Condução de Calor

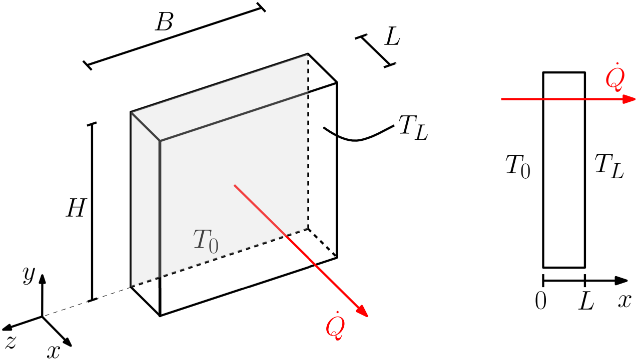
Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

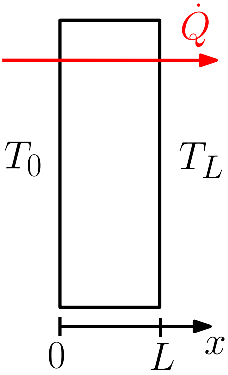
Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

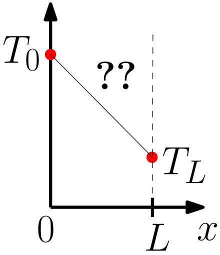
Sumário

Condução é a transferência de energia das partículas mais energéticas de um material para partículas vizinhas menos energéticas, como resultado da interação entre elas. A condução pode ocorrer em sólidos, líquidos e gases.



Obs.: superfícies não armazenam energia.





$$T = T(x, t)$$

$$\dot{Q} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Delta U = mc\Delta T$$

A **temperatura** T é função da **posição** e do **tempo**.

Para cada ponto no espaço e para cada instante de tempo nós podemos ter um valor diferente de T. Para o caso unidimensional:

$$T = T(x,t) \tag{1}$$

Queremos uma equação para a temperatura!!!

Temos a **Lei de Fourier**:

$$\dot{Q} = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2}$$

Essa lei relaciona a **temperatura** com a **taxa de transferência de calor**.

Note que se $\partial T/\partial x = 0$, ou seja, se não há variação da temperatura com relação a x, não há transferência de calor.

$$\dot{Q} = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3}$$

Nessa equação:

$\dot{Q}$ é a taxa de transferência de calor. $[\dot{Q}] = W$

k é a condutividade térmica. $[k] = W/(m.^oC)$

A é a área normal (perpendicular) à direção de transferência de calor. $[A] = m^2$

$\partial T/\partial x$ é a inclinação da curva que representa a temperatura em um dado instante de tempo. $[\partial T/\partial x] =^o C/m$

Por outro lado, temos também:

$$\Delta E = \Delta U = mc\Delta T \tag{4}$$

$$\Delta E = E(t + \Delta t) - E(t) \tag{5}$$

$$\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t) \tag{6}$$

$$E(t + \Delta t) - E(t) = mc(T(t + \Delta t) - T(t)) \tag{7}$$

t é um instante de tempo. $[t] = s$
Δt é um intervalo de tempo. $[\Delta t] = s$

t é o instante antes do processo acontecer e $t + \Delta t$ é o instante de tempo depois.

Essa é a equação:

$$\Delta E = \Delta U = mc\Delta T \tag{8}$$

Vamos escrever em função da densidade e do volume.

Relação entre densidade, massa e volume:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \rightarrow \qquad m = \rho V \tag{9}$$

ρ é a densidade do material. $[\rho] = kg/m^3$

m é a massa. $[m] = kg$

V é o volume. $[V] = m^3$

Resulta então

$$\Delta E = \rho V c \Delta T \tag{10}$$

$$\Delta E = (\rho c) V \Delta T \tag{11}$$

$$E(t + \Delta t) - E(t) = (\rho c) V \{T(t + \Delta t) - T(t)\} \tag{12}$$

ρc é a capacidade térmica do material.

Temos a equação (2) que relaciona T com taxa de transferência de calor.

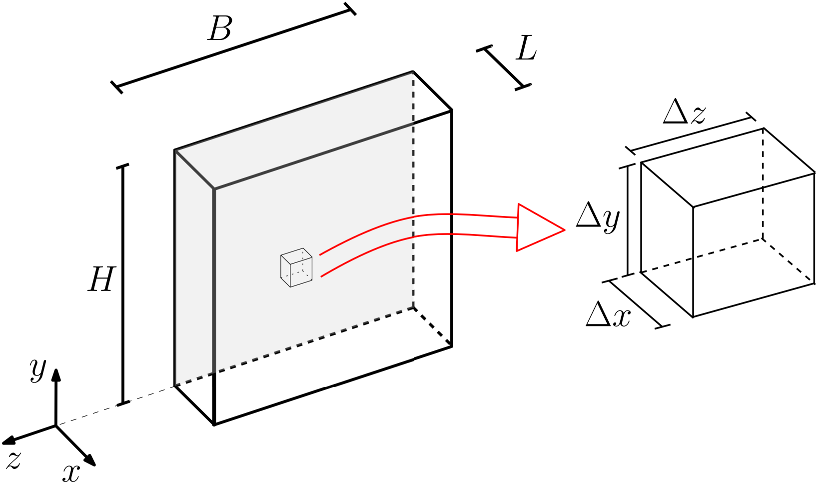
Por outro lado, temos a equação (12), que relaciona T com a variação da energia.

Temos ainda a Primeira Lei da Termodinâmica, que relaciona a variação de energia com transferência de calor. ($\Delta E = \Delta U = Q$).

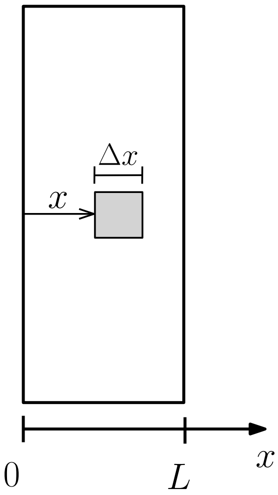
Vamos juntar esses 3 conceitos e encontrar uma equação para a temperatura em cada ponto e em cada tempo.

Para isso, vamos aplicar a Primeira Lei em um pequeno elemento do material......

Sumário



B
L
H
Δz
Δy
Δx
y
z
x


Δx
x
0
L
x

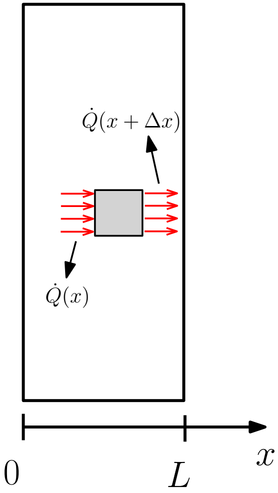
Vamos aplicar a **lei de conservação de energia** para esse pequeno bloco.

$$\Delta E = E(t + \Delta t) - E(t) = E_{entra} - E_{sai} \tag{13}$$

Primeiramente, temos:

$$E_{entra} = \dot{Q}(x)\Delta t \tag{14}$$

$$E_{sai} = \dot{Q}(x + \Delta x)\Delta t \tag{15}$$


$\dot{Q}(x + \Delta x)$
$\dot{Q}(x)$
0
L
x

Depois, temos:

$$E(t+\Delta t) - E(t) = (\rho c)V\{T(t+\Delta t) - T(t)\} \tag{16}$$

O volume do bloco é

$$V = \Delta x(\Delta y \Delta z) = (\Delta x)\, A \tag{17}$$

Ou seja:

$$E(t+\Delta t) - E(t) = (\rho c)(A\,\Delta x)\{T(t+\Delta t) - T(t)\} \tag{18}$$

Substituindo as equações (14), (15) e (18) em (13) temos

$$(\rho c)(A\,\Delta x)\{T(t+\Delta t)-T(t)\}=\{\dot{Q}(x)-\dot{Q}(x+\Delta x)\}\Delta t \qquad (19)$$

Note que se o $\dot{Q}$ é o mesmo dos dois lados, então o que entra de energia é igual ao que sai. Nesse caso a temperatura iria permanecer constante (no tempo).

Na equação (19), vamos passar o Δt para o lado esquerdo e o Δx para o lado direito.

$$(\rho c)A\left(\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}\right)=\left(\frac{\dot{Q}(x)-\dot{Q}(x+\Delta x)}{\Delta x}\right) \qquad (20)$$

Ou:

$$(\rho c)A\left(\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}\right)=-\left(\frac{\dot{Q}(x+\Delta x)-\dot{Q}(x)}{\Delta x}\right) \qquad (21)$$

Fazendo $\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, resulta

$$(\rho c)A\,\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} \qquad (22)$$

Conclusão:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} \tag{23}$$

Traduzindo: só existe variação de temperatura no **tempo** se houver variação da taxa de transferência de calor no **espaço**, ou seja, **se entra mais calor de um lado do que sai do outro.**

No entanto, temos uma equação, que é a (23), e duas incógnitas, T e $\dot{Q}$.

Precisamos de mais uma equação, que é a **Lei de Fourier:**

$$\dot{Q} = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \tag{24}$$

Substituindo a **Lei de Fourier** na equação (23), temos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{25}$$

"A" é constante nesse caso pois a parede é plana.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{26}$$

Vimos que "k" não é constante, pois depende da temperatura. Mas em muitos casos, **podemos aproximar "k" como constante.**

Assim:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{27}$$

Ou:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{28}$$

Vamos definir uma nova propriedade, chamada de **difusividade térmica** α, dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \tag{29}$$

Chegamos na seguinte equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{30}$$

Essa equação é chamada de **Equação da Condução de Calor** ou **Equação da Difusão de Calor**.

Essa é uma equação diferencial parcial homogênea linear de segunda ordem.

$$T = T(x, t)$$

A variação local da temperatura no tempo está relacionada a uma variação espacial da derivada espacial da temperatura.

Sumário

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{\text{condução}}{\text{armazenamento}} \tag{31}$$

α é a *'velocidade'* com que o calor se difunde por meio de um material. Razão entre calor conduzido por meio do material e o calor armazenado (por unidade de volume).

Alguns exemplos de valores de α, em m^2/s:

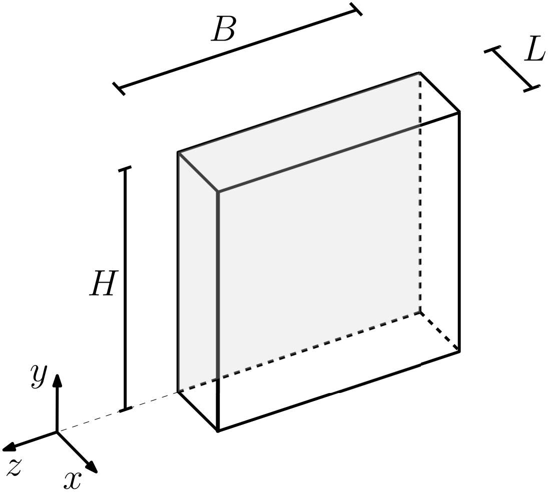
Prata	$\rightarrow$	149×10^{-6}
Ouro	$\rightarrow$	127×10^{-6}
Ferro	$\rightarrow$	$22,8 \times 10^{-6}$
Água(l)	$\rightarrow$	$0,14 \times 10^{-6}$
Madeira	$\rightarrow$	$0,13 \times 10^{-6}$

Sumário

No caso mais geral, a condução de calor é tridimensional. Além disso, a condutividade térmica não é constante (depende da temperatura) e depende da direção, ou seja, a condutividade na direção x, k_1, é diferente da condutividade na direção y, k_2, e da condutividade na direção z, k_3.

A **Equação da Condução de Calor Geral** é

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_3 \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{32}$$



B
L
H
y
z
x

Aproximação: **bidimensional.**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{33}$$

Aproximação: **unidimensional.**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{34}$$

Aproximação: k **constante.**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{35}$$

Regime permanente: quando a temperatura não depende do tempo. Assim, $\partial T/\partial t = 0$.

Para esse caso, $T = T(x)$ e a equação do calor é dada por:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{36}$$

O gráfico da temperatura é uma reta.

Ou seja, a inclinação de T é constante, o que significa que a quantidade de energia que entra é igual à que sai.

Não há acúmulo nem perda de energia para um bloco ao longo do tempo. A temperatura não muda no tempo.

Sumário

Condições de contorno são expressões matemáticas das condições térmicas nas fronteiras.

Vamos resolver o caso **unidimensional**, **com** k **constante** e **permanente**.

A equação resultante é:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{37}$$

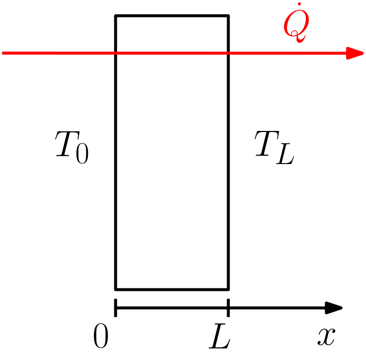
Solução geral:

$$T(x) = C_1 x + C_2 \tag{38}$$

C_1 e C_2 são constantes. Para determinar seus valores precisamos das condições de contorno.

Temos diferentes tipos de condições de contorno.

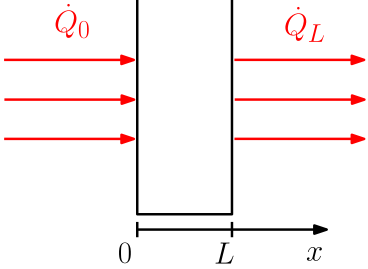
i) Temperatura



$$T(x = 0) = T_0$$

$$T(x = L) = T_L$$

ii) Taxa de calor



Em $x = 0$:

$$\dot{Q}_0 = \dot{Q}_{cond}$$

$$\dot{Q}_{cond}(x = 0) = -kA\frac{dT}{dx}(x = 0) =$$

$$= \dot{Q}_0$$

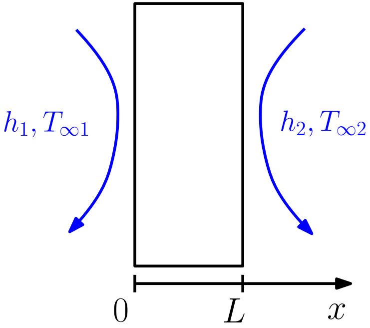
Em $x = L$:

$$\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_L$$

$$\dot{Q}_{cond}(x = L) = -kA\frac{dT}{dx}(x = L) =$$

$$= \dot{Q}_L$$

iii) Convecção



Em $x = 0$:

$$\dot{Q}_{conv} = \dot{Q}_{cond}$$

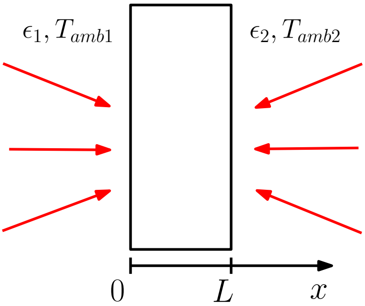
$$-kA\frac{dT}{dx}(x=0) =$$
$$= Ah_1[T_{\infty 1} - T(x=0)]$$

Em $x = L$:

$$\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{conv}$$

$$-kA\frac{dT}{dx}(x=L) =$$
$$= Ah_2[T(x=L) - T_{\infty 2}]$$

iv) Radiação



Em $x = 0$:

$$\dot{Q}_{rad} = \dot{Q}_{cond}$$

$$-kA\frac{dT}{dx}(x=0) =$$
$$= \epsilon_1 A\,\sigma\,[T_{amb1}^4 - T(0)^4]$$

Em $x = L$:

$$\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{rad}$$

$$-kA\frac{dT}{dx}(x=L) =$$
$$= \epsilon_2 A\,\sigma\,[T(L)^4 - T_{amb2}^4]$$

Podemos ter uma combinação de várias dessas condições de contorno no mesmo problema.

Na próxima seção veremos alguns exemplos!

Sumário

Temos:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{39}$$

A solução é:

$$T(x) = C_1 x + C_2 \tag{40}$$

O objetivo é determinar C_1 e C_2 a partir das condições de contorno.

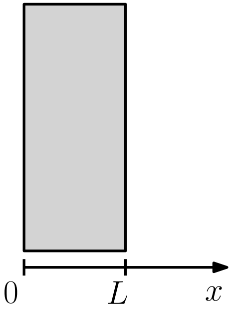
Calculando $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = -kA\,\frac{dT}{dx} = -kA\,C_1 \tag{41}$$

$$C_1 = -\frac{1}{kA}\dot{Q} \tag{42}$$

Vamos considerar exemplos com diferentes condições de contorno para a mesma placa (parede). **O objetivo em todos esses problemas é encontrar o perfil de temperatura e/ou determinar o $\dot{Q}$.**

$$A = 2\,m^2 \qquad k = 50\,\frac{W}{m.^oC} \qquad L = 0,2\,m$$



Parede interna: $x = 0$.
Parede externa: $x = L$.

Exemplo 1. (Temperaturas dadas nas fronteiras).Encontre o perfil de temperatura e a taxa de transferência de calor na placa sendo estudada, submetida às seguintes condições de contorno.

$$T(0) = 110\,^oC$$
$$T(L) = 83\,^oC$$

Solução:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$T(0) = C_1(0) + C_2 = C_2 = 110\,^oC$$

$$C_2 = 110\,^oC$$

$$T(0,2) = 0,2C_1 + C_2 = 0,2C_1 + 110\,^oC = 83\,^oC$$

$$0,2C_1 + 110\,^oC = 83\,^oC$$

$$C_1 = -135\,\frac{^oC}{m}$$

Assim:

$$T(x) = (-135x + 110)^oC \tag{43}$$

Esse é o **perfil de temperatura**.

(Pra conferir, faça $x = 0$ e $x = 0,2\,m$ e confirme que coincide com as condições de contorno.)

(Essa é a única solução que satisfaz, simultaneamente, a equação diferencial e as condições de contorno. Solução única.)

A taxa de transferência de calor é dada por:

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx} = -kAC_1 = -\left(50\,\frac{W}{m.^oC}\right)\left(2\,m^2\right)\left(-135\frac{^oC}{m}\right) \quad (44)$$

$$\dot{Q} = 13500\,W \quad (45)$$

Essa é a **taxa de Transferência de Calor**.

(Note que o $\dot{Q}$ não depende de x, então pode ser calculado em qualquer ponto.)

(Se o $\dot{Q}$ dependesse de x, o problema não seria permanente.)

Exemplo 2. (Temperatura e taxa de calor dadas nas fronteiras).Encontre o perfil de temperatura e a taxa de transferência de calor na placa sendo estudada, submetida às seguintes condições de contorno.

$$T(0) = 93\,^oC$$
$$\dot{Q}(x = L) = 110\,W$$

Solução:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$T(0) = C_1(0) + C_2 = C_2 = 93\,^oC$$

$$\dot{Q}(L) = 110\,W = -kA\frac{dT}{dx} = -kAC_1 = -\left(50\,\frac{W}{m.^oC}\right)\left(2\,m^2\right)C_1$$

$$C_1 = -\frac{110}{100}\frac{^oC}{m} = -1,1\frac{^oC}{m}$$

$$T(x) = (-1,1x + 93)^oC$$

Essa é a solução do problema.

O $\dot{Q}$ já foi dado no enunciado.

$$\dot{Q} = 110\,W \quad (46)$$

Exemplo 3. (Diferentes taxas de calor dadas nas fronteiras).Encontre o perfil de temperatura e a taxa de transferência de calor na placa sendo estudada, submetida às seguintes condições de contorno.

$$\dot{Q}(x=0) = 100\,W \tag{47}$$

$$\dot{Q}(x=L) = 50\,W \tag{48}$$

Solução:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

Em $x = 0$:

$$\dot{Q}(x=0) = -kA\frac{dT}{dx}(x=0) = -kAC_1 = 100\,W$$

$$-kAC_1 = -\left(50\,\frac{W}{m.^oC}\right)\left(2\,m^2\right)C_1 = 100\,W$$

$$C_1 = -1\frac{^oC}{m}$$

Em $x = L$:

$$\dot{Q}(x=L) = -kA\frac{dT}{dx}(x=L) = -kAC_1 = 50\,W$$

$$-kAC_1 = -\left(50\,\frac{W}{m.^oC}\right)\left(2\,m^2\right)C_1 = 50\,W$$

$$C_1 = -0,5\,\frac{^oC}{m} \qquad (49)$$

$$C_1 \neq C_1 \tag{50}$$

Faz sentido?? Tem alguma coisa estranha aí.

Esse problema não é permanente, pois está entrando mais calor do que está saindo. A temperatura espacial média da parede tem que aumentar com o tempo.

Mas nós tentamos resolver assumindo problema permanente, por isso deu errado.

O que fazer nesse caso?

Exemplo 4. (Taxas de calor idênticas dadas nas fronteiras).Encontre o perfil de temperatura e a taxa de transferência de calor na placa sendo estudada, submetida às seguintes condições de contorno.

$$\dot{Q}(x=0) = 100\,W \tag{51}$$

$$\dot{Q}(x=L) = 100\,W \tag{52}$$

Solução:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

Em $x = 0$:

$$\dot{Q}(x=0) = -kA\frac{dT}{dx}(x=0) = -kAC_1 = 100\,W$$

$$-kAC_1 = -\left(50\,\frac{W}{m.^oC}\right)\left(2\,m^2\right)C_1 = 100\,W$$

$$C_1 = -1\frac{^oC}{m}$$

Em $x = L$:

$$\dot{Q}(x=L) = -kA\frac{dT}{dx}(x=L) = -kAC_1 = 100\,W$$

$$-kAC_1 = -\left(50\,\frac{W}{m.^oC}\right)\left(2\,m^2\right)C_1 = 100\,W$$

$$C_1 = -1\frac{^oC}{m} \qquad (53)$$

Resposta:

$$T(x) = (-1x + C_2)^{o}C$$

Temos duas informações nas fronteiras, mas elas são redundantes.

Não é possível determinar C_2 com essas informações.

Exemplo 5. (Temperatura dada de um lado e condição de convecção do outro).Encontre o perfil de temperatura e a taxa de transferência de calor na placa sendo estudada, submetida às seguintes condições de contorno.

Em $x = 0$:

$$T(x = 0) = 70^oC \tag{54}$$

Em $x = L$, temos convecção com:

$$h = 40\frac{W}{m^2.^oC} \qquad T_\infty = 25^oC \tag{55}$$

Solução:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$T(0) = 70^oC = C_2$$

No lado direito, em $x = L$, temos equilíbrio entre condução e convecção. Assim, em $x = L$:

$$-kA\frac{dT}{dx} = -kAC_1 = hA(T(L) - T_\infty)$$

$$-kC_1 = h(T(L) - T_\infty)$$

$$C_1 = -\frac{h}{k}(T(L) - T_\infty)$$

Duas incógnitas: $T(L)$ e C_1.

Mas:

$$T(L) = C_1 L + C_2 = 0,2C_1 + 70$$

$$C_1 = -\frac{h}{k}(T(L) - T_\infty)$$

$$C_1 = -31,03\,\frac{^oC}{m}$$

A solução do problema é

$$T(x) = (-31x + 70)^oC$$

E quanto vale $\dot{Q}$? Exercício.

Exemplo 6. (Taxa de transferência de calor dada de um lado e condição de convecção do outro).Encontre o perfil de temperatura e a taxa de transferência de calor na placa sendo estudada, submetida às seguintes condições de contorno.

Em $x = 0$:

$$\dot{Q}(x = 0) = 3500\,W$$

Em $x = L$, temos convecção com:

$$h = 40\frac{W}{m^2.^oC} \qquad T_\infty = 25^oC$$

Solução:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Em $x = 0$:

$$-kA\frac{dT}{dx}(x=0) = -kAC_1 = \dot{Q}(x=0) = 3500\,W$$

$$C_1 = -35\,\frac{^oC}{m}$$

Em $x = L$:

$$-kA\frac{dT}{dx}(x=L) = hA(T(L) - T_\infty)$$

$$-50C_1 = (-50)\times(-35) = 40(T(L) - 25)$$

$$T(L) = 68,75\,^oC$$

Mas, pela equação para T, temos

$$T(L) = C_1 x + C_2 = -35x + C_2 = 68,75$$

$$C_2 = 75,75\,^oC$$

Resposta final:

$$T(x) = (-35x + 75,75)\,^oC$$