Cinemática dos Fluidos

Transporte de Calor e Massa

Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

Sumário

A **cinemática** estuda o **movimento** sem necessariamente considerar as forças e os momentos que **causam** esse movimento.

Tem como objetivo descrever/visualizar o movimento de um fluido.

Para descrever o movimento podemos ter duas abordagens: **a descrição lagrangiana** e a **descrição euleriana.**

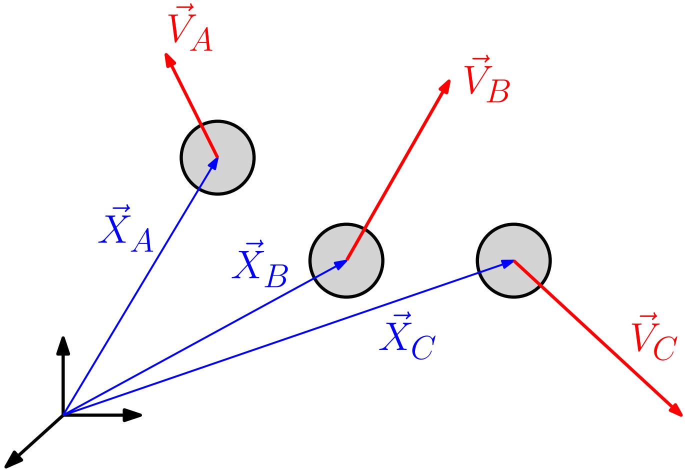
Sumário

Na **descrição lagrangiana** nós acompanhamos os objetos individualmente. Cada partícula tem um vetor posição, um vetor velocidade e um vetor aceleração. Os três são dependentes do tempo.

As leis de Newton são usadas para descrever o movimento desses objetos e podemos prever com exatidão aonde eles vão.

Funciona bem para poucas partículas.

- Vetor posição de cada partícula: $\vec{X}_A(t)$, $\vec{X}_B(t)$, $\vec{X}_C(t)$, $\cdots$
- Vetor velocidade de cada partícula: $\vec{V}_A(t)$, $\vec{V}_B(t)$, $\vec{V}_C(t)$, $\cdots$
- Vetor aceleração de cada partícula: $\vec{a}_A(t)$, $\vec{a}_B(t)$, $\vec{a}_C(t)$, $\cdots$


$\vec{V}_A$
$\vec{V}_B$
$\vec{X}_A$
$\vec{X}_B$
$\vec{X}_C$
$\vec{V}_C$

Sumário

Acompanhar cada partícula de fluido se torna uma tarefa bem complicada. Por isso, o movimento de um fluido é quase sempre apresentado por meio da descrição euleriana.

Na **descrição euleriana** nós temos variáveis de campo, que são **funções do tempo e do espaço**. A partícula que ocupa uma determinada posição tem a velocidade dada pelo campo de velocidade naquele ponto. O mesmo vale para a aceleração e para a densidade, por exemplo.

Dessa forma, nós não acompanhamos a posição e a velocidade de uma partícula de fluido com identidade fixa. Em vez disso, **nos preocupamos com um ponto do espaço**.

A porção (ou partícula) de fluido que ocupa uma determinada posição em um determinado instante de tempo tem a propriedade dada pelo campo naquela posição e tempo.

Exemplos de campos.

Campo de **Velocidade**:

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\hat{\imath} + v(x,y,z,t)\hat{\jmath} + w(x,y,z,t)\hat{k}$$

Campo de **Aceleração**:

$$\vec{a} = a_x(x,y,z,t)\hat{\imath} + a_y(x,y,z,t)\hat{\jmath} + a_z(x,y,z,t)\hat{k}$$

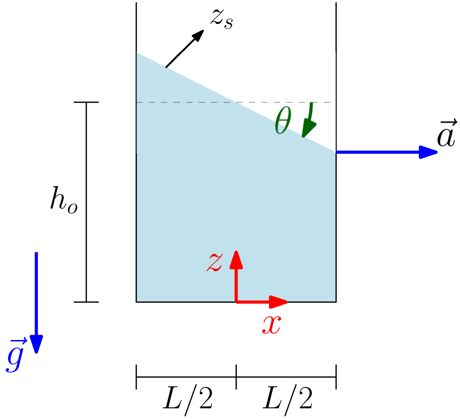
Campo de **Pressão**: $p = p(x,y,z,t)$

Campo de **Densidade**: $\rho = \rho(x,y,z,t)$

Campo de **Temperatura**: $T = T(x,y,z,t)$

Exemplo. Campo de pressão para um fluido em movimento de corpo rígido.

$$p = p(x, y, z, t) = p_0 - \rho g z - \rho a x \tag{1}$$



<u>**Exemplo.**</u> Considere um modelo simples de escoamento para um bocal convergente.

$$\vec{V} = (1+x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath} \tag{2}$$

Note que nesse caso $u = 1 + x$ e $v = -y$. Temos um vetor para cada ponto do espaço. A partícula de fluido passando por esse ponto tem essa velocidade.

Para o ponto $x = 0$ e $y = 0$ temos: $\vec{V}(0,0) = 1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$.
Para $x = 1$, $y = 0$: $\vec{V}(1,0) = 2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$.
$\vec{V}(2,0) = 3\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$ $\quad$ $\vec{V}(0,1) = 1\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}$ $\quad$ $\vec{V}(0,2) = 1\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$
$\vec{V}(1,1) = 2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}$ $\quad$ $\vec{V}(2,2) = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ $\quad$ $\vec{V}(-1,-1) = 0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$
E assim por diante. Veja o gráfico no próximo slide.

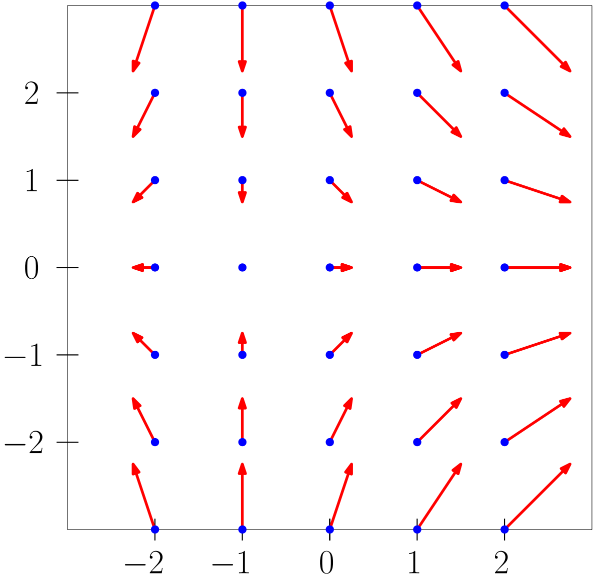


Figura: Campo de velocidade.

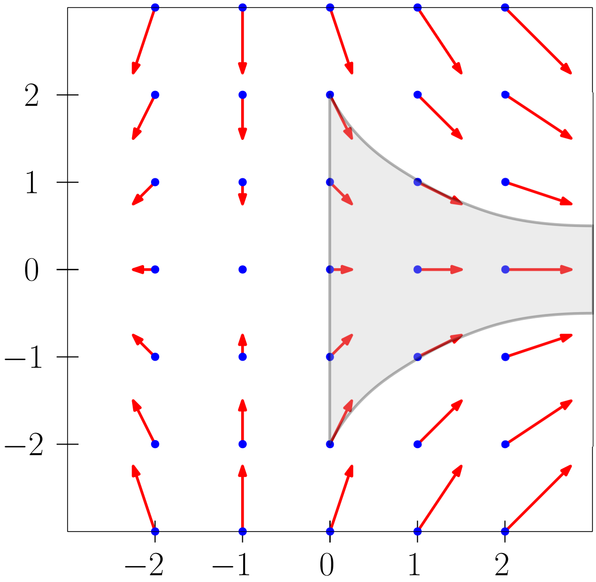


Figura: Campo de velocidade. Aproximação para um duto convergente.

Ponto de estagnação: é o ponto do escoamento em que a velocidade é zero.

No escoamento do exemplo anterior, o ponto de estagnação é $(-1, 0)$.

Dado um campo de velocidade $\vec{V}$, como encontrar a aceleração de uma partícula de fluido que ocupa uma dada posição (x, y, z). Ou seja, **como encontrar o campo de aceleração** $\vec{a}$?

Sumário

Considere uma partícula de fluido no ponto

$$\vec{X}_p(t) = x_p(t)\hat{\imath} + y_p(t)\hat{\jmath} + z_p(t)\hat{k} \ .$$

Essa partícula está se movendo ao longo do tempo. Estamos acompanhando usando a descrição lagrangiana.

A velocidade dessa partícula é obtida a partir da derivada no tempo da posição:

$$\vec{V}_p(t) = \frac{d\vec{X}_p}{dt}$$

Então:

$$\vec{V}_p(t) = \frac{dx_p(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy_p(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz_p(t)}{dt}\hat{k}$$

A aceleração dessa partícula, acompanhando o movimento, é dada pela derivada da velocidade com relação ao tempo:

$$\vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{V}_p(t)}{dt}$$

Mas nós queremos o campo de aceleração, ou seja, queremos obter a aceleração na descrição euleriana, a partir do campo de velocidade.

Em qualquer instante de tempo t, a velocidade dessa partícula de fluido é igual ao valor do **campo de velocidade** no ponto em que a partícula está, que é $(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$.

(Obs.: note que quando estamos na descrição lagrangiana as variáveis dependem apenas do tempo t. Já na descrição euleriana as variáveis dependem de x, y, z, t, pois são funções de campo.)

Ou seja:

$$\vec{V}_p(t) = \vec{V}(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t) \ .$$

Em termos de componentes:

$$\vec{V}_p(t) = \frac{dx_p(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy_p(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz_p(t)}{dt}\hat{k} =$$
$$= \vec{V}(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t) = u(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t)\hat{\imath} +$$
$$+ v(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t)\hat{\jmath} + w(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t)\hat{k}$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{dx_p(t)}{dt} &= u(x_p, y_p, z_p, t) \\ \frac{dy_p(t)}{dt} &= v(x_p, y_p, z_p, t) \\ \frac{dz_p(t)}{dt} &= w(x_p, y_p, z_p, t) \end{aligned} \tag{3}$$

Para a aceleração temos:

$$\vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{V}_p(t)}{dt} = \frac{d\vec{V}(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t)}{dt} \tag{4}$$

Queremos a derivada total de $\vec{V}$ com relação a t. Mas x_p, y_p e z_p dependem do tempo. Vamos usar a regra da cadeia para calcular a derivada de $\vec{V}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{V}(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t)}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_p}\frac{dx_p(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_p}\frac{dy_p(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_p}\frac{dz_p(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\end{aligned} \tag{5}$$

Assim (veja equação 3):

$$\vec{a}_p(t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_p} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y_p} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z_p} \tag{6}$$

Essa é a aceleração de uma partícula de fluido que em um dado instante de tempo t ocupa a posição (x_p, y_p, z_p). **Essa equação possibilita o cálculo da aceleração a partir do campo de velocidade.**

Considere agora uma partícula de fluido em uma posição (x, y, z) qualquer.

A aceleração dessa partícula de fluido é dada por:

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \tag{7}$$

Temos então a aceleração de uma partícula de fluido como uma **variável de campo**.

A aceleração de uma dada partícula de fluido que ocupa a posição (x, y, z) no tempo t é dada por essa equação.

Como é um campo vetorial, a aceleração tem 3 componentes:

$$\vec{a}(x,y,z,t) = a_x(x,y,z,t)\hat{\imath} + a_y(x,y,z,t)\hat{\jmath} + a_z(x,y,z,t)\hat{k} \qquad (8)$$

Essas componentes são dadas por:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (9)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (10)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (11)$$

Podemos reescrever a equação (7) com a ajuda do operador $\vec{\nabla}$:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \qquad (12)$$

O termo $\partial \vec{V} / \partial t$ representa a aceleração local.

O termo $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$ representa a aceleração advectiva. Essa aceleração representa o efeito de uma partícula de fluido que se move para um novo local no escoamento onde a velocidade é diferente.

Temos o operador nabla

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla} = (u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k})\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}$ é um operador: deve ser sempre aplicado em alguma variável. Sozinho não faz sentido. Assim como o $\vec{\nabla}$ e a própria derivada d/dx.

Exemplo. Vamos voltar no segundo exemplo, onde tínhamos um modelo simples de escoamento para um bocal convergente:

$$\vec{V} = (1+x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath} \ .$$

Vamos determinar o campo de aceleração para esse escoamento. Temos:

$$u = 1 + x \qquad v = -y \qquad w = 0 \tag{13}$$

As componentes do campo de aceleração são:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + (1+x)(1) + 0 + 0 \tag{14}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 + (-y)(-1) + 0 \tag{15}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = 0 + 0 + 0 + 0 \tag{16}$$

Portanto, o campo de aceleração é:

$$\vec{a} = (1 + x)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \tag{17}$$

É importante notar que o campo de velocidade não depende do tempo, mas mesmo assim a aceleração não é nula.

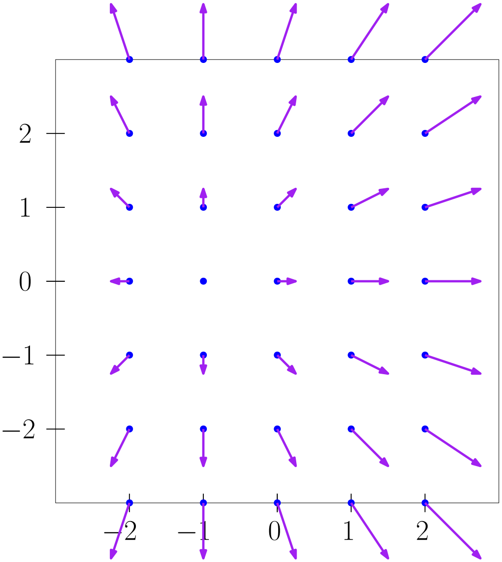


Figura: Campo de aceleração.

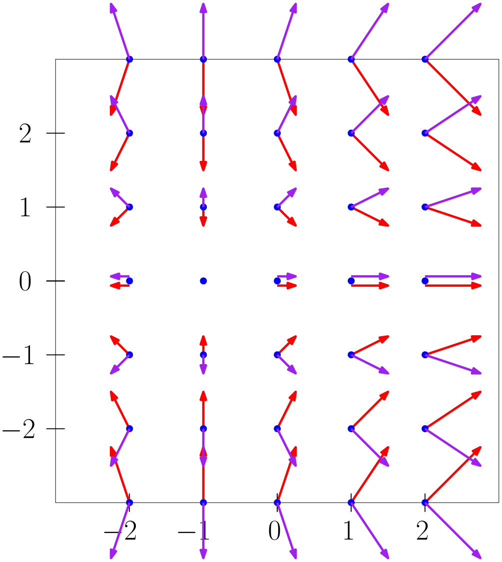


Figura: Campo de velocidade (vermelho) e de aceleração (roxo).

Sumário

Observe a equação (12). O operador diferencial total d/dt recebe um nome especial: **derivada material**.

Esse operador recebe uma notação especial: D/Dt. Assim, enfatiza-se a diferença entre a derivada parcial $\partial/\partial t$ e a derivada material D/Dt.

Temos:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \tag{18}$$

A **derivada material** (ou total) D/Dt representa a variação de uma propriedade do escoamento (ou do fluido) quando o observador se move junto com uma dada partícula de fluido. Ou seja, quando o observador está se movendo através do campo de escoamento.

A **derivada local** (derivada parcial com relação ao tempo), $\partial/\partial t$, representa a variação de uma dada propriedade no tempo quando o observador está parado em um dado ponto do fluido.

Podemos aplicar a derivada material em outras propriedades do fluido, tanto escalares quanto vetoriais.

Pressão:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})p \tag{19}$$

Temperatura:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T \tag{20}$$

Densidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho \tag{21}$$

Sumário

O estudo **quantitativo** da dinâmica dos fluidos exige uma matemática mais avançada.

Mas é possível aprender muito com a **visualização do escoamento**, que é um exame visual das características do campo de escoamento. Ou seja, um estudo mais **qualitativo**.

Uma imagem vale mais que mil palavras.

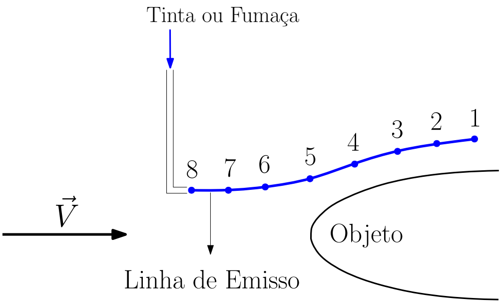
Existem muitos padrões de escoamento que podem ser visualizados fisicamente (experimentalmente) e/ou computacionalmente.

Veremos aqui:

- Linhas de Emissão
- Linhas de Trajetória
- Linhas de Corrente
- Linhas de Tempo

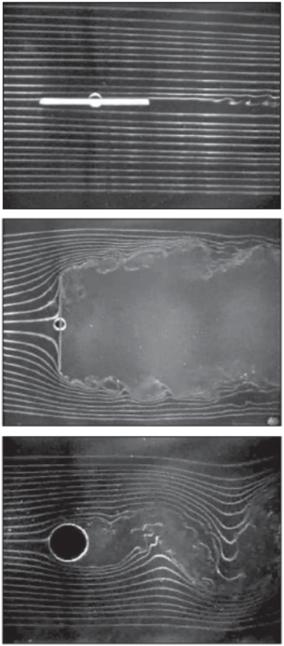
Linhas de Emissão

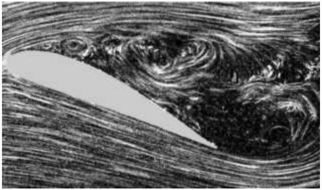
Uma **linha de emissão** é o conjunto das posições das partículas de fluido que passaram sequencialmente através de um ponto prescrito no escoamento.



As linhas de emissão são o padrão mais comum gerado por um experimento físico.

Se você inserir um pequeno tubo em um escoamento e introduzir uma corrente de fluido sinalizador (tinta ou fumaça), o padrão observado é uma linha de emissão.



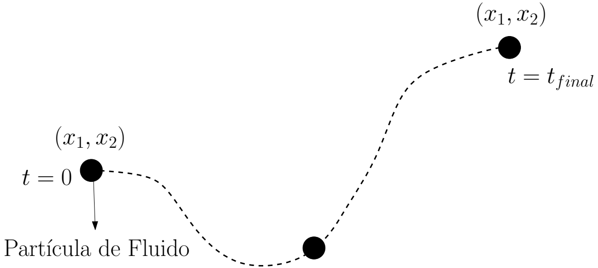


Linhas de Trajetória

Uma **linha de trajetória** é a trajetória real percorrida por uma partícula de fluido individual em um determinado período de tempo.

Uma linha de trajetória é um conceito **lagrangiano**, pois apenas seguimos o caminho de uma partícula à medida em que ela se movimenta ao longo do campo de escoamento.

No experimento: uma partícula marcada (por cor ou brilho) + uma câmera com o obturador aberto por um determinado período = uma curva que representa a linha de trajetória.



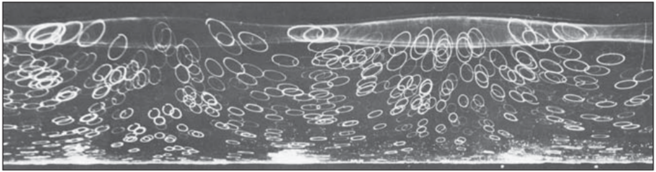


Figura: Trajetória de partículas suspensas durante um período de onda completo. Fotografia de longa exposição.

Linhas de Corrente

Uma **linha de corrente** é uma curva que é tangente em todos os pontos ao vetor velocidade local instantâneo.

As linhas de corrente não podem ser observadas experimentalmente, exceto nos campos de escoamento em regime permanente, nos quais elas são coincidentes com as linhas de trajetória e linhas de emissão.

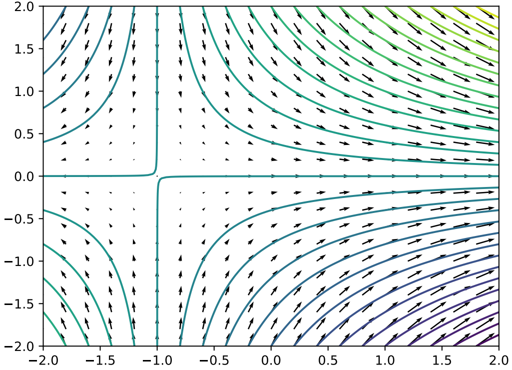
Um fluido não pode cruzar uma linha de corrente, por definição.

Equação para a linha de corrente:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{ao longo da linha de corrente}} = \frac{v}{u} \tag{22}$$

Linhas de corrente e vetores de velocidade para o exemplo

$$\vec{V} = (1 + x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath} \; .$$



Escoamento em uma cavidade fechada com a tampa de cima se movendo. Resultado de simulação computacional.

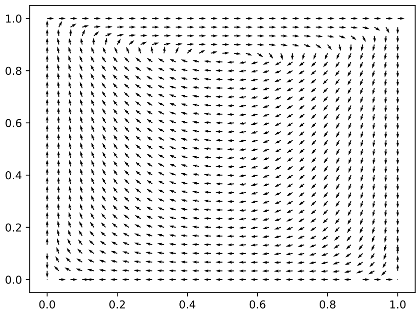


Figura: Campo de velocidade. Vetores unitários, mostrando apenas a direção.

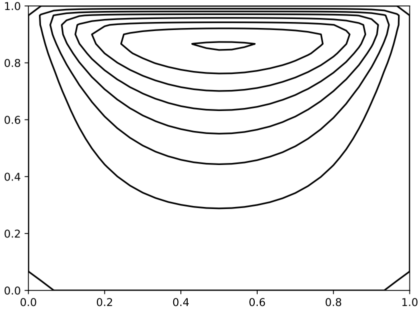
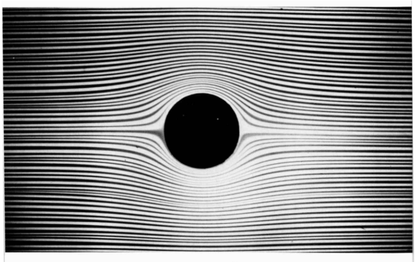
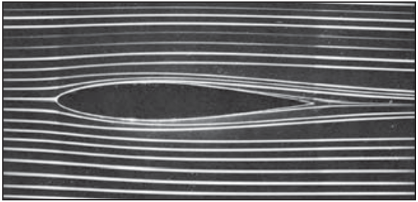


Figura: Linhas de corrente.

Em escoamentos em regime permanente, as linhas de corrente, as linhas de trajetória e as linhas de emissão são idênticas.

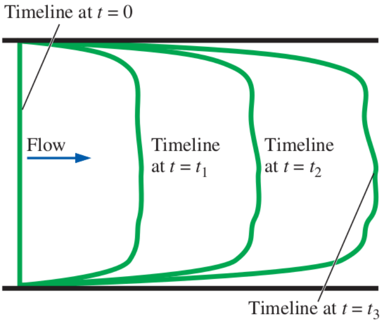


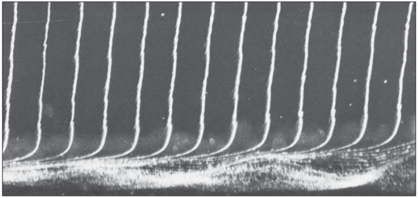


Linhas de Tempo

Uma **linha de tempo** é um conjunto de partículas de fluido adjacentes que foram marcadas no mesmo instante (anterior) de tempo.

São úteis em situações nas quais a uniformidade de um escoamento (ou sua falta) deve ser examinada.





Sumário

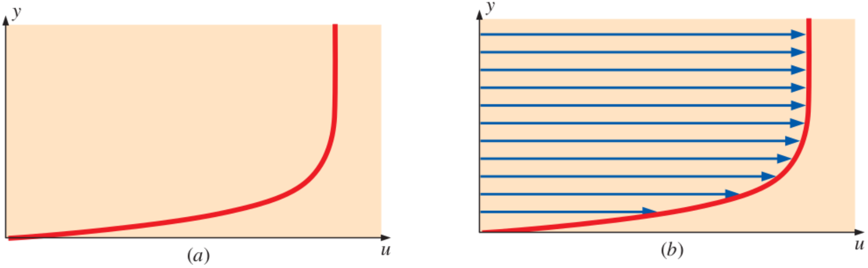
Independentemente do modo como os resultados são obtidos (de forma analítica, numérica ou experimental), em geral é preciso **representar graficamente** os dados de escoamento de forma que permitam ao leitor ter uma ideia de como as propriedades do escoamento variam com o tempo e/ou espaço.

Algumas formas de representação:

- Gráficos de Perfil
- Gráficos Vetoriais
- Gráficos de Contorno

Gráficos de Perfil

Um **gráfico de perfil** indica como o valor de uma propriedade escalar varia ao longo de alguma direção escolhida no campo de escoamento.



Gráficos Vetoriais

Um **gráfico vetorial** é uma matriz de setas que indicam o módulo e a direção de uma propriedade vetorial em um determinado instante de tempo.

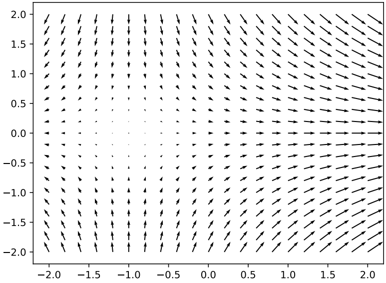


Figura: Gráfico vetorial de velocidade para o campo $\vec{V} = (1+x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$.

Gráficos de Contorno

Um **gráfico de contorno** mostra as curvas de valor constante de uma propriedade escalar (ou módulo de uma propriedade vetorial) em determinado instante.

Gráficos de contorno são usados para representar a pressão, a temperatura, o módulo da velocidade, a concentração de espécies químicas, etc.

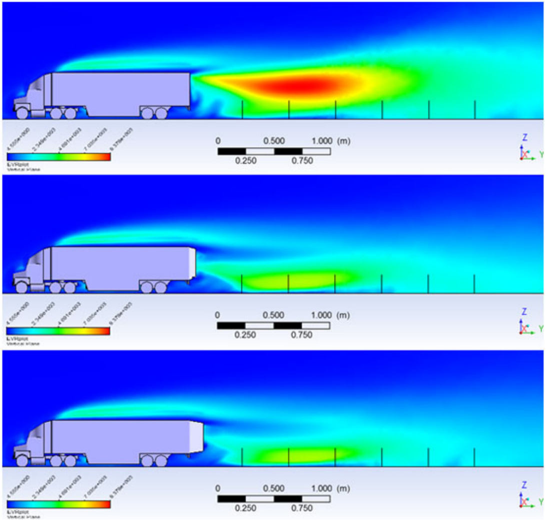
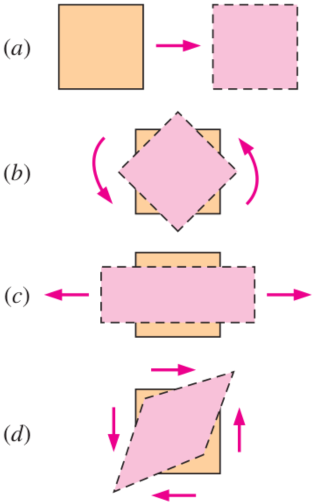


Figura: Gráfico de contorno de pressão no escoamento em torno de um caminhão, mostrando a influência de um dispositivo redutor de arrasto. Resultado computacional.

Sumário

Os quatro tipos fundamentais de movimento ou deformação de um elemento de fluido são:
(a) **translação**;
(b) **rotação**;
(c) **deformação linear**;
(d) **deformação por cisalhamento**.



Como o fluido pode estar em constante movimento, é preferível descrever essas grandezas em termos de **taxas**.

Temos a velocidade (taxa de translação), a velocidade angular (taxa de rotação), a taxa de deformação linear e a taxa de deformação por cisalhamento.

Conhecendo o campo de velocidade do escoamento é possível determinar todas essas grandezas.

Vamos ver como determinar cada uma delas.

Velocidade

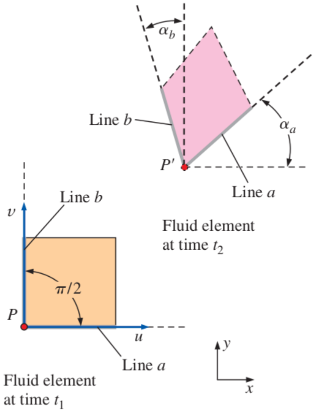
A translação e a rotação são facilmente entendidas, uma vez que também são observadas no movimento de partículas sólidas.

O vetor **taxa de translação** é o próprio **vetor velocidade**. Em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k} \tag{23}$$

Taxa de Rotação

A **taxa de rotação** ou **velocidade angular** em um ponto é definida como a taxa de rotação média de duas retas inicialmente perpendiculares que se cruzam nesse ponto.



No caso bidimensional:

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{24}$$

No caso geral:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} \tag{25}$$

Essa é a velocidade angular de um elemento de fluido em um determinado ponto. Note que é uma velocidade angular com relação ao próprio elemento.

Regra da mão direita.

Taxa de Deformação Linear

Objetos sólidos como fios, hastes e vigas se esticam quando são puxados. O mesmo vale para elementos de fluido.

A **taxa de deformação linear** é definida como a taxa de aumento de comprimento por unidade de comprimento.

Temos uma taxa de deformação para cada direção. Elas estão relacionadas com o vetor velocidade por:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{26}$$

ϵ_{xx} representa a taxa de deformação linear na direção x. ϵ_{yy} e ϵ_{zz} têm significados análogos.

Se o escoamento é **incompressível**, o volume total do elemento de fluido deve permanecer constante; portanto, se o elemento se estica em uma direção, ele deve se encolher na quantidade apropriada na outra direção ou nas outras direções.

A **taxa de deformação volumétrica** de um elemento de fluido é definida como sendo o aumento de seu volume por unidade de volume, ou seja,

$$\frac{1}{\forall}\frac{D\forall}{Dt} \, .$$

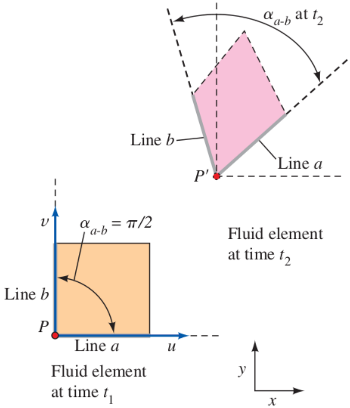
Essa taxa de deformação volumétrica é igual à soma das 3 taxas de deformação linear:

$$\frac{1}{\forall}\frac{D\forall}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \tag{27}$$

O escoamento é incompressível quando $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{0}$.

Taxa de Deformação por Cisalhamento

A **taxa de deformação por cisalhamento** em um ponto é definida como metade da taxa de diminuição do ângulo entre duas retas inicialmente perpendiculares que se cruzam no ponto.



No caso bidimensional da figura:

$$\epsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha_{a-b} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{28}$$

ϵ_{xy} representa a taxa de deformação de cisalhamento em um ponto para duas retas inicialmente orientadas nas direções x e y.

No caso geral tridimensional:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \epsilon_{yx} \qquad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \epsilon_{zx}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \epsilon_{zy} \tag{29}$$

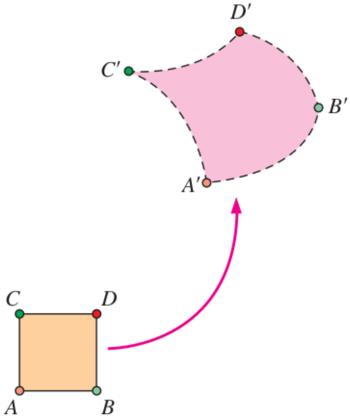
Podemos reunir todas essas taxas de deformação em uma única matriz:

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Essa matriz representa o **tensor taxa de deformação**.

Em um escoamento geral, o elemento de fluido pode sofrer translação, rotação, deformação linear e deformação por cisalhamento ao mesmo tempo.



Exemplo. Determine o comportamento de elemento de fluido em um escoamento bidimensional com o seguinte campo de velocidade:

$$\vec{V} = x^2\hat{\imath} + (-2xy - 1)\hat{\jmath} \ . \tag{31}$$

Resposta. Temos $u = x^2$, $v = -2xy - 1$ e $w = 0$. Esse escoamento é incompressível, pois

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (2x) + (-2x) + 0 = 0 \ .$$

Um elemento de fluido possui velocidade angular dada por

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} = \frac{1}{2}\left(-2y\right)\hat{k} = -y\hat{k}$$

As taxas de deformações são:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2x \qquad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{32}$$

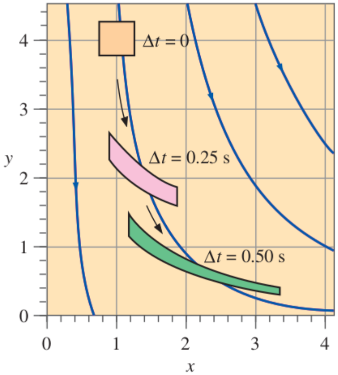
$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + (-2y)\right) = -y \tag{33}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0 \tag{34}$$

O tensor taxa de deformação nesse escoamento é dado por:

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 2x & -y & 0 \\ -y & -2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Com essas informações, sabemos que um elemento de fluido posicionado no primeiro quadrante terá seu volume conservado, irá transladar para a direita e para baixo, irá girar no sentido horário, irá esticar na direção x e encolher na direção y, e irá mudar sua forma, deixando de ser um paralelogramo.



Sumário

Vetor vorticidade:

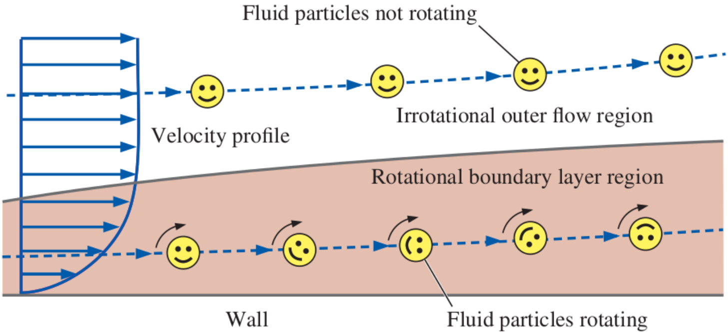
$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \tag{36}$$

A vorticidade é o dobro da velocidade angular de uma partícula de fluido: $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$.

Se $\vec{\Omega} = \vec{0}$ em um ponto então a partícula de fluido nessa região não está girando. O escoamento nessa região é **irrotacional**. Se $\vec{\Omega} = \vec{0}$ em todos os pontos do domínio, então o **escoamento é irrotacional.**

Se $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$ em um dado ponto do escoamento, a partícula de fluido que ocupa esse ponto está girando. O escoamento nessa região é **rotacional**.

Em um mesmo escoamento podemos ter **regiões rotacionais** e **regiões irrotacionais**.


Fluid particles not rotating
Irrotational outer flow region
Velocity profile
Rotational boundary layer region
Wall
Fluid particles rotating

Em escoamentos gerais:

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \ . \tag{37}$$

Em escoamento bidimensionais:

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \tag{38}$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{39}$$

Exemplo. O campo de vorticidade do escoamento dado por

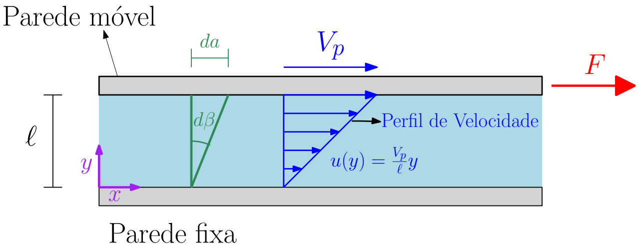
$$\vec{V} = (1+x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath} \tag{40}$$

é

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (1+x) & (-y) & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \tag{41}$$

Assim, esse escoamento é irrotacional, pois a vorticidade é zero em todos os pontos.

Exemplo. Considere agora o escoamento entre duas placas planas paralelas.



Temos:

$$\vec{V} = \frac{V_p y}{\ell}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

A vorticidade é:

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{V_p y}{\ell} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{V_p}{\ell}\hat{k} \qquad (42)$$

Esse escoamento é rotacional.