\dot{B}_s = \rho b V_2 A_2 \qquad (27)$$

como sendo o fluxo de B para fora (saindo) do **VC** e

$$\dot{B}_e = \rho b V_1 A_1 \qquad (28)$$

como o fluxo de B para dentro do **VC**.

Vamos definir também o **fluxo total** para fora do **VC** $\dot{B}_T$ como

$$\dot{B}_T = \dot{B}_s - \dot{B}_e = \rho b V_2 A_2 - \rho b V_1 A_1 \qquad (29)$$

Substituindo essas novas definições de volta na equação (26):

$$\frac{B_{sist}(t+\Delta t) - B_{sist}(t)}{\Delta t} = \frac{B_{vc}(t+\Delta t) - B_{vc}(t)}{\Delta t} + \\ + \dot{B}_s - \dot{B}_e \tag{30}$$

Ou ainda, usando a ideia de fluxo total para fora do VC:

$$\frac{B_{sist}(t+\Delta t) - B_{sist}(t)}{\Delta t} = \frac{B_{vc}(t+\Delta t) - B_{vc}(t)}{\Delta t} + \dot{B}_T \tag{31}$$

Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{dB_{vc}}{dt} + \dot{B}_T \tag{32}$$

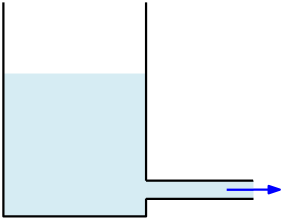
Essa equação afirma que a taxa de variação no tempo da propriedade B no **Sistema** é igual à taxa de variação no tempo de B no **Volume de Controle** mais o **fluxo total** de B para **fora** do **Volume de Controle** levado pelo fluido que atravessa a **Superfície de Controle SC**.

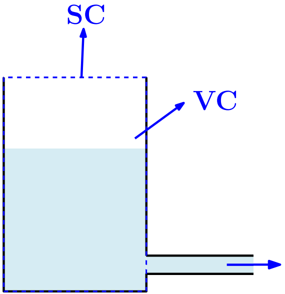
Note que a diferença entre a taxa de variação da propriedade no **Sistema** e no **VC** é o **fluxo de** B, causado pela velocidade do escoamento: o escoamento carrega a propriedade

Conseguimos relacionar variação no **Sistema** com variação no **Volume de Controle**. Essa já é uma forma simplificada do Teorema do Transporte de Reynolds. Depois dos exemplos vamos ver uma forma mais geral.

Sumário

Exemplo. Uma caixa d'água tem inicialmente $100\,L$ de água. Durante $10\,s$ saíram $5\,L$ dessa caixa. Qual é a taxa de variação de massa na caixa? Considere $\rho = 1000\,kg/m^3$.





Temos

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{dB_{vc}}{dt} + \dot{B}_T \tag{33}$$

Fazendo $B = m$:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \frac{dm_{vc}}{dt} + \dot{m}_T \tag{34}$$

Mas

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 \qquad (35)$$

porque a massa de água é constante se acompanharmos o escoamento. Por outro lado, o fluxo total de massa de água para fora é de $5\,kg$ em $10\,s$, o que na média nos dá $0,5\,kg/s$.

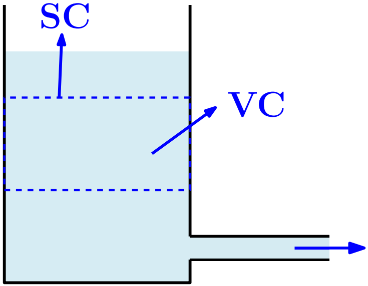
Assim, substituindo de volta na equação:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 = \frac{dm_{vc}}{dt} + 0,5\,\frac{kg}{s} \qquad (36)$$

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = -0,5\,\frac{kg}{s} \qquad (37)$$

Note que a massa de água no VC muda com o tempo: a lei de conservação de massa é para o sistema. Nosso interesse está na caixa d'água, e não na massa de água que vai embora.

E se o Volume de Controle escolhido fosse o da figura abaixo?

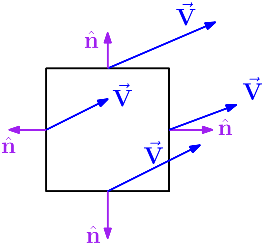


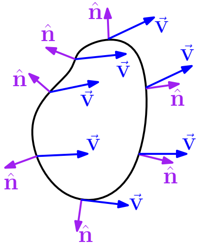
Qual é a taxa de variação de massa nesse VC em um instante inicial?
Ou seja, quanto vale dm_{vc}/dt?

Sumário

Caso mais Geral

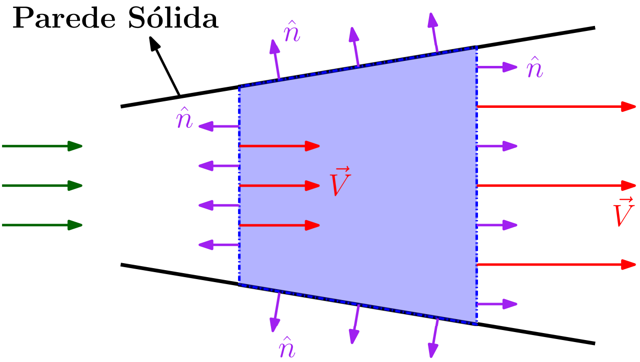
No caso mais geral temos um **Volume de Controle (VC)** qualquer, com uma dada **Superfície de Controle (SC)**.





O vetor $\hat{n}$ é um vetor unitário, perpendicular à superfície, apontando para fora. O vetor $\hat{n}$ é puramente geométrico.

Se $\vec{V} \cdot \hat{n} < 0$, o escoamento está **entrando** no **VC** naquele ponto.
Se $\vec{V} \cdot \hat{n} > 0$, o escoamento está **saindo** do **VC** naquele ponto.
Se $\vec{V} \cdot \hat{n} = 0$, o escoamento é tangente à superfície: **não entra nem sai**.



Para um pequeno elemento de superfície, o **fluxo** de b para fora do **VC** levado pelo escoamento é dado por

$$\rho b(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dS \ .$$

O **fluxo total** para fora é obtido a partir da soma de todos os pequenos fluxos em toda a **Superfície de Controle SC**:

$$\dot{B}_T = \int_{SC} \rho b(\vec{V} \cdot \hat{n})\, dS \tag{38}$$

A quantidade total de B no **Sistema** é:

$$B_{sist} = \int_{\forall_{sist}} \rho\, b\, d\forall \tag{39}$$

A quantidade total de B no **Volume de Controle** é:

$$B_{vc} = \int_{VC} \rho\, b\, d\forall \tag{40}$$

Substituindo as equações (38), (39) e (40) em (32) resulta

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, b\, d\forall + \int_{SC} \rho b\, (\vec{V}\cdot\hat{n})\, dS \tag{41}$$

Considerando um **Volume de Controle** fixo, podemos passar a derivada no volume de controle pra dentro, resultando em

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, b)\; d\forall + \int_{SC} \rho b\, (\vec{V}\cdot\hat{n})\, dS\ . \tag{42}$$

Lembrando que

$$B_{sist} = \int_{\forall_{sist}} \rho\, b\, d\forall\ . \tag{43}$$

Concluindo:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\, b)\ d\forall + \int_{SC} \rho b\, (\vec{V} \cdot \hat{n})\, dS\ . \qquad (44)$$

Esse é o **Teorema do Transporte de Reynolds** (TTR).

Com o TTR podemos converter leis de conservação (desenvolvidas para **Sistemas**) em formas que sejam válidas e úteis na análise de **Volume de Controle**.

Sumário

Vimos que a derivada material é a derivada acompanhando uma partícula de fluido:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \ . \tag{45}$$

Podemos dizer que a **Derivada Material** e o **Teorema do Transporte de Reynolds** representam métodos para transformar conceitos fundamentalmente lagrangianos em interpretações eulerianas desses conceitos.

O TTR pode ser visto como o equivalente integral da derivada material.

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{Descrição lagrangiana} \arrow[r] & \dfrac{D}{Dt} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \textbf{Descrição euleriana} \\
\textbf{Análise de sistemas} \arrow[r] & \textbf{TTR} \arrow[r] & \textbf{Análise de VC}
\end{tikzcd}
$$