

Práctica: Flujos en conductos

Objetivos

1. Verificación de la ley de Hagen-Poiseuille a partir de la experimentación con fluidos newtonianos que circulan a través de conductos capilares de diferentes diámetros.
2. Caracterización, mediante el número de Reynolds, del régimen de circulación del fluido.
3. Determinación del coeficiente de rozamiento del conducto capilar.

Material necesario

- Tubo vertical de metacrilato con escala graduada en mm
- Tubo capilar de vidrio
- Manguera para llenado de tubo vertical
- Nivel
- Cronómetro
- Balanza
- Vaso de precipitados
- Base, nuez y pinzas de sujeción



Figura 1. Montaje experimental

Introducción teórica

El flujo de un líquido a través de un tubo se produce como consecuencia de una diferencia de presión entre sus extremos. La curva característica obtenida al registrar las velocidades volumétricas de flujo, Q , en función de la diferencia de presión, Δp , viene determinada por las propiedades del fluido y por la geometría del tubo. Se puede caracterizar el régimen de un fluido mediante el *número de Reynolds*,

$$Re = \frac{v\rho D}{\mu}$$

donde v representa la velocidad del fluido, ρ su densidad, μ el coeficiente de viscosidad dinámica y D una longitud característica del sistema, que en el caso de un fluido circulando a través de un tubo se considera el diámetro del mismo. El régimen laminar se presenta para bajos números de Reynolds ($Re \lesssim 2000$), es decir, fluidos que presentan elevada viscosidad, que se mueven a baja velocidad o bien que circulan por tuberías de pequeña sección. El régimen turbulento ($Re \gtrsim 3000$) se alcanza en fluidos con baja viscosidad, que se desplazan a alta velocidad o en tuberías de gran sección. Para un determinado fluido, el cambio de régimen laminar a turbulento puede apreciarse en la gráfica Q vs. Δp por la aparición de un codo en el punto en el que se produce la transición. El valor que toma el número de Reynolds en este punto se denomina Reynolds crítico y su valor en la transición depende de pequeñas perturbaciones que pueda sufrir el flujo.

Perfil de velocidades de Hagen-Poiseuille

El flujo de Hagen-Poiseuille es aquel que se establece en un tubo de sección circular por el que circula un fluido en régimen laminar, como consecuencia de la diferencia de presión existente entre los extremos del tubo.

En la figura 2a) se muestra un fluido en régimen laminar a través de un tubo. El fluido en contacto con las paredes del tubo se adhiere a éstas permaneciendo en reposo mientras que las sucesivas capas cilíndricas concéntricas de fluido van aumentando su velocidad hasta al centro del tubo donde la velocidad es máxima. Este efecto es consecuencia de la fuerza de rozamiento viscoso entre las capas de fluido. La capa en reposo fricciona con la siguiente ralentizándola y así sucesivamente hasta el centro del cilindro.

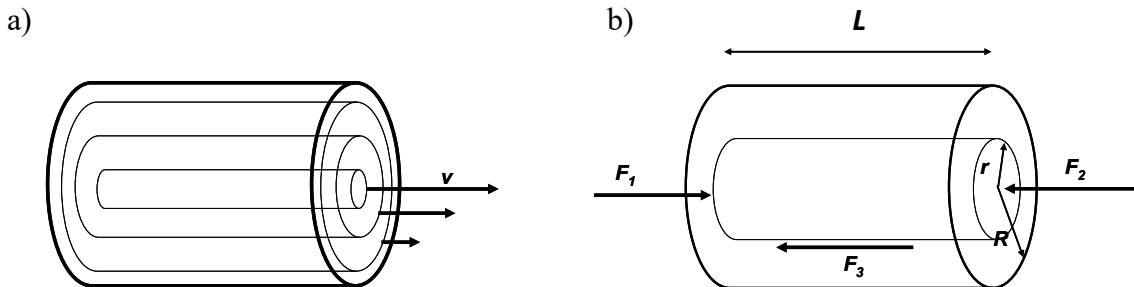


Figura 2. Flujo laminar en un tubo. a) La velocidad del fluido es máxima en el centro y va decreciendo hasta llegar a la pared del cilindro donde la velocidad es cero. b) Fuerzas que actúan en una capa cilíndrica de fluido.

La fuerza de rozamiento viscoso es proporcional al área de la capa de fluido considerada, a la diferencia de velocidad entre capas, e inversamente proporcional a la distancia que las separa,

$$F = \mu A \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

La constante de proporcionalidad μ es el coeficiente de viscosidad que depende de la temperatura y de la naturaleza del fluido.

La ley de Hagen-Poiseuille se puede obtener a partir del análisis de las fuerzas que operan en un fluido que se mueve a través de un tubo horizontal de radio R y longitud L . Considerando un tubo de radio r y espesor dr concéntrico con el anterior (ver figura 2b), las fuerzas que actúan sobre el mismo son:

- 1) La fuerza F_1 ejercida por la presión p_1 sobre la sección de entrada del fluido al cilindro

$$F_1 = p_1 \pi r^2$$

- 2) La fuerza F_2 ejercida por la presión p_2 sobre la sección de salida del cilindro

$$F_2 = p_2 \pi r^2$$

- 3) La fuerza de rozamiento viscoso F_3 con la pared lateral del cilindro, que se opone al movimiento del tubo fluido

$$F_3 = -\mu A \frac{dv}{dr}$$

En condiciones de flujo estacionario la velocidad del fluido no cambia con el tiempo luego,

$$\Sigma F = ma \rightarrow F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

sustituyendo F_1 , F_2 y F_3 con $A=2\pi rL$, el área del cilindro

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + \mu 2\pi rL \frac{dv}{dr} = 0$$

Admitiendo que el fluido en contacto con las paredes del cilindro de radio R se encuentra en reposo, la ecuación anterior en forma integral,

$$\frac{(p_1 - p_2)}{2\mu L} \int_r^R r dr = - \int_v^0 dv$$

Integrando se obtiene la velocidad del fluido en función del radio,

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

A partir de este resultado se puede calcular el volumen V de líquido que fluye a través del tubo en un tiempo t ,

$$V = \int_0^R v(r) 2\pi r dr \cdot t = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \cdot t$$

De donde se obtiene la velocidad volumétrica de flujo, $Q = \frac{dV}{dt}$, como:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \quad (\text{ley de Hagen-Poiseuille})$$

y dividiendo esta velocidad volumétrica por el área de la sección del tubo se obtiene la velocidad promedio,

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8 \mu l}$$

Una vez conocida la velocidad promedio U se puede calcular el número de Reynolds, Re . En el contexto del estudio de flujos en conductos es una convención considerar el diámetro del tubo, en lugar del radio, como la longitud característica D en el número de Reynolds. Asimismo, se utiliza la velocidad promedio U como velocidad característica v . Así,

$$Re = \frac{v \rho D}{\mu} = \frac{U \rho d}{\mu}$$

Coeficiente de rozamiento

El coeficiente de rozamiento λ de una tubería, también conocido como factor de fricción o coeficiente de resistencia de Darcy-Weisbach, es una magnitud adimensional empleada para evaluar las pérdidas viscosas.

Para la determinación del coeficiente de rozamiento λ , considérese un tubo por el que circula un flujo incompresible y estacionario. Despreciando cualquier tipo de pérdida de energía presente en el fluido (disipación viscosa, conducción térmica, separación, etc.) la ecuación de Bernoulli aplicada a dos secciones (1 y 2) a lo largo del conducto puede escribirse como:

$$\left(\frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho g z \right)_1 = \left(\frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho g z \right)_2$$

donde U es la velocidad promedio y z la altura a que se encuentra la sección considerada. Esta ecuación expresa la conservación de la energía a lo largo de la trayectoria del fluido. Sin embargo, para el caso de un fluido real, existen pérdidas de energía debido a la fricción viscosa por lo que la energía disponible para realizar trabajo va disminuyendo al avanzar por el conducto. Se hace necesario, por tanto, incluir un término adicional en la ecuación anterior para dar cuenta de dichas pérdidas:

$$\left(\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right)_1 = \left(\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right)_2 + h_f$$

Así, h_f representa la pérdida de carga existente entre los dos puntos considerados del conducto. El producto $g h_f$ representa las pérdidas de energía por unidad de masa que experimenta el fluido al circular entre los puntos 1 y 2 considerados, mientras que h_f es la variación de altura correspondiente a dicha variación de energía, interpretada como energía potencial. Para calcular h_f se deben resolver las ecuaciones de Navier-Stokes completas, lo cual, generalmente sólo es posible por métodos numéricos. Sin embargo, se puede extraer mucha información útil sobre flujos en conductos estudiando cómo depende h_f de los parámetros del problema. Así, suponiendo que

el tubo tiene sección constante de radio R , por conservación de la masa, $U_1=U_2$, y en este caso la pérdida de carga viene dada por:

$$h_f = \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g}$$

Por otra parte, aplicando el principio de conservación del momento lineal al volumen de control definido por el volumen de fluido en el conducto entre las secciones 1 y 2,

$$\Sigma F_x = \pi R^2(\Delta p + \rho g L \sin \phi) - (2\pi R L)\tau = m(U_2 - U_1) = 0$$

donde $\pi R^2 \Delta p$ representa las fuerzas de presión netas aplicadas sobre el volumen de control, $\pi R^2 L \rho g \sin \phi$ es la componente del peso en la dirección del movimiento (suponiendo que el conducto está inclinado un ángulo ϕ sobre la horizontal y siendo L la longitud de conducto que separa las dos secciones consideradas, es decir, $\Delta z = L \sin \phi$), τ es la tensión viscosa, o esfuerzo viscoso, promedio ejercida sobre las paredes del conducto mientras que $(2\pi R L)\tau$ representa la fuerza viscosa total ejercida por las paredes del conducto sobre el volumen de control considerado. Por tanto, en el caso de un tubo horizontal ($\phi=0$), h_f puede calcularse como

$$h_f = \frac{L}{d} \cdot \frac{4\tau}{\rho g}$$

siendo d el diámetro del conducto. Luego la pérdida de carga es proporcional al cociente entre la longitud y el diámetro del conducto considerado. Por otra parte, experimentalmente se ha encontrado que en régimen turbulento h_f es aproximadamente proporcional a U^2 , con lo cual se pueden correlacionar los resultados obtenidos para distintos conductos por medio de la expresión:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

donde el número adimensional λ se define como el coeficiente de rozamiento de la tubería, también llamado factor de fricción o coeficiente de resistencia de Darcy-Weisbach. Combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$\lambda = \frac{d}{L} \cdot \frac{g h_f}{\frac{1}{2} U^2} = \frac{8\tau}{\rho U^2}$$

que para el caso de un tubo horizontal, se reduce al cociente entre la caída de presión en una longitud igual al diámetro de la tubería, $\frac{d}{L} \Delta p$, y la presión dinámica basada en la velocidad promedio, $\frac{1}{2} \rho U^2$,

$$\lambda = \frac{d}{L} \cdot \frac{\rho g h_f}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

En general, en tubos de sección constante con paredes lisas, λ es función exclusivamente del número de Reynolds y de la forma del conducto

$$\lambda = \lambda(Re, \text{forma del conducto})$$

En el caso de tubos con paredes rugosas λ es también función de la rugosidad relativa (altura h de grano dividida por el diámetro)

$$\lambda = \lambda(Re, \frac{h}{d}, \text{forma del conducto})$$

Los resultados experimentales λ vs. Re para distintos valores de h/d para una forma de conducto fija (por ejp.: sección circular) se representan en gráficas (generalmente log-log) denominadas diagramas de Moody, muy útiles para predecir las pérdidas viscosas en conductos.

Para tubos horizontales, de sección circular y régimen laminar del fluido, a partir de las expresiones para el número de Re y para la velocidad promedio U de Hagen-Poiseuille, el factor de fricción resulta:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Cuando se alcanza el régimen turbulento el perfil de velocidades no puede calcularse de forma exacta. En este caso, por consideraciones dimensionales se considera que el perfil de velocidades promedio, lejos de la pared (en la región próxima al centro del tubo), está dado por un perfil logarítmico mientras que se considera un perfil lineal en la inmediata vecindad de la pared. Se puede obtener así un resultado semi-empírico para λ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 0.8$$

conocida como ecuación de Karman-Prandtl que relaciona de forma implícita λ con Re , válida para flujos turbulentos en tubos lisos.

Método experimental

1. Insertar el capilar de vidrio con el diámetro a estudiar en el tubo vertical. Mediante una pinza, sujetar el tubo capilar en posición horizontal.
2. Con ayuda del nivel, nivelar el tubo vertical y el capilar de vidrio horizontal.
3. Conectar la manguera al grifo y rellenar con agua el tubo vertical hasta una altura aproximada de 40 cm en la escala graduada del tubo.
4. Medir la temperatura del agua en el interior del tubo vertical para, una vez determinado experimentalmente el valor de la viscosidad dinámica, poder compararlo con el valor publicado en la literatura a esa misma temperatura.

5. Una vez que el agua comience a fluir por el tubo capilar, regular el caudal del grifo de llenado del tubo vertical de forma que el nivel de agua se mantenga aproximadamente constante en la altura seleccionada. Es decir, el caudal de salida del capilar ha de coincidir con el caudal de entrada del grifo para mantener el nivel constante.
6. Para diferentes alturas del nivel de agua en el tubo vertical, recoger en el vaso de precipitados el agua que escapa por el tubo capilar en un intervalo de tiempo de 10 segundos. Pesar la cantidad de agua recogida.
NOTA: Estimar la incertidumbre en la toma de tiempos teniendo en cuenta el tiempo de reacción del operador entre el inicio/parada del cronómetro y el inicio/parada en la recogida de agua.
7. Determinar el diámetro del tubo capilar a partir de la masa de agua contenida en el mismo. Para ello, desconectar el capilar del tubo vertical, rellenar el tubo capilar con agua, posteriormente descargar el agua del capilar en un vaso de precipitados y pesar el agua descargada junto con el tubo capilar. Finalmente, pesar el tubo capilar vacío.

Resultados experimentales

1. A partir de la masa de agua recogida y del tiempo registrado, determinar para cada altura seleccionada el caudal volumétrico de agua ($Q = \frac{\text{volumen}}{\text{tiempo}}$). Calcular la diferencia de presión Δp entre los extremos del capilar y representar los datos en una gráfica Q vs. Δp . Discutir los regímenes de flujo que se aprecian en la gráfica.
2. Realizar un ajuste por mínimos cuadrados de los datos de la gráfica Q vs. Δp que corresponden a la región de flujo laminar. De la pendiente de la recta, por identificación con la expresión de Hagen-Poiseuille, obtener el valor de la viscosidad dinámica μ del agua y compararlo con el obtenido de la literatura. Explicar razonadamente las causas que pueden dar origen a la diferencia entre el valor hallado experimentalmente y el valor de la literatura.
3. Determinar el número de Reynolds a partir del valor de viscosidad dinámica obtenido experimentalmente en el apartado anterior. La velocidad promedio se ha de calcular a partir del caudal volumétrico Q de agua obtenido experimentalmente y de la sección del conducto ($U = \frac{Q}{\pi R^2}$). Discutir la transición de régimen laminar a turbulento de acuerdo con los valores obtenidos para el número de Reynolds.
4. Calcular el factor de fricción λ a partir de la velocidad promedio U determinada en el apartado anterior. (Nota: Si la curva representada en el apartado 2 no pasa por el origen, realizar la corrección necesaria en Δp para forzar a que pase por el origen y utilizar los valores de Δp corregidos para el cálculo de λ). Representar λ vs. Re en un gráfico log-log

(diagrama de Moody) y analizar cualitativamente el resultado obtenido. Representar en la misma gráfica la expresión obtenida en el régimen laminar ($\lambda = \frac{64}{Re}$) y el resultado semi-empírico para el caso turbulento, comparando con los resultados experimentales.

Bibliografía

1. Landau, L. D. y E. M. Lifshitz: *Mecánica de Fluidos*, vol. 6 de *Curso de Física Teórica*. Reverté, primera ed., 1991. Traducción de la primera edición inglesa.
2. White, F. M.: *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, quinta ed., 2004.
3. Liñán Martínez, A., M. Rodríguez Fernández y F. J. Higuera Antón: *Mecánica de Fluidos*. ETSI Aeronáuticos Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2002.

NOTA MUY IMPORTANTE

- Tome nota de las incertidumbres de todos los equipos de medida que utilice.
- **Realice la propagación de incertidumbre para medidas indirectas (mostrando las derivadas parciales calculadas así como la expresión de la incertidumbre en función de las magnitudes), requisito imprescindible para que el informe de la práctica sea evaluado.**
- Aunque no se exija explícitamente en el guion de prácticas, incluya una tabla de datos para cada representación gráfica que realice. Añada las columnas correspondientes a las incertidumbres de medida y propagación de incertidumbres.
- En las representaciones gráficas consigne las magnitudes representadas en cada eje, así como sus unidades correspondientes. Incluya barras de incertidumbre en los puntos de datos representados.
- Lea los documentos “Presentación de informes” y “Cálculo de incertidumbres” disponibles en el curso virtual.