Fouriertransformation

Hintergrund, Beispiele und Anwendungen von Frequenzanalysen

Adrian Schrader

4. Dezember 2015

Zusammenfassung

In allen Wissenschaftsfeldern ist die Interferenz von Signalen ein Problem für Analytik und Verarbeitung. Die Fourieranalyse und ihre Varianten bilden bis heute ein mächtiges Werkzeug, um zeitabhängige Signale in ihr Frequenzsprektrum aufzuspalten und zu analysieren. Dieses Paper bietet ausführlichere Beschreibungen zu den Beispielen und mathematische Hintergründe zum Vortrag „Fourieranalyse - Hintergründe und Anwendungen von Frequenzanalysen“.

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Herleitung

1.1 Hintergrund

Eine Hauptcharakteristik aller Wellen ist ihre gegenseitige Interferenz. Verschiedene Frequenzen, die sich im gleichen Medium befinden, können sich überlagern und sich so zu komplexen Signalen zusammenfügen. Mathematisch wird die Interferenz durch die Summe zweier Funktionen beschrieben.

$$s_{ges}(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + ... \qquad (1.1.1)$$

Der französische Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier postulierte Anfang des 19. Jahrhunderts, dass sich alle Funktionen als Summe von Grund- und Oberschwingungen ausdrücken lassen sollten und entwarf eine Methode, die Amplituden der einzelnen Frequenzen zu berechnen.

Erst Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Bernhard Riemann formulieren Fouriers Vermutung konkret und konnten beweisen, dass seine trigonometrischen Reihen tatsächlich zur ursprünglichen Funktion konvergieren (Kon00).

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(x) e^{inx} \qquad (1.1.2)$$

$$f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{N\to\infty} f_N(x) \qquad (1.1.3)$$

1.2 Fourierreihe

Aus der Annahme, dass alle Funktionen als Summe von trigonometrischen Funktionen darstellbar sind, lässt sich eine allgemeine Darstellungsweise als Grundlage für die Herleitung aufstellen. Die in Gleichung 1.2.1 dargestellten Formen enthalten alle eine Möglichkeit der Phasenverschiebung untereinander durch Einbinden des Phasenwinkels φ_n oder durch die gegeneinander verschobenen Sinus- und Kosinusfunktionen. Hierdurch entstehen je zwei neue, von der Kreisfrequenz abhängige, Variablen. In 1.2.2 werden die Sinus- und Kosinusfunktionen durch die eulersche

Formel $e^{i\theta} = cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)$ zusammengefasst.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n cos(nx + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(nx) \tag{1.2.1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \tag{1.2.2}$$

Durch Ermitteln dieser amplitudenbeschreibenden Variable α_n lässt sich die Funktion mit der so genannten *Fourier-Synthese* neu zusammensetzen. Sie muss also den gleichen Informationsgehalt wie die Ursprungsfunktion $f(x)$ haben. Deshalb können wir Sie als Ergebnis der Transformation definieren.

$$f(t) = \sum_{\omega=0}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$$
$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) \tag{1.2.3}$$

1.3 Fourieranalyse

Der mathematisch weniger relevante, für die Physik jedoch umso bedeutendere Teil von Fouriers Entdeckung ist das Aufspalten eines Signals in die Amplituden seiner Frequenzen. Diese Zerlegung in die Harmonischen nennt sich *Fourieranalyse*.

Darstellung durch Hilberträume

Damit wir tatsächlich jede Funktionen als Summe von Vielfache von $sin(nx)$, $cos(nx)$ und 1, also unseren Funktionsbasen, ausdrücken zu können, brauchen wir eine allgemeine Schreibweise.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(nx) \tag{1.3.1}$$

Nun wird nur noch ein Operator gesucht, der auf die ursprüngliche Funktion und die gewünschte Funktionsbasis angewendet den jeweiligen Vorfaktoren zurückgibt. Am Beispiel der Sinusfunktion könnte das so aussehen wie in 1.3.2. Der erwartete Rückgabewert wäre in diesem Falle b_n.

$$\langle f(x), sin(nx)\rangle = \langle \frac{a_0}{2}, sin(nx)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle cos(nx), sin(nx)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \langle sin(nx), sin(nx)\rangle \tag{1.3.2}$$

Damit als Lösung nur noch b_n übrig bleibt, ergeben sich verschiedene Eigenschaften für den gewünschten Operator. Im Folgenden gilt $\{v, w, u \in \{sin(nx), cos(nx), 1\}\}$

1. **Linearität** Jeder Summand muss einzeln erfasst und der erwünschte Koeffizent ausgeklammert werden können. Es muss also gelten: $\langle \alpha \cdot v + \beta \cdot w, u\rangle = \alpha \cdot \langle v, u\rangle + \beta \cdot \langle w, u\rangle$
2. **Orthogonalität (Interfunktionell)** Damit die nicht relevanten Funktionsbasen ausgeblendet werden können, muss der Operator zwischen den unterschiedlichen Funktionsbasen null ergeben. Es gilt: $\langle v_i, u_j\rangle = 0$
3. **Orthogonalität (Intrafunktionell)** Der jeweilige Koeffizient gehört immer zu einer spezifischen Frequenz, die anderen Frequenzen sollen als Produkt null ergeben. Damit gilt die Orthogonalität für die gleiche Grundfunktion, wenn diese unterschiedliche Frequenzen darstellen: $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \,|\, i \neq j$
4. **Normierung** Der Operator zwischen zwei identischen Funktionen soll immer 1 ergeben, damit nur noch der ausgeklammerte Vorfaktor übrig bleibt. Es gilt: $\langle v_i, v_i\rangle = 1 \,|\, i = j$

In der Sprache der Mathematik würde man sagen, dass hier ein Hilbertraum aufgestellt wurde, der aus dreidimensionalen Vektoren besteht. Das Skalarprodukt (wir nannten es Operator) definiert den Vektorraum, indem er die Orthonormalbasen (wir nannten sie Funktionsbasen) festlegt und normiert. Auch ein Hilbertraum nutzt die oben angeführten Vorrausetzungen. (Hee98)

Durch die Symmetrieeigenschaften der Sinus und Kosinusfunktionen können wir versuchen ein Skalarprodukt mit genau diesen Eigenschaften zu finden.

$$sin(-k \cdot x) = -sin(k \cdot x) \tag{1.3.3}$$
$$cos(-k \cdot x) = cos(k \cdot x) \tag{1.3.4}$$

Die Mittelwertsfunktion über eine Periode ist das gesuchte Skalarprodukt. Der Flächeninhalt unter

$sin(kx)$ und $cos(kx)$ beträgt in einer Periode null, der Flächeninhalt unter den Quadraten der Funktionen ergibt π.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx \qquad (1.3.5)$$

Mit den eingesetzten Orthonormalbasen ergibt das Skalarprodukt die Transformation für die Fourierreihe. Der Orthonormalvektor 1 lässt sich als Spezialfall der Kosinusfunktion mit $cos(0) = 1$ ausdrücken.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot cos(n \cdot t)\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot sin(n \cdot t)\, dx \qquad (1.3.6)$$

Mit den anderen allgemeinen Darstellungsformen kann ebenso vorgegangen werden. Auch die komplexe Schreibweise teilt die Symmetrie und Integraleigenschaften, wie die trigonometrischen Funktionen. Damit gilt für die periodische Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt \qquad (1.3.7)$$

2 Diagramme und Darstellungsweisen

2.1 Phasenverschiebung und $\mathbb{C}$-Ebene

Die Phasenverschiebung des Frequenzspektrums ist bei der physikalischen Betrachtung nur in den wenigsten Fällen von Bedeutung. Der Hauptaugenmerk liegt auf der Verteilung der Amplituden. Durch geschickte Verschiebung kann das Spektrum auch so verändert werden, dass das Signal y-achsensymmetrisch oder punktsymmerisch zum Ursprung ist. In diesen Fällen besteht das Frequenzspektrum nur aus den Orthonormalbasen, die diese Eigenschaften teilen.

Deshalb behilft man sich für eine zweidimensionale Darstellung entweder mit zweifarbigen Diagrammen für $Re(\hat{f}(\omega))$ und $Im(\hat{f}(\omega))$ oder es wird nur der Betrag der Amplitude

$$|\hat{f}(\omega)| = \sqrt{Re(\hat{f}(\omega))^2 + Im(\hat{f}(\omega))^2}$$

aufgetragen.

2.2 Fast-Fourier-Transform

Als Integraltransformation ist die Fouriertransformation universell einsetzbar, jedoch nur für wenige, kontinuiertliche Funktionen analytisch berechenbar. Da in der technischen Anwendung hauptsächlich diskrete Signale analysiert werden sollen, die zeitnah benötigt werden, behilft man sich einer anderen Technik.

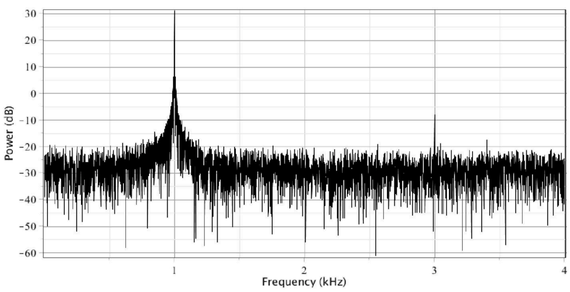

Abbildung 1: Frequenzspektrum ($|\hat{s}(2\pi f)|$) eines 1kHz-Signals mit Störgeräuschen. Der Leistungspegel stellt hierbei eine logarithmische Skalierung dar. Quelle: (`http://www.maplesoft.com/products/maple/features/Signal_Processing.aspx`, 21.11.15)

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) würde numerisch den Flächeninhalt für jede Oberschwingung berechnen, mit dem diskreten Zeitintervall multiplizieren und die Summe durch den Vorfaktor teilen.

Diese Methode ist jedoch sehr Zeitintensiv. Es gibt eine ganze Reihe von Algorithmen, die aus der DFT eine wörtlich „Schnelle-Fourier-Transformation ", im Englischen Fast-Fourier-Transform (FFT), vornehmen. Diese Algorithmen benötigen keine Großrechner mehr, sondern können sogar von leistungsschwachen Microprozessoren berechnet und analysiert werden. (Lan12)

2.3 Frequenzspektrum

Die grundlegendste Darstellungsform für eine Fouriertranformation ist das Frequenzspektrum einer Funktion. Aufgetragen wird dabei der Betrag der komplexen Amplitude gegenüber der Frequenz. Üblich ist es auch die y-Achse nicht linear in Metern zu zeichnen, sondern wie in Abbildung 1 logarithmisch in Dezibel anzugeben.

Der Leitungspegel $Q_{(P)}$ wird immer als Verhältnis zu einem Referenzwert P_{ref} angegeben.

$$Q_{(P)} = \log_{10} \frac{P}{P_{\text{ref}}} \text{B} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P}{P_{\text{ref}}} \text{dB} \qquad (2.3.1)$$

2.4 Spektrogramm

Insbesondere bei der Analyse von Musikinstrumenten ist nicht nur die Frequenzverteilung des ganzen Signals wichtig, sondern auch deren zeitlicher Verlauf. Indem man das Signal in kleinere Untereinheiten teilt (Die Anzahl der Messwerte pro Paket ist aus technischen Gründen für die FFT meist eine Potenz zur Basis 2) und einzeln analysiert. Diese Kaskade aus Freuqenzspektren lässt sich in einem Spektrogramm darstellen, indem auf der y-Achse die Frequenz udn auf der x-Achse der Zeitraum der Fouriertransformation aufgetragen wird. Die Amplitude wird durch, von Quelle zu Quelle unterschiedlichen, Farbverläufen dargestellt.

Für die Spektrogramme ergiebt sich immer eine Unschärfe zwischen Frequenz und Zeit. Je mehr Messpunkte für die einzelne Transformation herangezogen werden, desto höher ist die Frequenzauflösung. Die entstehende Transformation ist jedoch nicht mehr aussagekräftig für Momentaufnahmen der Zeit.

3 Anwendungen und Beispiele

3.1 Charakteristika eines Geigentons

Die naheliegendste Anwendung ist die Analyse des Schwingungsverhaltens von Musikinstrumenten, in unserem Falle einer Geige. Wenn der Bogen über die Saiten gezogen wird entsteht eine angeregt Schwingung auf der Saite. Der Steg am unteren Ende des Instrument und der Finger auf dem Griffbrett bilden zwei feste Enden, sodass sich eine stehende Welle auf der Saite ausbilden muss. Die Saitenlänge muss dabei ein Vielfaches der Wellenlänge sein.

$$l = \frac{k}{2}\lambda \qquad\qquad k \in \mathbb{N} \tag{3.1.1}$$

In Abbildung 2 ist das Spektrogramm einer Geige gezeigt. Die roten Frequenzstreifen entsprechen den erwarteten Grund- und Oberschwingungen. Da die Saite ständig von außen angeregt wird entsteht ein Dauerton. Fällt diese Anregung weg, wie im Bereich ab $t_1 = 1,25sec.$, dann klingt der Ton der Saite aus. Charakteristisch ist dabei vor allem, dass die Obertöne zuerst verschwinden.

Wird beim Spielen des Tons nicht die Spielweise des Vibrato verwendet, können sich nur stehende Wellen mit wenigen Oberschwingungen ausbilden. Der Ton klingt dann scharf und unharmonisch.

3.2 Quantenmechanik

Jeder Zustand der klassichen Mechanik kann durch Position und Impuls $\langle \vec{x}, \vec{p} \rangle$ eindeutig beschrieben werden. In der Quantenmechanik sind jedoch Position und Impuls unscharfe Größen. Daher wird ein Zustand durch die komplexe Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschrieben.

Um nun Informationen über den Zustand zu erhalten, werden lineare Differenzialoperatoren auf die Wellenfunktion angewendet. Damit der Impulsoperator

$$\hat{\mathbf{p}}\,\Psi(x) = -i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zurückgeben kann, muss die Wellenfunktion zuerst als Reihenentwicklung von Eigenfunktionen $\varphi(x)$ des Operators dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}\,\varphi(x) &= p \cdot \varphi(x) \\ -i\hbar\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= p \cdot \varphi(x) \\ \{\varphi(x) = e^{iKx} \text{ , wenn } p &= \hbar K\} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Da die Eigenfunktion des Impulsoperators die komplexe e-Funktion ist, beschreibt die Fouriertransformation eine Größe, die im Verhältnis zur Wahrscheinlichkeitsverteilung des Impulses ist. Jede Frequenz und jeder Summand steht für einen bestimmten Impuls $p = \hbar K$.

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(K) &= \mathcal{F}(\Psi)(K) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \cdot e^{-iKx}\,dx \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Die Amplitudenfunktion der kontinuierlichen Fouriertransformationen beschreibt dann die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls des Teilchens. Um also den Erwartungswert zu erhalten, integriert man die transformierte Funktion über das gewählte Frequenzband.

$$E = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Psi}(K)|^2\,dK \tag{3.2.3}$$

Literatur

[Hee98] Hees, Hendrik van: *Der Hilbertraum*. http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/quant/node8.html. Version: 1998. – abgerufen am 29.11.15

[Kon00] Konyagin, S V.: On everywhere divergence of trigonometric Fourier series. In: *Sbornik: Mathematics* 191 (2000), Nr. 1, 97. http://stacks.iop.org/1064-5616/191/i=1/a=A04

[Lan12] Lang, H.W.: *Schnelle Fouriertransformation (FFT)*. http://www.inf.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/fft/fft.htm. Version: 2012. – abgerufen am 29.11.15

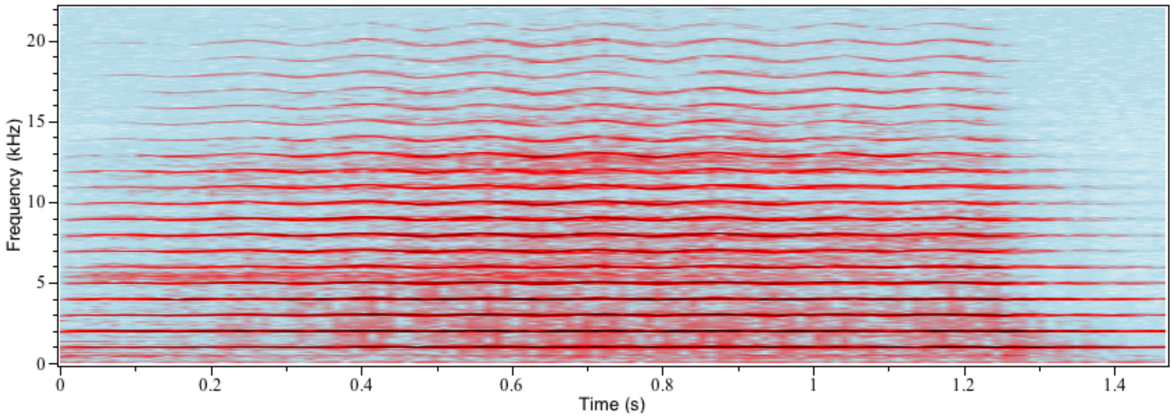

Abbildung 2: Spektrogramm eines Geigentons mit Vibrato. Quelle: (`http://www.maplesoft.com/products/maple/features/Signal_Processing.aspx`, 21.11.15)

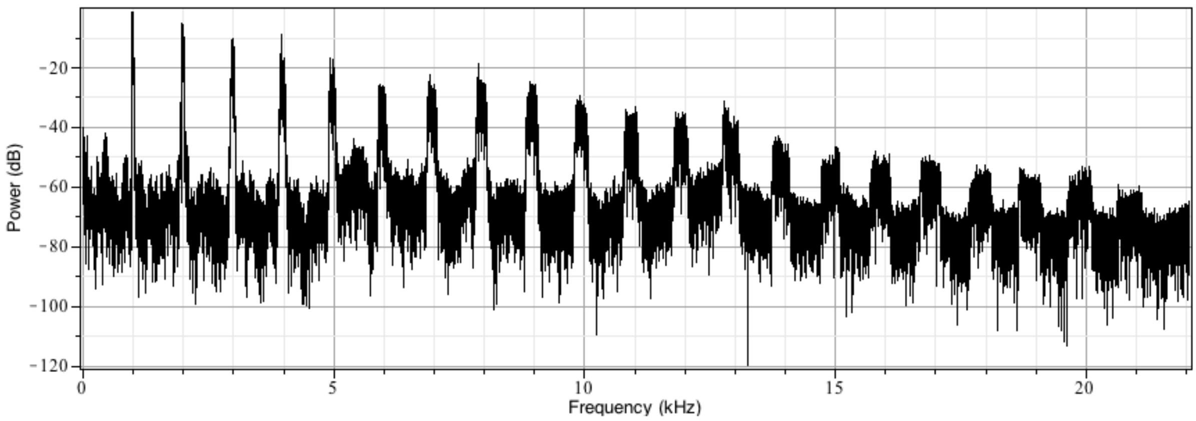

Abbildung 3: Frequenzspektrum eines Geigentons mit Vibrato. Quelle: (`http://www.maplesoft.com/products/maple/features/Signal_Processing.aspx`, 21.11.15)