

Vórtice por sumidero

Pérez Laso, Rodrigo

Puebla Herrero, Sergio

Rodríguez Medina, Adrián

Introducción

En este experimento estudiaremos un vórtice de sumidero. Es un tipo de movimiento que realiza un volumen de fluido, compuesto por un desplazamiento radial hacia un punto en el que nosotros situamos una abertura y otro circular alrededor de dicho agujero. Este punto, (que realmente es un área), es por donde se escapa el fluido. Estudiaremos este movimiento como la composición de los dos ya mencionados, superponiendo el flujo debido a un sumidero y el debido a un vórtice.

El potencial complejo es una función que caracteriza a un flujo:

$$w = \phi + i\psi \quad (1)$$

Donde ϕ representa el potencial de velocidades, el cual cumple:

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (2)$$

Y ψ es la función de corriente que debe cumplir que:

$$\vec{u} = \nabla \times (\psi \vec{u}_z) \quad (3)$$

Este flujo únicamente será irrotacional, de otro modo, el potencial que hemos propuesto no sería de esta forma. Comprobaremos que la vorticidad es cero simplemente observando que nuestra partícula a observar (que será puntual idealmente) no gira sobre sí misma.

Como referencia para nuestro origen de coordenadas tomaremos el centro de nuestro recipiente y trataremos en coordenadas cilíndricas todo el experimento. Así pues, el potencial complejo del sumidero podremos expresarlo como:

$$w = -A * \log(z); A \equiv cte > 0 \quad (4)$$

El potencial complejo de un vórtice es:

$$w = \pm iB * \log(z); B = \frac{\Gamma}{2\pi} \equiv cte > 0 \quad (5)$$

Analizaremos nuestro problema fijándonos en la superposición de ambos movimientos. Por lo tanto, el potencial complejo en nuestro sistema cobrará la siguiente forma:

$$w = -A * \log(z) \mp iB * \log(z) \quad (6)$$

Escribiremos z en su forma compleja ($z = e^{i\theta}$) y sustituyendo en la ecuación para el potencial complejo de nuestro problema, somos capaces de obtener las ecuaciones para el potencial de velocidades y la función de corriente:

$$\phi = -A * \log(r) \pm B * \theta \quad (7)$$

$$\psi = -A * \theta \mp B * \log(r) \quad (8)$$

Debido a la simetría cilíndrica de nuestro problema, será de utilidad usar coordenadas cilíndricas, de forma que podemos escribir las componentes de la velocidad como:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A}{r} \quad (9)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \pm \frac{B}{r} \quad (10)$$

Que corresponden a la velocidad radial (u_r) y a la tangencial (u_θ), para cada una de las partículas del fluido.

Como para una línea de corriente, la función de corriente se conserva (ψ es constante), las trayectorias cumplirán que:

$$-A * \theta \mp B * \log(r) = cte = \psi \quad (11)$$

$$C - D * \theta = \log(r) \quad (12)$$

$$r(\theta) = e^{C-D\theta} = Ke^{-D\theta} \quad (13)$$

$$\forall C = \frac{\psi}{B}, D = \frac{A}{B}, \quad K = e^C \quad (14)$$

Objetivos

Primeramente debemos encontrar un montaje experimental que nos permita crear un 'sinkvortex' y analizar todas sus propiedades. Posteriormente trataremos de caracterizar todas estas propiedades, tales como la velocidad angular y el ángulo de las partículas de fluido en función del tiempo... Comprobaremos si los resultados experimentales que obtenemos se ajustan a la teoría previamente citada en la introducción, y, en caso de no ajustarse, encontrar las mayores fuentes de error y motivos por los cuales no existiera una correspondencia con los fundamentos teóricos.

Material y método experimental

El material con el que hemos realizado el experimento es:

- Recipiente de 2,7L, con radio de 8,1cm.
- Recipiente de 3.8 L y con un radio de 11 cm
- Plantilla en coordenadas polares plastificada.
- Cámara de vídeo.
- Rotulador permanente para marcar el nivel del agua.
- Cinta aislante.
- Agua.
- Software: Tracker y Matlab.
- Bolas de poliestireno.
- Tapón extraíble.

El montaje del vórtice de sumidero consiste en una superficie cilíndrica hueca, abierta por un lado y cerrada por otro, a la que le practicaremos un orificio por la cara cerrada de un radio dado. Se llenará de agua y se destapará la abertura inferior, dejando caer el agua por la fuerza de la gravedad. Para poder medir la velocidad de una partícula situaremos un objeto que pueda flotar y en la parte inferior del cilindro pegaremos un papel en el que se habrá dibujado previamente círculos de diferentes radios para observar la velocidad de la partícula a las diferentes distancias del eje central del cilindro. Para determinar la velocidad a la que iniciamos el experimento utilizamos una pala.

Grabaremos el montaje con una cámara de vídeo y podremos medir los datos experimentales introduciéndolos en el software 'tracker'.

Repetiremos el experimento para dos recipientes diferentes, y dos aberturas diferentes para ver cómo cambian los parámetros medidos para las mismas condiciones iniciales.

Primero utilizamos una abertura de radio 0,35 cm y después ampliamos la abertura a 0,8 cm.

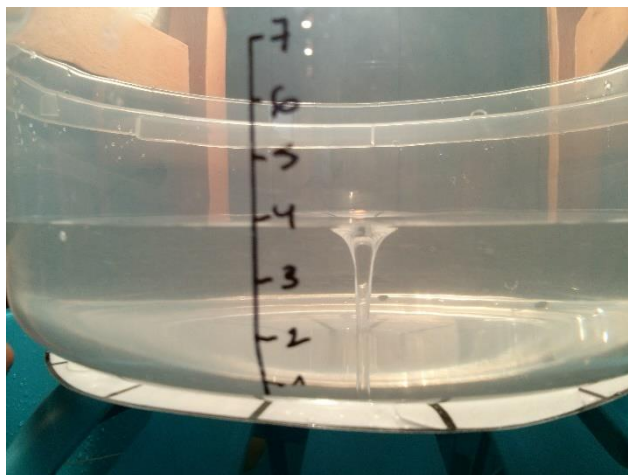


Imagen 1 Vórtice en el recipiente pequeño

Resultados y discusión

Realizando el experimento para el cilindro pequeño y la abertura de 0,35 cm vemos que:

- Para el recipiente pequeño, la tensión superficial es bastante grande, hace que eventualmente las bolas se aproximen a la pared y se queden adheridas a ellas, haciendo que la velocidad radial se vea afectada por la misma.
- Sin velocidad angular inicial del fluido (fluido en reposo), una vez que quitamos el tapón, no hay velocidad angular y sólo existe componente radial de la velocidad debido a que el vórtice no ejerce ninguna fuerza en el sentido angular, con lo que la constante $B = 0$.
- Debido a que en $r=0$ hay una singularidad la partícula aumenta su velocidad conforme se acerca al sumidero, esto es porque la velocidad radial es proporcional a r^{-1} .
- Debido a que u_θ sólo depende de r , para una partícula que no cambia su radio, ésta se mantiene constante, lo mismo con u_r . Pero debido a las fuerzas de rozamiento del agua con la base y las paredes del cilindro esto no se cumple, ya que éstas no las hemos tenido en cuenta en nuestras ecuaciones.
- Observamos que la aceleración de Coriolis es tan pequeña que en el reposo la velocidad angular que se observa es prácticamente inapreciable, y dicha aceleración es la única causante de la velocidad angular. Además, comprobamos que la velocidad de las partículas no se ve afectada por la aceleración de Coriolis de la Tierra al girar el fluido en un sentido y en el otro.

Sólo sumidero

En la figura 1, se ha representado el radio respecto al tiempo para una velocidad inicial del fluido aproximadamente cero y se ha comparado con el modelo teórico de sólo sumidero gobernado por la ecuación (15)

$$r = \sqrt{r_0 - 2At} \quad (15)$$

Donde A lo obtenemos a través de la pendiente de los datos obtenidos experimentalmente. Vemos que las curvas no son iguales, esto es debido a que en nuestro modelo no tenemos en cuenta la fuerza de rozamiento y que en la parte final de la gráfica, la altura del agua era ya bastante pequeña y por ello la velocidad del fluido no es la misma que debería ser respecto al modelo. El aparente comportamiento ondulatorio del inicio es debido a que, al quitar el tapón, se perturba el sistema y se generan ondas que hace que nuestra partícula no se

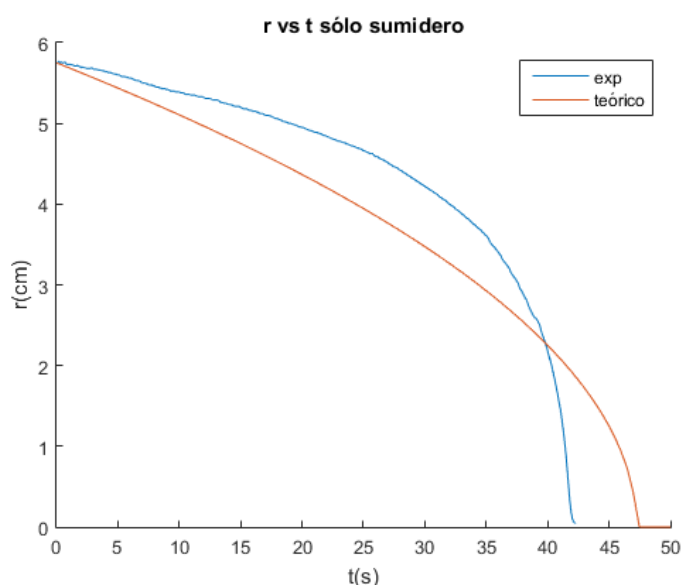


Figura 1 comparación de datos experimentales con modelo teórico para sólo sumidero

pueda estar completamente quieta.

Representamos también, en la Figura 2, la velocidad respecto al radio, comparando los datos teóricos con los experimentales, vemos que ambos son proporcionales a r^{-1} como nos dice la ecuación (9), como no hay presencia de velocidad angular sólo tiene componente u_r .

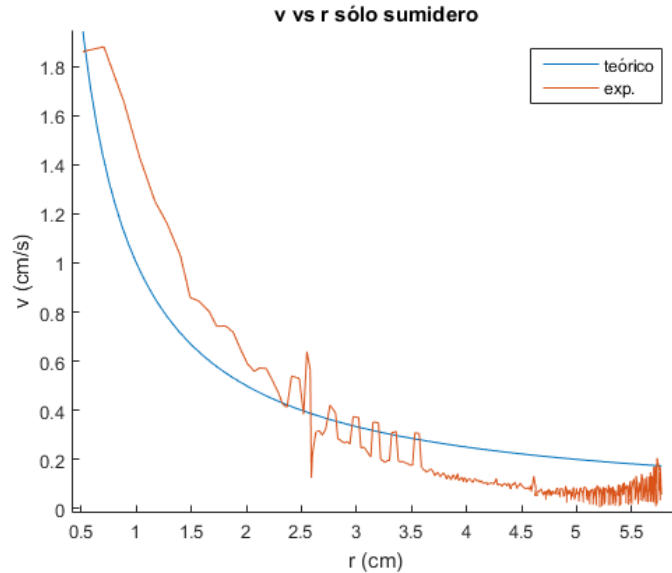


Figura 2 sólo sumidero velocidad respecto al radio

Sumidero y vórtice

- Recipiente pequeño

Graficamos el módulo de la velocidad total respecto al radio, sabiendo $|u| = \sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}$ y comparamos con los datos experimentales. Se ha ajustado el exponente de las ecuaciones (9) y (10) para que se ajuste con los datos representando en escala logarítmica los datos experimentales y averiguando qué pendiente tenían los datos experimentales. Nótese el aumento de la velocidad con la disminución del radio.

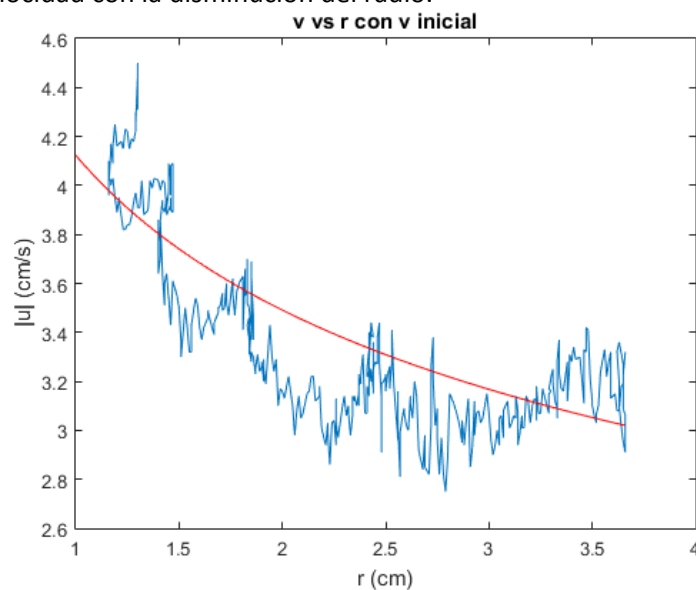


Figura 3 módulo de la velocidad respecto al radio

Representando en la Figura 4 la frecuencia respecto al tiempo y al radio vemos que esta aumenta conforme disminuye el radio, y por lo tanto, conforme aumenta el tiempo, como esperamos.

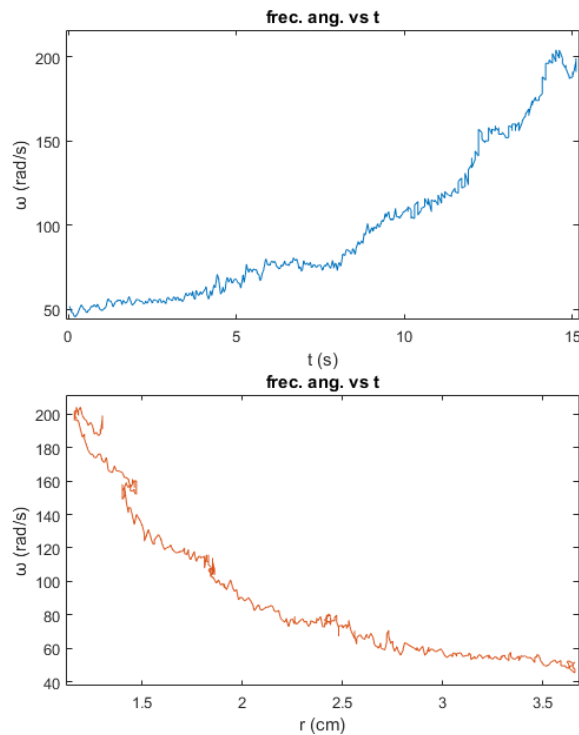


Figura 4 velocidad angular respecto al tiempo y al radio

- Recipiente grande

Comprobamos experimentalmente que en este recipiente el problema de la tensión superficial se minimiza. Vemos en la Figura 5 que el módulo de la velocidad va de la misma forma que en el apartado anterior. Se ha seguido el mismo procedimiento.

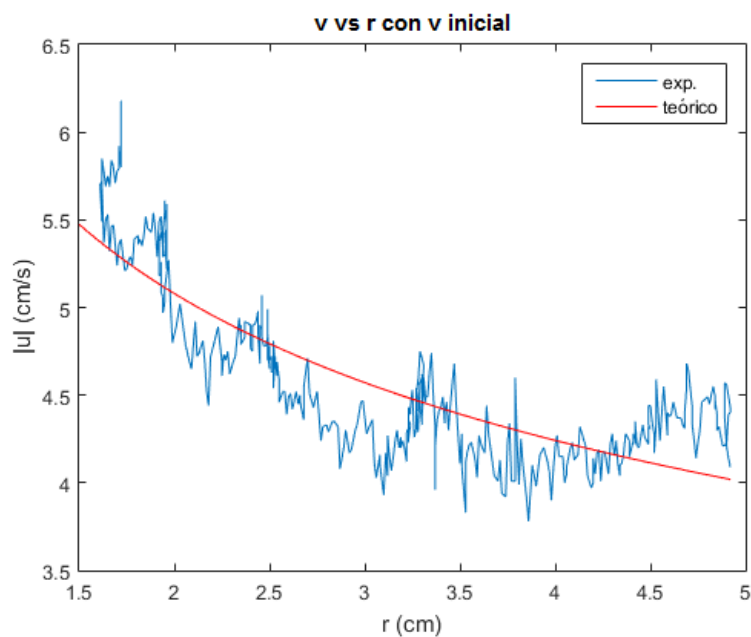


Figura 5 módulo de la velocidad respecto el radio

Si representamos la frecuencia angular respecto el tiempo y el radio vemos que como las ecuaciones (9) y (10) son proporcionales a r^{-1} y que la frecuencia angular está definida como $\omega = \frac{u}{r}$, donde u es el módulo de la velocidad total, vemos que entonces $\omega \propto 1/r^2$, hemos hecho un ajuste cuadrático por Matlab en la Figura 6 y vemos que se ajusta correctamente.

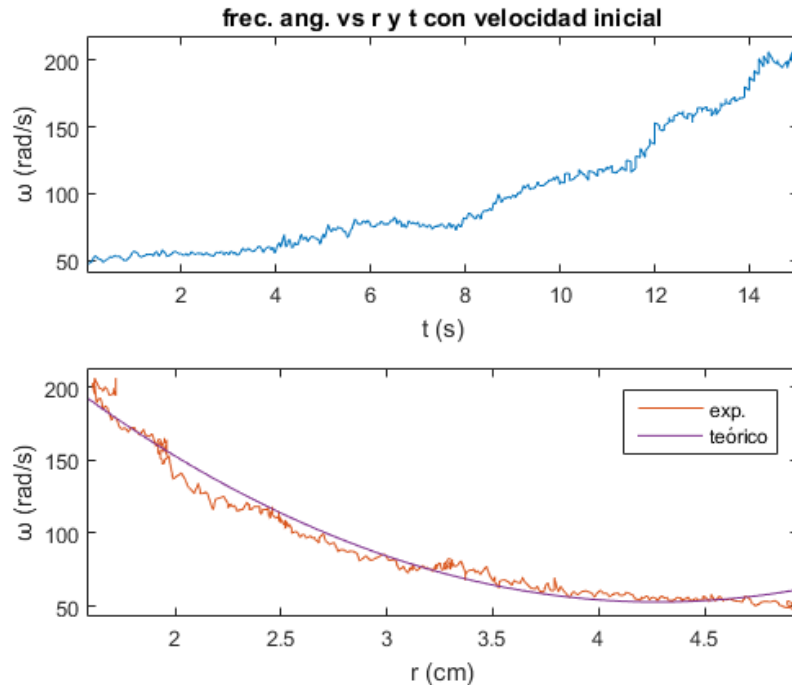


Figura 6 frecuencia angular respecto al tiempo y al radio

Conclusiones

Observamos que u_r es mucho menor que u_θ cuando aplicamos una velocidad angular inicial a nuestro fluido. A través de las graficas comprobamos que las ecuaciones para las velocidades radial y tangencial se ajustan correctamente al modelo teórico propuesto. Así mismo, podemos observar que difieren en términos generales pero la tendencia es la predicha. Esto puede achacarse a que en nuestro modelo teórico hemos omitido la fuerza de rozamiento, la cual es notable a lo largo de todo el experimento. Esto puede verse, por ejemplo, en el hecho de que la velocidad angular imprimida inicialmente decrece conforme avanza el tiempo.

Cuando nuestro fluido va desalojando el recipiente, evidentemente la altura del fluido va disminuyendo y no dispondremos de un flujo constante a lo largo de cada intento, como hemos supuesto en nuestro modelo. Así mismo, se observa que conforme disminuye el nivel del fluido, las componentes de la velocidad van disminuyendo, excepto en las proximidades del vórtice ya que el término r^{-1} cobra importancia.

También se puede comprobar, tomando distintos radios, pero misma altura de fluidos en los recipientes que la tensión superficial es mayor cuanto menos es el radio de nuestro recipiente.

Así mismo, hemos comprobado que modificando el radio de las aberturas por donde desaloja el fluido, cuanto mayor es el diámetro de la abertura, se crea un vórtice de mayor tamaño, siendo las componentes de la velocidad directamente proporcionales al tamaño de dicha abertura.

Por tanto, hemos concluido que nuestro experimento es mejorable en varias vertientes. Por un lado, un agitador magnético nos ayudaría a crear una velocidad angular fija y medible, y, consecuentemente, un flujo homogéneo, lo cual facilitaría comparar nuestras variables en función de la velocidad angular inicial imprimida pues nosotros no disponemos forma alguna de medirla ya que la generamos manualmente. Una superficie totalmente plana pues nuestro montaje era bastante rudimentario y no podíamos asegurar que nuestro recipiente no estuviese inclinado y eso producía que el vórtice se desplazase del centro.

Referencias

- Apuntes de Física de Fluidos de 2016
- Elementary Fluid Dynamics - D. J. Acheson
- Paper: 'The bathtub vortex in a rotating container' (A. Anderson & T. Bohr)
- Physical Fluid Dynamics - D. J. Triton