

Informes de prácticas de física de fluidos

Adrián Rivero Fernández
arivero176@alumno.uned.es
682832933

Técnicas Experimentales IV
Prácticas realizadas el 7 de marzo de 2024

28 de abril de 2024

Índice

Relación de dispersión de ondas de tensión superficial	2
Flujos en conductos	16

Relación de dispersión de ondas de tensión superficial

1. Objetivos de la práctica

En esta práctica determinaremos experimentalmente la tensión superficial de un líquido a partir de la relación de dispersión de ondas de tensión superficial

2. Resumen teórico

Al producirse una perturbación en un fluido, de modo que un elemento de volumen se desplace fuera de su posición de equilibrio, actúan como fuerzas recuperadoras la fuerza de la gravedad y la tensión superficial, generando cada una un tipo de onda asociada. El orden de magnitud de la fuerza recuperadora generada por la gravedad corresponde a $\rho \cdot g$ (siendo ρ la densidad del fluido y g la gravedad). La fuerza generada por la tensión tiene una magnitud de $\sigma \cdot k$ (siendo σ la tensión superficial y k el número de onda $k = 2\pi/\lambda$ con λ siendo la longitud de onda).

La denominada relación de dispersión representa la relación entre el número de onda k y la frecuencia angular ω , que depende del medio y de las fuerzas involucradas en el proceso. A partir de linealizar las ecuaciones de Navier-Stokes y de la ecuación de Young-Laplace, obtenemos que

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma}{\rho} k^3$$

Esta relación se puede obtener experimentalmente para ondas de tensión superficial estacionarias en la superficie de un líquido, a partir del patrón de difracción de la incidencia de un haz de luz monocromática en la superficie. Podemos inducir una perturbación de frecuencia sobre el líquido, excitando un modo normal de vibración para generar las ondas estacionarias, iluminarlas con un haz de luz y obtener reflejos sobre una pantalla que muestren un

patrón de difracción que nos da información sobre los puntos en los que se ha producido interferencia constructiva.

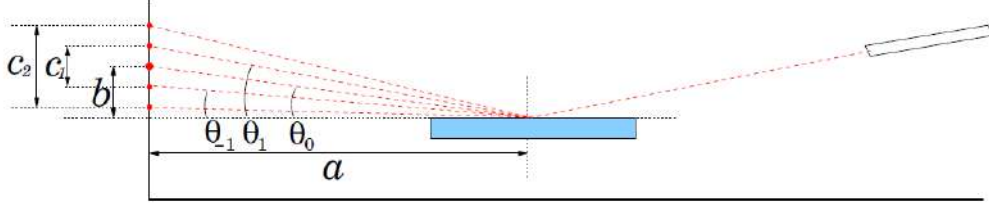


Figura 1: Esquema del patrón de difracción

La Figura 1 representa el esquema del patrón de difracción de las ondas reflejadas en una superficie con ondas de tensión superficial estacionarias. θ_0 es el ángulo del máximo principal, θ_1 y θ_{-1} son los de los máximos secundarios de primer orden. La distancia a es la distancia del punto de reflexión a la pantalla, b es su altura relativa, y c_1 y c_2 es la distancia entre máximos secundarios.

A partir de los ángulos de los máximos secundarios y central de los puntos luminosos, podemos obtener el número de onda:

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda}(\theta_n - \theta_{-n}) \sin \theta_0$$

que para ángulos pequeños puede aproximarse como

$$k_n = \frac{\pi}{\lambda}(\theta_n - \theta_{-n})\theta_0$$

Siendo c_n la distancia entre máximos secundarios de orden n , podemos aproximar

$$(\theta_n - \theta_{-n}) = \frac{c_n}{a}$$

De modo que

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda}\theta_0 \frac{c_n}{a}$$

3. Procedimiento experimental

Mediante el transmisor mecánico acoplado a un altavoz, conectado a un generador de señales, generaremos una onda estacionaria de tensión superficial en agua destilada. Haremos incidir el haz de luz láser sobre la superficie, en el punto en el que se genera la onda estacionaria. Esta superficie actúa

como una red de difracción. Haremos que se refleje en una pantalla para ver su patrón, en el que identificaremos un máximo central y dos secundarios de primer y segundo orden.



Figura 2: Dispositivo experimental

Procedimiento

1. Llenamos el recipiente con agua destilada y medimos su temperatura.
2. Establecemos contacto entre el transmisor mecánico y la superficie del agua. El segmento horizontal debe contactar paralelamente con la superficie del líquido quedando parcialmente sumergido. Modificaremos la altura del transmisor mecánico y lo nivelaremos respecto a la superficie actuando sobre las tuercas que sujetan el soporte, donde se encuentra anclado.
3. Ajustamos el haz de luz láser de modo que su reflejo en la superficie del agua es visible en la pantalla. Observamos, en ausencia de perturbación, un punto estático en la pantalla.
4. Conectamos el generador de señales. Seleccionamos una frecuencia entre 150 y 400 Hz. La vibración generará ondas estacionarias en la superficie.
5. Ajustamos el punto de incidencia del haz láser para que rebase levemente el segmento horizontal del transmisor. Nos ayudamos de una regla metálica para encontrar mejor el punto de incidencia, que nos permite comprobar por donde pasa el haz al interponerla en su recorrido.
6. Variando la amplitud de la señal, ajustamos la amplitud de la onda hasta obtener un patrón de difracción en la pantalla donde distingamos nítidamente el máximo principal y los secundarios.

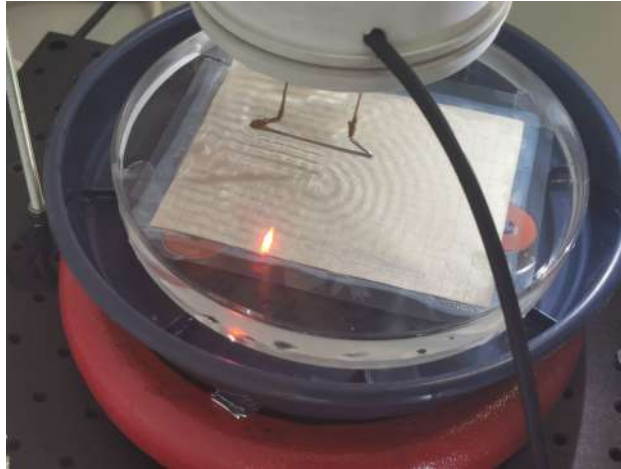


Figura 3: Ondas estacionarias en la superficie

7. Registramos la frecuencia y fotografiamos el patrón de difracción de la pantalla.
8. Medimos la distancia horizontal entre el punto de incidencia del láser-líquido y la pantalla. Medimos también la distancia vertical entre el punto de incidencia central en la pantalla y el punto de incidencia en el agua (altura de la superficie).
9. Repetimos las mediciones en incrementos cercanos a 10 Hz para energías entre 150 y 400 Hz.

4. Tablas de medidas

Para cada frecuencia, medimos las distancias entre máximos secundarios de primer (c_1) y segundo (c_2) orden.

Frecuencia ± 1 (Hz)	$c_1 \pm 1$ (mm)	$c_2 \pm 1$ (mm)
150	13	26
160	14	28
170	15	30
180	16	31
190	16	32
200	17	32
210	17	33
220	17	34
230	17	35
240	17	36
250	18	36
260	18	37
270	19	39
280	20	40
290	21	41
300	21	42
310	21	42
320	22	44
330	22	45
340	22	46
350	23	48
360	23	48
370	24	49
380	25	49
390	25	50
400	26	51

Tabla 1: Medidas de distancias entre centros para distintas frecuencias

Tomamos las medidas de longitud del sistema:

- $a = 4,029 \pm 0,001\text{m}$
- $b = 0,59 \pm 0,01\text{m}$

Con ello podemos deducir el ángulo

$$\theta_0 = \frac{b}{a} = 0,149 \pm 0,013$$

donde el error ha sido propagado mediante dispersión de errores

$$\Delta\theta_0 = \left| \frac{\partial\theta_0}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial\theta_0}{\partial a} \right| \Delta a$$

$$\Delta\theta_0 = \frac{b}{a^2} \Delta a + \frac{1}{a} \Delta b$$

$$\theta_0 = 0,149 \pm 0,013 \text{ (rad)}$$

Con estos datos calculamos ω y k para los máximos secundarios de primer y segundo orden, así como sus errores mediante propagación de las expresiones para su cálculo

$$\omega = 2\pi f$$

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda} \frac{bc_n}{a^2}$$

$$\Delta k_n = \frac{\pi}{n\lambda^2} \frac{bc_n}{a^2} \Delta\lambda + \frac{\pi}{n\lambda} \frac{c_n}{a^2} \Delta b + \frac{\pi}{n\lambda} \frac{b}{a^2} \Delta c_n + \frac{2\pi}{n\lambda} \frac{bc_n}{a^3} \Delta a$$

siendo f la frecuencia en hercios, n el orden λ la longitud de onda.

Frecuencia ± 1 (Hz)	$\omega \pm 6$ (rad/s)	k_1 (m ⁻¹)	Δk_1	k_2 (m ⁻¹)	Δk_2
150	942	2400	200	2400	300
160	1005	2600	200	2600	300
170	1068	2700	200	2700	300
180	1131	2900	200	2800	300
190	1194	2900	200	2900	400
200	1257	3100	200	2900	400
210	1319	3100	200	3000	400
220	1382	3100	200	3100	400
230	1445	3100	200	3200	400
240	1508	3100	200	3300	400
250	1571	3300	200	3300	400
260	1634	3300	200	3400	400
270	1696	3500	200	3600	400
280	1759	3700	300	3700	400
290	1822	3800	300	3800	400
300	1885	3800	300	3800	400
310	1948	3800	300	3800	400
320	2011	4000	300	4000	500
330	2073	4000	300	4100	500
340	2136	4000	300	4200	500
350	2199	4200	300	4400	500
360	2262	4200	300	4400	500
370	2325	4400	300	4500	500
380	2388	4600	300	4500	500
390	2450	4600	300	4600	500
400	2513	4800	300	4700	500

Tabla 2: ω y k para cada frecuencia

Los terceros máximos secundarios son poco visibles. Únicamente se observan con claridad en las frecuencias más altas:

Frecuencia ± 1 (Hz)	c_3 (mm)	k_3 (m ⁻¹)	Δk_3
320	67	4100	400
330	68	4200	400
340	69	4200	400
350	71	4300	400
360	72	4400	500
370	73	4500	500
380	74	4500	500
390	76	4600	500
400	77	4700	500

Tabla 3: Distancia y k para máximos de tercer orden

5. Gráficas

Obtenemos las representaciones, para los máximos secundarios de primer y segundo orden, de ω^2 frente a k_n^3 :

Primer orden

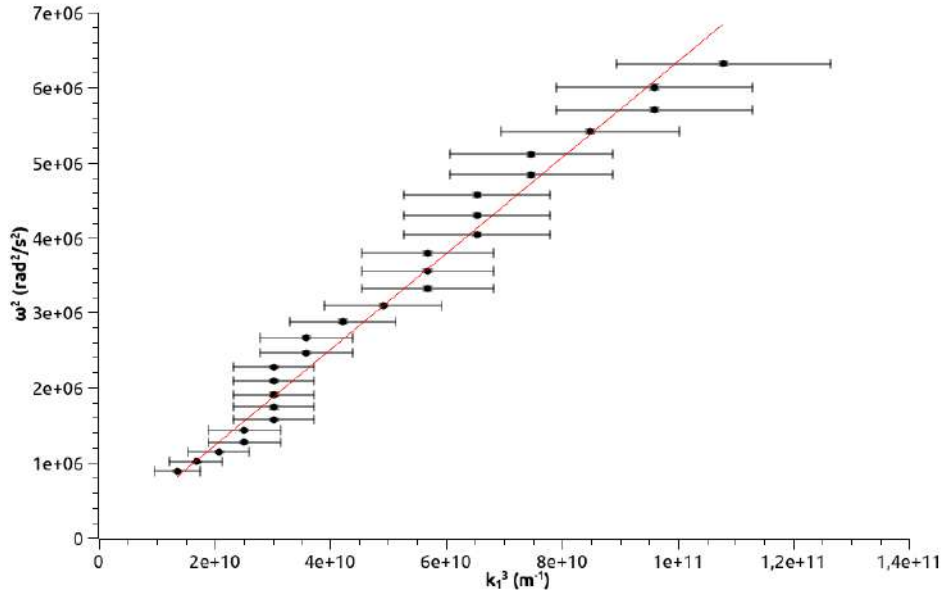


Figura 4: ω^2 frente a k_1^3 , máximos secundarios de primer orden

k_1^3 [X]	Δk_1^3 [err X]	ω^2 [Y]	$\Delta \omega^2$ [err Y]
1,35E+10	3,87E+09	8,88E+05	1,18E+04
1,69E+10	4,56E+09	1,01E+06	1,26E+04
2,07E+10	5,31E+09	1,14E+06	1,34E+04
2,52E+10	6,13E+09	1,28E+06	1,42E+04
2,52E+10	6,13E+09	1,43E+06	1,50E+04
3,02E+10	7,02E+09	1,58E+06	1,58E+04
3,02E+10	7,02E+09	1,74E+06	1,66E+04
3,02E+10	7,02E+09	1,91E+06	1,74E+04
3,02E+10	7,02E+09	2,09E+06	1,82E+04
3,02E+10	7,02E+09	2,27E+06	1,89E+04
3,58E+10	7,99E+09	2,47E+06	1,97E+04
3,58E+10	7,99E+09	2,67E+06	2,05E+04
4,21E+10	9,02E+09	2,88E+06	2,13E+04
4,91E+10	1,01E+10	3,10E+06	2,21E+04
5,69E+10	1,13E+10	3,32E+06	2,29E+04
5,69E+10	1,13E+10	3,55E+06	2,37E+04
5,69E+10	1,13E+10	3,79E+06	2,45E+04
6,54E+10	1,26E+10	4,04E+06	2,53E+04
6,54E+10	1,26E+10	4,30E+06	2,61E+04
6,54E+10	1,26E+10	4,56E+06	2,68E+04
7,47E+10	1,40E+10	4,84E+06	2,76E+04
7,47E+10	1,40E+10	5,12E+06	2,84E+04
8,49E+10	1,54E+10	5,40E+06	2,92E+04
9,60E+10	1,69E+10	5,70E+06	3,00E+04
9,60E+10	1,69E+10	6,00E+06	3,08E+04
1,08E+11	1,85E+10	6,32E+06	3,16E+04

Tabla 4: Tabla de datos de la Figura 4

La recta de ajuste para la Figura 4:

$$\omega^2 = k^3 x + B$$

$$A = (6,385 \pm 0,017) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$B = (-46000 \pm 7000) (\text{m/s})$$

Siendo la correlación:

$$R^2 = 0,9762$$

Segundo orden

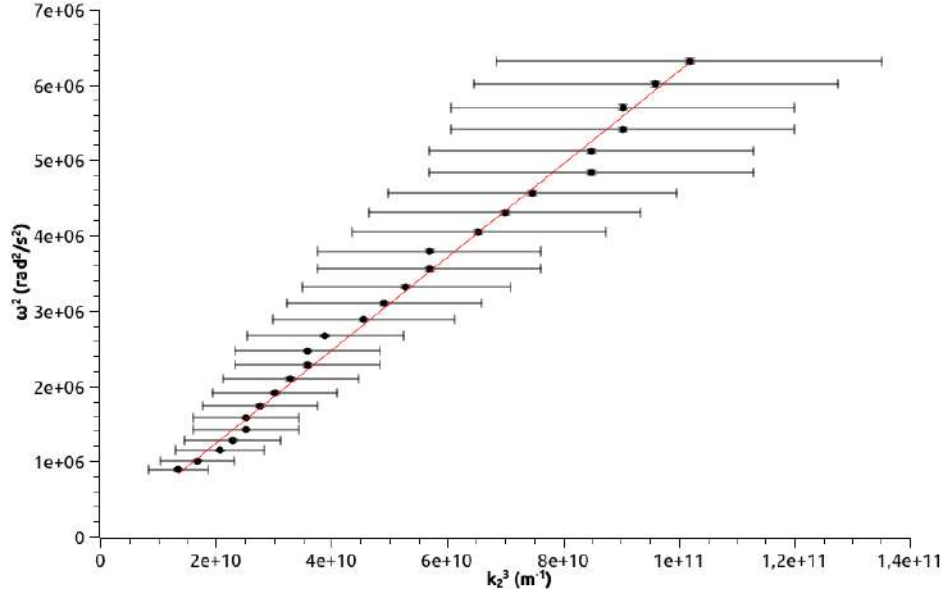


Figura 5: ω^2 frente a k_2^2 , máximos secundarios de segundo orden

k_1^3 [X]	Δk_1^3 [err X]	ω^2 [Y]	$\Delta \omega^2$ [err Y]
1,35E+10	5,17E+09	8,88E+05	1,18E+04
1,69E+10	6,32E+09	1,01E+06	1,26E+04
2,07E+10	7,62E+09	1,14E+06	1,34E+04
2,29E+10	8,34E+09	1,28E+06	1,42E+04
2,52E+10	9,10E+09	1,43E+06	1,50E+04
2,52E+10	9,10E+09	1,58E+06	1,58E+04
2,76E+10	9,90E+09	1,74E+06	1,66E+04
3,02E+10	1,07E+10	1,91E+06	1,74E+04
3,29E+10	1,16E+10	2,09E+06	1,82E+04
3,58E+10	1,26E+10	2,27E+06	1,89E+04
3,58E+10	1,26E+10	2,47E+06	1,97E+04
3,89E+10	1,36E+10	2,67E+06	2,05E+04
4,55E+10	1,57E+10	2,88E+06	2,13E+04
4,91E+10	1,68E+10	3,10E+06	2,21E+04
5,29E+10	1,80E+10	3,32E+06	2,29E+04
5,69E+10	1,93E+10	3,55E+06	2,37E+04
5,69E+10	1,93E+10	3,79E+06	2,45E+04

6,54E+10	2,20E+10	4,04E+06	2,53E+04
7,00E+10	2,34E+10	4,30E+06	2,61E+04
7,47E+10	2,49E+10	4,56E+06	2,68E+04
8,49E+10	2,80E+10	4,84E+06	2,76E+04
8,49E+10	2,80E+10	5,12E+06	2,84E+04
9,03E+10	2,97E+10	5,40E+06	2,92E+04
9,03E+10	2,97E+10	5,70E+06	3,00E+04
9,60E+10	3,15E+10	6,00E+06	3,08E+04
1,02E+11	3,33E+10	6,32E+06	3,16E+04

Tabla 5: Tabla de datos de la Figura 5

La recta de ajuste para la Figura 5:

$$\omega^2 = k^3 x + B$$

$$A = (6,177 \pm 0,016) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$B = (-5000 \pm 7000) (\text{m/s})$$

Siendo la correlación:

$$R^2 = 0,9923$$

Tercer orden

A partir de la Tabla 3, graficamos la parte de la recta obtenida por esos datos:

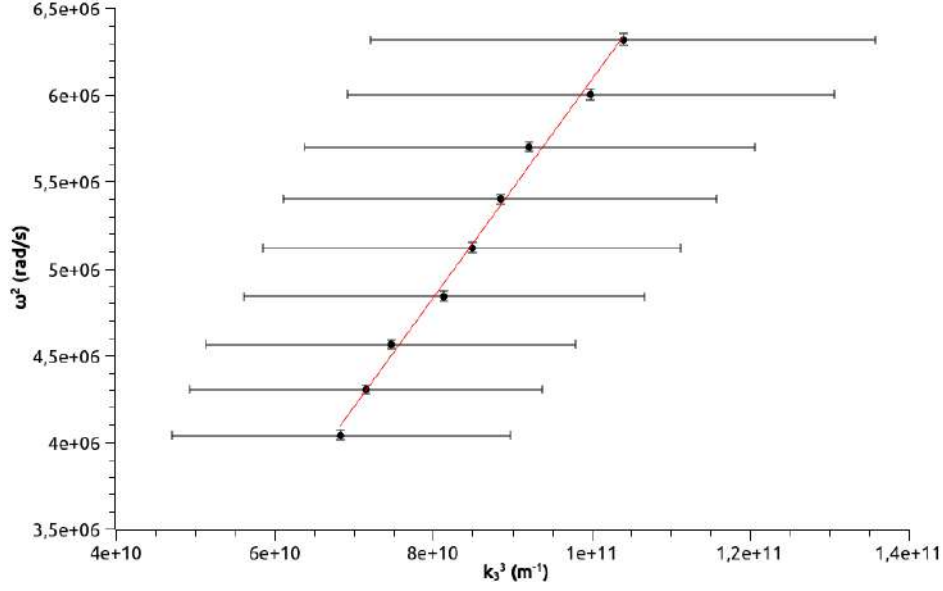


Figura 6

Figura 7: ω^2 frente a k_3^3 , máximos secundarios de tercer orden

k_3^3 [X]	Δk_3^3 [err X]	ω^2 [Y]	$\Delta \omega^2$ [err Y]
6,84E+10	2,14E+10	4,04E+06	2,53E+04
7,15E+10	2,23E+10	4,30E+06	2,61E+04
7,47E+10	2,33E+10	4,56E+06	2,68E+04
8,14E+10	2,52E+10	4,84E+06	2,76E+04
8,49E+10	2,63E+10	5,12E+06	2,84E+04
8,85E+10	2,73E+10	5,40E+06	2,92E+04
9,22E+10	2,84E+10	5,70E+06	3,00E+04
9,99E+10	3,07E+10	6,00E+06	3,08E+04
1,04E+11	3,19E+10	6,32E+06	3,16E+04

Tabla 6: Tabla de datos para la Figura 6

La recta de ajuste para la Figura 5:

$$\omega^2 = k^3 x + B$$

$$A = (6,30 \pm 0,08) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$B = (-220000 \pm 70000) (\text{m/s})$$

Siendo la correlación:

$$R^2 = 0,9934$$

6. Discusión de resultados

A partir de

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3 \longrightarrow \sigma = \frac{\omega^2}{k^3} \rho$$

$$\Delta\sigma = \frac{2\omega}{k^3} \rho \Delta\omega + \frac{3\omega^2}{k^4} \rho \Delta k + \frac{\omega^2}{k^3} \Delta\rho$$

Utilizando la relación de dispersión de los máximos secundarios de primer orden, y conociendo la densidad del agua:

$$\frac{\omega^2}{k^3} = (6,385 \pm 0,017) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$\rho_{\text{agua}} = 977 \pm 1 (\text{kg/m}^3)$$

$$\sigma_1 = \frac{\omega^2}{k^3} \rho_{\text{agua}} = (62,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} (\text{N/m})$$

Si utilizamos los máximos secundarios de segundo y tercer orden

$$\sigma_2 = \frac{\omega^2}{k^3} \rho_{\text{agua}} = (60,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} (\text{N/m})$$

$$\sigma_3 = \frac{\omega^2}{k^3} \rho_{\text{agua}} = (61,6 \pm 0,8) \cdot 10^{-3} (\text{N/m})$$

Según la literatura, el valor de la tensión superficial del agua a 20°C es de

$$\sigma_{\text{teor}} = (72,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{N/m}$$

La diferencia entre nuestros valores de σ calculados y el teórico es considerable, de más de un 17 %, incluso para los máximos secundarios de tercer orden, para los que posiblemente no disponemos de suficientes puntos. Entre las posibles causas de error, las mediciones de distancias a y b resultaban complicadas, tanto por la gran distancia que cubría a como por la oscilación en altura de b y la dificultad determinando el punto de reflexión del haz en el agua. Además, las ondas en el agua se veían fácilmente perturbadas por las vibraciones en la sala.

Número de onda crítico

$$g = 9,81 \pm 0,01 \text{N/kg}$$

$$\rho \cdot g = 9580 \pm 20 \text{N/m}^3$$

Comparando con la fuerza de las ondas superficiales, podemos despejar un número de onda crítico, en el que ambas fuerzas se igualan

$$\sigma \cdot k^2 = \rho \cdot g \longrightarrow k = \sqrt{\frac{\rho \cdot g}{\sigma}}$$

$$\Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{\sigma \cdot \rho}} \Delta \rho + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma \cdot g}} \Delta g + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho \cdot g}{\sigma^3}} \Delta \sigma$$

Utilizando el valor teórico σ_{teor}

$$k_c = (362,8 \pm 0,6) \text{m}^{-1}$$

Mientras que utilizando nuestro valor experimental σ_2

$$k_c = (398 \pm 1) \text{m}^{-1}$$

Esto indica el número de onda crítico a partir del que los efectos de la gravedad son significativos respecto a los de la tensión superficial, es un orden de magnitud más bajo que el rango en el que nos hemos movido.

7. Conclusiones

Mediante la medida de las distancias en un patrón de difracción sobre ondas de tensión superficial estacionarias generadas a partir de la frecuencia emitida por un altavoz sobre la superficie de agua, hemos podido determinar la relación entre el número de onda y su velocidad angular, y con ello obtener una medida experimental de la tensión superficial del agua. La disposición del experimento y la dificultad de algunas de las medidas han reducido la precisión de los resultados considerablemente.

Relación de dispersión de ondas de tensión superficial

1. Objetivos de la práctica

1. Verificar la ley de Hagen-Poiseuille a partir de la experimentación con fluidos newtonianos que circulando a través de conductos capilares de diferentes diámetros.
2. Caracterizar el régimen de circulación del fluido mediante el número de Reynolds.
3. Determinar el coeficiente de rozamiento del conducto capilar.

2. Resumen teórico

A causa de la diferencia de presión entre los extremos de un tubo, se produce el flujo del fluido que contiene. Si registramos las velocidades volumétricas de flujo Q en función de la diferencia de presión Δp , vemos que la curva viene dada por las propiedades del fluido en cuestión y la geometría del tubo. El régimen del fluido se puede caracterizar por el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\nu \rho D}{\mu}$$

siendo ν la velocidad del flujo, ρ la densidad, μ el coeficiente de viscosidad dinámica y D una longitud característica del sistema, que para un fluido circulando por un tubo se considera su diámetro.

Un bajo número de Reynolds, aproximadamente por debajo de 2000, se considera régimen laminar. En este régimen los fluidos presentan una elevada viscosidad y circulan a baja velocidad, o circulan por tuberías de pequeña sección.

Un alto número de Reynolds, por encima de 3000, se llama régimen turbulento, y los fluidos tienen baja viscosidad y alta velocidad o avanzan por

tuberías de gran sección. Para un fluido se puede identificar el cambio de régimen laminar a turbulento en la gráfica de Q frente a Δp . El valor del número de Reynolds en ese punto es el llamado Reynolds crítico.

Por la ley de Hagen-Poiseuille, podemos obtener la velocidad promedio como

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu l}$$

Con esta velocidad promedio U se puede calcular el número de Reynolds, Re , usando U como velocidad característica ν y el diámetro d como longitud característica D .

$$Re = \frac{\nu \rho D}{\mu} = \frac{U \rho d}{\mu}$$

El coeficiente de rozamiento λ , factor de fricción o coeficiente de resistencia de Darcy-Weisbach se usa para evaluar las pérdidas viscosas. Podemos obtener λ con la expresión

$$\lambda = \frac{d}{L} \cdot \frac{\rho g h_f}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

El coeficiente de rozamiento λ frente a Re para distintos valores de h/d para una forma de conducto fija se representa en los llamados diagramas de Moody, que generalmente están en escala log-log.

Para tubos horizontales de sección circular y régimen laminar, el factor de fricción es

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Para el régimen turbulento en tubos lisos, se puede aplicar la ecuación de Karman-Prandtl, que relaciona implícitamente λ con Re

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10}(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

El coeficiente de rozamiento λ frente a Re para distintos valores de h/d para una forma de conducto fija se representa en los llamados diagramas de Moody, que generalmente están en escala log-log.

3. Procedimiento experimental

1. Insertamos el capilar de vidrio con el diámetro a estudiar en el tubo vertical y lo sujetamos en posición horizontal con una pinza.
2. Nivel el tubo vertical y el capilar horizontal.
3. Conectamos la manguera al grifo y rellenar el tubo vertical de agua hasta aproximadamente 40 cm de altura.
4. Medimos la temperatura de este agua en el interior del tubo y determinamos el valor de la viscosidad dinámica
5. Con el agua fluyendo por el tubo capilar, regulamos el caudal del grifo llenando el tubo vertical para que el nivel del agua se mantenga constante en una misma altura, de modo que el caudal de salida por el capilar coincide con el caudal de entrada del grifo.
6. Recogemos en un vaso de precipitados el agua que se vierte del tubo capilar en un intervalo de 10s para diferentes alturas del nivel del agua.
7. Determinamos el diámetro del tubo capilar según la cantidad máxima de masa de agua que puede llegar a contener. Para ello rellenamos el tubo con agua, lo vertemos en un vaso de precipitados, que posteriormente pesamos.



Figura 1: Dispositivo experimental: tubo vertical conectado a tubo de menor sección horizontal, con una manguera podemos introducir más agua en el tubo

4. Tablas de medidas

El tubo horizontal tiene una regla graduada en sentido descendente que nos permitirá ajustar la altura de agua a correctos intervalos, estas distancias son la medida D . El valor real de la altura, h , lo obtenemos restando D a la altura real en el tubo a la que situamos el origen de la regla, 98 ± 1 cm.

La medida de masa del vaso con agua es m_{tot} , que restando la masa del vaso vacío nos da la masa de agua

$$m_{tot} = m_{agua} + m_{vaso}$$

$$m_{vaso} = 182,86 \pm 0,01\text{g}$$

Obtenemos el caudal y su error calculado por propagación de errores

$$Q = \frac{m_{agua}}{\rho t}$$

$$\Delta Q = \frac{1}{\rho t} \Delta m + \frac{m}{t \rho^2} \Delta \rho + \frac{m}{\rho t^2} \Delta t$$

La diferencia de presión con su error

$$\Delta p = \rho g h$$

$$\Delta(\Delta p) = gh\Delta\rho + \rho h\Delta g + \rho g\Delta h$$

Otras medidas relevantes sobre nuestro sistema experimental:

- Error en medida de tiempo: $\Delta t = \pm 0,5\text{s}$
- Densidad del agua: $\rho = 0,998 \pm 0,001\text{g/cm}^3$
- Gravedad: $g = 981 \pm 1\text{cm/s}^2$

D (cm)	h (cm)	m_{tot} (g)	m_{agua} (g)	Q (cm ³ /s)	ΔQ	Δp (cm ⁻¹ s ⁻² g)	$\Delta \Delta p$
30,0	68,0	269,12	86,26	8,6	0,4	66500	300
35,4	62,6	262,86	80,00	8,0	0,4	61300	300
40,4	57,6	261,28	78,42	7,8	0,4	56400	300
45,0	53,0	257,62	74,76	7,5	0,4	51900	300
50,0	48,0	257,03	74,17	7,4	0,4	45000	300
55,2	42,8	251,52	68,66	6,9	0,4	51900	300
60,2	37,8	250,47	67,61	6,8	0,3	37000	300
65,2	32,8	248,30	65,44	6,5	0,3	32100	300
70,2	27,8	243,77	60,91	6,1	0,3	27200	300
75,0	23,0	235,59	52,73	5,3	0,3	22500	200
80,0	18,0	225,24	42,38	4,2	0,2	17600	200
82,0	16,0	222,14	39,28	3,9	0,2	16000	200
84,0	14,0	217,59	34,73	3,5	0,2	13700	200
86,0	12,0	214,03	31,17	3,1	0,2	11700	200
88,0	10,0	209,26	26,40	2,64	0,14	9800	200
90,0	8,0	204,77	21,91	2,19	0,11	7800	200
91,0	7,0	202,50	19,64	1,96	0,10	6900	200
92,0	6,0	199,51	16,65	1,67	0,09	5900	200
93,3	4,7	194,69	11,83	1,18	0,06	4600	200
93,9	4,1	192,73	9,87	0,99	0,05	4000	200
94,6	3,4	190,44	7,58	0,76	0,04	3300	200
95,0	3,0	188,95	6,09	0,61	0,03	2900	200
95,7	2,3	187,20	4,34	0,43	0,02	2300	200
96,6	1,4	185,01	0,215	0,013	0,01	1400	200

ΔD	Δh	Δm_{tot}	Δm_{agua}
$\pm 0,1$	$\pm 0,2$	$\pm 0,01$	$\pm 0,02$

Tabla 1: Caudal y diferencia de presión en función de la masa de agua expulsada a distintas alturas

Para obtener las medidas del capilar, lo llenamos de agua, lo pesamos varias veces y calculamos la media, para reducir el error, que debemos calcular según su desviación típica:

	Valor	Error
Medida 1	45,67	0,01
Medida 2	45,60	0,01
Medida 3	45,66	0,01
Media	45,64	0,02

Tabla 2: Media de las medidas de masa del capilar con agua

De modo que la masa del capilar con agua es

$$m_{total} = 45,64 \pm 0,02g$$

Ahora, pesamos el capilar sin agua, y restándolo al valor anterior obtenemos la masa (y por tanto el volumen) del agua en el interior del capilar.

$$m_{capilar} = 41,45 \pm 0,01g$$

$$m_{agua} = 4,19 \pm 0,03g$$

$$V_{agua} = \frac{m_{agua}}{\rho} = 4,20 \pm 0,03cm^3$$

Donde el error Δm_{agua} ha sido propagado

$$\Delta m_{agua} = \left| \frac{\partial m_{agua}}{\partial m_{total}} \right| \Delta m_{total} + \left| \frac{\partial m_{agua}}{\partial m_{capilar}} \right| \Delta m_{capilar}$$

La longitud del capilar ha sido medida como:

$$L = 60 \pm 1cm$$

Ahora para obtener el radio, partimos del volumen

$$V = \pi R^2 \cdot L \longrightarrow R = \sqrt{\frac{V}{\pi L}}$$

$$\Delta R = \frac{1}{2\sqrt{\pi LV}} \Delta V + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{\pi L^3}} \Delta L$$

$$R = 0,149 \pm 0,002cm$$

Y por tanto su diámetro

$$d = 0,299 \pm 0,004cm$$

5. Gráficas

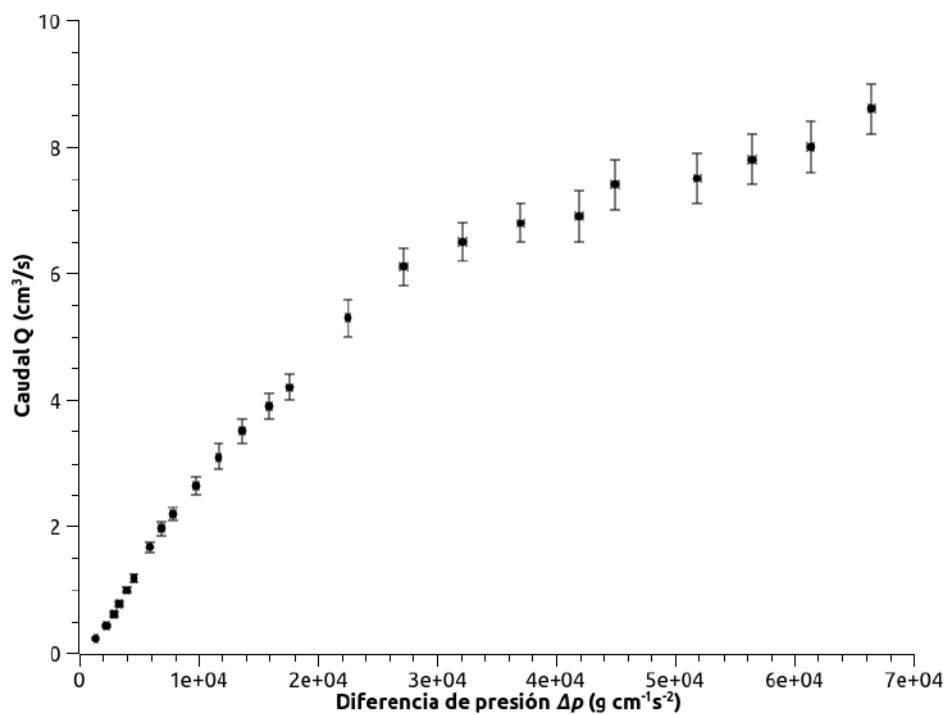


Figura 2: Representación del caudal frente diferencia de presión para distintas alturas del agua

Δp [X]	$\Delta\Delta p$ [err X]	Q [Y]	ΔQ [err Y]
66500	300	8,6	0,4
61300	300	8	0,4
56400	300	7,8	0,4
51900	300	7,5	0,4
45000	300	7,4	0,4
41900	300	6,9	0,4
37000	300	6,8	0,3
32100	300	6,5	0,3
27200	300	6,1	0,3
22500	200	5,3	0,3
17600	200	4,2	0,2
16000	200	3,9	0,2
13700	200	3,5	0,2

11700	200	3,1	0,2
9800	200	2,64	0,14
7800	200	2,19	0,11
6900	200	1,96	0,10
5900	200	1,67	0,09
4600	200	1,18	0,06
4000	200	0,99	0,05
3300	200	0,76	0,04
2900	200	0,61	0,03
2300	200	0,43	0,02
1400	200	0,215	0,013

Tabla 3: Tabla de datos de la Figura 2

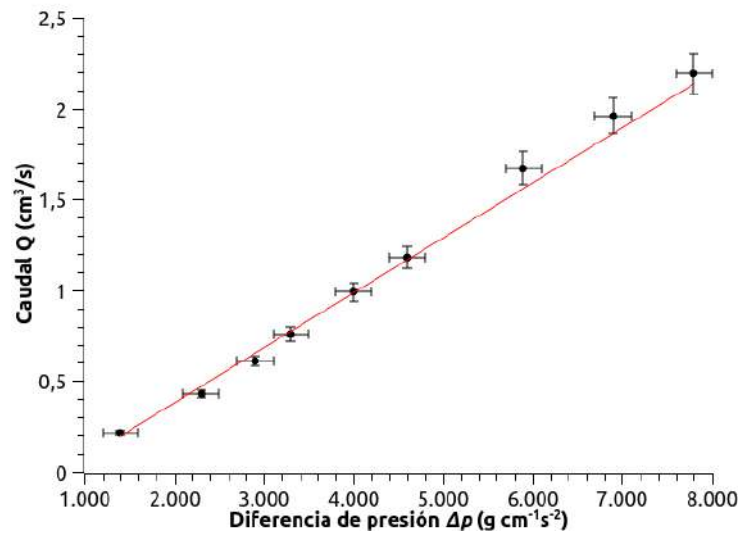


Figura 3: Región laminar de la Figura 2

Δp [X]	$\Delta \Delta p$ [err X]	Q [Y]	ΔQ [err Y]
7800	200	2,19	0,11
6900	200	1,96	0,1
5900	200	1,67	0,09
4600	200	1,18	0,06
4000	200	0,99	0,05
3300	200	0,76	0,04
2900	200	0,61	0,03
2300	200	0,43	0,02
1400	200	0,215	0,013

Tabla 4: Tabla de datos de la Figura 3

El ajuste de mínimos cuadrados de la Figura 3 es

$$Q = A \cdot \Delta p + B$$

$$A = (3,03 \pm 0,08) \cdot 10^{-4} \text{cm}^4 \text{s/g}$$

$$B = (-0,28 \pm 0,02) \text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{s}^{-2}$$

Con una coeficiente de correlación

$$R^2 = 0,9921$$

6. Discusión de resultados

Gráfica Caudal-Presión

En la Figura 2 vemos como el caudal se incrementa a mayor diferencia de presión, de modo que la curva es ascendente. Para valores pequeños, para valores $\Delta p \leq 7800$, la figura toma una forma lineal.

En la Figura 3 está representada esa sección lineal, correspondiente a la región de flujo laminar.

Viscosidad dinámica

Con el ajuste por mínimos cuadrados en la Figura 3 y la expresión de la ley de Hagen-Poiseuille, podemos despejar la viscosidad dinámica

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} \longrightarrow \mu = \frac{R^4 \pi \Delta p}{Q 8L}$$

La pendiente de la recta de ajuste

$$A = \frac{Q}{\Delta p} = (3,03 \pm 0,08) \cdot 10^{-4} \text{cm}^4 \text{s/g}$$

De modo que podemos sustituir

$$\mu = \frac{R^4 \pi}{A 8 L}$$

$$\Delta \mu = \left| \frac{4R^3 \pi}{8A \cdot L} \right| \Delta R + \left| -\frac{R^4 \pi}{8A \cdot L^2} \right| \Delta L + \left| -\frac{R^4 \pi}{8A^2 \cdot L} \right| \Delta A$$

Obteniendo finalmente

$$\mu = 0,011 \pm 0,001 \text{g/(s} \cdot \text{cm)}$$

En la literatura, el valor de la viscosidad dinámica del agua a 20°C es

$$\begin{aligned} \mu_{lit} &= 0,001 [\text{Pa} \cdot \text{s}] = 0,001 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}] = \\ &= 0,01 [\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

Este valor de viscosidad dinámica encaja perfectamente con el que hemos obtenido, ambos se encuentran en el margen de error del otro.

Número de Reynolds

Como vimos

$$Re = \frac{\nu \rho D}{\mu} = \frac{U \rho d}{\mu}$$

Mientras el error

$$\Delta Re = \left| \frac{\rho d}{\mu} \right| \Delta U + \left| \frac{U d}{\mu} \right| \Delta \rho + \left| \frac{U \rho}{\mu} \right| \Delta d + \left| -\frac{U \rho d}{\mu^2} \right| \Delta \mu$$

Tendremos que obtener el Re para cada caudal Q de los obtenidos en la Tabla [1](#), calculando antes la velocidad promedio:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\Delta U = \left| \frac{1}{\pi R^2} \right| \Delta Q + \left| -2 \frac{Q}{\pi R^3} \right| \Delta R$$

Factor de fricción

Obtenemos el factor de fricción con la expresión

$$\lambda = \frac{d}{L} \cdot \frac{\rho g h_f}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

y su error por propagación

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = & \left| \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right| \cdot \Delta d + \left| -\frac{d}{L^2} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right| \cdot \Delta L + \left| \frac{d}{L} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right| \cdot \Delta(\Delta p) + \\ & + \left| -\frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho^2 U^2} \right| \cdot \Delta \rho + \left| -2 \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho^2 U^3} \right| \cdot \Delta U \end{aligned}$$

Todos estos parámetros se recogen en la Tabla [5](#)

$h \pm 0,02$	Q (cm ³ /s)	ΔQ	U (cm/s)	ΔU	$\frac{\Delta p}{(\text{cm}^4 \text{ s} / \text{g})}$	$\Delta \Delta p$	Re	ΔRe	λ	$\Delta \lambda$
68,00	8,6	0,4	124	10	66500	300	3400	600	0,043	0,008
62,60	8,0	0,4	115	9	61300	300	3100	600	0,047	0,009
57,60	7,8	0,4	112	9	56400	300	3100	600	0,045	0,009
53,00	7,5	0,4	107	8	51900	300	2900	500	0,045	0,009
48,00	7,4	0,4	106	8	45000	300	2900	500	0,040	0,008
42,80	6,9	0,4	98	8	41900	300	2700	500	0,043	0,008
37,80	6,8	0,3	97	8	37000	300	2600	500	0,039	0,008
32,80	6,5	0,3	94	7	32100	300	2500	500	0,036	0,007
27,80	6,1	0,3	87	7	27200	300	2400	400	0,036	0,007
23,00	5,3	0,3	76	6	22500	200	2100	400	0,039	0,008
18,00	4,2	0,2	61	5	17600	200	1600	300	0,048	0,009
16,00	3,9	0,2	56	4	16000	200	1500	300	0,050	0,010
14,00	3,5	0,2	50	4	13700	200	1400	200	0,055	0,011
12,00	3,1	0,2	45	4	11700	200	1200	200	0,059	0,012
10,00	2,64	0,14	38	3	9800	200	1000	190	0,068	0,014
8,00	2,19	0,11	31	2	7800	200	850	160	0,079	0,017
7,00	1,96	0,10	28	2	6900	200	760	140	0,087	0,019
6,00	1,67	0,09	24	2	5900	200	650	120	0,10	0,02
4,70	1,18	0,06	17,0	1,3	4600	200	460	80	0,16	0,04
4,10	0,99	0,05	14,2	1,1	4000	200	380	70	0,20	0,05
3,40	0,76	0,04	10,9	0,9	3300	200	300	60	0,28	0,07
3,00	0,61	0,03	8,7	0,7	2900	200	240	40	0,38	0,10
2,30	0,43	0,02	6,2	0,5	2300	200	170	30	0,59	0,17
1,40	0,215	0,013	3,1	0,3	1400	200	80	20	1,5	0,5

Tabla 5: Cálculo de velocidad, Reynolds y factor de fricción

Representando λ frente a Re en escala logarítmica, obtenemos el diagrama de Moody

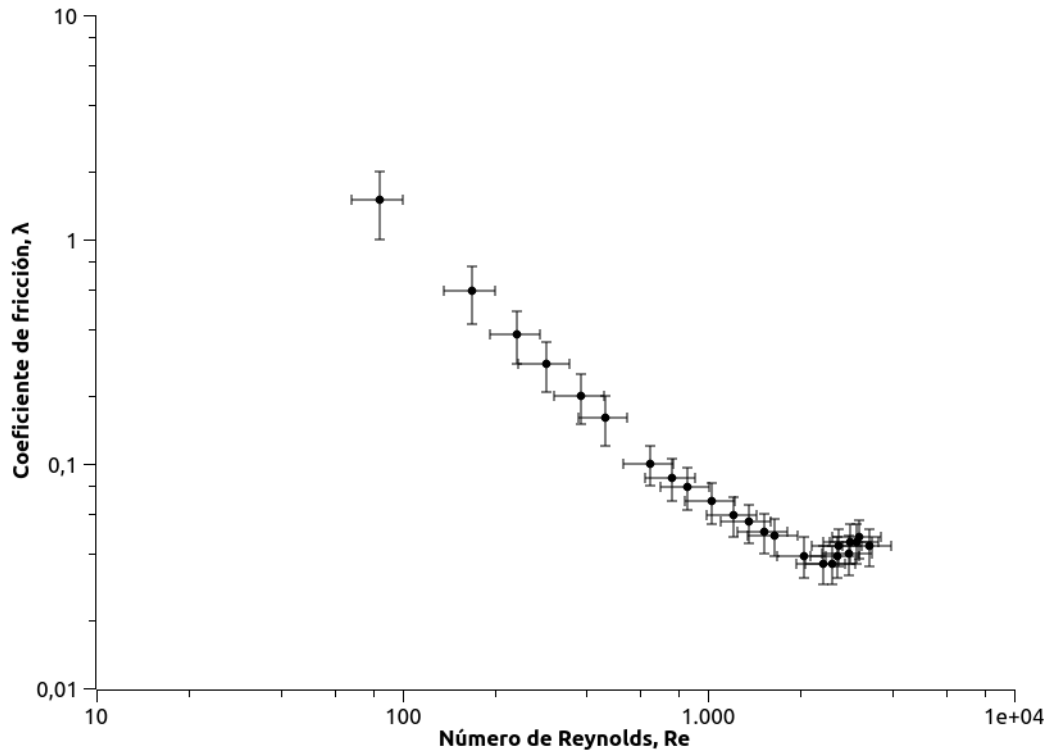


Figura 4: Diagrama de Moody experimental

Re [X]	Error Re	λ [Y]	$\Delta\lambda$
3400	600	0,043	0,008
3100	600	0,047	0,009
3100	600	0,045	0,009
2900	500	0,045	0,009
2900	500	0,040	0,008
2700	500	0,043	0,008
2600	500	0,039	0,008
2500	500	0,036	0,007
2400	400	0,036	0,007
2100	400	0,039	0,008
1600	300	0,048	0,009
1500	300	0,050	0,010
1400	200	0,055	0,011

1200	200	0,059	0,012
1000	190	0,068	0,014
850	160	0,079	0,017
760	140	0,087	0,019
650	120	0,10	0,02
460	80	0,16	0,04
380	70	0,20	0,05
300	60	0,28	0,07
240	40	0,38	0,10
170	30	0,59	0,17
80	20	1,5	0,5

Tabla 6: Tabla de datos de la Figura 4

Aquí podemos ver claramente el cambio de flujo laminar a turbulento, en los valores de Reynolds cercanos a 2000. Fijándonos en estos puntos, se puede ver que corresponden a una posición más a la derecha en la Figura 2 de lo que habíamos considerado, por lo que nuestra toma inicial en la Figura 3 para calcular la pendiente en el flujo laminar se dejó fuera unos cuantos puntos, que hubieran reducido algo el valor de la pendiente.

Ahora obtenemos los valores teóricos para flujo laminar mediante

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re}$$

y para turbulento obteniendo el resultado semi-empírico de

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8$$

nos da la λ_{tur} .

Superponiendo los tres valores de λ tenemos la Figura 5

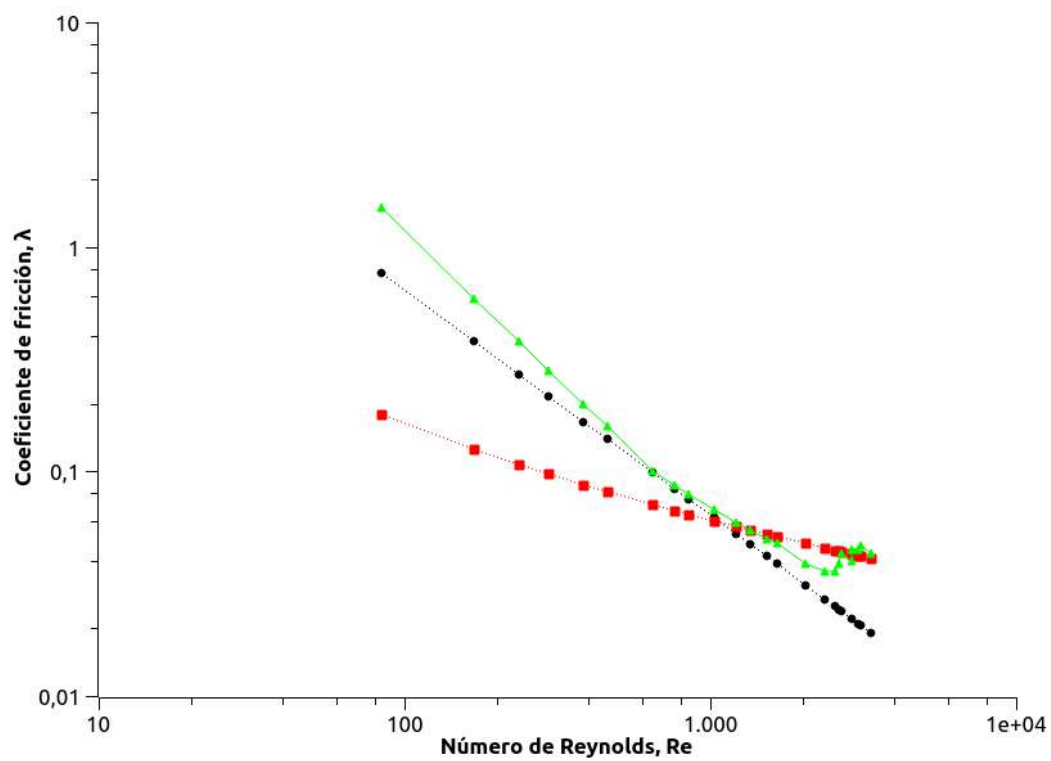


Figura 5: Diagrama de Moody teórico

Re	λ	λ_{lam}	λ_{tur}
3400	0,043	0,019	0,041
3100	0,047	0,021	0,042
3100	0,045	0,021	0,042
2900	0,045	0,022	0,043
2900	0,040	0,022	0,043
2700	0,043	0,024	0,044
2600	0,039	0,024	0,044
2500	0,036	0,025	0,045
2400	0,036	0,027	0,046
2100	0,039	0,031	0,048
1600	0,048	0,039	0,051
1500	0,050	0,042	0,053
1400	0,055	0,047	0,055
1200	0,059	0,053	0,057
1000	0,068	0,062	0,060
850	0,079	0,075	0,064

760	0,087	0,084	0,067
650	0,10	0,099	0,071
460	0,16	0,139	0,081
380	0,20	0,167	0,087
300	0,28	0,217	0,098
240	0,38	0,270	0,107
170	0,59	0,379	0,125
80	1,5	0,762	0,178

Tabla 7: Tabla de datos de la Figura 5

Podemos ver como el flujo laminar coincide con una ligera diferencia en inclinación, que puede tener que ver con el fallo de interpretación que hemos mencionado antes, o bien por error experimental. En el cambio de flujo vemos como progresivamente nuestros valores experimentales pasan de seguir los valores teóricos para el laminar a aproximarse y llegar a los calculados para el turbulento.

7. Conclusiones

Mediante un sistema de agua fluyendo a través de un capilar horizontal, recibiendo agua a través de un tubo vertical con cierta altura de agua, hemos podido comprobar la relación entre presión y caudal, así como obtener la viscosidad dinámica del líquido, y el diagrama de Moody que relaciona el número de Reynolds con el factor de fricción.