

Flujos en conductos

1. Objetivos de la práctica

1. Verificar la ley de Hagen-Poiseuille a partir de la experimentación con fluidos newtonianos que circulan a través de conductos capilares de diferentes diámetros.
2. Caracterizar el régimen de circulación del fluido mediante el número de Reynolds.
3. Determinar el coeficiente de rozamiento del conducto capilar.

2. Resumen teórico

A causa de la diferencia de presión entre los extremos de un tubo, se produce el flujo del fluido que contiene. Si registramos las velocidades volumétricas de flujo Q en función de la diferencia de presión Δp , vemos que la curva viene dada por las propiedades del fluido en cuestión y la geometría del tubo. El régimen del fluido se puede caracterizar por el número de Reynolds:

$$Re = \frac{v\rho D}{\mu}$$

siendo v la velocidad del flujo, ρ la densidad, μ el coeficiente de viscosidad dinámica y D una longitud característica del sistema, que para un fluido circulando por un tubo se considera su diámetro.

Un bajo número de Reynolds, aproximadamente por debajo de 2000, se considera régimen laminar. En este régimen los fluidos presentan una elevada viscosidad y circulan a baja velocidad, o circulan por tuberías de pequeña sección.

Un alto número de Reynolds, por encima de 3000, se llama régimen turbulento, y los fluidos tienen baja viscosidad y alta velocidad o avanzan por tuberías de gran sección. Para un fluido se puede identificar el cambio de

régimen laminar a turbulento en la gráfica de Q frente a Δp . El valor del número de Reynolds en ese punto es el llamado Reynolds crítico.

Por la ley de Hagen-Poiseuille, podemos obtener la velocidad promedio como

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu l}$$

Con esta velocidad promedio U se puede calcular el número de Reynolds, Re , usando U como velocidad característica ν y el diámetro d como longitud característica D .

$$Re = \frac{\nu \rho D}{\mu} = \frac{U \rho d}{\mu}$$

El coeficiente de rozamiento λ , factor de fricción o coeficiente de resistencia de Darcy-Weisbach se usa para evaluar las pérdidas viscosas. Podemos obtener λ con la expresión

$$\lambda = \frac{d}{L} \cdot \frac{\rho g h_f}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

El coeficiente de rozamiento λ frente a Re para distintos valores de h/d para una forma de conducto fija se representa en los llamados diagramas de Moody, que generalmente están en escala log-log.

Para tubos horizontales de sección circular y régimen laminar, el factor de fricción es

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Para el régimen turbulento en tubos lisos, se puede aplicar la ecuación de Karman-Prandtl, que relaciona implícitamente λ con Re

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10}(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

El coeficiente de rozamiento λ frente a Re para distintos valores de h/d para una forma de conducto fija se representa en los llamados diagramas de Moody, que generalmente están en escala log-log.

3. Procedimiento experimental

1. Insertamos el capilar de vidrio con el diámetro a estudiar en el tubo vertical y lo sujetamos en posición horizontal con una pinza.

2. Nivel el tubo vertical y el capilar horizontal.
3. Conectamos la manguera al grifo y rellenar el tubo vertical de agua hasta aproximadamente 40 cm de altura.
4. Medimos la temperatura de este agua en el interior del tubo y determinamos el valor de la viscosidad dinámica
5. Con el agua fluyendo por el tubo capilar, regulamos el caudal del grifo llenando el tubo vertical para que el nivel del agua se mantenga constante en una misma altura, de modo que el caudal de salida por el capilar coincide con el caudal de entrada del grifo.
6. Recogemos en un vaso de precipitados el agua que se vierte del tubo capilar en un intervalo de 10s para diferentes alturas del nivel del agua.
7. Determinamos el diámetro del tubo capilar según la cantidad máxima de masa de agua que puede llegar a contener. Para ello rellenamos el tubo con agua, lo vertemos en un vaso de precipitados, que posteriormente pesamos.



Figura 1: Dispositivo experimental: tubo vertical conectado a tubo de menor sección horizontal, con una manguera podemos introducir más agua en el tubo

4. Tablas de medidas

El tubo horizontal tiene una regla graduada en sentido descendente que nos permitirá ajustar la altura de agua a correctos intervalos, estas distancias son la medida D . El valor real de la altura, h , lo obtenemos restando D a la altura real en el tubo a la que situamos el origen de la regla, 98 ± 1 cm.

La medida de masa del vaso con agua es m_{tot} , que restando la masa del vaso vacío nos da la masa de agua

$$m_{tot} = m_{agua} + m_{vaso}$$

$$m_{vaso} = 182,86 \pm 0,01\text{g}$$

Obtenemos el caudal y su error calculado por propagación de errores

$$Q = \frac{m_{agua}}{\rho t}$$

$$\Delta Q = \frac{1}{\rho t} \Delta m + \frac{m}{t \rho^2} \Delta \rho + \frac{m}{\rho t^2} \Delta t$$

La diferencia de presión con su error

$$\Delta p = \rho g h$$

$$\Delta(\Delta p) = g h \Delta \rho + \rho h \Delta g + \rho g \Delta h$$

Otras medidas relevantes sobre nuestro sistema experimental:

- Error en medida de tiempo: $\Delta t = \pm 0,5\text{s}$
- Densidad del agua: $\rho = 0,998 \pm 0,001\text{g/cm}^3$
- Gravedad: $g = 981 \pm 1\text{cm/s}^2$

D (cm)	h (cm)	m_{tot} (g)	m_{agua} (g)	Q (cm ³ /s)	ΔQ	Δp (cm ⁻¹ s ⁻² g)	$\Delta \Delta p$
30,0	68,0	269,12	86,26	8,6	0,4	66500	300
35,4	62,6	262,86	80,00	8,0	0,4	61300	300
40,4	57,6	261,28	78,42	7,8	0,4	56400	300
45,0	53,0	257,62	74,76	7,5	0,4	51900	300
50,0	48,0	257,03	74,17	7,4	0,4	45000	300
55,2	42,8	251,52	68,66	6,9	0,4	51900	300
60,2	37,8	250,47	67,61	6,8	0,3	37000	300
65,2	32,8	248,30	65,44	6,5	0,3	32100	300
70,2	27,8	243,77	60,91	6,1	0,3	27200	300
75,0	23,0	235,59	52,73	5,3	0,3	22500	200
80,0	18,0	225,24	42,38	4,2	0,2	17600	200
82,0	16,0	222,14	39,28	3,9	0,2	16000	200
84,0	14,0	217,59	34,73	3,5	0,2	13700	200
86,0	12,0	214,03	31,17	3,1	0,2	11700	200
88,0	10,0	209,26	26,40	2,64	0,14	9800	200
90,0	8,0	204,77	21,91	2,19	0,11	7800	200
91,0	7,0	202,50	19,64	1,96	0,10	6900	200
92,0	6,0	199,51	16,65	1,67	0,09	5900	200
93,3	4,7	194,69	11,83	1,18	0,06	4600	200
93,9	4,1	192,73	9,87	0,99	0,05	4000	200
94,6	3,4	190,44	7,58	0,76	0,04	3300	200
95,0	3,0	188,95	6,09	0,61	0,03	2900	200
95,7	2,3	187,20	4,34	0,43	0,02	2300	200
96,6	1,4	185,01	0,215	0,013	0,01	1400	200

ΔD	Δh	Δm_{tot}	Δm_{agua}
$\pm 0,1$	$\pm 0,2$	$\pm 0,01$	$\pm 0,02$

Tabla 1: Caudal y diferencia de presión en función de la masa de agua expulsada a distintas alturas

Para obtener las medidas del capilar, lo llenamos de agua, lo pesamos varias veces y calculamos la media, para reducir el error, que debemos calcular según su desviación típica:

	Valor	Error
Medida 1	45,67	0,01
Medida 2	45,60	0,01
Medida 3	45,66	0,01
Media	45,64	0,02

Tabla 2: Media de las medidas de masa del capilar con agua

De modo que la masa del capilar con agua es

$$m_{total} = 45,64 \pm 0,02g$$

Ahora, pesamos el capilar sin agua, y restándolo al valor anterior obtenemos la masa (y por tanto el volumen) del agua en el interior del capilar.

$$m_{capilar} = 41,45 \pm 0,01g$$

$$m_{agua} = 4,19 \pm 0,03g$$

$$V_{agua} = \frac{m_{agua}}{\rho} = 4,20 \pm 0,03cm^3$$

Donde el error Δm_{agua} ha sido propagado

$$\Delta m_{agua} = \left| \frac{\partial m_{agua}}{\partial m_{total}} \right| \Delta m_{total} + \left| \frac{\partial m_{agua}}{\partial m_{capilar}} \right| \Delta m_{capilar}$$

La longitud del capilar ha sido medida como:

$$L = 60 \pm 1cm$$

Ahora para obtener el radio, partimos del volumen

$$V = \pi R^2 \cdot L \longrightarrow R = \sqrt{\frac{V}{\pi L}}$$

$$\Delta R = \frac{1}{2\sqrt{\pi LV}} \Delta V + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{\pi L^3}} \Delta L$$

$$R = 0,149 \pm 0,002cm$$

Y por tanto su diámetro

$$d = 0,299 \pm 0,004cm$$

5. Gráficas

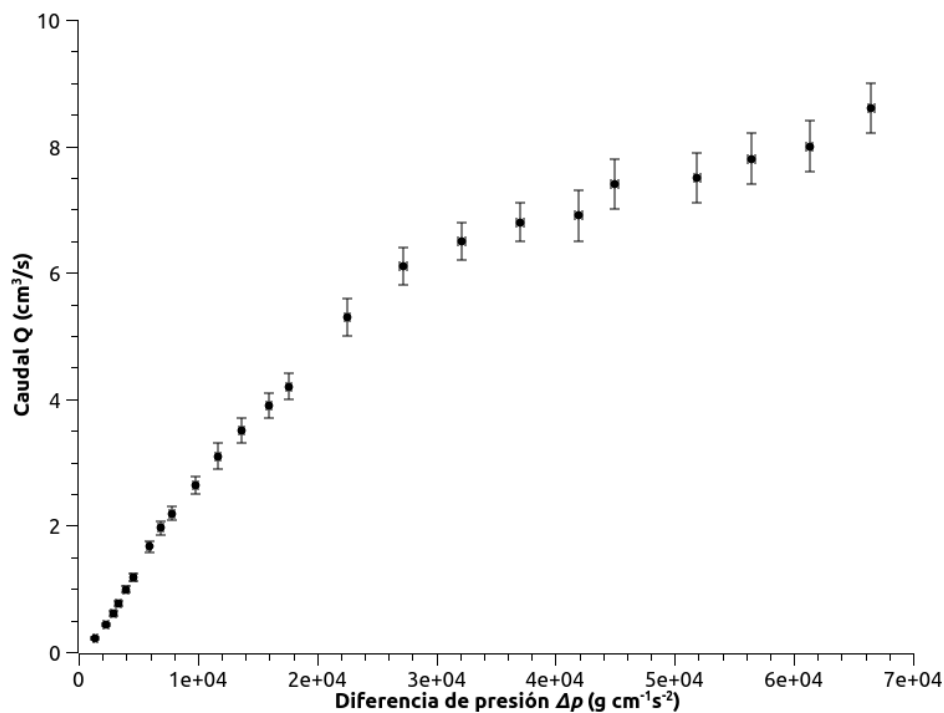


Figura 2: Representación del caudal frente diferencia de presión para distintas alturas del agua

Δp [X]	$\Delta \Delta p$ [err X]	Q [Y]	ΔQ [err Y]
66500	300	8,6	0,4
61300	300	8	0,4
56400	300	7,8	0,4
51900	300	7,5	0,4
45000	300	7,4	0,4
41900	300	6,9	0,4
37000	300	6,8	0,3
32100	300	6,5	0,3
27200	300	6,1	0,3
22500	200	5,3	0,3
17600	200	4,2	0,2
16000	200	3,9	0,2
13700	200	3,5	0,2

11700	200	3,1	0,2
9800	200	2,64	0,14
7800	200	2,19	0,11
6900	200	1,96	0,10
5900	200	1,67	0,09
4600	200	1,18	0,06
4000	200	0,99	0,05
3300	200	0,76	0,04
2900	200	0,61	0,03
2300	200	0,43	0,02
1400	200	0,215	0,013

Tabla 3: Tabla de datos de la Figura 2

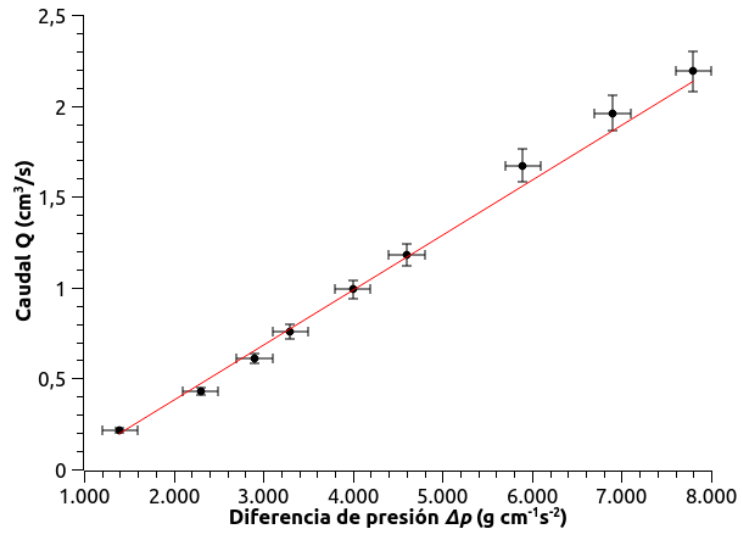


Figura 3: Región laminar de la Figura 2

Δp [X]	$\Delta \Delta p$ [err X]	Q [Y]	ΔQ [err Y]
7800	200	2,19	0,11
6900	200	1,96	0,1
5900	200	1,67	0,09
4600	200	1,18	0,06
4000	200	0,99	0,05
3300	200	0,76	0,04
2900	200	0,61	0,03
2300	200	0,43	0,02
1400	200	0,215	0,013

Tabla 4: Tabla de datos de la Figura 3

El ajuste de mínimos cuadrados de la Figura 3 es

$$Q = A \cdot \Delta p + B$$

$$A = (3,03 \pm 0,08) \cdot 10^{-4} \text{cm}^4 \text{s/g}$$

$$B = (-0,28 \pm 0,02) \text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{s}^{-2}$$

Con una coeficiente de correlación

$$R^2 = 0,9921$$

6. Discusión de resultados

Gráfica Caudal-Presión

En la Figura 2 vemos como el caudal se incrementa a mayor diferencia de presión, de modo que la curva es ascendente. Para valores pequeños, para valores $\Delta p \leq 7800$, la figura toma una forma lineal.

En la Figura 3 está representada esa sección lineal, correspondiente a la región de flujo laminar.

Viscosidad dinámica

Con el ajuste por mínimos cuadrados en la Figura 3 y la expresión de la ley de Hagen-Poiseuille, podemos despejar la viscosidad dinámica

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} \longrightarrow \mu = \frac{R^4 \pi \Delta p}{Q 8L}$$

La pendiente de la recta de ajuste

$$A = \frac{Q}{\Delta p} = (3,03 \pm 0,08) \cdot 10^{-4} \text{cm}^4 \text{s/g}$$

De modo que podemos sustituir

$$\mu = \frac{R^4 \pi}{A 8 L}$$

$$\Delta \mu = \left| \frac{4R^3 \pi}{8A \cdot L} \right| \Delta R + \left| -\frac{R^4 \pi}{8A \cdot L^2} \right| \Delta L + \left| -\frac{R^4 \pi}{8A^2 \cdot L} \right| \Delta A$$

Obteniendo finalmente

$$\mu = 0,011 \pm 0,001 \text{g/(s} \cdot \text{cm)}$$

En la literatura, el valor de la viscosidad dinámica del agua a 20°C es

$$\begin{aligned} \mu_{lit} &= 0,001 [\text{Pa} \cdot \text{s}] = 0,001 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}] = \\ &= 0,01 [\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

Este valor de viscosidad dinámica encaja perfectamente con el que hemos obtenido, ambos se encuentran en el margen de error del otro.

Número de Reynolds

Como vimos

$$Re = \frac{\nu \rho D}{\mu} = \frac{U \rho d}{\mu}$$

Mientras el error

$$\Delta Re = \left| \frac{\rho d}{\mu} \right| \Delta U + \left| \frac{U d}{\mu} \right| \Delta \rho + \left| \frac{U \rho}{\mu} \right| \Delta d + \left| -\frac{U \rho d}{\mu^2} \right| \Delta \mu$$

Tendremos que obtener el Re para cada caudal Q de los obtenidos en la Tabla 1, calculando antes la velocidad promedio:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\Delta U = \left| \frac{1}{\pi R^2} \right| \Delta Q + \left| -2 \frac{Q}{\pi R^3} \right| \Delta R$$

Factor de fricción

Obtenemos el factor de fricción con la expresión

$$\lambda = \frac{d}{L} \cdot \frac{\rho g h_f}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

y su error por propagación

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = & \left| \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right| \cdot \Delta d + \left| -\frac{d}{L^2} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right| \cdot \Delta L + \left| \frac{d}{L} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right| \cdot \Delta(\Delta p) + \\ & + \left| -\frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho^2 U^2} \right| \cdot \Delta \rho + \left| -2 \frac{d}{L} \cdot \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho^2 U^3} \right| \cdot \Delta U \end{aligned}$$

Todos estos parámetros se recogen en la Tabla 5

$h \pm 0,02$	Q (cm ³ /s)	ΔQ	U (cm/s)	ΔU	$\frac{\Delta p}{(\text{cm}^4 \text{ s} / \text{g})}$	$\Delta \Delta p$	Re	ΔRe	λ	$\Delta \lambda$
68,00	8,6	0,4	124	10	66500	300	3400	600	0,043	0,008
62,60	8,0	0,4	115	9	61300	300	3100	600	0,047	0,009
57,60	7,8	0,4	112	9	56400	300	3100	600	0,045	0,009
53,00	7,5	0,4	107	8	51900	300	2900	500	0,045	0,009
48,00	7,4	0,4	106	8	45000	300	2900	500	0,040	0,008
42,80	6,9	0,4	98	8	41900	300	2700	500	0,043	0,008
37,80	6,8	0,3	97	8	37000	300	2600	500	0,039	0,008
32,80	6,5	0,3	94	7	32100	300	2500	500	0,036	0,007
27,80	6,1	0,3	87	7	27200	300	2400	400	0,036	0,007
23,00	5,3	0,3	76	6	22500	200	2100	400	0,039	0,008
18,00	4,2	0,2	61	5	17600	200	1600	300	0,048	0,009
16,00	3,9	0,2	56	4	16000	200	1500	300	0,050	0,010
14,00	3,5	0,2	50	4	13700	200	1400	200	0,055	0,011
12,00	3,1	0,2	45	4	11700	200	1200	200	0,059	0,012
10,00	2,64	0,14	38	3	9800	200	1000	190	0,068	0,014
8,00	2,19	0,11	31	2	7800	200	850	160	0,079	0,017
7,00	1,96	0,10	28	2	6900	200	760	140	0,087	0,019
6,00	1,67	0,09	24	2	5900	200	650	120	0,10	0,02
4,70	1,18	0,06	17,0	1,3	4600	200	460	80	0,16	0,04
4,10	0,99	0,05	14,2	1,1	4000	200	380	70	0,20	0,05
3,40	0,76	0,04	10,9	0,9	3300	200	300	60	0,28	0,07
3,00	0,61	0,03	8,7	0,7	2900	200	240	40	0,38	0,10
2,30	0,43	0,02	6,2	0,5	2300	200	170	30	0,59	0,17
1,40	0,215	0,013	3,1	0,3	1400	200	80	20	1,5	0,5

Tabla 5: Cálculo de velocidad, Reynolds y factor de fricción

Representando λ frente a Re en escala logarítmica, obtenemos el diagrama de Moody

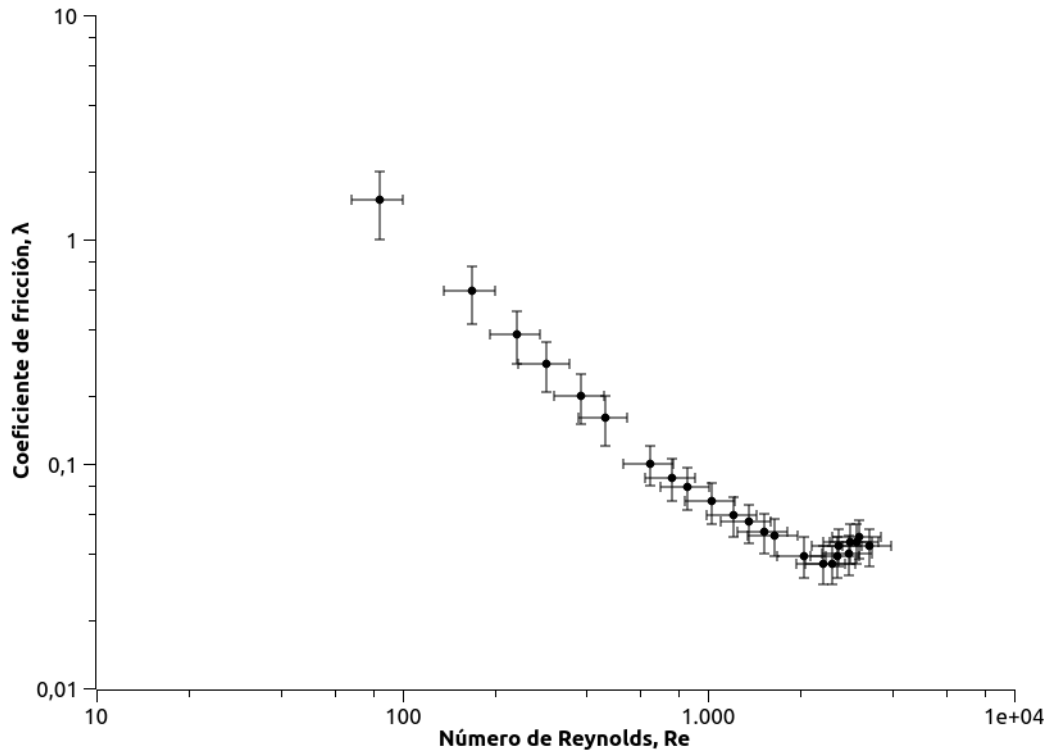


Figura 4: Diagrama de Moody experimental

Re [X]	Error Re	λ [Y]	$\Delta\lambda$
3400	600	0,043	0,008
3100	600	0,047	0,009
3100	600	0,045	0,009
2900	500	0,045	0,009
2900	500	0,040	0,008
2700	500	0,043	0,008
2600	500	0,039	0,008
2500	500	0,036	0,007
2400	400	0,036	0,007
2100	400	0,039	0,008
1600	300	0,048	0,009
1500	300	0,050	0,010
1400	200	0,055	0,011

1200	200	0,059	0,012
1000	190	0,068	0,014
850	160	0,079	0,017
760	140	0,087	0,019
650	120	0,10	0,02
460	80	0,16	0,04
380	70	0,20	0,05
300	60	0,28	0,07
240	40	0,38	0,10
170	30	0,59	0,17
80	20	1,5	0,5

Tabla 6: Tabla de datos de la Figura 4

Aquí podemos ver claramente el cambio de flujo laminar a turbulento, en los valores de Reynolds cercanos a 2000. Fijándonos en estos puntos, se puede ver que corresponden a una posición más a la derecha en la Figura 2 de lo que habíamos considerado, por lo que nuestra toma inicial en la Figura 3 para calcular la pendiente en el flujo laminar se dejó fuera unos cuantos puntos, que hubieran reducido algo el valor de la pendiente.

Ahora obtenemos los valores teóricos para flujo laminar mediante

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re}$$

y para turbulento obteniendo el resultado semi-empírico de

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8$$

nos da la λ_{tur} .

Superponiendo los tres valores de λ tenemos la Figura 5

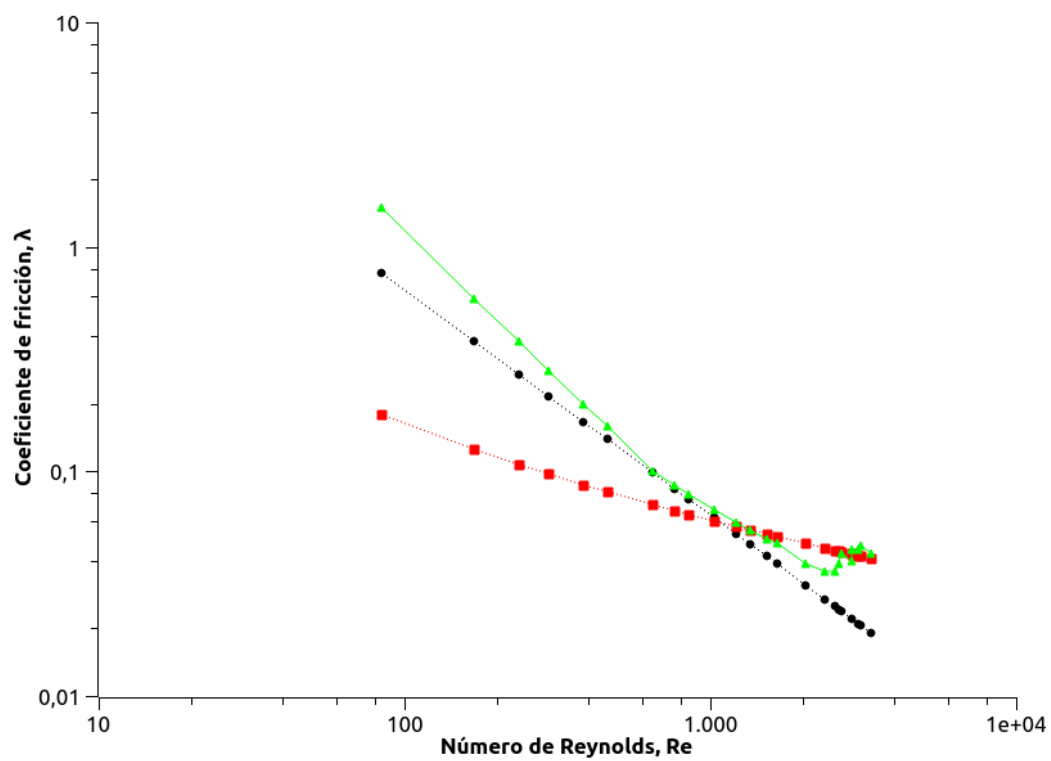


Figura 5: Diagrama de Moody teórico

Re	λ	λ_{lam}	λ_{tur}
3400	0,043	0,019	0,041
3100	0,047	0,021	0,042
3100	0,045	0,021	0,042
2900	0,045	0,022	0,043
2900	0,040	0,022	0,043
2700	0,043	0,024	0,044
2600	0,039	0,024	0,044
2500	0,036	0,025	0,045
2400	0,036	0,027	0,046
2100	0,039	0,031	0,048
1600	0,048	0,039	0,051
1500	0,050	0,042	0,053
1400	0,055	0,047	0,055
1200	0,059	0,053	0,057
1000	0,068	0,062	0,060
850	0,079	0,075	0,064

760	0,087	0,084	0,067
650	0,10	0,099	0,071
460	0,16	0,139	0,081
380	0,20	0,167	0,087
300	0,28	0,217	0,098
240	0,38	0,270	0,107
170	0,59	0,379	0,125
80	1,5	0,762	0,178

Tabla 7: Tabla de datos de la Figura 5

Podemos ver como el flujo laminar coincide con una ligera diferencia en inclinación, que puede tener que ver con el fallo de interpretación que hemos mencionado antes, o bien por error experimental. En el cambio de flujo vemos como progresivamente nuestros valores experimentales pasan de seguir los valores teóricos para el laminar a aproximarse y llegar a los calculados para el turbulento.

7. Conclusiones

Mediante un sistema de agua fluyendo a través de un capilar horizontal, recibiendo agua a través de un tubo vertical con cierta altura de agua, hemos podido comprobar la relación entre presión y caudal, así como obtener la viscosidad dinámica del líquido, y el diagrama de Moody que relaciona el número de Reynolds con el factor de fricción.