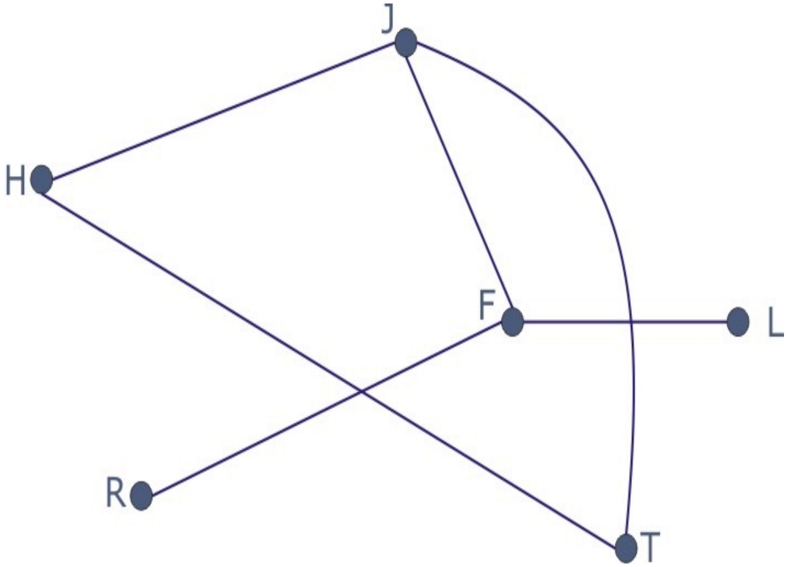
1. Ejercicio 1
   a) Describir G formalmente en términos de su conjunto V de nodos y de su conjunto A de aristas.
   b) Encuentra el grado de cada nodo

```
V={H, J, F, L, T, R}
A={H-J, H-T, J-F, J-T, F-L, F-R}
Grado(H)=2
Grado(J)=3
Grado(F)=3
Grado(L)=1
Grado(T)=2
Grado(R)=1
```



## 2. Ejercicio 2

a) Describir G formalmente en términos de su conjunto V de nodos y de su conjunto A de aristas.

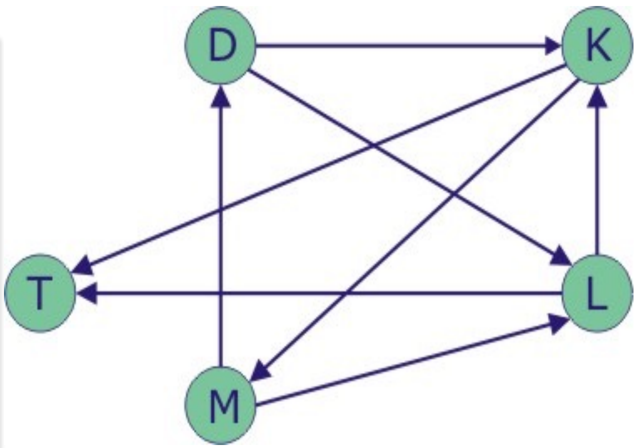
b) Encuentra el grado de entrada y de salida de cada nodo

c) Encontrar los caminos simples de M a T

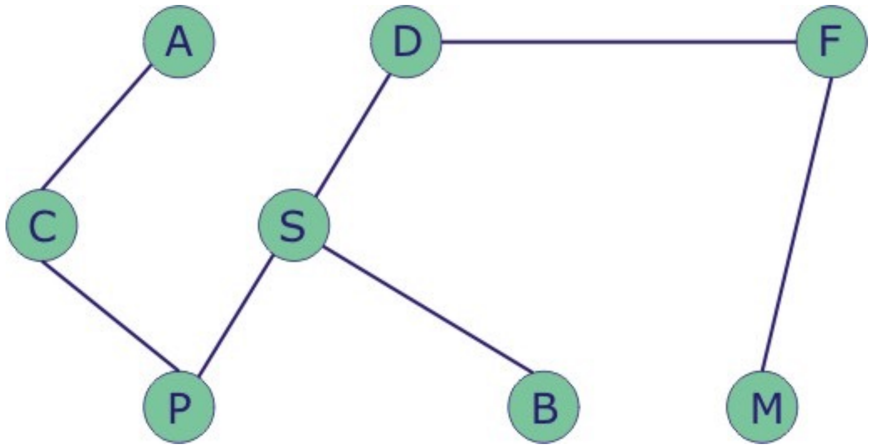
```
V={D, K, L, M, T}
A={D→K, D→L, K→M, K→T, L→K, L→T, M→D, M→L}

D: gradoentrada=1, gradosalida=2
K: gradoentrada=2, gradosalida=2
L: gradoentrada=2, gradosalida=2
M: gradoentrada=1, gradosalida=2
T: gradoentrada=2, gradosalida=0

Caminos simples M-T:
M→L→T
M→L→K→T
M→D→K→T
M→D→L→T
```

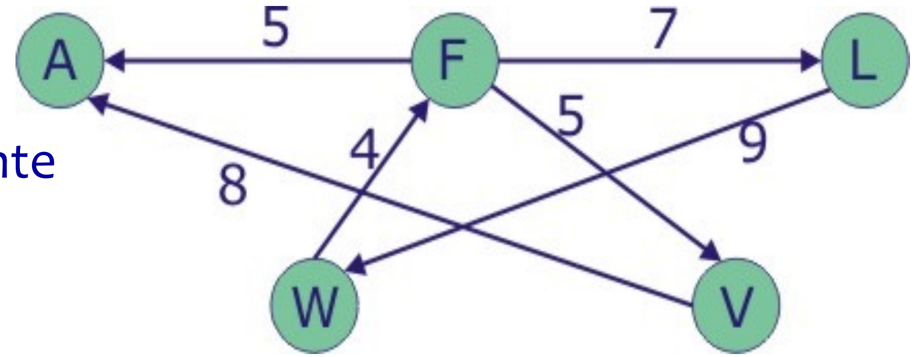


3. Ejercicio 3
   a) Encontrar los caminos simples de A a F
   b) Encuentra el camino más corto de C a D
   c) ¿Es un grafo conexo?

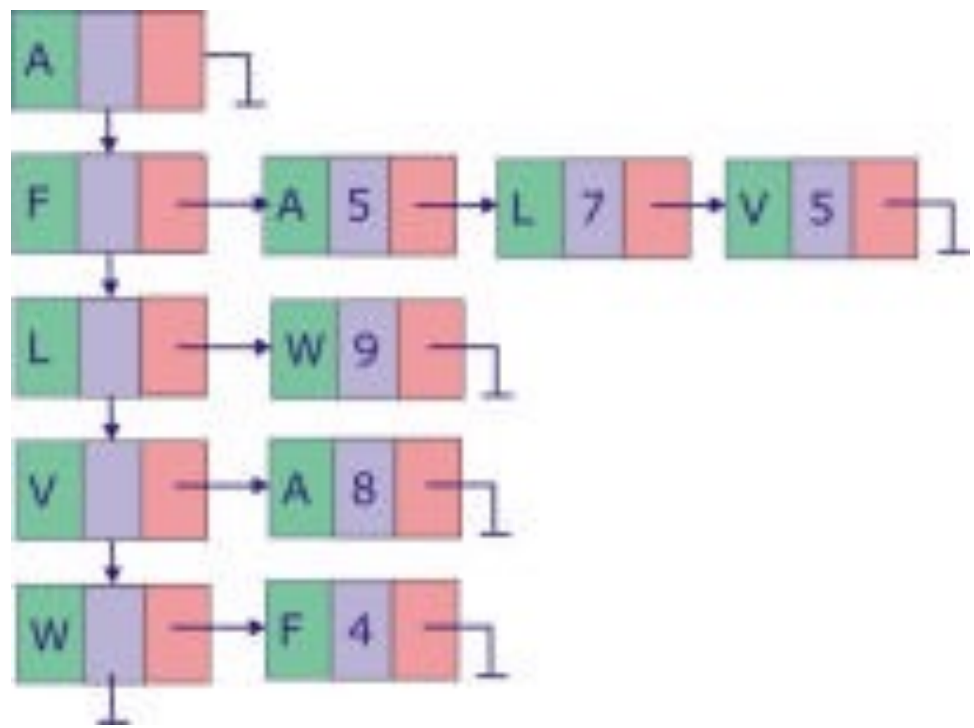



a) A-C-P-S-D-F
b) C-P-S-D
c) A SIMPLE VISTA YA SE VE QUE SÍ PERO PODEMOS HACER UN RECORRIDO Y VER QUE EL RESULTADO ES EL GRAFO COMPLETO

4. Ejercicio 4
   a) Encontrar la matriz de pesos
   b) Representar el grafo mediante listas de adyacencia

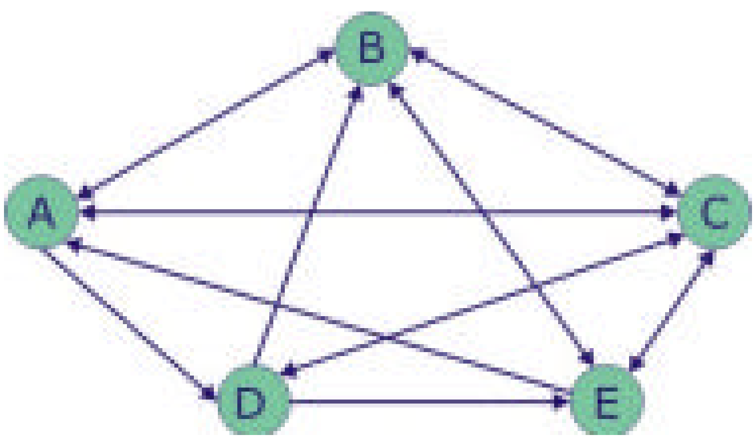


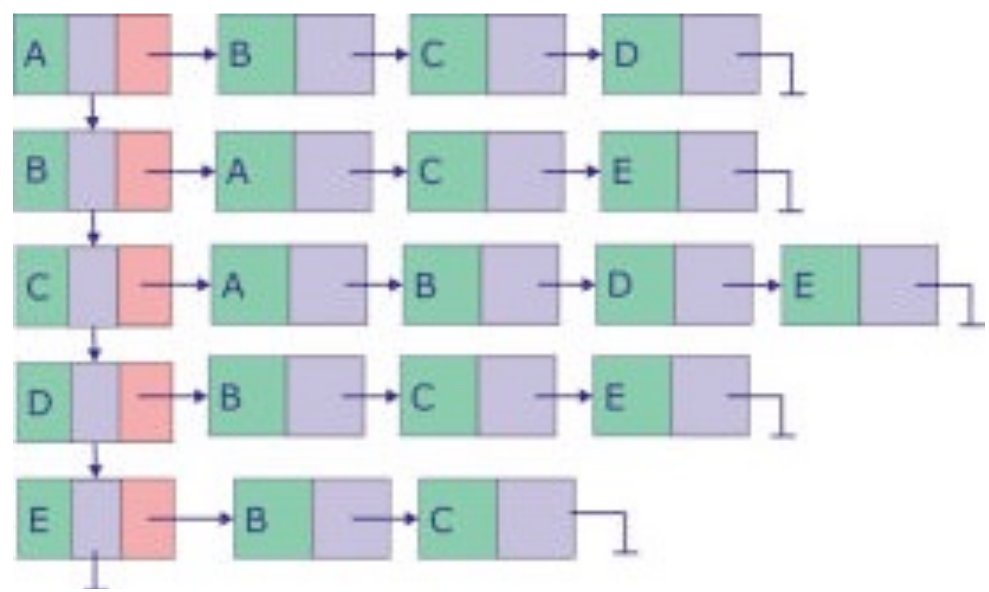

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & F & L & V & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



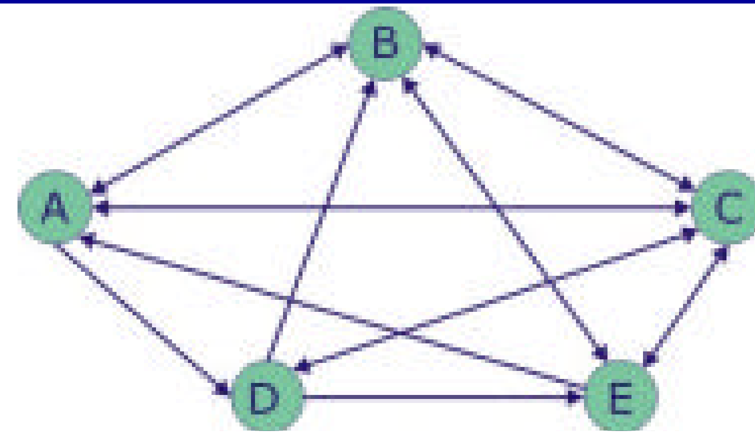
5. Ejercicio 5: V={A,B,C,D,E}
   a) Dibujar el grafo
   b) Representarlo mediante listas de adyacencia

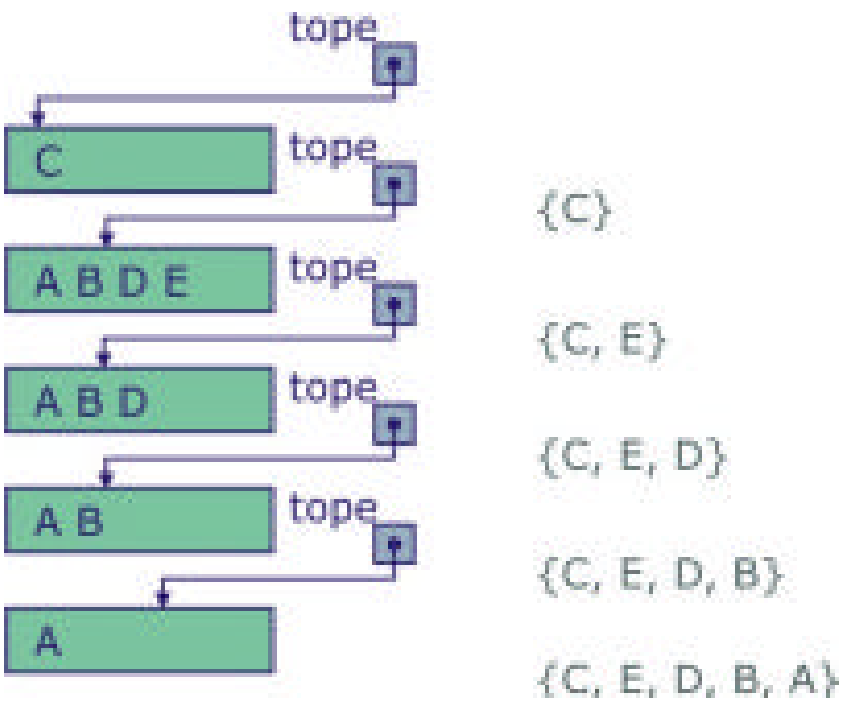
$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

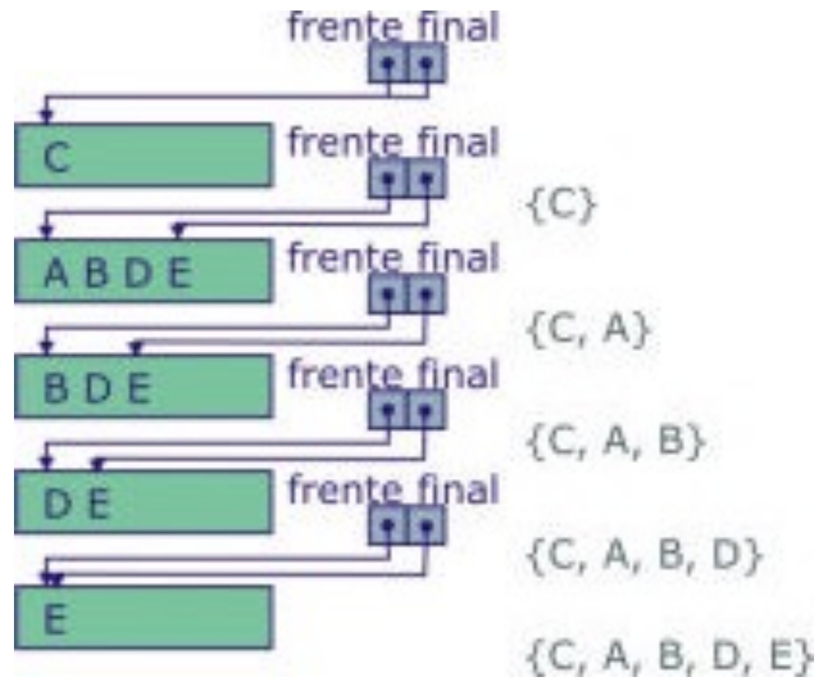


5. Ejercicio 5: V={A,B,C,D,E}
    c) Realizar el recorrido en profundidad (recursivo) partiendo de C
    d) Realizar el recorrido en anchura partiendo de C

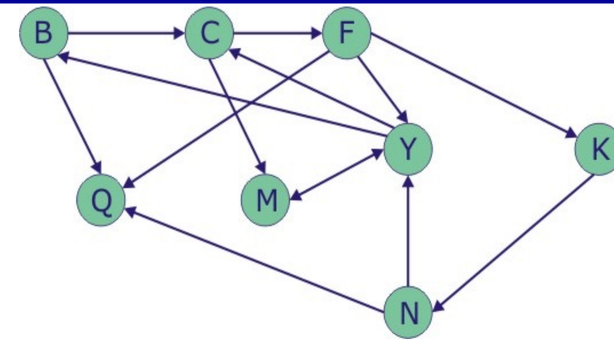


# Ejercicios

6. Encontrar las componentes fuertemente conexas

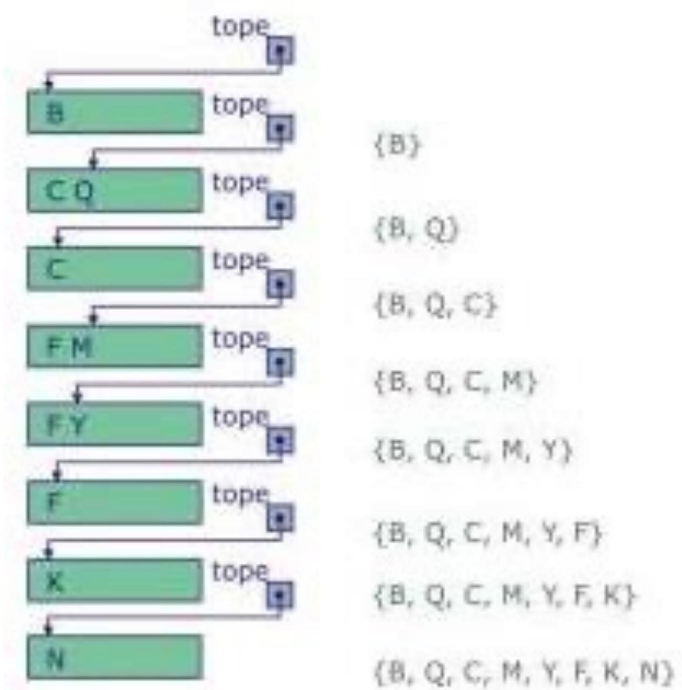


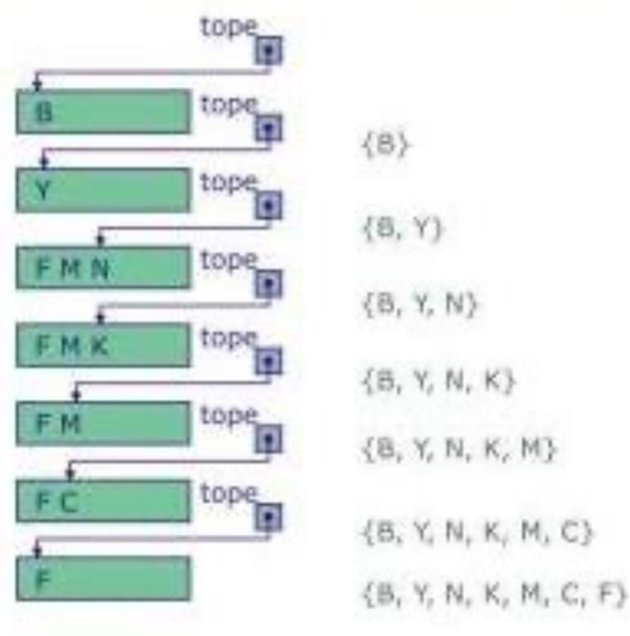

Escojo B como vértice inicial

Escojo recorrido en profundidad no recursivo (usa pilas)

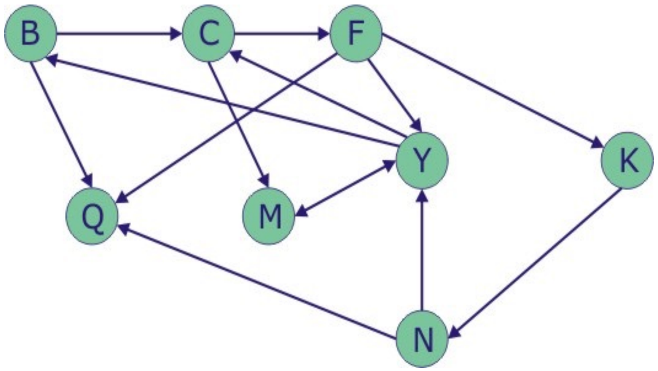
D(B) = Descendientes de B

A(B) = Ascendientes de B
Hago el mismo recorrido cambiando el sentido de los arcos



# 6. Ejercicio 6. (cont)




Tomando como vértice inicial B:

`D(B) = {B, Q, C, M, Y, F, K, N}`

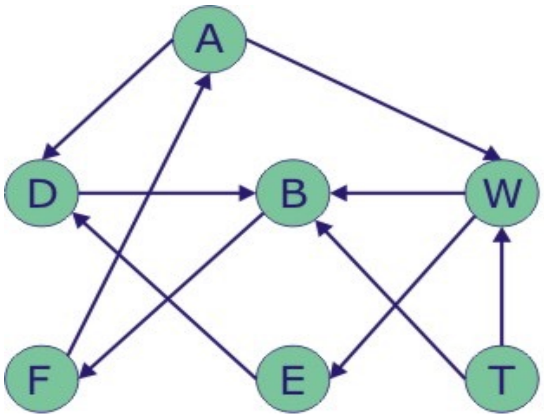
`A(B) = {B, Y, N, K, M, C, F}`

`A(B) ∩ D(B) = {B, C, M, Y, F, K, N} ≠ V` ➔ G NO FUERTEMENTE CONEXO

COMPONENTES FUERTEMENTE CONEXAS DE G:

`{B, C, M, Y, F, K, N}` y `{Q}`

7. Un grafo dirigido acíclico (GDA) es un grafo dirigido sin ciclos. Dados los siguientes grafos, indicar si son GDAs. En caso de no serlo, escribir los ciclos.

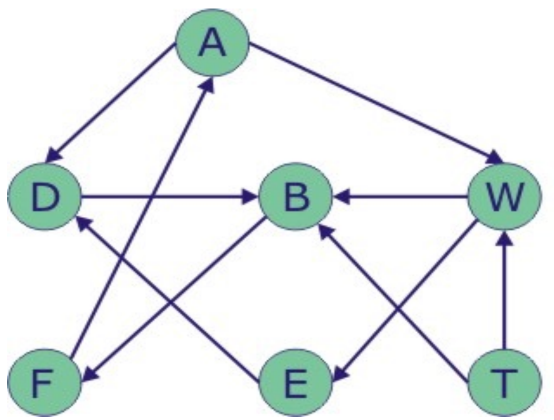



**Ciclo=>camino A-A**

**Calculamos los k-ciclos (potencias de A)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 7. Ejercicio 7 (cont).




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No existen 1-ciclos

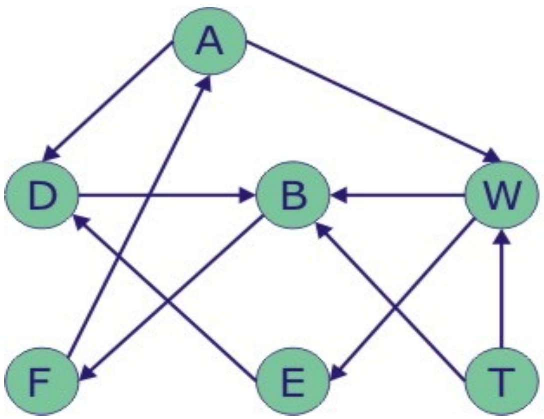
$$A^2 = \begin{pmatrix} - & 2 & - & 1 & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & - & - & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & - & - \\ - & - & 1 & - & 1 & - & - \end{pmatrix}$$

No existen 2-ciclos

$$A^3 = \begin{pmatrix} - & - & 1 & - & 2 & - & - \\ - & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 1 & - & - \\ - & 2 & - & 1 & - & - & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

No existen 3-ciclos

# 7. Ejercicio 7 (cont).




A→D→B→F→A
A→W→B→F→A
B→F→A→D→B
B→F→A→W→B
D→B→F→A→D
F→A→D→B→F
F→A→W→B→F

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & - & - & - & - & - \\ - & 2 & - & 1 & - & - & - \\ - & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & - & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 \\ - & - & 1 & - & 1 & - & - \end{pmatrix}$$

Sí existen 4-ciclos

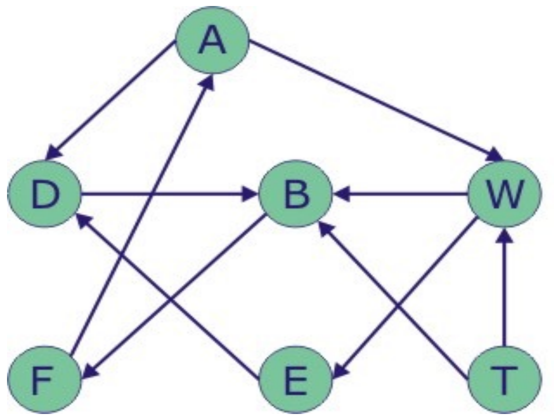
$$A^5 = \begin{pmatrix} - & - & 2 & - & 1 & - & 2 \\ - & - & 1 & - & 2 & - & - \\ - & 2 & - & 1 & - & - & - \\ - & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 2 & 1 & - & - & - & - & - \\ - & 2 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & 2 & - & 1 & - & - & - \end{pmatrix}$$

No existen 5-ciclos

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & - & 2 & - & - & - \\ 2 & 1 & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & - & 2 & - & - \\ - & 2 & - & 1 & - & - & - \\ - & - & 2 & - & 1 & - & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & - & - \\ - & - & 2 & - & 2 & - & 1 \end{pmatrix}$$

Sí existen 6-ciclos

## 7. Ejercicio 7 (cont).



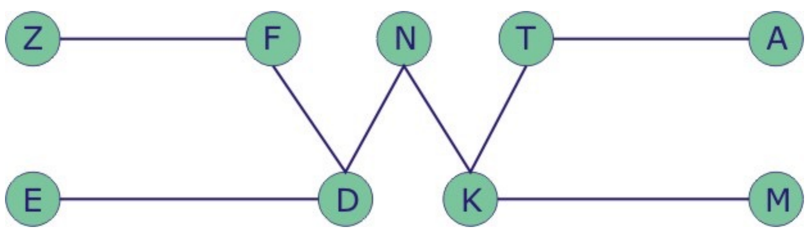

$$A^7 = \begin{pmatrix} - & - & 3 & - & 4 & - & 1 \\ - & - & 2 & - & 1 & - & 2 \\ 2 & 1 & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & - & 2 & - & - \\ 1 & 4 & - & 2 & - & - & - \\ 2 & 1 & 2 & - & 2 & - & 1 \\ 2 & 3 & - & 1 & - & - & - \end{pmatrix}$$

No existen 7-ciclos

Existen ciclos de longitud 4 y de longitud 6 porque en las potencias 4 y 6 de la matriz hay elementos distintos de 0 en la diagonal.

**POR TANTO NO ES UN GDA**

## 8. Ejercicio 8




$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & D & E & F & K & M & N & T & Z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ A \\ D \\ E \\ F \\ K \\ M \\ N \\ T \\ Z \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{B_9 = A^1 + A^2 + A^3 + \cdots + A^9}$$

$$\boldsymbol{P = B_9 \geq 1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

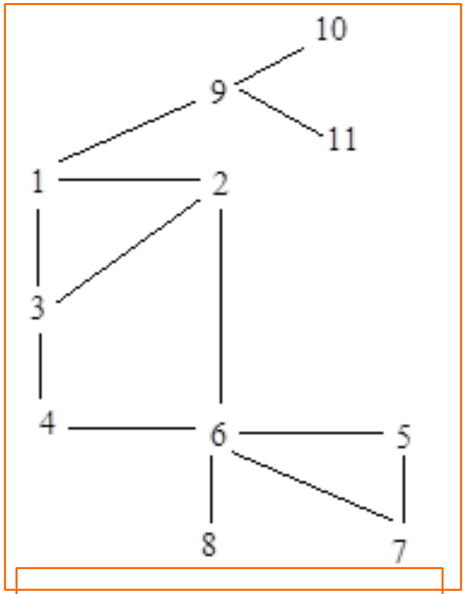
LA MATRIZ RESULTANTE, P, TIENE TODO UNOS, LO QUE QUIERE DECIR QUE EL GRAFO ES CONEXO, YA QUE EXISTE UN CAMINO ENTRE CUALQUIER PAR DE VÉRTICES

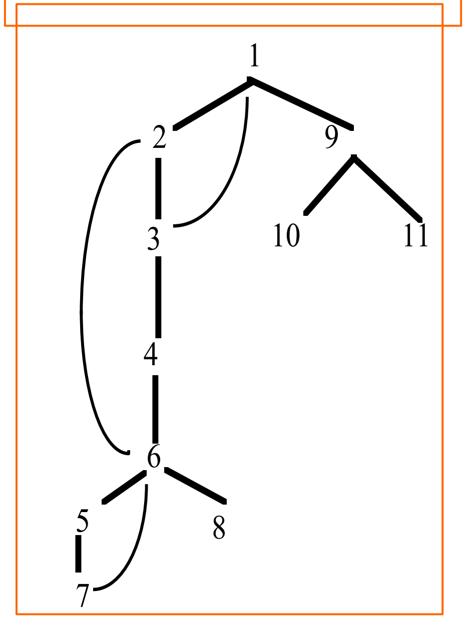
## 9. Puntos de articulación

Para construir el árbol de recubrimiento, hacemos el recorrido en profundidad recursivo tomando como vértice inicial el vértice 1.

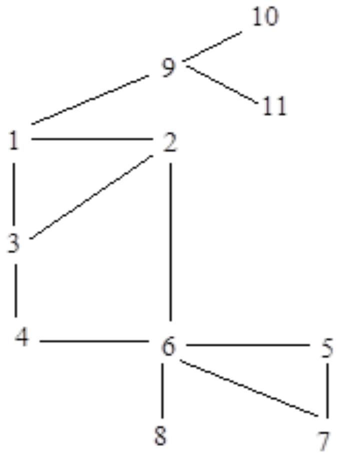
→RR(1) {1} Adyacentes no visitados: {2, 3, 9}
→RR(2) {1,2} Adyacentes no visitados: {3,6}
→RR(3) {1,2,3} Adyacentes no visitados: {4}
→RR(4) {1,2,3,4} Adyacentes no visitados: {6}
→RR(6) {1,2,3,4,6} Adyacentes no visitados:{5,7,8}
→RR(5) {1,2,3,4,6,5} Adyacentes no visitados: {7}
→RR(7) {1,2,3,4,6,5,7} Adyacentes no visitados: {}
→RR(7) YA VISITADO→ARCO HACIA ATRÁS, a 6
→RR(8) {1,2,3,4,6,5,7,8} Adyacentes no visitados: {}
→RR(6) YA VISITADO → ARCO HACIA ATRÁS, a 2
→RR(3) YA VISITADO → ARCO HACIA ATRÁS, a 1
→RR(9) {1,2,3,4,6,5,7,8,9} Adyacentes no visitados:{10,11}
→RR(10) {1,2,3,4,6,5,7,8,9,10} Adyacentes no visitados:{}
→RR(11) {1,2,3,4,6,5,7,8,9,10,11} Adyacentes no visitados:{}

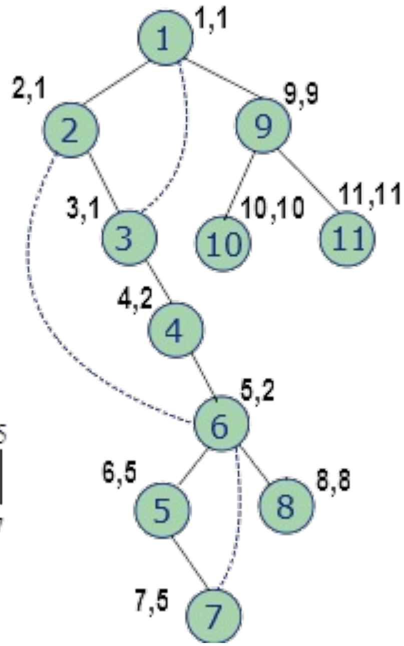
**{1→2→3→4→6→5→7 8 9→10 11}**



# 9. CONT.



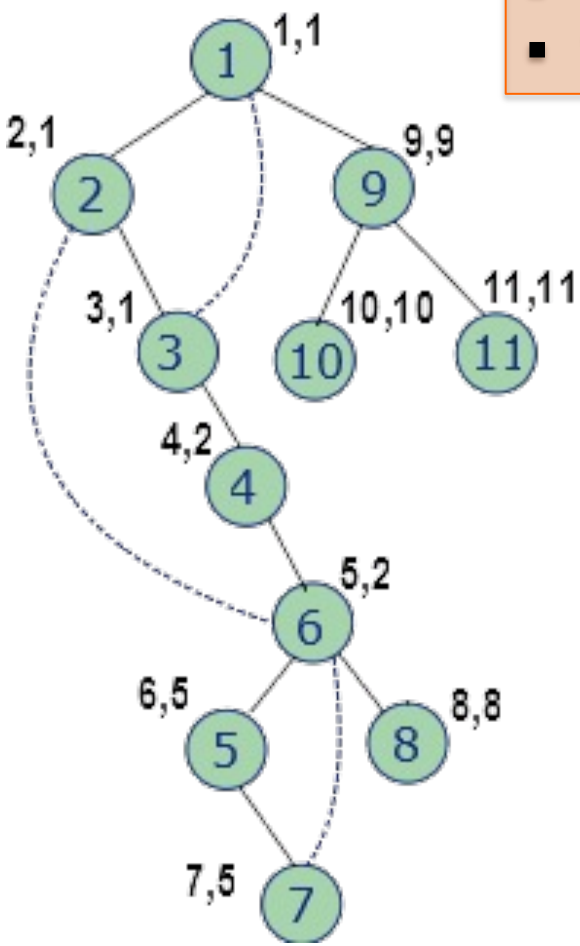

- Num(v)=recorrido preorden
- Bajo(v)=min{Num(v),Num(arista_atrás),Bajo(hijos)}

**Como necesito Bajo(hijos), comienzo por las hojas:**

- **RAMA IZQUIERDA:**
  - Bajo(7)=min{Num(7),Num(6),Bajo(hijos)}=min{7,5}=5
  - Bajo(8)=min{Num(8),Num(arista_atrás),Bajo(hijos)}=8
  - Bajo(5)=min{Num(5), Num(arista_atrás),Bajo(7)}=min{6,5}=5
  - Bajo(6)=min{Num(6),Num(2),Bajo(5),Bajo(8)}=min{5,2,5,8}=2
  - Bajo(4)=min{Num(4),Num(arista_atrás),Bajo(6)}=min{4,2}=2
  - Bajo(3)=min{Num(3),Num(1),Bajo(4)}=min{3,1,2}=1
  - Bajo(2)=min{Num(2),Num(arista_atrás),Bajo(3)}=min{2,1}=1
- **RAMA DERECHA:**
  - Bajo(10)=min{Num(10),Num(arista_atrás),Bajo(hijos)}=10
  - Bajo(11)=min{Num(11),Num(arista_atrás),Bajo(hijos)}=11
  - Bajo(9) =min{Num(9),Num(arista_atrás),Bajo(10),Bajo(11)}=min{9,10,11}=9
- **RAÍZ**:
  - Bajo(1) =min{Num(1),Num(arista_atrás),Bajo(2),Bajo(9)}=min{1,1,9}=1

**{1→2→3→4→6→5→7 8 9→10 11}**

9. CONT.




Puntos de articulación:

- La raíz si tiene más de un hijo
- Vértice V si tiene algún hijo tal que Num(V)≤Bajo(hijo)

- 1 es punto de articulación porque es la raíz y tiene más de un hijo
- 6 es punto de articulación porque `Num(6)≤Bajo (5)` (también se cumple para el otro hijo: `Num(6) ≤Bajo(8)`
- 9 es punto de articulación porque `Num(9)≤Bajo(10)` (también se cumple para el otro hijo: `Num(9) ≤Bajo(11)`