A Equação de Navier-Stokes

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

A equação de Navier-Stokes é a Segunda Lei de Newton aplicada a um fluido newtoniano. Nesta aula iremos deduzi-la.

Quantidade de Movimento Linear de um sistema:

$$\vec{p}_{sist} = \int_{\forall_{sist}} \rho \vec{V} d\forall \ . \tag{1}$$

Segunda Lei de Newton: a taxa de variação da quantidade de movimento linear de um sistema é igual à força resultante que atua sobre o sistema. **Equação:**

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}_{sist}}{dt} \ . \tag{2}$$

Ou:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{\forall_{sist}} \rho \vec{V} d\forall \ . \qquad (3)$$

O lado esquerdo da equação (3) representa o somatório de forças que agem no sistema e o lado direito representa a taxa de variação da quantidade de movimento linear.

A equação (3) é a equação mais importante dessa aula. Vamos desenvolver detalhadamente cada um dos lados, transformando todos os termos em integrais no **volume de controle**.

Vamos começar com o lado direito.

Antes, porém, vamos dar uma olhada no conceito de **tensores**, pois vamos precisar deles nas próximas seções.

Sumário

Um **escalar** é uma entidade que pode ser representada por um número. Exemplo: pressão p.

Um **vetor** é uma entidade que pode ser representada por 3 números. Exemplo: aceleração

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} .$$

Um **tensor** é uma grandeza que pode ser representada por 9 números, formando uma matriz 3×3. Exemplo:

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} .$$

Usamos uma seta sobre a letra para representar um vetor e duas setas para representar um tensor. Note que o vetor precisa de um índice, e o tensor de dois.

Sejam dois vetores

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} .$$

O **produto tensorial** entre esses dois vetores é definido como

$$\vec{A}\vec{B} = \begin{bmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{bmatrix} \tag{4}$$

Tensor transposto:

$$\left(\vec{\vec{\mathcal{T}}}\right)^T = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{xx} & \mathcal{T}_{yx} & \mathcal{T}_{zx} \\ \mathcal{T}_{xy} & \mathcal{T}_{yy} & \mathcal{T}_{zy} \\ \mathcal{T}_{xz} & \mathcal{T}_{yz} & \mathcal{T}_{zz} \end{bmatrix} .$$

Gradiente de um vetor $\vec{A}$ qualquer:

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix} . \tag{5}$$

Transposto do gradiente de um vetor $\vec{A}$:

$$(\vec{\nabla}\vec{A})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial_z} \\ \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix} . \tag{6}$$

O tensor identidade:

$$\vec{\vec{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

A soma de tensores é feita por meio da soma das componentes:

$$\vec{\vec{\sigma}} = -p\vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\tau}}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-p + \tau_{xx}) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (-p + \tau_{yy}) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (-p + \tau_{zz}) \end{bmatrix}$$

Temos 9 equações representadas aí:

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx} \qquad \sigma_{xy} = \tau_{xy} \qquad \sigma_{xz} = \tau_{xz} \qquad \cdots$$

Produto escalar entre um vetor $\vec{A}$ e um tensor $\vec{\vec{\tau}}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{\vec{\tau}} = \left[\begin{array}{ccc} A_x & A_y & A_z \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{array} \right] \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{\vec{\tau}} = & (A_x\tau_{xx} + A_y\tau_{yx} + A_z\tau_{zx})\hat{\imath} + \\ & + (A_x\tau_{xy} + A_y\tau_{yy} + A_z\tau_{zy})\hat{\jmath} + \\ & + (A_x\tau_{xz} + A_y\tau_{yz} + A_z\tau_{zz})\hat{k} \end{aligned} \tag{8}$$

Note que o resultado é um vetor.

Divergente de um tensor:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{array} \right] \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} = & \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{\jmath} + \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k} \end{aligned} \tag{10}$$

O resultado é um vetor. Então o divergente de um tensor gera um vetor.

Teorema da Divergência para um tensor:

$$\int_{\forall} \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \, d\forall = \int_S \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \, dS \tag{11}$$

Sumário

Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_{sist}} \rho b d\forall = \int_{VC} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} d\forall + \int_{SC} \rho b \left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) dS \ . \tag{12}$$

Agora temos $\vec{B} = m\vec{V}$, com $\vec{b} = \vec{V}$. Note que $\vec{B}$ agora é uma grandeza vetorial. **Resulta:**

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_{sist}} \rho\vec{V} d\forall = \int_{VC} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} d\forall + \\ + \int_{SC} \rho\vec{V}\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) dS \ .\end{aligned} \tag{13}$$

O último termo da equação (13) pode ser reescrito como:

$$\int_{SC} \rho\vec{V}\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) dS = \int_{SC} \hat{n}\cdot\left(\rho(\vec{V}\vec{V})\right) dS \ . \tag{14}$$

$\rho\vec{V}\vec{V}$ é um tensor. Fazendo $\vec{\vec{A}} = \rho\vec{V}\vec{V}$ no Teorema da Divergência para Tensores, temos:

$$\int_{SC} \left(\rho(\vec{V}\vec{V}) \cdot \hat{n}\right) dS = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho\vec{V}\vec{V}\right) d\forall \tag{15}$$

Assim, a equação (13) se torna:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_{sist}} \rho\vec{V} d\forall = \int_{VC} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} d\forall + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho\vec{V}\vec{V}\right) d\forall \ . \tag{16}$$

Assim:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_{sist}} \rho\vec{V}\,d\forall = \int_{VC}\left[\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)\right]d\forall\ . \qquad (17)$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right) =& \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + \\ &+ \vec{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\right]\ .\end{aligned} \qquad (18)$$

O termo entre colchetes representa a equação da continuidade, e é nulo. Portanto:

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right) = \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\ . \qquad (19)$$

Assim, o **lado direito da equação (3)** pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_{sist}} \rho\vec{V}\,d\forall = \int_{VC}\left[\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right]d\forall\ . \qquad (20)$$

Sumário

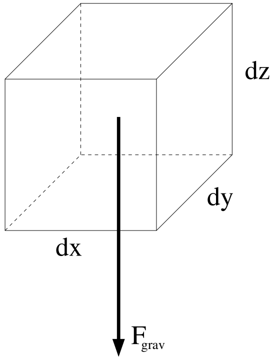
As forças agindo no volume de controle são:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visc} \ . \tag{21}$$

A força gravitacional $\vec{F}_{grav}$ age à distância, é uma **força de volume**.

A força de pressão $\vec{F}_{press}$ é uma **força de superfície**, de curto alcance, assim como a força viscosa $\vec{F}_{visc}$.

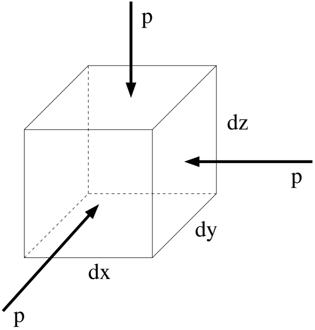
Força Gravitacional: $\vec{F}_{grav}$



$$d\vec{F}_{grav} = \rho\vec{g}(dxdydz) = \rho\vec{g}d\forall \ .$$

$$\vec{F}_{grav} = \int_{VC} \rho\vec{g}d\forall \ . \qquad (22)$$

Força de Pressão: $\vec{F}_{press}$



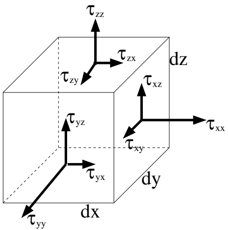
A força total é:

$$\vec{F}_{press} = \int_{SC} -p\hat{n}\, dS \ .$$

Teorema da Divergência:

$$\vec{F}_{press} = \int_{VC} (-\vec{\nabla} p)\ d\forall \ . \quad (23)$$

Força Viscosa: $\vec{F}_{visc}$



Tensor de tensões viscosas $\vec{\vec{\tau}}$:

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Precisamos de 9 componentes para descrever a força viscosa.

Força exercida em uma superfície com normal $\hat{n}$:

$$\vec{t} = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\tau}} \; . \tag{25}$$

Exemplos:

$\hat{n} = \hat{i}$:

$$\vec{t} = \tau_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k} \; . \tag{26}$$

$\hat{n} = \hat{j}$:

$$\vec{t} = \tau_{yx}\hat{i} + \tau_{yy}\hat{j} + \tau_{yz}\hat{k} \; . \tag{27}$$

$\hat{n} = \hat{k}$:

$$\vec{t} = \tau_{zx}\hat{i} + \tau_{zy}\hat{j} + \tau_{zz}\hat{k} \; . \tag{28}$$

Assim:

$$d\vec{F}_{visc} = (\hat{n} \cdot \vec{\vec{\tau}})\, dS \ . \tag{29}$$

Integrando em toda a superfície de controle, temos a força viscosa total:

$$\vec{F}_{visc} = \int_{SC} \hat{n} \cdot \vec{\vec{\tau}}\, dS \ . \tag{30}$$

Usando o Teorema da Divergência:

$$\vec{F}_{visc} = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}}\, d\forall \ . \tag{31}$$

Temos todas as forças escritas como integrais no volume de controle.

Assim, substituindo as equações (22), (23) e (31) em (21), resulta:

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g} d\forall + \int_{VC} (-\vec{\nabla} p)\ d\forall + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}}\, d\forall\ . \qquad (32)$$

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \left[\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} \right]\ d\forall\ . \qquad (33)$$

Esse é o lado esquerdo **da equação (3).**

Sumário

Juntando tudo até aqui, nós começamos com a equação (3),

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{\forall_{sist}} \rho \vec{V} d\forall \ ,$$

aí abrimos os dois lados como integrais no **volume de controle**. **O lado direito,**

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_{sist}} \rho \vec{V} d\forall = \int_{VC} \left[\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] d\forall \ , \qquad (34)$$

e **o lado esquerdo,**

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \left[\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} \right] d\forall \ . \qquad (35)$$

Substituindo essas relações pros lados direito e esquerdo na equação original, temos:

$$\int_{VC} \left[\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] d\forall = \int_{VC} \left[\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} \right] d\forall \ . \quad (36)$$

Ou:

$$\int_{VC} \left[\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} - \rho \vec{g} + \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} \right] d\forall = \vec{0} \ . \quad (37)$$

Teorema da Localização: se a integral de uma função contínua é nula para qualquer intervalo de integração, então essa função é nula.

Resulta:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\tau}}\,. \qquad (38)$$

Essa é a **equação de Cauchy** e é **válida para qualquer fluido**.

Porém, a equação (38) ainda não é muito útil nessa forma, pois temos 4 equações (continuidade e 38) e 13 incógnitas (p, $\vec{V}$, $\vec{\vec{\tau}}$). Precisamos de uma equação que relacione $\vec{\vec{\tau}}$ e $\vec{V}$. Equações desse tipo são chamadas de **equações constitutivas**, e dependem do material (fluido) estudado.

Sumário

Equação constitutiva para um fluido Newtoniano incompressível:

$$\vec{\vec{\tau}} = \mu \left[\vec{\nabla}\vec{V} + \left(\vec{\nabla}\vec{V} \right)^T \right] \quad . \tag{39}$$

μ é a viscosidade do fluido.

$\vec{\nabla}\vec{V}$ é o gradiente da velocidade:

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad . \tag{40}$$

$\left(\vec{\nabla}\vec{V}\right)^T$ é o transposto do gradiente da velocidade:

$$\left(\vec{\nabla}\vec{V}\right)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} . \tag{41}$$

Então, a equação (39) é uma equação matricial:

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Substituindo (39) em (38), resulta:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\left[\mu\vec{\nabla}\vec{V}+\mu\left(\vec{\nabla}\vec{V}\right)^{T}\right]\ . \quad (43)$$

Viscosidade constante:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\vec{V}+\left(\vec{\nabla}\vec{V}\right)^{T}\right]\ . \quad (44)$$

Mas

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{V}\right)=\nabla^{2}\vec{V} \quad (45)$$

e

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{V}\right)^{T}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)=\vec{0}\ , \quad (46)$$

pois $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$ para um fluido incompressível.

Assim, a equação (43) se torna:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} \ . \tag{47}$$

Essa é a equação de Navier-Stokes (NS). Essa é a equação fundamental da Mecânica dos Fluidos, juntamente com a equação da continuidade.

Em coordenadas cartesianas: $\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}$.

A equação de NS e a equação da continuidade, em coordenadas Cartesianas, são dadas por:

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ . \tag{48}$$

NS, direção x:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

NS, direção y:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\rho w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

NS, direção z:

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$