Conjuntos de nivel:

Describen una función que verifica:

$$L_c = \{ (x_1, \dots, x_n) \in D(f) \; / \; f(x_1, \dots, x_n) = c \}$$

$n = 2$ curva de nivel
$n = 3$ superficie de nivel

Pueden darse situaciones en las que ese conjunto no pertenezca a la función

$$L_c = \emptyset$$

Si piden dibujarlos habría que asignar vales

$x = 0$ o $y = 0$ por lo general.

Ej $\quad f(x,y) = -\sqrt{R^2 - (x-2)^2 - (y-3)^2} \qquad R = 4$

L_0?

$$D_f = \{ (x,y) \in R \; / \; R^2 - (x-2)^2 - (y-3)^2 \geq 0 \}$$

$$L_0 = \{ (x,y) \in D_f \; / \; -\sqrt{R^2 - (x-2)^2 - (y-3)^2} = 0 \}$$

$$-R^2 - (x-2)^2 - (y-3)^2 = 0$$

$$-16 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 0$$

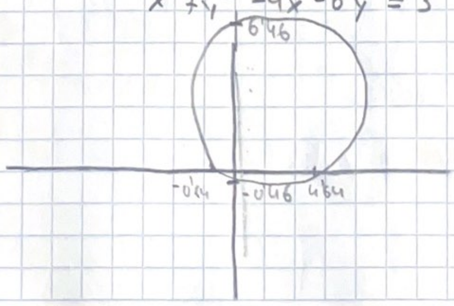
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$$

$$16 - x^2 + 4x - 4 - y^2 + 6y - 9 \geq 0$$

$$-x^2 - y^2 + 4x + 6y \geq -3$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y \leq 3$$

cumplen la condición



$x = 0$

$y^2 - 6y - 3 = 0$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2}$$

$y_1 = 6'46$
$y_2 = -0'46$

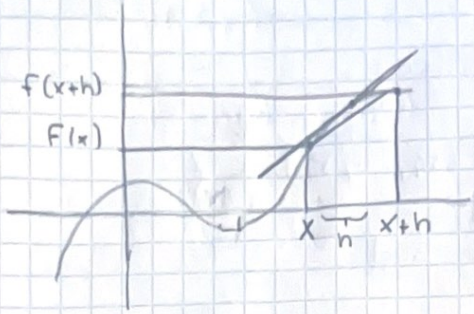
$y = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2}$$

$x_1 = 4'64$
$x_2 = -0'64$

• **Derivadas**: Función que nos devuelve el valor de la pendiente de otra función.



Ec pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

• **Ec plano tgte.**

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

Ej: $f(x,y) = -\sqrt{16 - (x-2)^2 - (y-3)^2}$ $\quad (x_0, y_0) = (4, 5)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{-\cancel{2}(x-2)}{\cancel{2}\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{-\cancel{2}(y-3)}{\cancel{2}\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• **Puntos críticos**

Son los puntos que anulan las derivadas parciales, es decir, los puntos cuya pendiente es 0.

- Matriz hessiana

Nos indicará si tenemos un mínimo, máximo o pto de silla

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

A la hessiana le meteremos los ptos. críticos y:

$\mathrm{Det}(H) < 0$ pto de silla

$\mathrm{Det}(H) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$ mínimo

$\mathrm{Det}(H) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} < 0$ máximo.

Ej: Función de antes

tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-(x-2)}{\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(y-3)}{\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2}}$$

Solo se anulan ambas cuando $x=2$ e $y=3$

$P=(2,3)$ pto crítico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2} - \frac{(x-2)\cdot(x-2)}{\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2}}}{16-(x-2)^2-(y-3)^2} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2} - \frac{(y-3)\cdot(y-3)}{\sqrt{16-(x-2)^2-(y-3)^2}}}{16-(x-2)^2-(y-3)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{2} \frac{2(y-3)}{\sqrt[3]{(16-(x-2)^2-(y-3)^2)^2}} = 0 \qquad H = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}$$

Se trata de un máximo.

- Regla de la cadena

$z(x,y) \qquad x(u,v) \qquad y(u,v)$

$z(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Integrales -> expresión que nos permite calcular áreas encerrados bajo una función.
  - Valor medio

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

  - Regla leibniz

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

  - Integrales definidas por sustitución

$$\int_1^e \left(\frac{\ln(r)}{r} + eg(r) \right) dr = \int_1^e \frac{\ln(r)}{r} = \int_0^1 u \, du = \frac{u^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$u = \ln(r) \qquad du = \frac{1}{r} dx$

nuevos límites

$u = \ln(e) = 1$

$u = \ln(1) = 0$

  - Regla de la cadena.

$$\int \underset{u}{f(x)} \cdot \underbrace{g(x)\, dx}_{dv} = u \cdot v - \int v\, du$$

$v = \int g(x) dx$

Tabla antiderivadas.

$$\int k \, dx = kx + C$$

$$\int u' \cdot u^n \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = \arctan u + C$$

$$\int \frac{u'}{u+a} \, dx = \ln|u+a| + C$$

$$\int u' e^u \, dx = e^u + C$$

$$\int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int u' \operatorname{sen}(u) \, dx = -\cos(u) + C$$

$$\int u' \cos(u) \, dx = \operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} \, dx = \tan(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2(u)} \, dx = \operatorname{cotan}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}(u) + C$$

- Integrales racionales

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^4+x+2}$$ Si grado den > grado num
Factorizar con ruffini el den

$$\int \frac{A}{raíz_1} + \frac{B}{raíz_2} + \frac{C}{raíz_3}$$

$$\int \frac{x^4}{x^2+x+1}$$ Si grado den < grado num
Dividir polinomios y

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}$$ Si raíz con grado mayor a 1

$$= \int \frac{A}{raíz_1} + \frac{Bx+C}{raíz\ de\ grado\ 2}$$

- Integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{b \to 1^-} \int_{0}^{b} \frac{1}{x-1}\,dx + \lim_{a \to 1^+} \int_{a}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx$$

Si da un nº converge, si no, diverge.

$$\frac{k}{\infty} = 0 \qquad \frac{\infty}{k} = \infty \qquad k^{\infty} = \infty$$

EDO → Se trata de resolver una ecuación con 2 funciones de forma que una verifique otra.

- Separables

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot H(y)$$

$$\frac{dy}{H(y)} = g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{H(y)} = \int g(x)\,dx$$

- Lineales.

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

factor integración : $e^{\int P(x)\,dx}$

$$y \cdot e^{\int P(x)dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx$$

- Derivación implícita

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x\ (x,y)}{F_y\ (x,y)}$$