4. Sistemas Conexionistas

4.1 Introducción: Del Símbolo a la Neurona

A diferencia de los sistemas expertos (donde un humano programa las reglas), los sistemas conexionistas se inspiran en la estructura física del cerebro para **aprender** esas reglas a partir de ejemplos.

> **Nota**
>
> En las diapositivas de mierda de la asignatura van saltando de sistema conexionista a red neuronal de forma muy alegre. Conceptualmente son lo mismo, capaz que lo dicen así porque interpretan que los sistemas conexionistas son el paradigma y las **RNA** la implementación.

- **Dualidad**: Combinan la **Bioinspiración** (imitan el cerebro) con la **Tecnoinspiración** (modelos matemáticos para el cálculo) .
- **Evolución Histórica**:
  - *1943*: Modelo de McCulloch & Pitts (lógica binaria).
  - *1957*: El **Perceptrón** de Rosenblatt (primera regla de aprendizaje).
  - *1969*: Minsky y Papert demuestran las limitaciones (problema XOR), provocando un "invierno de la IA".
  - *1986*: Renacer con el algoritmo de Retropropagación (Backpropagation) para redes multicapa 2.

> **Nota**
>
> Peceptrón es lo mismo que neurona artificial pero estos fenómenos siempre tienen que estar dando la nota con los nombres. Aunque bue hay un pequeño matiz, normalmente te refieres a una **neurona artificial con función de activación escalón (binaria)** si hablas de perceptrón.

4.2 La Neurona Artificial: Unidad Básica

Al igual que en biología, la neurona es la unidad de procesamiento. Existe una analogía directa entre las partes biológicas y el modelo matemático:

Biología	Modelo Matemático (Artificial)	Función
Dendritas	Entradas (x_i)	Reciben señales de otras neuronas o del exterior.
Sinapsis	Pesos (w_i)	Determinan la importancia/fuerza de cada entrada.
Soma	Función de suma ($\sum$)	Agrega todas las señales ponderadas.
Axón	Salida (y)	Transmite el resultado si se supera un umbral.

Modelo Matemático

Una neurona calcula una suma ponderada de sus entradas más un sesgo (bias), y pasa el resultado por una función de activación.

$$z = \sum_i x_i \cdot w_i + b$$

- x_i: Señales de entrada.
- w_i: Pesos sinápticos (el "conocimiento" de la red se almacena aquí).
- b **(Bias)**: Umbral de activación (matemáticamente equivale a un peso extra w_0 con entrada fija $+1$).

Funciones de Activación (φ)

Determinan la salida final de la neurona:

1. **Escalón (Binaria)**: Salida 1 si supera el umbral, 0 si no. (Modelo original). Es una decisión rígida.
2. **Lineal Rectificada (ReLU)**: Si $z < 0$ sale 0; si $z \geq 0$ sale z ($y = \max(0, z)$). Actúa como un filtro de "pase". Si la señal es relevante (positiva), la deja pasar tal cual; si es irrelevante (negativa), la anula por completo.
3. **Sigmoidal**: Transforma la salida en un valor suave entre 0 y 1 (probabilidad). Fórmula: $y = \frac{1}{1+e^{-z}}$. En lugar de decir "Es un gato" (1) o "No es un gato" (0), la neurona dice "Hay un 85% de probabilidad de que sea un gato" (0.85).

Se aplican **al final del procesamiento de la neurona**, justo después de calcular la suma ponderada y antes de enviar la señal a la siguiente capa.

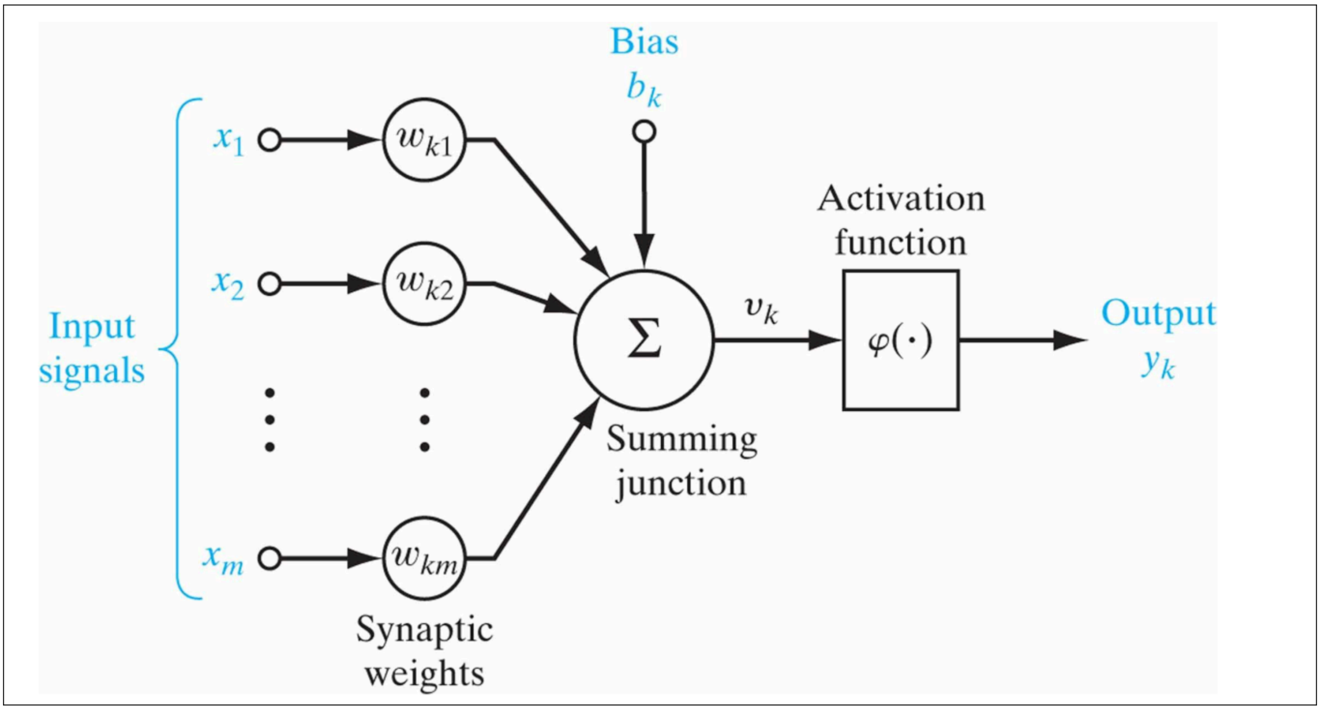
El proceso paso a paso es:

1. **Recepción**: La neurona recibe las entradas ($x_1, x_2 \dots$) multiplicadas por sus pesos ($w_1, w_2 \dots$).
2. Suma (z): Se suman todos estos valores más el sesgo (b). Esto ocurre en la "unión sumadora" (Σ).

$$z = \sum x_i w_i + b$$

3. Activación (φ): Aquí es donde se aplica la función. El valor z entra en la "caja" de la función de activación y se transforma en la salida final y.

$$y = \varphi(z)$$



4.3 Análisis Geométrico: ¿Qué "ve" una neurona?

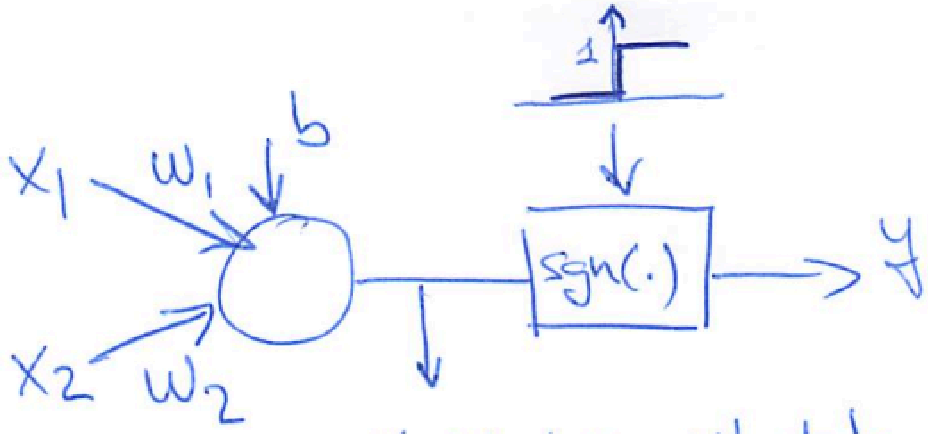
Una sola neurona funciona como un **clasificador lineal**.

- **Frontera de decisión**: La neurona divide el espacio en dos zonas (ej. Clase A y Clase B).
- Matemáticamente, esta frontera es una recta (o hiperplano) definida por:

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + b = 0$$

- **Interpretación**:
  - A un lado de la recta, la suma es positiva $\rightarrow$ La neurona se activa ($y = 1$).
  - Al otro lado, la suma es negativa $\rightarrow$ La neurona se apaga ($y = 0$).

> **Nota de estudio**: Los pesos w definen la inclinación de la recta y el bias b define su desplazamiento respecto al origen.



$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + b$$

Si $x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + b > 0 \Rightarrow y = 1$

Si $x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + b < 0 \Rightarrow y = 0$

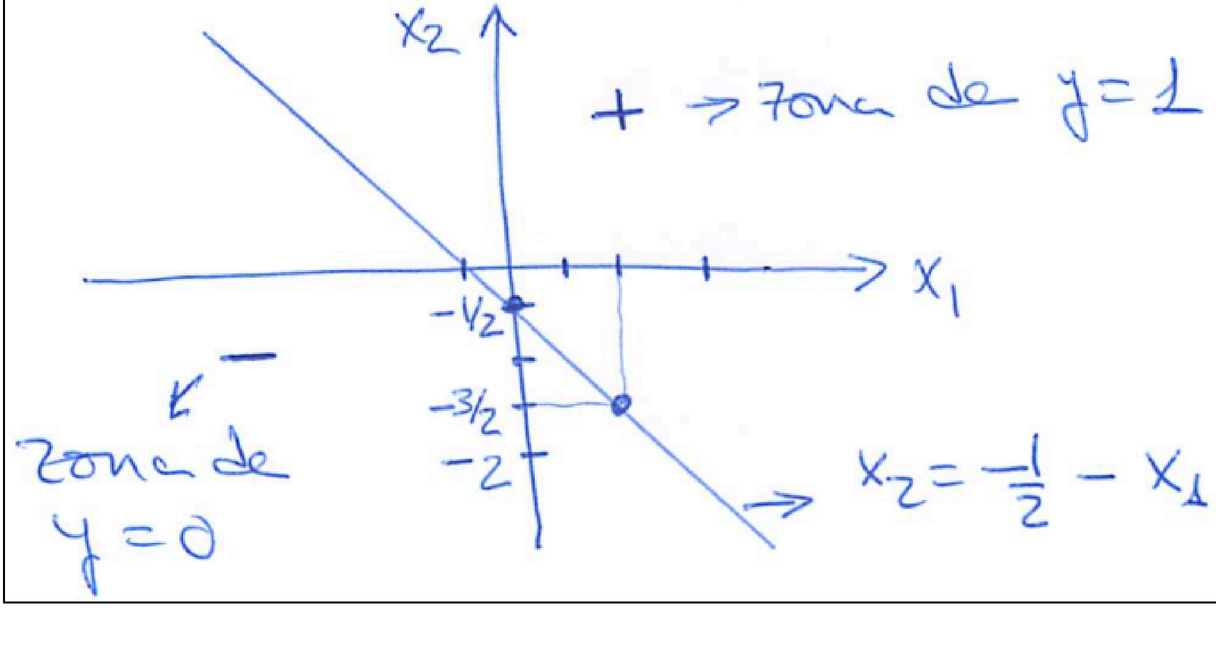
Frontera:

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + b = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$$

Si, por ejemplo;

$$w_1 = w_2 = 2 \; ; \; b = 1$$



En la parte superior ves escritas las "instrucciones" o la configuración de esta neurona específica:

- $w_1 = 2$: El peso de la entrada 1.
- $w_2 = 2$: El peso de la entrada 2.
- $b = 1$: El bias (sesgo).

La neurona calcula una suma: $(x_1 \cdot w_1) + (x_2 \cdot w_2) + b$.

La frontera (la línea dibujada) es el punto exacto donde esa suma da 0. Es el límite entre dispararse o no. Si sustituimos los valores en la fórmula:

$$2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$$

Para poder dibujarla en un gráfico de ejes X e Y (donde x_2 actúa como la Y vertical y x_1 como la X horizontal), despejamos x_2:

1. Pasamos el resto al otro lado: $2x_2 = -2x_1 - 1$
2. Dividimos todo por 2: $x_2 = -x_1 - \frac{1}{2}$

¡Mira la esquina inferior derecha de la imagen! Ahí está escrita exactamente esa fórmula final: $x_2 = -\frac{1}{2} - x_1$ (aunque el orden está invertido, es lo mismo).

Aquí es donde ves el efecto del **bias**.

- **Si el bias fuera 0**: La línea pasaría exactamente por el cruce de los ejes (el origen).
- **Como el bias es 1**: La ecuación nos dice que la línea corta el eje vertical en $-1/2$ (o -0.5).
- **Visualmente**: Puedes ver en el dibujo que la línea diagonal **no pasa por el centro**, sino que está desplazada hacia abajo y a la izquierda. Ese desplazamiento es culpa del bias.

La línea divide el papel en dos territorios:

- Zona $+ \rightarrow$ zona de $y = 1$:
  Es todo el espacio que queda arriba y a la derecha de la línea. Cualquier punto que caiga aquí (por ejemplo, el punto $(1, 1)$) hará que la suma sea positiva (> 0).
  - *Interpretación*: La neurona se **activa** (dispara un 1).
- Zona $- \rightarrow$ zona de $y = 0$:
  Es el espacio que queda abajo y a la izquierda (marcado con una flecha y un signo menos). Cualquier punto aquí (por ejemplo, $(-2, -2)$) hará que la suma sea negativa (< 0).
  - *Interpretación*: La neurona se **inhibe** (se queda en 0).

4.4 Arquitecturas de Red: ¿Cómo organizamos las neuronas?

No basta con tener neuronas; la clave es cómo las conectamos entre sí. Dependiendo de las conexiones, la red sirve para cosas muy distintas.

4.4.1 Redes Monocapa (Perceptrón Simple)

Es la forma más básica.

- **Estructura:** Tienes una capa de entradas y una capa de salida. Las entradas se conectan directamente a las salidas.
- **Flujo:** La información va en un solo sentido (hacia adelante).
- **Limitación:** Como vimos en el apartado 4.6, estas redes **solo pueden resolver problemas lineales**. Si los datos no se pueden separar con una línea recta (como el problema XOR), esta red falla.
- **Matemáticamente:** Es simplemente $Salida = Función(Entrada \cdot Peso)$.

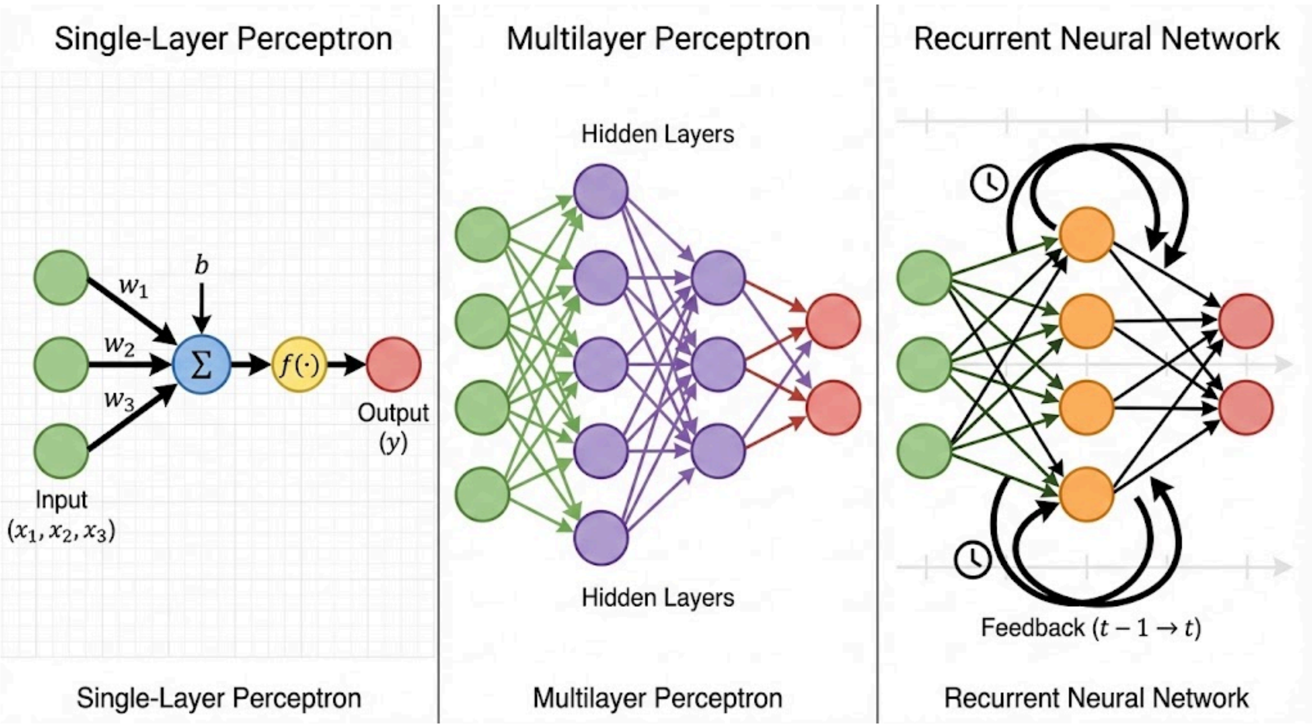
4.4.2 Redes Multicapa (Feedforward)

Aquí es donde la IA se pone interesante.

- **Estructura:** Entre la entrada y la salida, metemos capas intermedias llamadas **Capas Ocultas**.
- **¿Por qué "Ocultas"?** Se llaman así no porque "no se vean en el diseño" (eso es falso), sino porque no tienen conexión directa con el mundo exterior (ni con los datos de entrada brutos ni con la respuesta final).
- **Función:** Rompen la linealidad.
  - La primera capa detecta patrones simples (bordes).
  - La capa oculta combina esos patrones simples para crear formas complejas (curvas, esquinas).
  - Esto permite resolver problemas **no lineales** (como el XOR, explicado al final).

4.4.3. Redes Recurrentes (ej. Redes de Hopfield)

- **Estructura:** Tienes bucles. La salida de una neurona puede volver hacia atrás y conectarse a la entrada de sí misma o de otras neuronas anteriores.
- **Superpoder: La Memoria.** Al tener bucles, la información "da vueltas" y persiste en el tiempo.
- **Uso:** Son vitales para datos secuenciales (texto, audio, series temporales) porque la red recuerda lo que pasó en el instante anterior.



4.5 El Aprendizaje (Algoritmo del Perceptrón)

¿Cómo aprende la red? Ajustando sus pesos (w) iterativamente basándose en el error cometido. Es un aprendizaje **supervisado** (necesitamos ejemplos con la respuesta correcta).

> ✎ **Acordase de que perceptrón → neurona artificial**

Algoritmo de Convergencia del Perceptrón:

1. **Inicialización**: Poner los pesos a 0 o valores aleatorios.
2. **Activación**: Presentar un ejemplo $x(n)$ y calcular la respuesta real $y(n)$.
3. Adaptación de Pesos (Regla de aprendizaje):

$$w(n+1) = w(n) + \eta \cdot [d(n) - y(n)] \cdot x(n)$$

   - $w(n)$: Peso actual.
   - η: **Tasa de aprendizaje** (cuánto cambiamos el peso en cada paso).
   - $d(n)$: Salida deseada (correcta).
   - $y(n)$: Salida obtenida (real).

Lógica del algoritmo:

- Si la red acierta ($d = y$), el término $[d - y]$ es 0 $\rightarrow$ No se cambian los pesos.
- Si falla, los pesos se ajustan en la dirección del error para corregirlo la próxima vez.
- η: debe ser muy pequeño para no provocar cambios significativos en cada iteración, pero no tanto como para evitar o realentizar la convergencia.

4.6 Limitaciones y Soluciones: El Problema XOR

Problemas Linealmente Separables

Limitación del Perceptrón Simple: Solo puede clasificar conjuntos **linealmente separables** (aquellos que se pueden separar con una sola línea recta). Son los problemas "fáciles" para una neurona.

- **¿Por qué son lineales?** Porque una sola neurona (Perceptrón Simple) funciona matemáticamente dibujando **una línea recta** (como vimos en la imagen anterior: $x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + b = 0$).
- **Ejemplo Clásico (AND y OR)**:
  - Imagínate la función lógica **AND** (Y). Solo es "verdad" (1) si ambas entradas son 1.
  - Si pintas esto en una gráfica, el punto (1,1) es el único "positivo". Los otros tres (0,0), (0,1), (1,0) son "negativos".
  - **Prueba visual**: Puedes dibujar una línea que deje al (1,1) en una esquina y a los otros tres en el otro lado 1.

Problemas No Linealmente Separables (El caso XOR)

Son los problemas "difíciles" donde una sola neurona falla estrepitosamente.

- **¿Por qué son no lineales?** Porque la estructura de los datos es compleja. Una sola recta no basta.
- **El Ejemplo Maldito: XOR (O Exclusivo)**.
  - La regla del XOR es: "Es verdad (1) si una es verdadera y la otra falsa. Si son iguales, es falso (0)".
  - **Puntos Positivos (1)**: (0,1) y (1,0).
  - **Puntos Negativos (0)**: (0,0) y (1,1).
  - **Prueba visual**: Dibuja estos cuatro puntos en un papel. Intenta separar los positivos de los negativos con **una sola línea recta**. ¡Es imposible! Si separas uno, dejas al otro en el lado equivocado. Siempre te dejas uno fuera .
- **¿Qué pasa si intentas usar un Perceptrón Simple?**
  - El algoritmo de aprendizaje nunca termina (entra en bucle) o se queda con un error muy alto, moviendo la línea desesperadamente de un lado a otro sin encontrar solución .

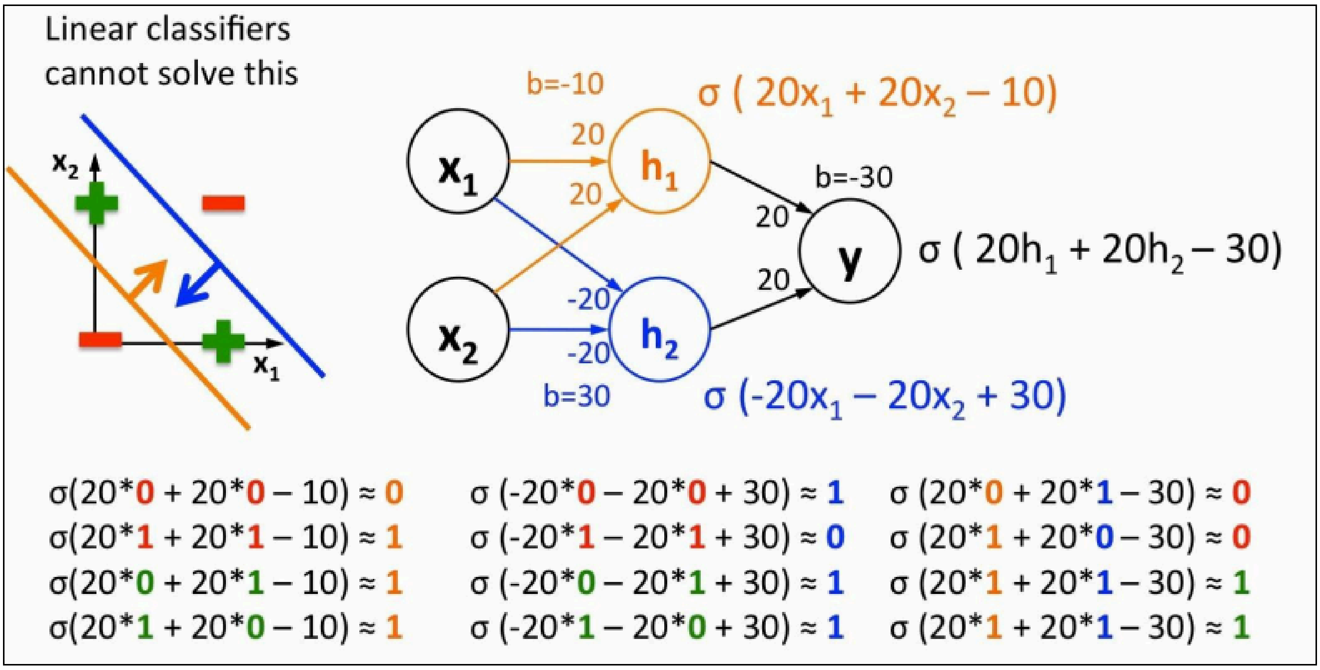
¿Cómo se soluciona lo "No Lineal"?

Si una sola línea (una neurona) no puede separar los datos, ¿qué haces? **Usas más líneas**.

Aquí es donde entran las **Redes Neuronales Multicapa**:

1. **Capa Oculta**: Usas dos neuronas para dibujar **dos rectas distintas**. Una recta separa un grupo y la otra recta separa el otro.

2. **Capa de Salida**: Combina la información de esas dos rectas para dar la respuesta final.



Observando la imagen de arriba:
La Parte Izquierda: Aquí vemos el espacio de entrada (x_1 vs x_2) con 4 puntos:

- **Signos Menos Rojos (-)**: Están en `(0,0)` y `(1,1)`. Son los casos donde la salida debe ser **0** (Falso).
- **Cruces Verdes (+)**: Están en `(0,1)` y `(1,0)`. Son los casos donde la salida debe ser **1** (Verdadero).

El Problema: Como ves, es imposible dibujar una sola línea recta que deje a todas las cruces verdes a un lado y a los signos rojos al otro.

La Solución: La imagen muestra dos líneas (una naranja y una azul).

- La línea **naranja** separa el rojo de abajo `(0,0)`.
- La línea **azul** separa el rojo de arriba `(1,1)`.
- La zona "válida" (Verde) es la franja que queda **entre medias** de las dos líneas.

La Parte Derecha: Aquí vemos cómo se construye esa "franja" usando neuronas. Es una red con una **capa oculta** de dos neuronas (h_1 y h_2).

- **Neurona Naranja (h_1)**:
  - Fíjate en su ecuación: $20x_1 + 20x_2 - 10$.
  - Esta neurona es la responsable de dibujar la **línea naranja** del gráfico. Se activa si la suma de las entradas es suficiente para superar el primer umbral. Básicamente dice: *"¿Estamos por encima de (0,0)?"*.
- **Neurona Azul (h_2)**:
  - Fíjate en su ecuación: $-20x_1 - 20x_2 + 30$ (pesos negativos).

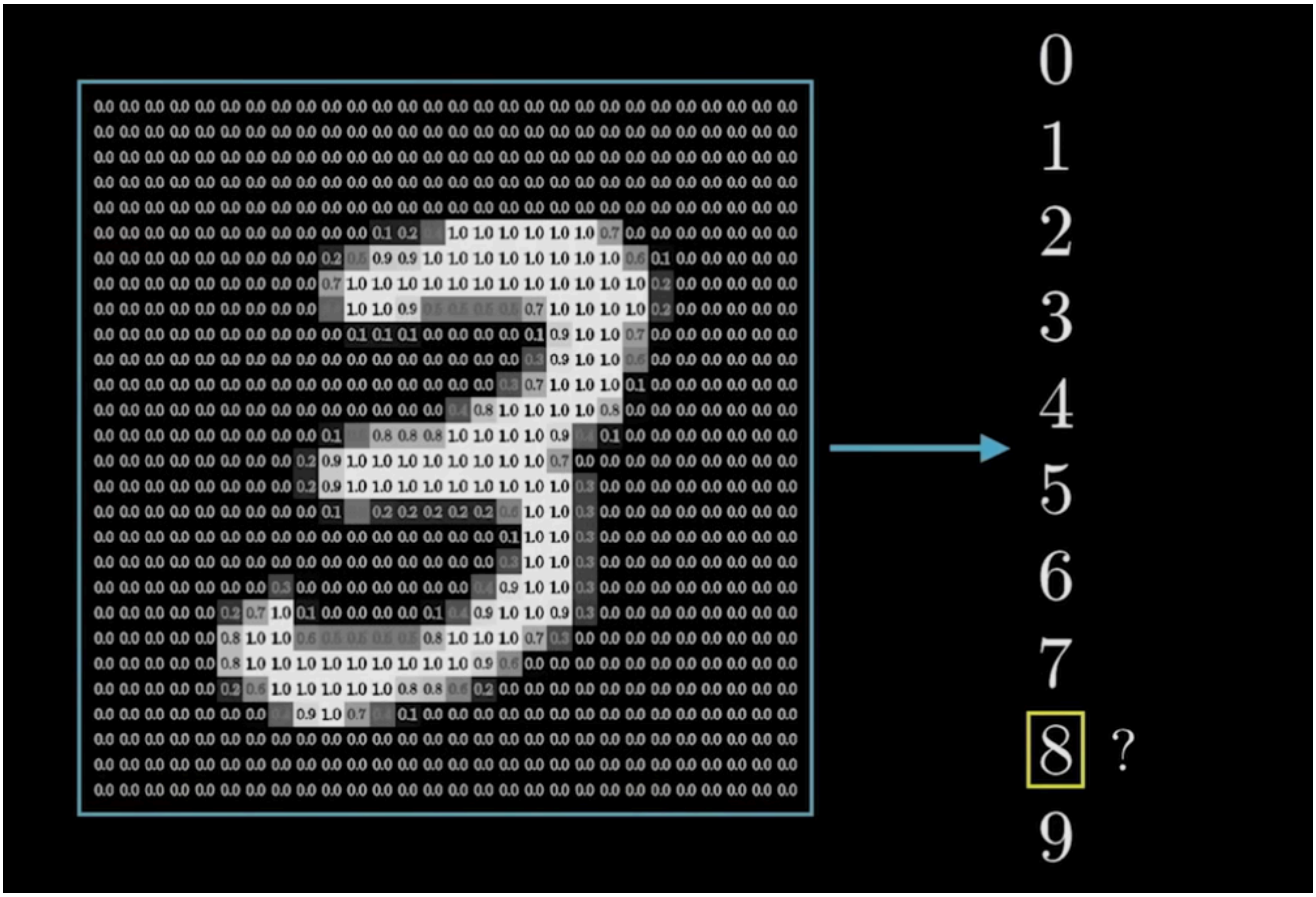
    - Esta neurona dibuja la **línea azul**. Se activa si las entradas **no** son demasiado grandes. Básicamente dice: *"¿Estamos por debajo de (1,1)?"*.
- **Neurona de Salida (y)**:
    - Recibe las señales de la Naranja y la Azul.
    - Su trabajo es hacer una operación **AND**: Solo se activa si la Naranja dice "SÍ" (estamos encima de la primera línea) **Y** la Azul dice "SÍ" (estamos debajo de la segunda línea).

4.7 Caso Real Más Complejo (No Entra)

[¿Qué es una Red neuronal]

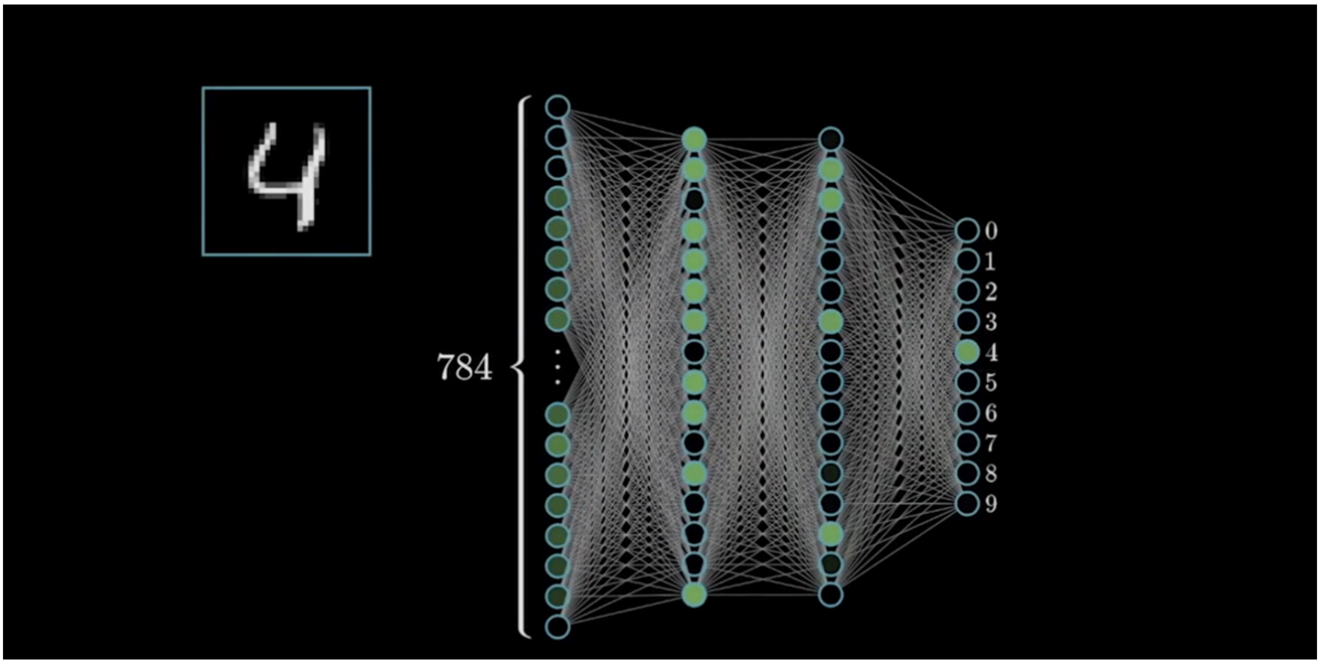
Descripción del problema

Detectar números dibujados para decir a que carácter se corresponden. Nuestro cerebro nada más ve un 3 dibujado sabe que es un 3, pero a un ordenador esto le puede costar un poco más. Por ello partimos de una cuadrícula de píxeles con diferentes valores de iluminación.

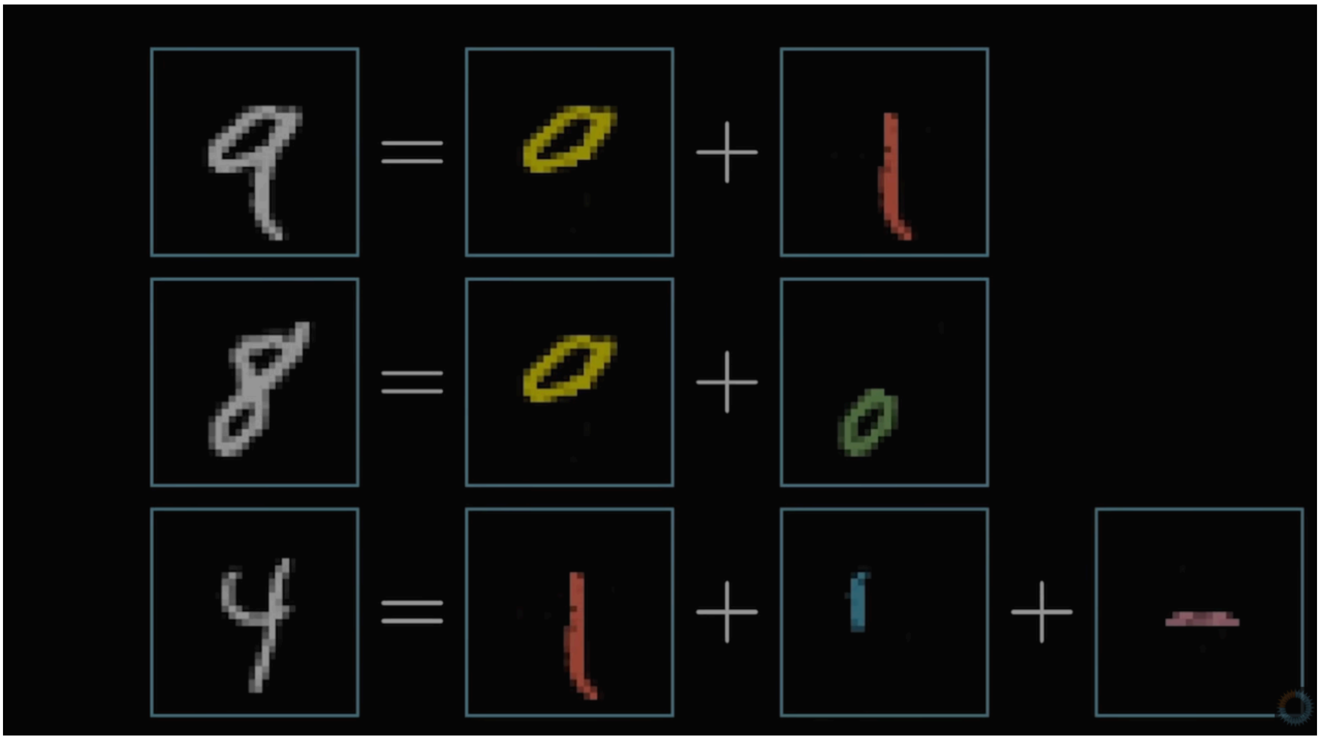


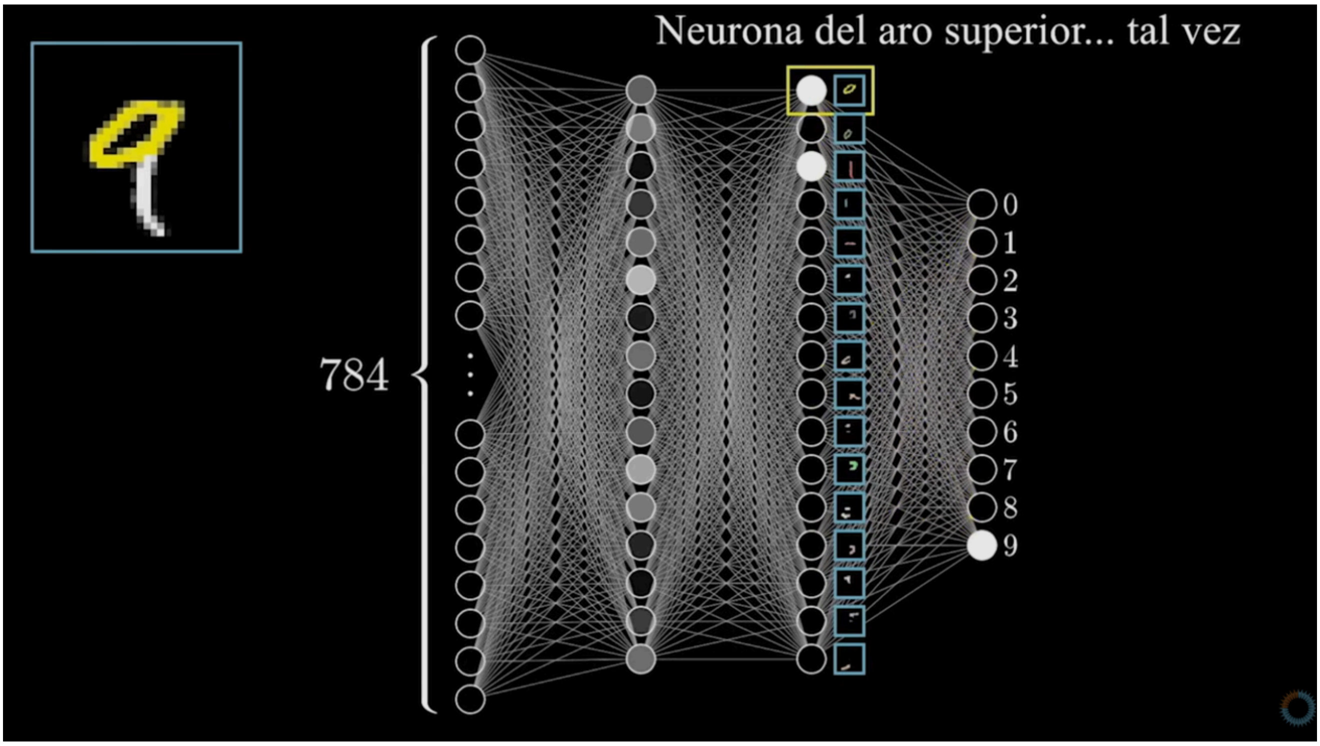
Cómo aborda la Red Neuronal el Problema

Empleando la estructura multicapa



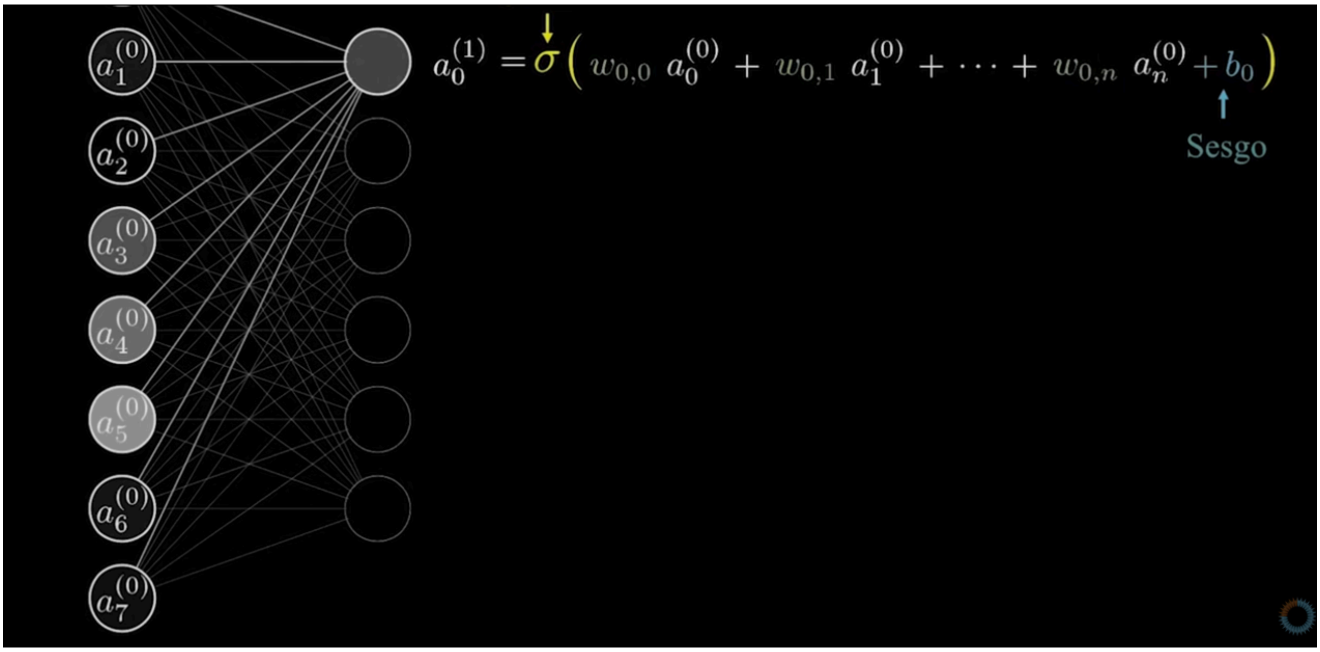
Para ellos tenemos las neuronas de entrada, que se corresponden a cada uno de los píxeles anteriores. Estas neuronas toman un valor entre 0 y 1 y son encargadas de transmitir su valor a las neuronas de cada capa intermedia. Para ello podemos pensar el problema subdividiendo lo qué es un número para identificar patrones. Por ejemplo un 8 sería un círculo arriba un círculo abajo:





Y podemos también subdividir este subpatrón en otro más pequeño, de forma que las neuronas de la segunda capa lo detecten.

Cada una de las líneas que unen cada nodo son los pesos y toman ciertos valores para que se activen las neuronas. Nuestro objetivo es que en cada capa se activen determinadas neuronas, la función que determina si se activa o no no es más que la suma de cada termino de entrada por su correspondiente peso.



Y para calcular esos pesos, debemos entrenar a la red neuronal, usando el método del descenso gradiente. Esto nos permitirá ir modificando los pesos para que de una solución válida mientras que la red siga fallando (por ello tenemos un conjunto de datos de entrenamiento y uno de prueba). La forma de optimizar estos pesos se verá en el siguiente tema.