

## 7. Gramáticas GSC Y GSR

Copyright (c) 2025 Adrián Quiroga Linares Lectura y referencia permitidas; reutilización y plagio prohibidos

### 7.1 Gramáticas Sin Restricciones (GSR) - Tipo 0

Como su nombre indica, son las gramáticas más flexibles y potentes. No tienen límites en la forma de sus reglas, salvo que siempre debe haber algo que sustituir.

#### Definición y Reglas

Una GSR se define formalmente como  $G = (NT, T, S, P)$ .

Sus producciones tienen la forma genérica:

$$x \rightarrow y$$

Donde:

- **$x$  (Izquierda):** Es una cadena de símbolos terminales y no terminales ( $NT/T$ ). La única condición es que **no puede estar vacía** (debe tener al menos un símbolo).
- **$y$  (Derecha):** Es cualquier cadena de símbolos terminales y no terminales. **Puede ser vacía.**

#### Características Clave

- **Libertad total:** Puedes reemplazar un grupo de símbolos por otro grupo, acortar la cadena, alargarla o borrar símbolos completamente.
- **Lenguaje que generan:** Generan los **Lenguajes Recursivamente Enumerables (LRE)**.
- **Máquina Equivalente:** Son reconocidos por la **Máquina de Turing** estándar.

**Ejemplo:**

③  $S \rightarrow aIXaD \mid bIXbD$   
 $IX \rightarrow bIB \mid aIA/N$

$Aa \rightarrow aA$   
 $Ab \rightarrow bA$   
 $Ba \rightarrow aB$   
 $Bb \rightarrow bB$

$aIXaD$

---

$aX \rightarrow Xa$   
 $bX \rightarrow Xb$   
 $Na \rightarrow aN$   
 $Nb \rightarrow bN$   
 $AD \rightarrow XaD$   
 $BD \rightarrow XbD$   
 $ND \rightarrow \lambda$

$aIXa bX D$   
 $aIXa bX D$   
 $N$  (with an arrow pointing to the  $aIXa$  part)

## 7.2 Gramáticas Sensibles al Contexto (GSC) - Tipo 1

Estas gramáticas imponen restricciones sobre las GSR. La idea principal es que las sustituciones dependen de lo que rodea a la variable ("el contexto") y la cadena nunca se hace más pequeña.

### Definición y Reglas

Una GSC tiene producciones de la forma:

$$\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$$

Desglosemos qué significa esto:

1.  $A$ : Es un **símbolo no terminal** (la variable que vamos a cambiar).
2.  $\alpha$  y  $\beta$  (**El Contexto**): Son cadenas de terminales o no terminales (pueden ser vacías). Representan lo que está a la izquierda y derecha de  $A$ .
3.  $\gamma$  (**El Cambio**): Es una cadena **no vacía**. Es por lo que sustituimos a  $A$ .

### La Regla de Oro: No Contracción

La característica más importante para identificar una GSC es la longitud.

- La longitud de la parte derecha ( $y$ ) debe ser **igual o mayor** que la de la parte izquierda ( $x$ ).
- Esto significa que la gramática **nunca "encoge"** la cadena (excepto posiblemente para generar la cadena vacía  $\lambda$  si el lenguaje lo permite).

**Ejemplo:**

①  $L = \{ a^n b^n c^{n-1} : n \geq 1 \}$

$S \rightarrow aab \mid aaXbc$   
 $aX \rightarrow aabY \mid aab$   
 $Yb \rightarrow bY$   
 $Yc \rightarrow Xcc$   
 $bX \rightarrow Xb$

$aaXbc$   
 $aaabYbc$   
 $aaabbbYc$   
 $aaabbbXcc$

**Relación con Máquinas**

- **Lenguaje que generan:** Lenguajes Sensibles al Contexto (LSC).
- **Máquina Equivalente:** Son reconocidos por los **Autómatas Linealmente Acotados (ALA)**. Un ALA es básicamente una Máquina de Turing que solo tiene permiso para usar la parte de la cinta donde está escrita la entrada (espacio finito).

## 7.3 Protips

### 1. El Mensajero (Commutation)

Es el truco más importante. Si necesitas generar  $a^n b^n c^n$ , no puedes hacerlo de golpe.

Generas  $aBC$  y luego mueves la  $B$  o la  $C$  a su sitio.

- **Regla de tráfico:**  $CB \rightarrow BC$  (Permite que la  $C$  "adelante" a la  $B$ ).

### 2. El Muro (Boundary)

A veces necesitas saber dónde acaba la cadena para convertir variables en letras finales. Usamos marcadores de inicio/fin.

- **Ejemplo:**  $\#ABC\#$ . Cuando una variable toca la pared ( $\#$ ), se transforma.

### 3. El Clonador

Para  $ww$  o  $a^{2n}$ . Una variable se divide en dos, o transporta una copia de sí misma.

## 7.4 Identificar Gramáticas y Lenguajes

### Gramáticas

¿Qué ves a la IZQUIERDA?	¿Qué ves a la DERECHA?	TIPO
Solo 1 Variable ( $A \rightarrow \dots$ )	Estricto: $a$ ó $aB$	Tipo 3 (Regular)

¿Qué ves a la IZQUIERDA?	¿Qué ves a la DERECHA?	TIPO
<b>Solo 1 Variable</b> ( $A \rightarrow \dots$ )	Libre: $aAb, BC$ , etc.	<b>Tipo 2 (GIC)</b>
<b>Grupo</b> ( $aA \rightarrow \dots$ )	Longitud $\geq$ Izquierda	<b>Tipo 1 (Sensible)</b>
<b>Grupo</b> ( $aA \rightarrow \dots$ )	Longitud $<$ Izquierda	<b>Tipo 0 (Irrestricta)</b>

## Lenguajes

### 1. Lenguajes Regulares (Tipo 3)

Memoria: Nula o Finitud.

Clave: "No necesito contar hasta el infinito".

- **Patrones:** Empieza por, termina en, contiene la subcadena "aba".
- **Conteo:** Solo cuenta hasta un número fijo. (Ej: "Longitud par", "múltiplo de 3").
- **NO PUEDE:** Contar cosas indefinidas y compararlas.
- *Ejemplo:*  $L = \{\text{cadenas de a y b que terminan en ab}\}$ .

### 2. Lenguajes Independientes del Contexto (Tipo 2)

Memoria: Una Pila (Stack).

Clave: "Puedo comparar DOS cosas (o anidar)".

- **Patrones:** Equilibrio, espejos.
- **Conteo:**  $a^n b^n$  (mismo número de a's que de b's).
- **Estructura:** Paréntesis equilibrados  $(( ))$ , palíndromos  $(ww^R)$ .
- **Límite:** Solo puedo relacionar **dos** contadores a la vez o estructuras anidadas. No puedo cruzar relaciones.
- *Ejemplo:*  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ o } j=k, i, j, k > 0\}.$$

$$L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j > 0\},$$

$$L = \{a^i b^j c^k \mid k = i + (2 * j)\}$$

### 3. Lenguajes Sensibles al Contexto (Tipo 1)

Memoria: Cinta acotada (puedo leer y volver atrás).

Clave: "Puedo comparar TRES cosas o COPIAR".

- **Patrones:** Relaciones triples o cruzadas.

- **Conteo:**  $a^n b^n c^n$  (Tres cantidades iguales).
- **Copia:**  $ww$  (una palabra repetida exactamente igual, ej: "papa", "mama"). *Nota: El palíndromo es Tipo 2, la copia exacta es Tipo 1.*
- **Ejemplo:**  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ .

$$L = \{a^{n+1} b^n c^{n-1} : n \geq 1\}.$$

## 4. Lenguajes Recursivamente Enumerables (Tipo 0)

Memoria: Ordenador completo.

Clave: "Cualquier algoritmo lógico".

- Si te dan un problema lógico complejo que no tiene restricciones de estructura simple. Generalmente, en los exámenes, se centran en los tres anteriores, salvo que pregunten por problemas de parada o indecidibilidad.

$$L = \{ww : w \in \{a, b\}^+\}.$$