PRACTICA 2: ESTADÍSTICA APLICADA A MEDIDAS NUCLEARES

2.1. INTRODUCCIÓN

En la expresión del resultado de la medida de cualquier magnitud, deben figurar tres tipos de información esencial: un primer número que expresa la cuantía de la medida, un segundo número precedido del signo $\pm$ y que indica el límite de error o incertidumbre estadística del resultado, y en tercer lugar la expresión de la unidad de la propia magnitud. El parámetro de error o incertidumbre asociado a una medida, constituye una información importante para valorar el resultado obtenido, y supone un control de calidad primario en su determinación. No existe ninguna magnitud física que exista "sin error" por lo que resulta evidente la necesidad de conocer el método de cálculo o de estimación del límite de error o incertidumbre estadística en cada caso particular.

Un caso particularmente importante en medidas nucleares es la expresión del resultado de la medida de la actividad de una muestra radiactiva. Si mediante un sistema detector supuestamente perfecto (rendimiento de detección 100 %, tiempo de resolución y fondo nulos, y estable durante el intervalo de operación) se realizan una serie de medidas sucesivas de la actividad de una muestra radiactiva, de periodo muy largo, durante tiempos iguales y mucho más cortos que el periodo, se observa en los resultados una marcada variabilidad.

La variabilidad observada en las medidas de actividad no es más que una consecuencia del carácter aleatorio de los procesos radiactivos, ya que aunque un determinado núcleo tiene una probabilidad de desintegración por unidad de tiempo (la constante de desintegración λ, este proceso se realiza al azar en un instante completamente impredecible. Por lo que se produce el hecho observado de que al medir la actividad de una población formada por un gran número de átomos radiactivos idénticos, el resultado fluctuará alrededor de un valor medio que no es otro que la media aritmética de los resultados procedentes de un número infinito de medidas. Este parámetro de centralización es el que se debería tomar como resultado de la medida de actividad que sirve de ejemplo.

Sin embargo, esta media aritmética es inasequible: de una parte, la realización de un conjunto muy grande de medidas lleva asociada una gran duración, incompatible con las necesidades de tiempo limitado de la propia medida, y por otra, la actividad decrece con el tiempo, por lo que varían las condiciones de operación y la media aritmética carecería completamente de significado.

Afortunadamente el caso de la desintegración radiactiva es de los más favorables desde el punto de vista de su tratamiento estadístico. En efecto, este proceso sigue la llamada distribución estadística de Poisson, lo que permite afirmar que, si en un determinado intervalo de tiempo llegan al detector n sucesos ionizantes, el valor más probable de la media aritmética es, precisamente n.

2.2. DISTRIBUCIONES DE POISSON Y DE GAUSS

La ventaja esencial de disponer de una función de densidad, en especial si es ajustable a un modelo matemático, es que basta un número muy reducido de parámetros para describir la función y que a su vez son suficientes para caracterizar la totalidad de la población, lo que permite la obtención de una información equivalente, a la que suministraría una muestra mucho mayor.

No en todos los casos se conoce la forma matemática de la función de distribución de probabilidad de densidad, que sigue un conjunto de observaciones, pero en el caso de la desintegración radiactiva, se ha probado experimentalmente que el proceso sigue una distribución de Poisson, cuya función de densidad de probabilidad es:

$$P(s) = \frac{m^s e^{-m}}{s!}$$

donde $P(s)$ es la probabilidad de que en una medida de la actividad de la muestra se observen exactamente s desintegraciones y m es un parámetro de la distribución. En la fig. 2.1 aparece un ejemplo de este tipo de distribución.

La distribución de Poisson es discreta, o discontínua, y en ella la media aritmética vale $\mu = m$ y la desviación típica $s = \sqrt{m}$.

Para que se comprenda la importancia de que la desintegración radiactiva siga la distribución de Poisson, basta formular una pregunta de gran importancia, £se puede a partir de una única observación calcular estimadores de la media y de la desviación típica?. A primera vista la pregunta parece pretenciosa, ya que por ejemplo, de una única lectura de un termómetro es imposible inferir ni temperatura media ni su desviación típica.

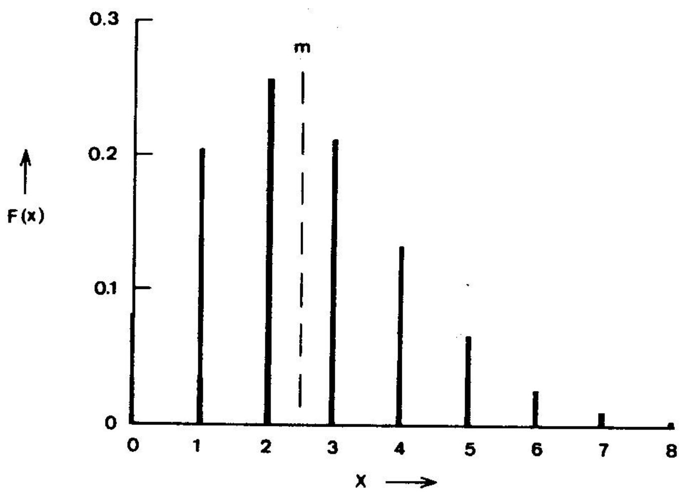

Figura 2.1. Distribución de Poisson

Sin embargo, por el hecho de conocer la distribución estadística es posible en el caso de una medida de la actividad, el cálculo de estimadores de la media y de la desviación típica; así en el caso en que el resultado de la medida es n cuentas, se demuestra que:

$$m = n; \qquad \sigma = \sqrt{n+1} \approx \sqrt{n}$$

Si $n \geqslant 30$ se puede aproximar la distribución de Poisson, de aplicación engorrosa, por la llamada distribución normal o de Gauss, cuya expresión matemática es:

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - s)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La distribución normal es simétrica y contínua. En la fig. 2.2 aparece un ejemplo de distribución de Gauss.

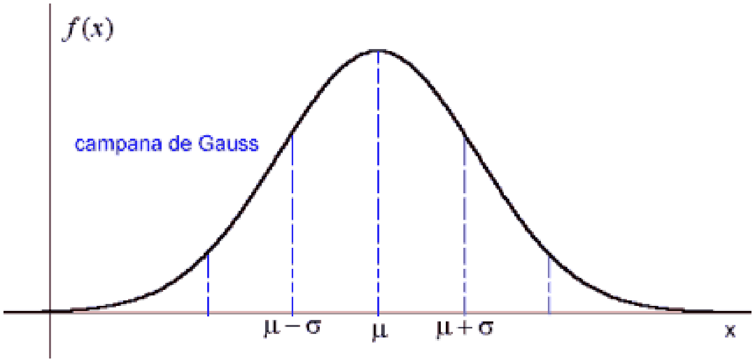

Figura 2.2. Distribución de Gauss

Igualmente el conocimiento de la distribución estadística permite una estimación de la imprecisión que afecta a una medida de actividad. En efecto, en este caso también se puede calcular el estimador de la desviación típica, o parámetro de dispersión que resulta valer $s = \sqrt{n}$. Por otra parte si $n \geqslant 30$ se puede suponer con ngran aproximación que el procesos sigue una distribución normal o gaussiana, en cuyo caso si se expresa el resultado de la medida como $ns = n\sqrt{n}$, la probabilidad de que la media aritmética quede comprendida en el intervalo así definido es de un 68,3 %; si se expresa como $n2s = n2\sqrt{n}$ dicha probabilidad sube al 95,5 % y en la forma $n3s = n3\sqrt{n}$ este valor llega al 99,7 %. De esta forma se consigue el objetivo previsto de expresar el resultado de una medida de actividad y su límite de incertidumbre para un nivel de fiabilidad porcentual dado.

Por otra parte, la precisión en el valor dado como media de una serie de medidas, dentro de un intervalo de confianza determinado, viene expresado por la desviación típica de la media. Así, si para un experimento repetido N veces se han obtenido los valores $n_1, n_2, ...n_N$ se puede expresar el resultado como ns_n para un intervalo de confianza del 68,3 %, siendo:

$$n = \frac{\sum n_i}{N}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (n_i - n)^2}{N - 1}}$$

2.3. FIABILIADAD ESTADÍSTICA DE UN DETECTOR GEIGER-MÜLLER

En general, un sistema detector será estadísticamente fiable si existe una correspondencia biunívoca entre el número de sucesos ionizantes, n, que alcanzan el volumen sensible del detector, y el número, m, de impulsos que se acumulan en la escala de contaje. Existen desafortunadamente dos situaciones en las que esta correspondencia no se produce: en la primera de ellas, como se ha visto en la práctica anterior, se produce una pérdida de información debida a la existencia de un tiempo de resolución distinto de cero, por lo que en general $m < n$.

Existen casos en los $m > n$: son aquellos en los que la escala del instrumento recibe impulsos espúreos (parásitos eléctricos, chispas, etc.). En muchos casos, en especial en el contaje de actividades muy débiles, es fundamental comprobar que el contaje se encuentra libre de tales efectos espúreos: este objetivo se alcanza mediante el control de la fiabilidad estadística.

A este fin se utiliza la función χ^2 de Pearson, que permite una comparación entre la desviación típica teórica calculada, supuesto que sigue la estadística de Poisson, y la experimental, calculada a partir de un cierto número de medidas. El valor de la χ^2 se calcula a partir de la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = \frac{\sum(n_i - n)^2}{n}$$

que expresado en función de las desviaciones estadísticas teórica y experimental calculadas es:

$$\chi^2 = \frac{s^2_{\text{exp}}}{s^2_{\text{teo}}}(N-1)$$

La función χ^2 es una variable muy usada en comprobaciones estadísticas, y se obtiene su probabilidad en función de los grados de libertad (Tabla I). Una serie de medidas será sospechosa de presentar alguna perturbación cuando la probabilidad de χ^2 es demasiado grande o demasiado pequeña en relación con el valor estándar. Un detector se considera fiable si existe una probabilidad $0,10 < p < 0,90$ lo que da unos valores determinados de χ^2 en función de los grados de libertad.

Por el contrario, tomando el criterio más conservador se llega a unos límites de tolerancia para las desviaciones típicas. Si la discrepancia es mayor, por ejemplo,

$p < 0{,}02$ ó $> 0,98$, no se puede asegurar que el detector sea fiable y habrá que localizar y eliminar la causa de la perturbación.

Tabla I: Función χ^2
Probabilidad en función de los grados de libertad

Grados de	Probabilidad						
Libertad	0,99	0,95	0,90	0,50	0,10	0,05	0,01
2	0,02	0,1	0,21	1,39	4,61	5,99	9,21
3	0,12	0,35	0,58	2,37	6,25	7,82	11,35
4	0,3	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	13,28
5	0,55	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	15,09
6	0,87	1,64	2,2	5,35	10,65	12,59	16,81
7	1,24	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	18,48
8	1,65	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	20,09
9	2,09	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	21,67
10	2,56	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	23,21
11	3,05	4,58	5,58	10,34	17,27	19,68	24,73
12	3,57	5,23	6,3	11,34	18,55	21,03	26,22
13	4,11	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	27,68
14	4,66	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	29,14
15	5,23	7,26	8,55	14,34	22,31	25	30,58
16	5,81	7,96	9,31	15,34	23,54	26,3	32
17	6,41	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	33,41
18	7,01	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	34,81
19	7,63	10,12	11,65	18,34	27,2	30,14	36,19
20	8,26	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	37,57
21	8,9	11,59	13,24	20,34	29,61	32,67	38,93
22	9,54	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	40,29
23	10,2	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	41,64
24	10,86	13,85	15,66	23,34	33,2	36,41	42,98
25	11,52	14,61	16,47	24,34	34,38	37,38	44,31
26	12,2	15,38	17,29	25,34	35,56	38,88	45,64
27	12,88	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	46,96
28	13,57	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	48,28
29	14,26	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	49,59

2.3.1. OBJETIVOS DE LA PRÁCTICA

1. Determinación de la desviación estadística de una serie de medidas de la actividad de una muestra radiactiva.

2. Comparación de la desviación estadística experimental con la desviación estadística que proporciona la distribución de Poisson

3. Estudio de la fiabilidad estadística del detector Geiger-Müller.

MODO DE OPERAR

Como comprobación de que el contador opera correctamente es conveniente someterle periódicamente a un control estadístico. La secuencia de una medida de este tipo es la siguiente:

a) Medida de la actividad de una muestra durante $N = 30$ intervalos, de 10 s de duración.

b) Cálculo del número medio de impulsos por intervalo,

$$n = \frac{\sum n_i}{N}$$

c) Cálculo de la desviación típica de una medida, según la distribución de Poisson,

$$s_{\text{teor}} = \sqrt{n}$$

d) Cálculo de la desviación típica experimental del conjunto de observaciones aplicando la fórmula:

$$s_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{\sum (n_i - n)^2}{N - 1}}$$

e) Comparación de s_{teor} con s_{exp}.

f) Cálculo de χ^2 de acuerdo con la fórmula

$$\chi^2 = \frac{s_{\text{exp}}^2}{s_{\text{teor}}^2}(N - 1)$$

g) Consultando la Tabla I, determine la probabilidad p, en función de los grados de libertad, $f = N - 1$, **interpolando si fuera necesario**.

h) Comparación de los resultados con los criteriors de aceptabilidad comúnmente considerados.

RESULTADOS

i	n_i	i	n_i
1		16	
2		17	
3		18	
4		19	
5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	
10		25	
11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

$N =$

$n = \frac{\sum n_i}{N} =$

$s_{\text{teor}} =$

$s_{\text{exp}} =$

$f = N - 1 =$

$\chi^2 =$

$p =$

CONCLUSIONES de la PRÁCTICA 2:

1. ¿Se parecen la desviación típica experimental y la teórica?
2. El valor de la probabilidad, p, ¿está en concordancia con los criterios de aceptación establecidos?
3. ¿Cuál es el estado del detector desde el punto de vista de su fiabilidad estadística?