

# Relación de dispersión de ondas de tensión superficial

## 1. Objetivos de la práctica

En esta práctica determinaremos experimentalmente la tensión superficial de un líquido a partir de la relación de dispersión de ondas de tensión superficial

## 2. Resumen teórico

Al producirse una perturbación en un fluido, de modo que un elemento de volumen se desplace fuera de su posición de equilibrio, actúan como fuerzas recuperadoras la fuerza de la gravedad y la tensión superficial, generando cada una un tipo de onda asociada. El orden de magnitud de la fuerza recuperadora generada por la gravedad corresponde a  $\rho \cdot g$  (siendo  $\rho$  la densidad del fluido y  $g$  la gravedad). La fuerza generada por la tensión tiene una magnitud de  $\sigma \cdot k$  (siendo  $\sigma$  la tensión superficial y  $k$  el número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  con  $\lambda$  siendo la longitud de onda).

La denominada relación de dispersión representa la relación entre el número de onda  $k$  y la frecuencia angular  $\omega$ , que depende del medio y de las fuerzas involucradas en el proceso. A partir de linealizar las ecuaciones de Navier-Stokes y de la ecuación de Young-Laplace, obtenemos que

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma}{\rho} k^3$$

Esta relación se puede obtener experimentalmente para ondas de tensión superficial estacionarias en la superficie de un líquido, a partir del patrón de difracción de la incidencia de un haz de luz monocromática en la superficie. Podemos inducir una perturbación de frecuencia sobre el líquido, excitando un modo normal de vibración para generar las ondas estacionarias, iluminarlas con un haz de luz y obtener reflejos sobre una pantalla que muestren un

patrón de difracción que nos da información sobre los puntos en los que se ha producido interferencia constructiva.

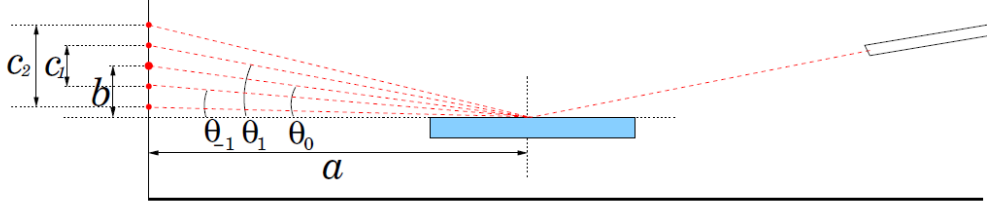


Figura 1: Esquema del patrón de difracción

La Figura 1 representa el esquema del patrón de difracción de las ondas reflejadas en una superficie con ondas de tensión superficial estacionarias.  $\theta_0$  es el ángulo del máximo principal,  $\theta_1$  y  $\theta_{-1}$  son los de los máximos secundarios de primer orden. La distancia  $a$  es la distancia del punto de reflexión a la pantalla,  $b$  es su altura relativa, y  $c_1$  y  $c_2$  es la distancia entre máximos secundarios.

A partir de los ángulos de los máximos secundarios y central de los puntos luminosos, podemos obtener el número de onda:

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda}(\theta_n - \theta_{-n}) \sin \theta_0$$

que para ángulos pequeños puede aproximarse como

$$k_n = \frac{\pi}{\lambda}(\theta_n - \theta_{-n})\theta_0$$

Siendo  $c_n$  la distancia entre máximos secundarios de orden  $n$ , podemos aproximar

$$(\theta_n - \theta_{-n}) = \frac{c_n}{a}$$

De modo que

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda}\theta_0 \frac{c_n}{a}$$

### 3. Procedimiento experimental

Mediante el transmisor mecánico acoplado a un altavoz, conectado a un generador de señales, generaremos una onda estacionaria de tensión superficial en agua destilada. Haremos incidir el haz de luz láser sobre la superficie, en el punto en el que se genera la onda estacionaria. Esta superficie actúa

como una red de difracción. Haremos que se refleje en una pantalla para ver su patrón, en el que identificaremos un máximo central y dos secundarios de primer y segundo orden.

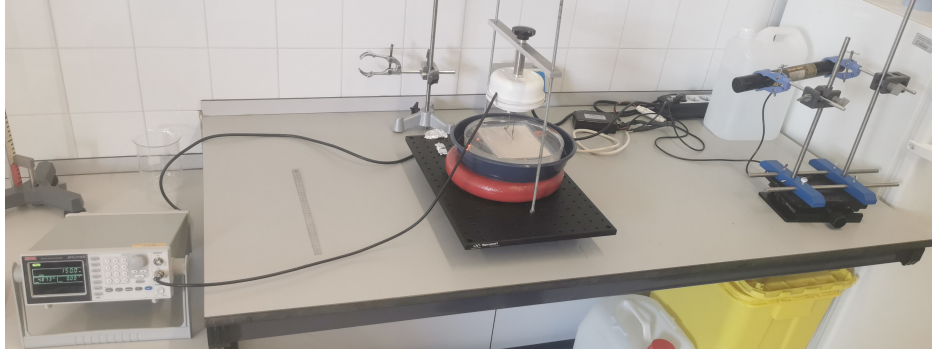


Figura 2: Dispositivo experimental

## Procedimiento

1. Llenamos el recipiente con agua destilada y medimos su temperatura.
2. Establecemos contacto entre el transmisor mecánico y la superficie del agua. El segmento horizontal debe contactar paralelamente con la superficie del líquido quedando parcialmente sumergido. Modificaremos la altura del transmisor mecánico y lo nivelaremos respecto a la superficie actuando sobre las tuercas que sujetan el soporte, donde se encuentra anclado.
3. Ajustamos el haz de luz láser de modo que su reflejo en la superficie del agua es visible en la pantalla. Observamos, en ausencia de perturbación, un punto estático en la pantalla.
4. Conectamos el generador de señales. Seleccionamos una frecuencia entre 150 y 400 Hz. La vibración generará ondas estacionarias en la superficie.
5. Ajustamos el punto de incidencia del haz láser para que rebase levemente el segmento horizontal del transmisor. Nos ayudamos de una regla metálica para encontrar mejor el punto de incidencia, que nos permite comprobar por donde pasa el haz al interponerla en su recorrido.
6. Variando la amplitud de la señal, ajustamos la amplitud de la onda hasta obtener un patrón de difracción en la pantalla donde distingamos nítidamente el máximo principal y los secundarios.

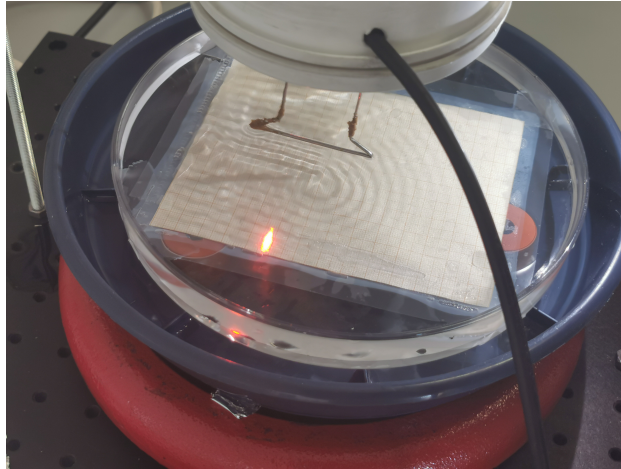


Figura 3: Ondas estacionarias en la superficie

7. Registramos la frecuencia y fotografiamos el patrón de difracción de la pantalla.
8. Medimos la distancia horizontal entre el punto de incidencia del láser-líquido y la pantalla. Medimos también la distancia vertical entre el punto de incidencia central en la pantalla y el punto de incidencia en el agua (altura de la superficie).
9. Repetimos las mediciones en incrementos cercanos a 10 Hz para energías entre 150 y 400 Hz.

## 4. Tablas de medidas

Para cada frecuencia, medimos las distancias entre máximos secundarios de primer ( $c_1$ ) y segundo ( $c_2$ ) orden.

Frecuencia $\pm 1$ (Hz)	$c_1 \pm 1$ (mm)	$c_2 \pm 1$ (mm)
150	13	26
160	14	28
170	15	30
180	16	31
190	16	32
200	17	32
210	17	33
220	17	34
230	17	35
240	17	36
250	18	36
260	18	37
270	19	39
280	20	40
290	21	41
300	21	42
310	21	42
320	22	44
330	22	45
340	22	46
350	23	48
360	23	48
370	24	49
380	25	49
390	25	50
400	26	51

Tabla 1: Medidas de distancias entre centros para distintas frecuencias

Tomamos las medidas de longitud del sistema:

- $a = 4,029 \pm 0,001\text{m}$
- $b = 0,59 \pm 0,01\text{m}$

Con ello podemos deducir el ángulo

$$\theta_0 = \frac{b}{a} = 0,149 \pm 0,013$$

donde el error ha sido propagado mediante dispersión de errores

$$\Delta\theta_0 = \left| \frac{\partial\theta_0}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial\theta_0}{\partial a} \right| \Delta a$$

$$\Delta\theta_0 = \frac{b}{a^2} \Delta a + \frac{1}{a} \Delta b$$

$$\theta_0 = 0,149 \pm 0,013 \text{ (rad)}$$

Con estos datos calculamos  $\omega$  y  $k$  para los máximos secundarios de primer y segundo orden, así como sus errores mediante propagación de las expresiones para su cálculo

$$\omega = 2\pi f$$

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

$$k_n = \frac{\pi}{n\lambda} \frac{bc_n}{a^2}$$

$$\Delta k_n = \frac{\pi}{n\lambda^2} \frac{bc_n}{a^2} \Delta\lambda + \frac{\pi}{n\lambda} \frac{c_n}{a^2} \Delta b + \frac{\pi}{n\lambda} \frac{b}{a^2} \Delta c_n + \frac{2\pi}{n\lambda} \frac{bc_n}{a^3} \Delta a$$

siendo  $f$  la frecuencia en hercios,  $n$  el orden  $\lambda$  la longitud de onda.

Frecuencia $\pm 1$ (Hz)	$\omega \pm 6$ (rad/s)	$k_1$ (m <sup>-1</sup> )	$\Delta k_1$	$k_2$ (m <sup>-1</sup> )	$\Delta k_2$
150	942	2400	200	2400	300
160	1005	2600	200	2600	300
170	1068	2700	200	2700	300
180	1131	2900	200	2800	300
190	1194	2900	200	2900	400
200	1257	3100	200	2900	400
210	1319	3100	200	3000	400
220	1382	3100	200	3100	400
230	1445	3100	200	3200	400
240	1508	3100	200	3300	400
250	1571	3300	200	3300	400
260	1634	3300	200	3400	400
270	1696	3500	200	3600	400
280	1759	3700	300	3700	400
290	1822	3800	300	3800	400
300	1885	3800	300	3800	400
310	1948	3800	300	3800	400
320	2011	4000	300	4000	500
330	2073	4000	300	4100	500
340	2136	4000	300	4200	500
350	2199	4200	300	4400	500
360	2262	4200	300	4400	500
370	2325	4400	300	4500	500
380	2388	4600	300	4500	500
390	2450	4600	300	4600	500
400	2513	4800	300	4700	500

Tabla 2:  $\omega$  y  $k$  para cada frecuencia

Los terceros máximos secundarios son poco visibles. Únicamente se observan con claridad en las frecuencias más altas:

Frecuencia $\pm 1$ (Hz)	$c_3$ (mm)	$k_3$ (m <sup>-1</sup> )	$\Delta k_3$
320	67	4100	400
330	68	4200	400
340	69	4200	400
350	71	4300	400
360	72	4400	500
370	73	4500	500
380	74	4500	500
390	76	4600	500
400	77	4700	500

Tabla 3: Distancia y  $k$  para máximos de tercer orden

## 5. Gráficas

Obtenemos las representaciones, para los máximos secundarios de primer y segundo orden, de  $\omega^2$  frente a  $k_n^3$ :

### Primer orden

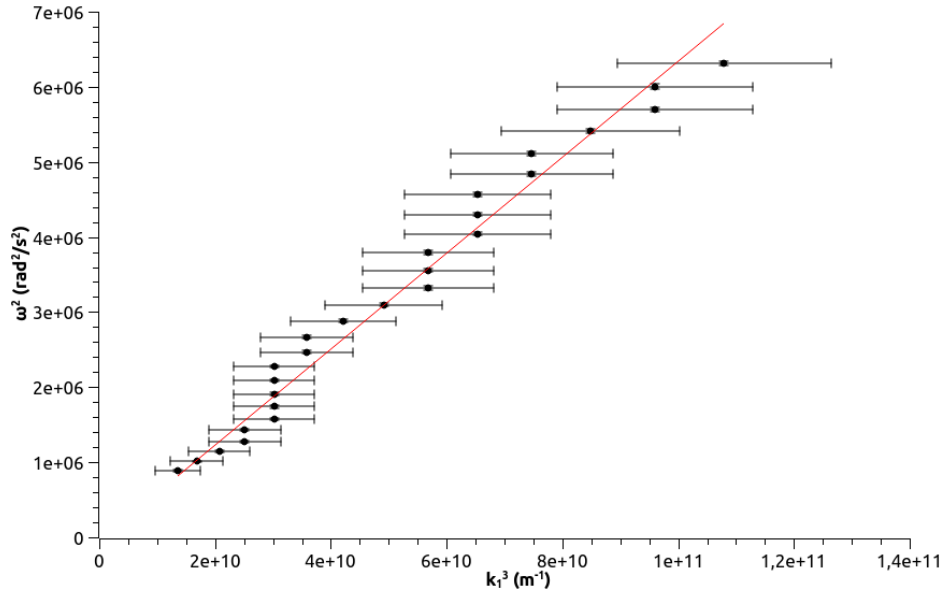


Figura 4:  $\omega^2$  frente a  $k_1^3$ , máximos secundarios de primer orden



$k_1^3$ [X]	$\Delta k_1^3$ [err X]	$\omega^2$ [Y]	$\Delta \omega^2$ [err Y]
1,35E+10	3,87E+09	8,88E+05	1,18E+04
1,69E+10	4,56E+09	1,01E+06	1,26E+04
2,07E+10	5,31E+09	1,14E+06	1,34E+04
2,52E+10	6,13E+09	1,28E+06	1,42E+04
2,52E+10	6,13E+09	1,43E+06	1,50E+04
3,02E+10	7,02E+09	1,58E+06	1,58E+04
3,02E+10	7,02E+09	1,74E+06	1,66E+04
3,02E+10	7,02E+09	1,91E+06	1,74E+04
3,02E+10	7,02E+09	2,09E+06	1,82E+04
3,02E+10	7,02E+09	2,27E+06	1,89E+04
3,58E+10	7,99E+09	2,47E+06	1,97E+04
3,58E+10	7,99E+09	2,67E+06	2,05E+04
4,21E+10	9,02E+09	2,88E+06	2,13E+04
4,91E+10	1,01E+10	3,10E+06	2,21E+04
5,69E+10	1,13E+10	3,32E+06	2,29E+04
5,69E+10	1,13E+10	3,55E+06	2,37E+04
5,69E+10	1,13E+10	3,79E+06	2,45E+04
6,54E+10	1,26E+10	4,04E+06	2,53E+04
6,54E+10	1,26E+10	4,30E+06	2,61E+04
6,54E+10	1,26E+10	4,56E+06	2,68E+04
7,47E+10	1,40E+10	4,84E+06	2,76E+04
7,47E+10	1,40E+10	5,12E+06	2,84E+04
8,49E+10	1,54E+10	5,40E+06	2,92E+04
9,60E+10	1,69E+10	5,70E+06	3,00E+04
9,60E+10	1,69E+10	6,00E+06	3,08E+04
1,08E+11	1,85E+10	6,32E+06	3,16E+04

Tabla 4: Tabla de datos de la Figura 4

La recta de ajuste para la Figura 4:

$$\omega^2 = k^3 x + B$$

$$A = (6,385 \pm 0,017) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$B = (-46000 \pm 7000) (\text{m/s})$$

Siendo la correlación:

$$R^2 = 0,9762$$

## Segundo orden

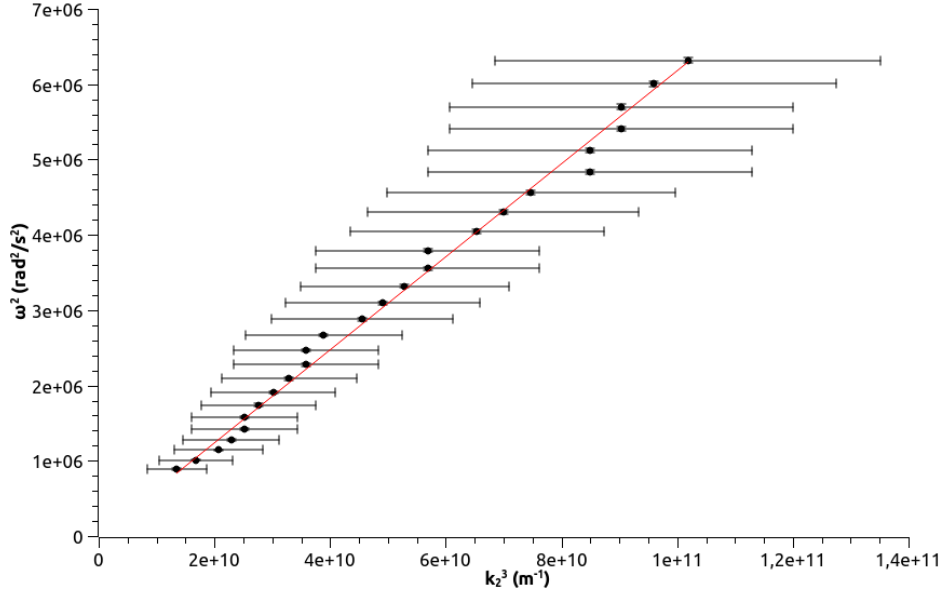


Figura 5:  $\omega^2$  frente a  $k_2^3$ , máximos secundarios de segundo orden

$k_1^3$ [X]	$\Delta k_1^3$ [err X]	$\omega^2$ [Y]	$\Delta \omega^2$ [err Y]
1,35E+10	5,17E+09	8,88E+05	1,18E+04
1,69E+10	6,32E+09	1,01E+06	1,26E+04
2,07E+10	7,62E+09	1,14E+06	1,34E+04
2,29E+10	8,34E+09	1,28E+06	1,42E+04
2,52E+10	9,10E+09	1,43E+06	1,50E+04
2,52E+10	9,10E+09	1,58E+06	1,58E+04
2,76E+10	9,90E+09	1,74E+06	1,66E+04
3,02E+10	1,07E+10	1,91E+06	1,74E+04
3,29E+10	1,16E+10	2,09E+06	1,82E+04
3,58E+10	1,26E+10	2,27E+06	1,89E+04
3,58E+10	1,26E+10	2,47E+06	1,97E+04
3,89E+10	1,36E+10	2,67E+06	2,05E+04
4,55E+10	1,57E+10	2,88E+06	2,13E+04
4,91E+10	1,68E+10	3,10E+06	2,21E+04
5,29E+10	1,80E+10	3,32E+06	2,29E+04
5,69E+10	1,93E+10	3,55E+06	2,37E+04
5,69E+10	1,93E+10	3,79E+06	2,45E+04

6,54E+10	2,20E+10	4,04E+06	2,53E+04
7,00E+10	2,34E+10	4,30E+06	2,61E+04
7,47E+10	2,49E+10	4,56E+06	2,68E+04
8,49E+10	2,80E+10	4,84E+06	2,76E+04
8,49E+10	2,80E+10	5,12E+06	2,84E+04
9,03E+10	2,97E+10	5,40E+06	2,92E+04
9,03E+10	2,97E+10	5,70E+06	3,00E+04
9,60E+10	3,15E+10	6,00E+06	3,08E+04
1,02E+11	3,33E+10	6,32E+06	3,16E+04

Tabla 5: Tabla de datos de la Figura 5

La recta de ajuste para la Figura 5:

$$\omega^2 = k^3 x + B$$

$$A = (6,177 \pm 0,016) \cdot 10^{-5}(\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$B = (-5000 \pm 7000)(\text{m/s})$$

Siendo la correlación:

$$R^2 = 0,9923$$

### Tercer orden

A partir de la Tabla 3, graficamos la parte de la recta obtenida por esos datos:

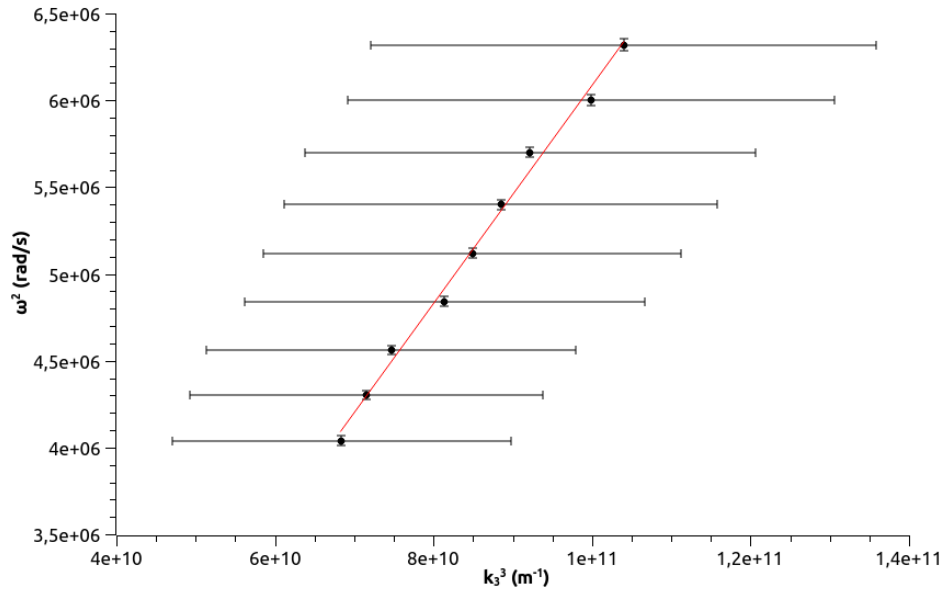


Figura 6

Figura 7:  $\omega^2$  frente a  $k_3^3$ , máximos secundarios de tercer orden

$k_3^3$ [X]	$\Delta k_3^3$ [err X]	$\omega^2$ [Y]	$\Delta \omega^2$ [err Y]
6,84E+10	2,14E+10	4,04E+06	2,53E+04
7,15E+10	2,23E+10	4,30E+06	2,61E+04
7,47E+10	2,33E+10	4,56E+06	2,68E+04
8,14E+10	2,52E+10	4,84E+06	2,76E+04
8,49E+10	2,63E+10	5,12E+06	2,84E+04
8,85E+10	2,73E+10	5,40E+06	2,92E+04
9,22E+10	2,84E+10	5,70E+06	3,00E+04
9,99E+10	3,07E+10	6,00E+06	3,08E+04
1,04E+11	3,19E+10	6,32E+06	3,16E+04

Tabla 6: Tabla de datos para la Figura 6

La recta de ajuste para la Figura 5:

$$\omega^2 = k^3 x + B$$

$$A = (6,30 \pm 0,08) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$B = (-220000 \pm 70000) (\text{m/s})$$

Siendo la correlación:

$$R^2 = 0,9934$$

## 6. Discusión de resultados

A partir de

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3 \longrightarrow \sigma = \frac{\omega^2}{k^3} \rho$$

$$\Delta\sigma = \frac{2\omega}{k^3} \rho \Delta\omega + \frac{3\omega^2}{k^4} \rho \Delta k + \frac{\omega^2}{k^3} \Delta\rho$$

Utilizando la relación de dispersión de los máximos secundarios de primer orden, y conociendo la densidad del agua:

$$\frac{\omega^2}{k^3} = (6,385 \pm 0,017) \cdot 10^{-5} (\text{rad} \cdot \text{m/s})$$

$$\rho_{\text{agua}} = 977 \pm 1 (\text{kg/m}^3)$$

$$\sigma_1 = \frac{\omega^2}{k^3} \rho_{\text{agua}} = (62,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} (\text{N/m})$$

Si utilizamos los máximos secundarios de segundo y tercer orden

$$\sigma_2 = \frac{\omega^2}{k^3} \rho_{\text{agua}} = (60,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} (\text{N/m})$$

$$\sigma_3 = \frac{\omega^2}{k^3} \rho_{\text{agua}} = (61,6 \pm 0,8) \cdot 10^{-3} (\text{N/m})$$

Según la literatura, el valor de la tensión superficial del agua a 20°C es de

$$\sigma_{\text{teor}} = (72,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{N/m}$$

La diferencia entre nuestros valores de  $\sigma$  calculados y el teórico es considerable, de más de un 17 %, incluso para los máximos secundarios de tercer orden, para los que posiblemente no disponemos de suficientes puntos. Entre las posibles causas de error, las mediciones de distancias  $a$  y  $b$  resultaban complicadas, tanto por la gran distancia que cubría  $a$  como por la oscilación en altura de  $b$  y la dificultad determinando el punto de reflexión del haz en el agua. Además, las ondas en el agua se veían fácilmente perturbadas por las vibraciones en la sala.

## Número de onda crítico

$$g = 9,81 \pm 0,01 \text{N/kg}$$

$$\rho \cdot g = 9580 \pm 20 \text{N/m}^3$$

Comparando con la fuerza de las ondas superficiales, podemos despejar un número de onda crítico, en el que ambas fuerzas se igualan

$$\sigma \cdot k^2 = \rho \cdot g \longrightarrow k = \sqrt{\frac{\rho \cdot g}{\sigma}}$$

$$\Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{\sigma \cdot \rho}} \Delta \rho + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma \cdot g}} \Delta g + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho \cdot g}{\sigma^3}} \Delta \sigma$$

Utilizando el valor teórico  $\sigma_{teor}$

$$k_c = (362,8 \pm 0,6) \text{m}^{-1}$$

Mientras que utilizando nuestro valor experimental  $\sigma_2$

$$k_c = (398 \pm 1) \text{m}^{-1}$$

Esto indica el número de onda crítico a partir del que los efectos de la gravedad son significativos respecto a los de la tensión superficial, es un orden de magnitud más bajo que el rango en el que nos hemos movido.

## 7. Conclusiones

Mediante la medida de las distancias en un patrón de difracción sobre ondas de tensión superficial estacionarias generadas a partir de la frecuencia emitida por un altavoz sobre la superficie de agua, hemos podido determinar la relación entre el número de onda y su velocidad angular, y con ello obtener una medida experimental de la tensión superficial del agua. La disposición del experimento y la dificultad de algunas de las medidas han reducido la precisión de los resultados considerablemente.