1 Jiles-Atherton-Modell

Das Jiles-Atherton-Modell ist ein physikalisch motiviertes Modell zur Beschreibung der Hysterese von magnetischen Materialien.

1.1 Konstituierende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
H_\mathrm{e} &= H + \alpha M && \text{Effektives Feld} && (1)\\
M_\mathrm{an} &= M_\mathrm{sat}\,\mathrm{L}\left(\frac{H_\mathrm{e}}{a}\right) && \text{Anhysterische Magnetisierung} && (2)\\
\frac{\mathrm{d}M_\mathrm{irr}}{\mathrm{d}H_\mathrm{e}} &= \frac{M_\mathrm{an} - M_\mathrm{irr}}{k\,\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)} && \text{Pinning} && (3)\\
M &= M_\mathrm{rev} + M_\mathrm{irr} && \text{Gesamte Magnetisierung} && (4)\\
M_\mathrm{rev} &= c(M_\mathrm{an} - M_\mathrm{irr}) && \text{Irreversible Magnetisierung} && (5)
\end{aligned}
$$

In diesen fünf Modellgleichungen kommen fünf Modellparameter vor:

α	Interdomänenkopplung
a	Domänenwanddichte
M_sat	Sättigungsmagnetisierung
k	Pinning-Energie
c	Magnetisierungsreversibilität

1.2 Herleitung der Differentiale

Ziel ist es nun, einen differentiellen Zusammenhang zwischen M und H zu finden. Dazu:

$$M \underset{(4)}{=} M_\mathrm{rev} + M_\mathrm{irr} \underset{(5)}{=} c(M_\mathrm{an} - M_\mathrm{irr}) + M_\mathrm{irr} = cM_\mathrm{an} + (1-c)M_\mathrm{irr}. \tag{6}$$

Es gilt also

$$\mathrm{d}M = (1-c)\,\mathrm{d}M_\mathrm{irr} + c\,\mathrm{d}M_\mathrm{an}, \tag{7}$$

weiterhin stimmt jeweils

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{irr}} = \frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{irr}}}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} \tag{8}$$

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{an}} = \frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{an}}}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} \tag{9}$$

$$\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} \underset{(1)}{=} \mathrm{d}H + \alpha\,\mathrm{d}M. \tag{10}$$

Man erhält nun für $\mathrm{d}M$ zusammengefasst:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M &\underset{(7)}{=} (1-c)\,\mathrm{d}M_{\mathrm{irr}} + c\,\mathrm{d}M_{\mathrm{an}}\\ &= (1-c)\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{irr}}}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} + c\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{an}}}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}H_{\mathrm{e}},\end{aligned} \tag{11}$$

in dieser Darstellung sind nun die aus den konstituierenden Gleichungen 2 und 3 leicht zugänglichen Größen $\mathrm{d}M_{\mathrm{irr}}/\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}$ und $\mathrm{d}M_{\mathrm{an}}/\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}$ enthalten.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}} = (1-c)\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{irr}}}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}} + c\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{an}}}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}} \tag{12}$$

Abhängig von der Formulierung des elektrodynamischen Problems können nun zwei verschiedene Formulierungen gewählt werden.

Formulierung mit H-Feld Soll das Problem abhängig vom H-Feld gewählt werden, formuliert man $\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}$ wie folgt

$$\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} \underset{(1)}{=} \mathrm{d}H + \alpha\,\mathrm{d}M, \tag{13}$$

also

$$\mathrm{d}M = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} \tag{14}$$

$$= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}\,(\mathrm{d}H + \alpha\,\mathrm{d}M) \tag{15}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H} = \frac{\mathrm{d}M/\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}}{1 - \alpha\,\mathrm{d}M/\mathrm{d}H_{\mathrm{e}}} \tag{16}$$

Formulierung mit B-Feld Bei der Formulierung mit der magnetischen Flussdichte formuliert man mit $B = \mu_0(H + M)$

$$\mathrm{d}H_{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{d}B}{\mu_0} - \mathrm{d}M + \alpha\,\mathrm{d}M \tag{17}$$

$$= \frac{\mathrm{d}B}{\mu_0} - (1-\alpha)\,\mathrm{d}M \tag{18}$$

Für $\mathrm{d}M/\mathrm{d}B$ erhält man nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H_\mathrm{e}}\,\mathrm{d}H_\mathrm{e} && (19)\\
&= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H_\mathrm{e}}\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mu_0} - (1-\alpha)\,\mathrm{d}M\right) && (20)\\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}B} &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}M/\mathrm{d}H_\mathrm{e}}{1+(1-\alpha)\,\mathrm{d}M/\mathrm{d}H_\mathrm{e}} && (21)
\end{aligned}$$