Prueba 1 de Evaluación Continua

Adrián Rivero Fernández

Problema

a) Analice el problema del péndulo simple con el método hamiltoniano sin asumir que el ángulo de giro sea pequeño. Para ello, obtenga el hamiltoniano, establezca las ecuaciones de Hamilton y resuelva dichas ecuaciones por cuadraturas. El péndulo simple es un

sistema con un grado de libertad. Escogemos la coordenada generalizada θ que representa el ángulo del péndulo con la vertical.

Para un péndulo de longitud l y masa m, el lagrangiano vendrá dado por

$$\mathcal{L} = T - V$$

Donde

$$T = \frac{m}{2} v_m^2$$

$$V = -mgy_m$$

$$x_m = l \sin\theta \Longrightarrow \dot{x_m} = l\dot{\theta}\cos\theta$$

$$y_m = -l\cos\theta \Longrightarrow \dot{y_m} = l\dot{\theta}\sin\theta$$

$$v_m^2 = x_m^2 + y_m^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Y de la expresión del momento conjugado deducimos

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} \Longleftrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

El hamiltoniano será por tanto:

$$H = p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}$$

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

Y utilizando las ecuaciones de Hamilton obtenemos que

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$\dot{p_\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

Podemos resolver por cuadraturas estas ecuaciones obteniendo:

$$\int d\theta = \int \frac{p_\theta}{ml^2} dt$$

$$\int dp_\theta = -\int mgl\sin\theta dt$$

b) Con ayuda de los corchetes de Poisson, obtenga la ley de movimiento general del péndulo. Deduzca que el movimiento es armónico cuando la amplitud del movimiento es suficientemente pequeña.