Grafos

Un grafo simple o grafo, G = (V, E) es un par de conjuntos, donde el conjunto V se llama vértices o nodos y el conjunto E es un conjunto de pares de V y se llaman aristas o arcos.

Los grafos pueden tener bucles y/o aristas múltiples y/o vértices aislados. Vamos a ver qué son y algunas definiciones que nos pueden interesar.

- **Bucle o loop** es una arista que conecta un vértice consigo mismo, por ejemplo (v1, v1). Un grafo simple no tiene bucles.
- **Aristas múltiples o aristas paralelas o multi-arista**) son dos o más aristas que son incidentes a los mismos vértices.
- **Vértice aislado** es un vértice con grado cero; esto es, un vértice que no es punto nal de ninguna arista.
- **Grado o valencia** de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice
- **Subgrafo de un grafo G** es un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son subconjuntos de los de G.
- **Subgrafo generador de un grafo G** es un subgrafo que contiene a todos los vértices de G.
- **Grafo subyacente** es un grafo que se obtiene reemplazando cada arco por una arista. Es decir es çonvertir.el grafo dirigido en un grafo no dirigido con los mismos vértices y las mismas aristas pero sin dirección.
- **Grafo plano (planar)** es aquel que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se cruce.

Grafos Dirigidos

En el grafo dirigido los pares son ordenados y los elementos de E se llaman arcos porque sí que tienen sentido.

Si G es dirigido se dice que vi es adyacente a v_j ,o que v_j es adyacente desde v_i y que e incide desde v_i hacia v_j .

- **Un vértice u es adyacente a otro vértice** v, o v es adyacente desde u, si hay una arista entre los dos vértices que empieza en u y termina en v. La arista es incidente desde u a v.
- **El grado de entrada de un vértice**, δ −(v), es el número de aristas que tienen a v como vértice final. El grado de salida de un vértice, δ +(v), es el número de aristas que tienen a v como vértice inicial.
- **Teorema de apretón de manos:** $$2e = \sum_{v \in V} \delta^-(v) + \delta^+(v).$$

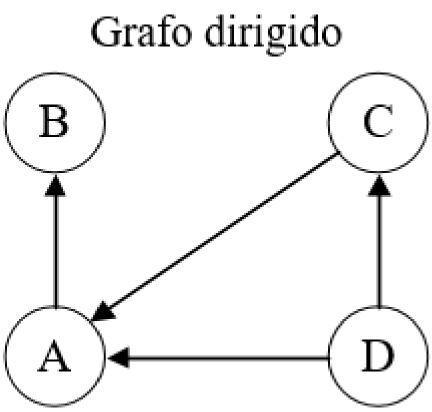
En un grafo dirigido, el teorema del apretón de manos establece que la suma de los grados de entrada de todos los nodos es igual a la suma de los grados de salida de todos los nodos.

El grado de entrada de un nodo es el número de bordes que llegan a ese nodo, mientras que el grado de salida es el número de bordes que salen de ese nodo.

Matemáticamente, se expresa como:

∑grado de entrada de los nodos=∑grado de salida de los nodos∑grado de entrada de los nodos =∑grado de salida de los nodos

Este teorema es útil para verificar la consistencia en grafos dirigidos, ya que asegura que la cantidad total de conexiones entrantes a todos los nodos es igual a la cantidad total de conexiones salientes de todos los nodos en el grafo.



Grafos No Dirigidos

En el grafo no dirigido los pares no son ordenados y los elementos de E se llaman aristas porque no tienen sentido

El grafo se considera adyacente puesto que estan conectados sin tener ninguna dirección.

Si G es no dirigido se dice que v_i y v_j son adyacentes y que e incide en v_i y v_j .

- **Dos vértices u y v son adyacentes** si hay una arista entre ellos. La arista es incidente a los vértices.

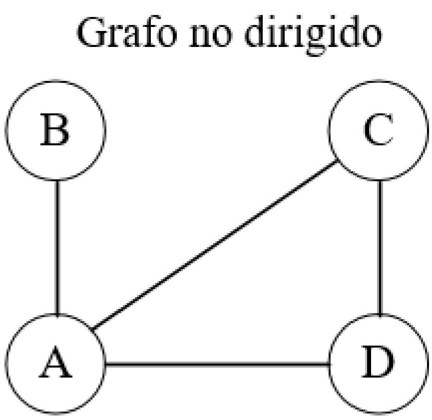
- **El grado de un vértice**, δ(v), es el número de aristas incidentes con él. Los bucles contribuyen con 2 unidades al grado.

- **Teorema de apretón de manos**: $$2e = \sum_{v \in V} \delta(v).$$

El teorema del apretón de manos establece que la suma de los grados de todos los vértices en un grafo no dirigido es igual al doble del número de bordes del grafo. En otras palabras, si sumas el grado de todos los nodos (el número de bordes incidentes en cada nodo) y divides esa suma por 2, obtendrás el número total de bordes en el grafo.

Este teorema es una consecuencia directa de cómo se cuentan las conexiones entre los nodos en un grafo no dirigido. Cada borde contribuye con un grado al vértice en cada extremo del borde, lo que significa que, al sumar los grados de todos los nodos, cada borde se cuenta dos veces, una vez por cada extremo.

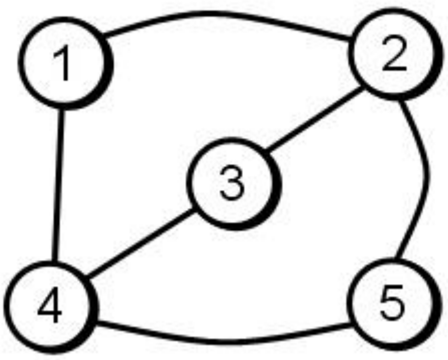
Este principio es útil en la resolución de problemas relacionados con grafos, ya que proporciona una forma de verificar la consistencia de los datos en un grafo no dirigido.



Representación de grafos

La **matriz de adyacencia** del grafo G, M = [a_{ij}], es una matriz cuyas filas y columnas son los vértices y que a_{ij} = 1 si hay arista entre dichos vértices y a_{ij} = 0 si no la hay. En el caso en que hayan aristas múltiples se indica con el número de aristas que inciden.

Sabemos que un grafo no es dirigido cuando la matriz es simétrica, es decir que si la M = M^t



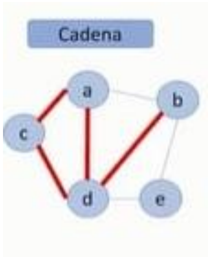
M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

- Hay vértices aislados si encontramos una fila de ceros en GND y si encontramos la misma fila y columna de ceros en GD.
- Las aristas múltiples están donde aparece un número distinto de 0 o 1.
- El bucle lo indica el 1 de la diagonal principal.
- En GND, el número de aristas lo indica la suma de los valores de los elementos de la submatriz triangular superior (o inferior). En GN el número de aristas la suma de los valores de sus elementos.
- El número de vértices lo indica el número de las o columnas que tiene, ya que la matriz es cuadrada.
- En los GND los grados de cada vértice se obtienen sumando los elementos por la y el bucle cuenta como 2. En el caso de GD los grados de salida se obtienen sumando los elementos por la y los grados de entrada sumando los elementos por columna.

Accesibilidad

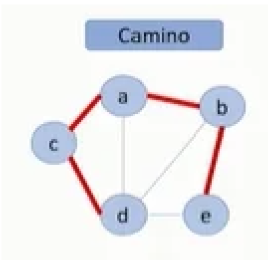
La accesibilidad en un grafo busca determinar si existen rutas entre los distintos nodos. Se analiza si desde un nodo específico se puede llegar a otro. Esto se representa con la matriz de acceso, donde los elementos son 1 si hay conexión entre nodos y 0 si no. La diagonal de esta matriz siempre tiene 1s, ya que un nodo siempre está conectado consigo mismo.

- Una **cadena** es toda sucesión finita alterna de vértices y aristas (arcos). La cadena es cerrada si los vértices inicial y final coinciden

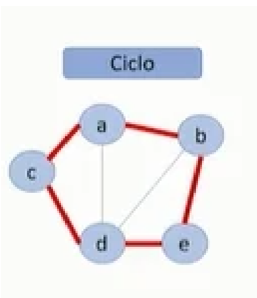


- Un **camino** de longitud n del vértice u al vértice v es una secuencia de n aristas que permiten ir de u a v. Dicho de otra forma, es una cadena en la que no se repite ningún vértice ni ninguna arista (arco).

CUIDADO: El camino o circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.



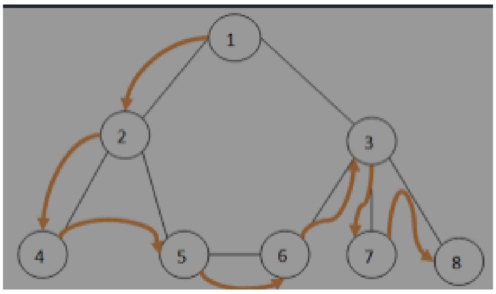
- La **longitud de la cadena** es el número de aristas (arcos) que la forman.
- Un **circuito o ciclo** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.



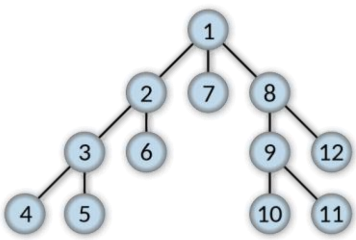
Algoritmos de Búsqueda: BFS y DFS

BFS (Breadth-First Search) y DFS (Depth-First Search) son dos algoritmos fundamentales en la teoría de grafos que se utilizan para recorrer y buscar en un grafo. La principal diferencia radica en cómo exploran el grafo y en el orden en que visitan los nodos.

- **BFS (Búsqueda en Amplitud):**
  - Explora todos los vecinos de un nodo antes de avanzar hacia los vecinos de los vecinos.
  - Comienza en un nodo raíz y se expande a los nodos vecinos de forma gradual.
  - Se utiliza una estructura de datos tipo cola para mantener un registro de los nodos a visitar en el siguiente nivel.
  - Encuentra el camino más corto entre dos nodos si el grafo es no ponderado.



- **DFS (Búsqueda en Profundidad):**
  - Explora tan lejos como sea posible a lo largo de cada rama antes de retroceder.
  - Empieza en un nodo raíz y va tan profundo como sea posible a lo largo de cada rama antes de retroceder.
  - Utiliza una estructura de datos tipo pila (o la recursión) para rastrear el camino hacia abajo en el árbol.
  - No necesariamente encuentra el camino más corto entre dos nodos, pero puede ser más eficiente en ciertos casos y puede ser útil para ciertas aplicaciones como la búsqueda de ciclos.



En resumen, BFS busca nivel por nivel desde el nodo de inicio, mientras que DFS se sumerge tan profundo como puede en una rama antes de retroceder y probar otras ramas. La elección entre estos algoritmos depende de la estructura del grafo y del objetivo de la búsqueda (por ejemplo, encontrar un camino más corto, buscar ciclos, etc.).

2. Conexión

2.1. Conexión en GND

Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo. Un grafo no conexo es la unión de subgrafos conexos. A estos subgrafos conexos disjuntos se llaman componentes conexas del grafo.

Pasos para obtener las componentes conexas de un grafo no dirigido:

- Se considera un vértice v del grafo G.
- Se aplica uno de los algoritmos de búsqueda (BFS o DFS) a v. El conjunto de vértices obtenidos es una componente conexa.
- Se escoge otro vértice de G que no esté en el conjunto obtenido en el paso 2 y se repite el paso 2.

Si tenemos la matriz de acceso, debemos agrupar los vértices que tengas idéntica fila en la matriz. Este conjunto formará una componente conexa.

Un concepto relativo a la conexión es la arista de corte. Se dice que e es una arista de corte o puente si el número de componentes conexas aumenta al eliminar dicha arista del grafo. Y análogamente está el vértice de corte. Se dice que v es un vértice de corte si el número de componentes conexas aumenta al eliminar dicho vértice del grafo.

EXPLICACIÓN EZ:

Imagina que estás en una fiesta donde todos los invitados están conectados por lazos: algunos están tomados de las manos y forman grupos. Cada grupo es una "componente conexa". Ahora, si retiras una persona o cortas una mano agarrada, podrías dividir a la fiesta en más grupos. En un grafo, una arista de corte es como cortar una mano y un vértice de corte es como retirar a una persona: al hacerlo, creas más grupos o "componentes conexas" en el grafo, porque cortas la conexión entre ciertos nodos y aumentas el número de grupos separados que antes estaban conectados.

2.2. Conexión en GD

Se dice que un **grafo dirigido es fuertemente conexo** si hay un camino del vértice a al vértice b y un camino del vértice b al vértice a para cualesquiera dos vértices a y b del grafo. Un grafo no fuertemente conexo es la unión de subgrafos fuertemente conexos. A estos subgrafos fuertemente conexos disjuntos se llaman componentes fuertemente conexas del grafo.

Se dice que un grafo dirigido es débilmente conexo si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente, es decir, si su grafo subyacente es conexo.

Pasos para obtener las componentes conexas de un grafo dirigido, obtenemos la matriz de accesibilidad y procedemos como el caso de GND.

2.3. Orientabilidad

¿Cómo podemos convertir un GND en un GD fuertemente conexo con el mismo número de arcos que aristas que tenía? Este problema se llama orientabilidad y lo responde el Teorema de Robbins: Un GND es orientable si y solo si es conexo y no tiene aristas de corte.

Algoritmo de Hopcroft-Tarjan:

El algoritmo de Hopcroft-Tarjan es una técnica utilizada para encontrar las componentes biconexas en un grafo no dirigido. Estas componentes biconexas son conjuntos de aristas que, si se eliminan, dividirían el grafo en al menos dos componentes separadas.

El objetivo principal del algoritmo es identificar y encontrar estas componentes biconexas de manera eficiente. Esto es importante en problemas de conectividad en grafos, ya que ayuda a comprender la estructura del grafo y a identificar puntos críticos que, si se eliminan, podrían dividir el grafo en múltiples partes.

El algoritmo de Hopcroft-Tarjan se basa en la identificación de puntos de articulación y aristas puente en el grafo. Los puntos de articulación son nodos cuya eliminación aumenta el número de componentes conexas, y las aristas puente son aristas cuya eliminación también produce este efecto.

Es un algoritmo eficiente que busca estos puntos críticos, identificando componentes biconexas en tiempo lineal respecto al número de nodos y aristas del grafo. Esto lo convierte en una herramienta valiosa para problemas relacionados con la conectividad y análisis de grafos no dirigidos.

3. Isomorfismo

Hay grafos que presentan, en el fondo, la misma estructura aunque las conexiones sean entre vértices distintos. Sabemos que un mismo grafo puede ser dibujado de formas muy distintas, que incluso pueden hacernos pensar en grafos distintos. Pero es importante saber cuando se trata del mismo grafo y para ello usamos el isomorfismo de grafos.

Un isomorfismo de grafos, G1=(V1,E1) y G2=(V2,E2) es una aplicación biyectiva entre sus conjuntos de vértices ψ : V1 → V2 que conserva la relación de adyacencia en los dos sentidos, es decir que se corresponden vértices con vértices y aristas con aristas. La relación de isomorfía entre grafos es una relación de equivalencia.

La verificación de que dos grafos son o no isomorfos es un problema difícil. Para la resolución de este problema se suelen buscar datos necesariamente comunes a todos los grafos de una misma clase de isomorfía. A estos datos se les llama invariantes de un grafo. Por ejemplo, son claramente invariantes de un grafo su número de vértices, su número de aristas, y la familia de los grados de los vértices.

Pero hay que decir que dos grafos tengan los mismos invariantes es una condición necesaria para que dos grafos sean isomorfos, pero no es una condición su ciente. Es decir, hace falta que para que dos grados sean isomorfos se cumpla que:

- tengan el mismo número de vértices;
- tengan el mismo número de aristas;
- cada vértice tenga el mismo número de grados;

pero pueden existir grafos que cumplan esto y que no aún así no sean isomorfos, como por ejemplo los siguientes.

Una forma de saber si los grafos son isomorfos es que las matrices de adyacencia sean iguales.

Relacionando los camino y el isomorfismo podemos decir que si un grafo tiene un camino de longitud k y otro grafo no lo tiene, entonces los grafos no son isomorfos, aunque tengan el mismo número de vértices, aristas y grados

Podemos comprobarlo si al hacer la matriz de adyacencia M = M^2 entonces serán iguales