

Práctica: Relación de dispersión de ondas de tensión superficial

Objetivo

Determinar experimentalmente la tensión superficial de un líquido a partir de la relación de dispersión de ondas de tensión superficial (ondas capilares).

Material necesario

- Dispositivo generador de luz láser (longitud de onda: 633 nm)
- Generador de señales eléctricas
- Transmisor mecánico de metal acoplado a un altavoz
- Recipiente
- Agua destilada
- Elementos de soporte: base, varilla, nuez, plataforma de altura regulable.



Figura 1. Montaje experimental.

Introducción teórica

Ondas de gravedad y de tensión superficial

La superficie de un fluido está sometido a fuerzas de tensión superficial y a la fuerza de la gravedad adoptando una forma de equilibrio de acuerdo con el balance de estas fuerzas. Cuando se produce una perturbación en el fluido tal que un elemento de volumen es desplazado de su posición de equilibrio, la fuerza de la gravedad y la tensión superficial actúan como fuerzas recuperadoras

generando, cada una de ellas, un tipo de onda asociada: ondas gravitacionales debidas a la gravedad y ondas capilares debidas a la tensión superficial.

Las ondas gravitacionales se deben a la presencia del campo gravitatorio. Una vez la superficie libre de un fluido en reposo ha sido perturbada, la diferencia de altura entre distintos puntos de la superficie del fluido da origen a diferencias de presión hidrostática consecuencia de la gravedad. El orden de magnitud de esta fuerza por unidad de volumen es $\rho \cdot g$, donde ρ es la densidad del fluido y g la aceleración de la gravedad.

Las ondas capilares son consecuencia de las fuerzas de tensión superficial que experimentan las moléculas de la superficie del fluido. Las moléculas en el interior del fluido se encuentran rodeadas en todas las direcciones por otras moléculas, por tanto, las fuerzas de cohesión molecular ejercidas por las moléculas circundantes se cancelan. Sin embargo, en la superficie del fluido las moléculas se encuentran sometidas únicamente a la acción de las fuerzas de cohesión de las moléculas adyacentes en el interior del fluido. La resultante de estas fuerzas de cohesión en una superficie deformada está dirigida hacia el centro de curvatura en cada punto de la superficie (ejerciendo una presión hacia el interior del fluido si la superficie es convexa y hacia el exterior si es cóncava). En presencia de una perturbación, en cada punto de la superficie del fluido, se originará una fuerza recuperadora dirigida hacia su centro de curvatura. La magnitud de la fuerza de tensión superficial por unidad de superficie es $\sigma \cdot k$, donde σ es la tensión superficial y k es el número de onda ($k = 2\pi/\lambda$, representando λ la longitud de onda).

Relación de dispersión

Una onda puede describirse como la propagación de una perturbación física a través de un medio. La expresión de una onda monocromática plana en una dimensión puede escribirse en función de la posición x y del tiempo t como:

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

donde y representa la desviación de una magnitud de su valor de equilibrio, A es la amplitud de la onda, ω la frecuencia angular y k el número de onda. El número de onda proporciona información acerca de la deformación espacial del medio por el que se propaga la onda. Así, cuanto menor longitud de onda, mayor k , y por tanto, mayor la deformación que experimenta el medio. En el caso de la superficie libre de un fluido, $y(x, t)$ corresponde a la separación de esta superficie de su altura de equilibrio en la posición x y en el tiempo t .

Por otra parte, la energía por unidad de volumen que es necesaria para producir la deformación que se propaga por el medio, y por tanto la energía transportada por la onda, es proporcional al cuadrado de la frecuencia:

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

donde $v = v(x, t) = \frac{ds}{dt}$ es la velocidad del desplazamiento de los elementos de volumen debido al paso de la onda y ρ la densidad del medio.

Dada la relación entre perturbación y deformación (causa y efecto), debe existir una relación entre ω y k . Esta relación $\omega = \omega(k)$ es la denominada relación de dispersión, que va a depender tanto del medio como de las fuerzas involucradas en el proceso. Además, a tenor de lo mencionado, parece intuitivo pensar que $\omega(k)$ debe ser creciente pues a mayor energía se debería producir mayor deformación.

La relación de dispersión se puede determinar a partir de la linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la ecuación de Young-Laplace (véase [4] pags. 369-378, 416, [2,3] § 61) como condición de contorno que relaciona la diferencia de presión en la interfaz de un fluido (p. ej.: aire y agua) con las fuerzas de tensión superficial, resultando:

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma}{\rho} k^3$$

Experimentalmente se puede determinar la relación entre ω y k para ondas de tensión superficial estacionarias, generadas en la superficie de un líquido, a partir del patrón de difracción que se obtiene al hacer incidir un haz de luz monocromática, con la longitud de onda apropiada, sobre la superficie del líquido. Mediante un transmisor mecánico acoplado a un generador de señales se puede inducir una perturbación de frecuencia conocida en la superficie del líquido. Si la frecuencia de la perturbación coincide con la frecuencia de algún modo normal de vibración de las ondas de tensión superficial se excitará dicho modo y se generarán ondas estacionarias en la superficie. Si se emplea un haz de luz de longitud de onda determinada para iluminar a las ondas estacionarias generadas en la superficie del líquido, las ondas de luz reflejadas sobre una pantalla mostrarán un patrón de difracción consecuencia de la diferencia de camino que recorren las ondas reflejadas. El patrón de difracción en la pantalla consiste en un conjunto de puntos luminosos alineados que corresponden con los lugares donde se ha producido la interferencia constructiva. El punto central representa el máximo principal del patrón de difracción y los puntos adyacentes son los máximos secundarios.

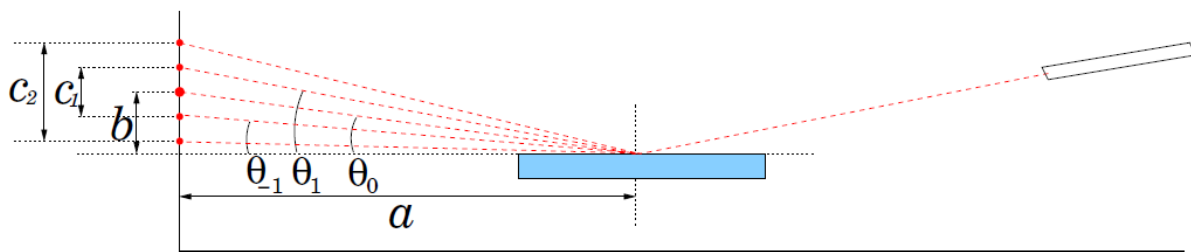


Figura 2. Esquema del patrón de difracción.

En la figura 2 se muestra un esquema del patrón de difracción de las ondas reflejadas en una superficie donde se han generado ondas de tensión superficial estacionarias. El ángulo θ_0 , es el ángulo que subtiende el máximo principal con la horizontal mientras que θ_1 , θ_{-1} , corresponden a los ángulos de los máximos secundarios de primer orden, uno a cada lado del máximo central.

Los máximos del patrón de difracción se producen cuando la diferencia de camino que recorren los rayos reflejados sobre crestas diferentes es un número entero de longitudes de onda:

$$\frac{2\pi}{k}(\cos\theta_0 - \cos\theta_n) = \lambda n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde θ_0 es el ángulo del haz reflejado cuando la superficie del líquido es plana, es decir, sin perturbación.

Restando la ecuación correspondiente a $-n$ de la correspondiente a $+n$ se obtiene:

$$\frac{2\pi}{k}(\cos\theta_{-n} - \cos\theta_n) = 2\lambda n$$

que es equivalente a escribir:

$$k = \frac{2\pi}{n\lambda} \sin\frac{\theta_n - \theta_{-n}}{2} \sin\frac{\theta_n + \theta_{-n}}{2}$$

Como los máximos del mismo orden a ambos lados del máximo central son simétricos se cumple que $\frac{\theta_n + \theta_{-n}}{2} = \theta_0$. Por otra parte, si el ángulo de incidencia del haz de luz es suficientemente pequeño está justificado utilizar la aproximación paraxial: $\sin\frac{\theta_n - \theta_{-n}}{2} \approx \frac{\theta_n - \theta_{-n}}{2}$. Luego, finalmente se obtiene:

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda}(\theta_n - \theta_{-n})\sin\theta_0$$

Esta expresión permite obtener el número de onda a partir de las posiciones angulares de los puntos luminosos distribuidos simétricamente alrededor del máximo central. Particularizando para los máximos secundarios de primer ($n=1$) y segundo orden ($n=2$) descritos en la figura 2,

$$k_1 = \frac{\pi}{\lambda}(\theta_1 - \theta_{-1})\sin\theta_0 \quad k_2 = \frac{\pi}{2\lambda}(\theta_2 - \theta_{-2})\sin\theta_0$$

Si el ángulo que subtende el haz reflejado con la horizontal θ_0 es suficientemente pequeño entonces, de acuerdo con la aproximación paraxial, $\sin\theta_0 \approx \theta_0$, y las expresiones anteriores pueden escribirse en la forma:

$$k_1 = \frac{\pi}{\lambda}(\theta_1 - \theta_{-1})\theta_0 \quad k_2 = \frac{\pi}{2\lambda}(\theta_2 - \theta_{-2})\theta_0$$

Método experimental

Consiste en generar una onda estacionaria de tensión superficial mediante un transmisor mecánico acoplado a un altavoz y éste a un generador de señales que, en contacto con la superficie del fluido (agua destilada), actúa como forzante armónico de frecuencia y amplitud controlables. Al hacer incidir el haz de luz láser sobre la superficie del fluido donde se genera la onda estacionaria, esta

superficie actúa como una red de difracción de cuyo patrón, reflejado en una pantalla, pueden identificarse el máximo central y los máximos secundarios de primer y segundo orden (ver figura 2).

Procedimiento:

1. Llenar el recipiente con agua destilada y medir la temperatura del agua.
2. Establecer contacto entre el transmisor mecánico y la superficie del líquido (agua destilada). El segmento horizontal del transmisor debe contactar paralelamente con la superficie del líquido quedando parcialmente sumergido en el menisco. Para modificar la altura del transmisor mecánico y nivelarlo respecto a la superficie del agua, actuar sobre las tuercas que sujetan el soporte donde el transmisor se encuentra anclado.
3. Conectar el haz de luz láser y ajustar tanto su inclinación como su distancia al recipiente hasta que el reflejo del haz en la superficie del fluido sea visible en la pantalla. En ausencia de perturbación, con la superficie del fluido en equilibrio, debería observarse un punto estático en la pantalla.
4. Conectar el generador de señales y seleccionar una frecuencia dentro del intervalo 150 – 400 Hz. Se excitará un modo normal de vibración de las ondas de tensión superficial en el recipiente formándose ondas estacionarias en la superficie. A frecuencias suficientemente bajas (del orden de decenas de Hz) es posible observar las ondas estacionarias generadas iluminando tangencialmente la superficie del líquido con un foco.
5. Ajustar la posición del punto de incidencia del haz láser en el líquido de modo que rebase levemente el segmento horizontal del transmisor mecánico. Para ello, actuar sobre la base elevadora que soporta al dispositivo láser, aumentando o disminuyendo su altura. El punto de incidencia del haz láser en la superficie líquida se puede localizar con ayuda de una regla metálica, apoyando el canto de ésta en los bordes del recipiente y deslizándola hasta encontrar la reflexión del haz láser en la superficie.
6. Ajustar la amplitud de la onda estacionaria hasta obtener un patrón de difracción en la pantalla donde puedan distinguirse con nitidez el máximo principal (punto luminoso central) y los máximos secundarios (puntos luminosos adyacentes al central). Para ello, actuar sobre el generador de señales variando gradualmente la amplitud de la señal.
7. Registrar la frecuencia consignada al generador de señales y tomar una fotografía del patrón de difracción reflejado en la pantalla.

8. Medir la distancia horizontal (a en la figura 2) entre el punto de incidencia del láser en el líquido y la pantalla. Medir la distancia vertical (b en la figura 2) entre el máximo central y la proyección del punto de incidencia del láser sobre la pantalla.
9. Repetir los pasos 4 – 7 para incrementos de la frecuencia en, aproximadamente, 10 Hz en el intervalo 150 – 400 Hz.

Resultados experimentales

- Empleando agua destilada como líquido en el que se van a generar las ondas de tensión superficial, determinar, para cada frecuencia consignada en el generador de señales, la frecuencia angular ω así como el número de onda k , este último a partir de la expresión dada en el resumen teórico. De la figura de difracción captada sobre el papel milimetrado se medirán las distancias c_n para determinar, dentro de la aproximación paraxial, los ángulos:

$$\theta_0 = \frac{b}{a} \qquad \theta_n - \theta_{-n} = \frac{c_n}{a}$$

Se determinará k tanto para los máximos secundarios de primer orden ($n=1$, distancia c_1 en la figura de difracción) como para los de segundo orden ($n=2$, distancia c_2 en la figura de difracción).

- Representar gráficamente ω^2 frente a k^3 para los máximos secundarios de primer y segundo orden (dos representaciones gráficas). Realizar un ajuste por mínimos cuadrados de los datos para obtener la ecuación de la recta que mejor ajusta a los datos experimentales. Determinar el valor experimental de la tensión superficial del agua por identificación con la relación de dispersión y compararlo con el valor de la literatura. Discutir los resultados. OBSERVACIÓN: si el valor experimental obtenido de la tensión superficial difiere considerablemente del valor aceptado en la literatura, puede repetir el cálculo con los máximos secundarios de tercer orden que sean visibles en la figura de difracción. Estos máximos se encontrarán separados una distancia mucho mayor que el diámetro del círculo luminoso originado por el láser lo que reducirá la incertidumbre relativa en la determinación de c_n .
- Comparar, en orden de magnitud, la fuerza por unidad de volumen para las ondas de gravedad ($\rho \cdot g$) y para las ondas superficiales ($\sigma \cdot k^2$), obteniendo el número de onda crítico a partir del cual se deben tener en cuenta los efectos de la gravedad. Comparar el resultado con los valores de k determinados experimentalmente. Discutir los resultados.

Bibliografía

1. Batchelor, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000 third ed., 1967.
2. Landau, L. D. y E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, vol. 6 de Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 1987 second ed., 1959.
3. Landau, L. D. y E. M. Lifshitz: *Mecánica de Fluidos*, vol. 6 de *Curso de Física Teórica*. Reverté, primera ed., 1991. Traducción de la primera edición inglesa.
4. Crawford, F.: *Curso de Física de Berkeley (T.3): Ondas*. Reverté, 1971.

NOTA MUY IMPORTANTE

- Tome nota de las incertidumbres de todos los equipos de medida que utilice.
- **Realice la propagación de incertidumbre para medidas indirectas (mostrando las derivadas parciales calculadas así como la expresión de la incertidumbre en función de las magnitudes), requisito imprescindible para que el informe de la práctica sea evaluado.**
- Aunque no se exija explícitamente en el guion de prácticas, incluya una tabla de datos para cada representación gráfica que realice. Añada las columnas correspondientes a las incertidumbres de medida y propagación de incertidumbres.
- En las representaciones gráficas consigne las magnitudes representadas en cada eje, así como sus unidades correspondientes. Incluya barras de incertidumbre en los puntos de datos representados.
- Lea los documentos “Presentación de informes” y “Cálculo de incertidumbres” disponibles en el curso virtual.