Machine Learning

(Mesin Pembelajar)

Machine Learning

" … a computer program that can learn from *experience* with respect to some class of *tasks* and *performance* measure … "

(Mitchell, 1997)

" … the capacity of a computer to learn from *experience*, i.e. to *modify* its processing on the basis of newly acquired *information* … "

(Oxford English Dictionary, 1989)

Termasuk ML

- Artificial Neural Networks
- Boosting
- Hidden Markov Models
- Bayesian
- Regresi
- Support Vector Machines
- Decision Tree
- Dan lainnya

- Jika kita punya sehimpunan big data yang perlu model yang rumit, kerangka kerja Bayesian secara komputasi sangat mahal

- Apakah ada metode yang biasa yang lebih cepat tetapi bisa generalisasi dengan baik?

Support Vector Machine (SVM)

Pokok Pembahasan

1. Support Vector Machine (SVM)
   - ✓ Pengertian SVM
   - ✓ Model SVM
   - ✓ Visualisasi SVM
   - ✓ Karakteristik SVM
2. Case Study
3. Latihan Individu & Diskusi Kelompok

Support Vector Machine

- Konsep Klasifikasi dengan Support Vector Machine (SVM) adalah mencari hyperplane terbaik yang berfungsi sebagai pemisah dua kelas data.
- Ide sederhana dari SVM adalah memaksimalkan margin, yang merupakan jarak pemisah antara kelas data.
- SVM mampu bekerja pada dataset yang berdimensi tinggi dengan menggunakan kernel trik.
- SVM hanya menggunakan beberapa titik data terpilih yang berkontribusi (Support Vector) untuk membentuk model yang akan digunakan dalam proses klasifikasi.
- Macam-Macam Training untuk SVM :
  - Chunking (Quadratic Programming).
  - Osuna (Dekomposisi).
  - Sequential Minimum Optimation (SMO).
  - Least Square (LS) dan lainnya.

Model SVM

- Titik data : $x_i = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \in R^n$
- Kelas data : $y_i \in \{-1,+1\}$
- Pasangan data dan kelas : $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$
- Maksimalkan fungsi berikut :

$$Ld = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(x_i, x_j) \quad syarat \; : 0 \le \alpha_i \le C \quad dan \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0$$

- Hitung nilai w dan b :

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i x_i \qquad b = -\frac{1}{2}\left(w.x^{+} + w.x^{-}\right)$$

- Fungsi keputusan klasifikasi sign(f(x)) :

$$f(x) = w.x + b \qquad atau \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i K(x, x_i) + b$$

Keterangan :

N (banyaknya data), n (dimensi data atau banyaknya fitur), Ld (Dualitas Lagrange Multipier), α_i (nilai bobot setiap titik data), C (nilai konstanta), m (jumlah support vector/titik data yang memiliki $\alpha_i > 0$), K(x,x_i) (fungsi kernel).

Model SVM (Cont.)

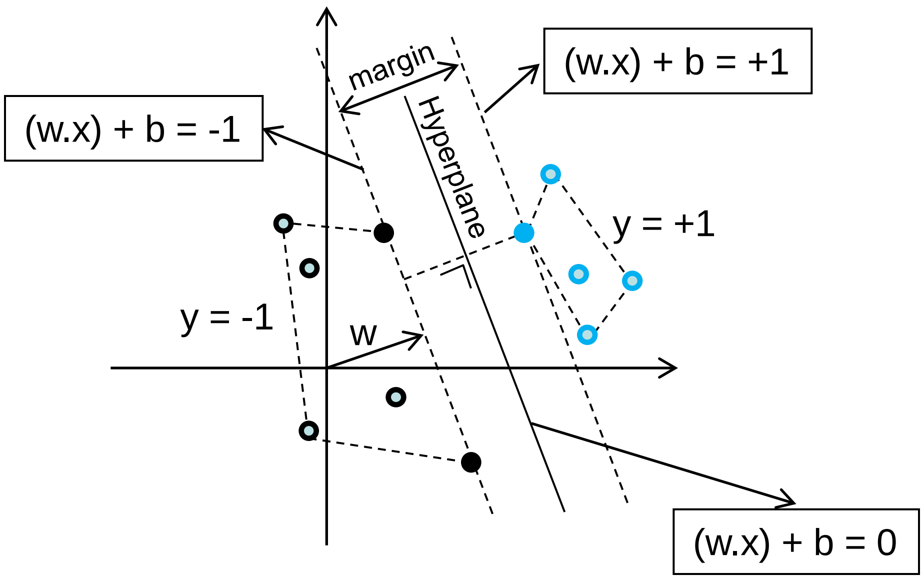
- Beberapa Macam Fungsi Kernel Support Vector Machine (SVM) :

No	Nama Kernel	Definisi Fungsi
1	Linier	K(x,y) = x.y
2	Polinomial of degree d	K(x,y) = $(x.y)^d$
3	Polinomial of degree up to d	K(x,y) = $(x.y + c)^d$
4	Gaussian RBF	K(x,y) = $\exp\left(\frac{-\|x-y\|^2}{2\sigma^2}\right)$
5	Sigmoid (Tangen Hiperbolik)	K(x,y) = $\tanh(\sigma(x.y)+c)$
6	Invers Multi Kuadratik	K(x,y) = $\frac{1}{\sqrt{\|x-y\|^2+c^2}}$
7	Additive	K(x,y) = $\sum_{i=1}^{n} K_i(xi, yi)$

- Kernel Linier digunakan ketika data yang akan diklasifikasi dapat terpisah dengan sebuah garis/hyperplane.
- Kernel non-Linier digunakan ketika data hanya dapat dipisahkan dengan garis lengkung atau sebuah bidang pada ruang dimensi tinggi (Kernel Trik, No.2 sampai 6).

Visualisasi SVM

- Linier Kernel :



$$\text{Margin} = \frac{2}{\|\mathrm{w}\|} = \frac{2}{\sqrt{w_1^{\ 2} + w_2^{\ 2}}}$$

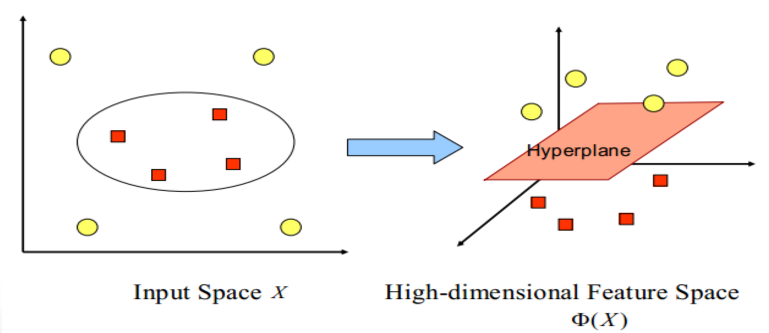
- Support Vector kelas -1
- Support Vector kelas +1

- Jarak titik (x_i) ke Hyperplane :

$$d\left((w,b),x_i\right) = \frac{\mathrm{y}_\mathrm{i}\left(x_i \bullet w + \mathrm{b}\right)}{\|\mathrm{w}\|} \geq \frac{1}{\|\mathrm{w}\|}$$

$$d\left((w,b),x_i\right) = \frac{\mathrm{y}_\mathrm{i}\, f\left(x_i\right)}{\|\mathrm{w}\|} \geq \frac{1}{\|\mathrm{w}\|}$$

- Non-Linier Kernel :



Memaksimumkan margin

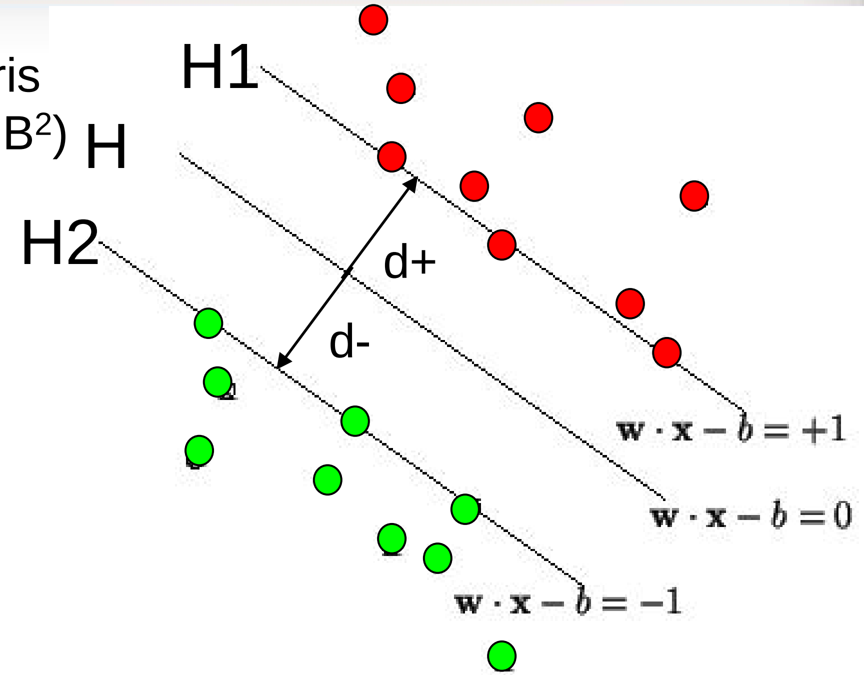
Rumus jarak dari titik T (x_1, y_1) ke garis ax + by + c = 0 adalah :

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Recall: jarak dari suatu titik (x_0,y_0) ke suatu garis Ax+By+c = 0 adalah d= $|A x_0 + B y_0 + c|/\mathrm{sqrt}(A^2+B^2)$

Jarak antara H and H1 adalah: $|\mathbf{w}\bullet\mathbf{x}+b|/||w||=1/||w||$

Jarak antara H1 dan H2 adalah : $2/||w||$



Untuk maximumkan margin, diperlukan cara ||w||, dengan syarat tidak ada titik-titik data antara H1 and H2:

$\mathbf{x}_i\bullet\mathbf{w}+b \geq +1$ when $y_i = +1$

$\mathbf{x}_i\bullet\mathbf{w}+b \leq -1$ when $y_i = -1$

Can be combined into $y_i(x_i\bullet w) \geq 1$

Karakteristik SVM

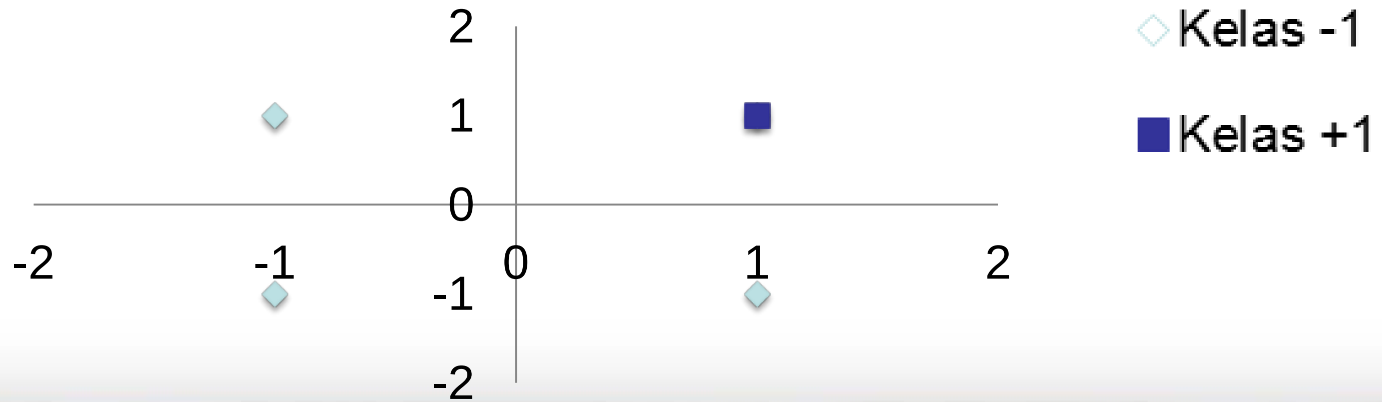
- Karakteristik SVM :
  - SVM memerlukan proses pelatihan dengan menyimpan hasil support vektor yang didapatkan untuk digunakan kembali pada saat proses prediksi/testing.
  - SVM selalu memberikan model yang sama dan solusi yang sama dengan margin maksimal.
  - SVM dapat memisahkan data yang distribusi kelasnya bersifat linier maupun non linier.
  - SVM tidak dipengaruhi oleh dimensi data yang tinggi, sehingga tidak ada proses reduksi dimensi didalamnya.
  - Memori yang digunakan dalam SVM dipengaruhi oleh banyaknya data, bukan besarnya dimensi data.

Contoh Studi Kasus

- Contoh SVM Linier pada dataset berikut :
  Tentukan Hyperplanenya !

x_1	x_2	Kelas (y)	Support Vector (SV)
1	1	1	1
1	-1	-1	1
-1	1	-1	1
-1	-1	-1	0

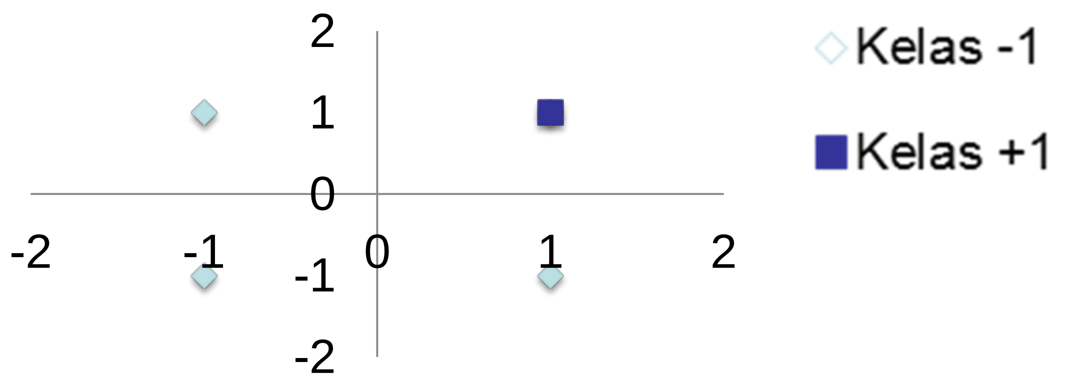
- Bentuk Visualisasi data :



Contoh Studi Kasus 1 (Cont.)

- Contoh SVM Linier :

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1



– Karena ada dua fitur (x_1 dan x_2), maka w juga akan memiliki 2 fitur (w_1 dan w_2).
– Formulasi yang digunakan adalah sebagai berikut :
  - Meminimalkan nilai :

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}({w_1}^2 + {w_2}^2)$$

  - Syarat :

$$y_i(w.x_i + b) \geq 1, \qquad i = 1,2,3, \ldots\ldots, N$$

Contoh Studi Kasus 1 (Cont.)

- Karena ada dua fitur (x_1 dan x_2), maka w juga akan memiliki 2 fitur (w_1 dan w_2).
- Formulasi yang digunakan adalah sebagai berikut :
  - Meminimalkan nilai margin :

$$\frac{1}{2}||w||^2 = \frac{1}{2}({w_1}^2 + {w_2}^2)$$

  - Syarat :

$$y_i(w.x_i + b) \geq 1, \qquad i = 1,2,3,\ldots\ldots,N$$
$$y_i(w_1.x_1 + w_2.x_2 + b) \geq 1$$

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

Sehingga didapatkan beberapa persamaan berikut :

1. $(w_1 + w_2 + b) \geq 1, \quad untuk\ y_1 = 1, x_1 = 1, x_2 = 1$
2. $(-w_1 + w_2 - b) \geq 1, \quad untuk\ y_2 = -1, x_1 = 1, x_2 = -1$
3. $(w_1 - w_2 - b) \geq 1, \quad untuk\ y_3 = -1, x_1 = -1, x_2 = 1$
4. $(w_1 + w_2 - b) \geq 1, \quad untuk\ y_4 = -1, x_1 = -1, x_2 = -1$

Contoh Studi Kasus 1 (Cont.)

Didapatkan beberapa persamaan berikut :

1. $(w_1 + w_2 + b) \geq 1$
2. $(-w_1 + w_2 - b) \geq 1$
3. $(w_1 - w_2 - b) \geq 1$
4. $(w_1 + w_2 - b) \geq 1$

- Menjumlahkan persamaan (1) dan (2) :

$$(w_1 + w_2 + b) \geq 1$$
$$(-w_1 + w_2 - b) \geq 1$$

--------------------------------- +

$2w_2 = 2$

Maka $w_2 = 1$

- Menjumlahkan persamaan (1) dan (3) :

$$(w_1 + w_2 + b) \geq 1$$
$$(w_1 - w_2 - b) \geq 1$$

----------------------------- +

$2w_1 = 2$

Maka $w_1 = 1$

- Menjumlahkan persamaan (2) dan (3) :

$$(-w_1 + w_2 - b) \geq 1$$
$$(w_1 - w_2 - b) \geq 1$$

------------------------------ +

$-2b = 2$

Maka $b = -1$

Sehingga didapatkan persamaan hyperplane :

$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$

$x_1 + x_2 - 1 = 0$

$x_2 = 1 - x_1$

Contoh Studi Kasus 1 (Cont.)

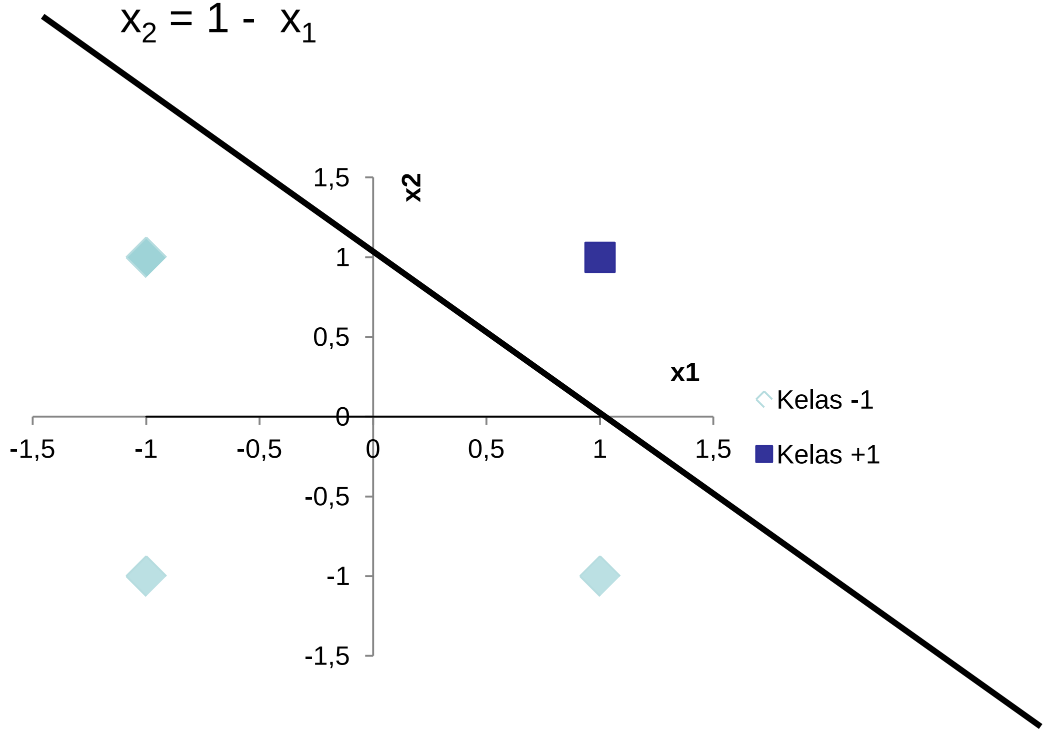
Visualisasi garis hyperplane (sebagai fungsi klasifikasi) :

$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$

$x_1 + x_2 - 1 = 0$

$x_2 = 1 - x_1$

x_1	$x_2 = 1 - x_1$
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1



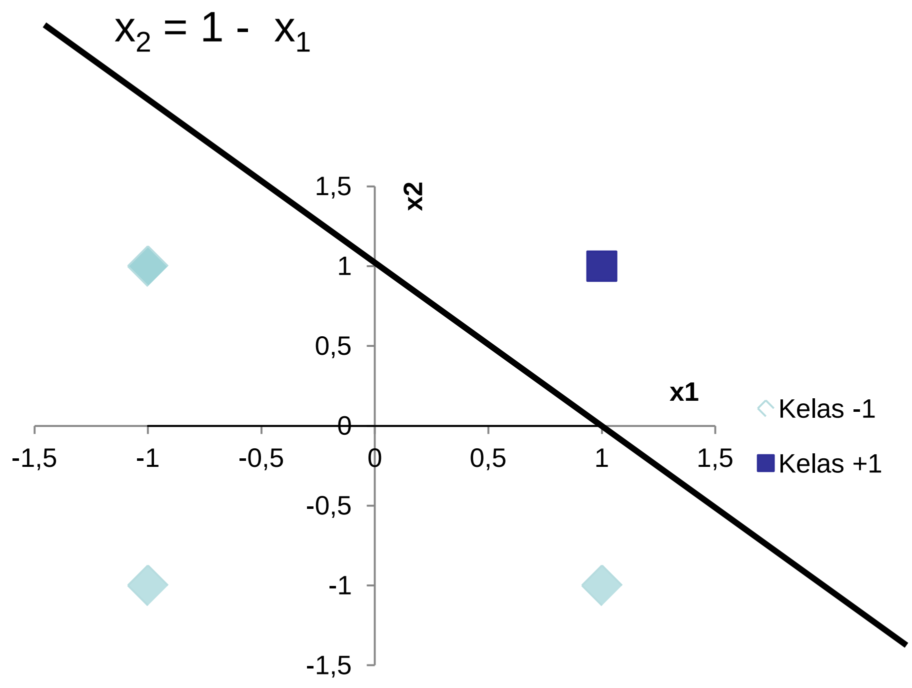
Contoh Studi Kasus 1 (Cont.)

Misalkan diketahui data uji/ data testing berikut :

Diketahui : $f(x) = x_1 + x_2 - 1$

Kelas = sign(f(x))

No	Data Uji		Hasil Klasifikasi
	x_1	x_2	Kelas = sign($x_1 + x_2$ - 1)
1	1	5	sign (1 + 5 - 1) = +1
2	-1	4	sign (-1 + 4 - 1) = +1
3	0	7	sign (0 + 7 - 1) = +1
4	-9	0	sign (-9 + 0 - 1) = -1
5	2	-2	sign (2 - 2 - 1) = -1

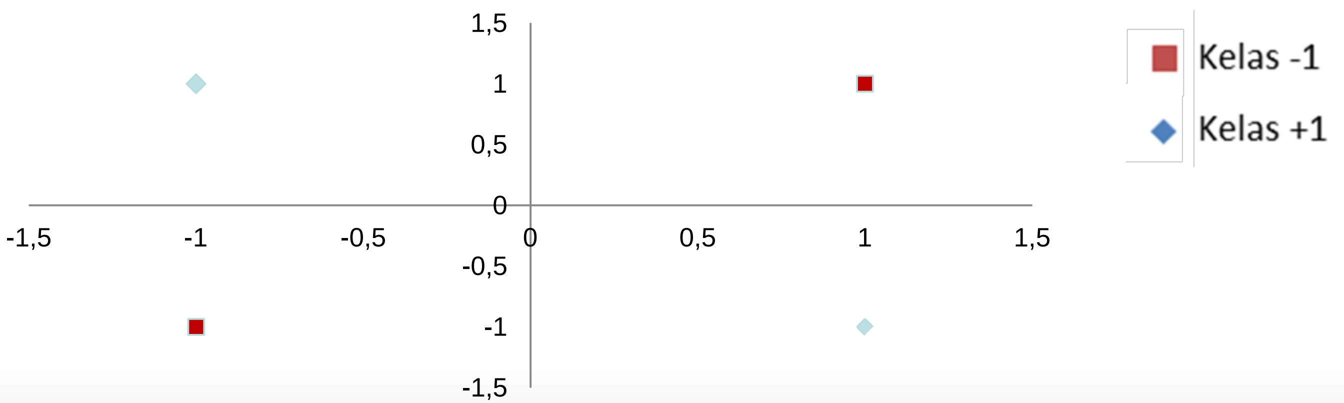


Contoh Studi Kasus 2

- Contoh SVM Non Linier pada dataset berikut :

x_1	x_2	Kelas (y)	Support Vector (SP)
1	1	-1	1
1	-1	1	1
-1	1	1	1
-1	-1	-1	1

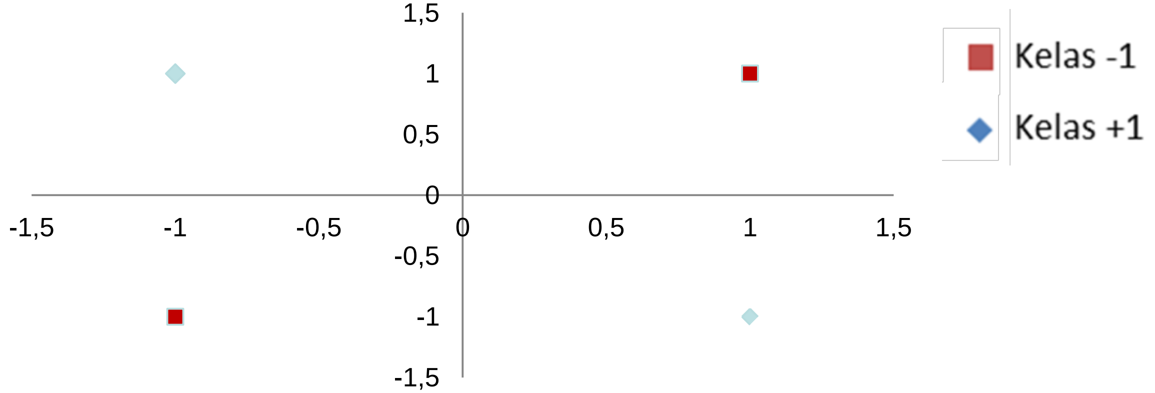
- Bentuk Visualisasi data :



Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

- Contoh SVM Non Linier :

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1



  – Karena ada dua fitur (x_1 dan x_2), dan kelompok datanya tidak linear, maka digunakan fungsi kernel. Misal menggunakan fungsi kernel polynomial ordo 2, yaitu :
  $K(x,y) = (x.y + c)^d$ dengan c = 1 dan d = 2.
  – Fungsi kernel dituliskan kembali menjadi berikut :
  $K(x,x_i) = (x^T.x_i + 1)^2$ dengan $w = \sum_{i=1..N} \alpha_i y_i \phi(x_i)$
  – Menghitung matrik kernel K :
  $K(x,x_i) = \Phi(x).\Phi(x_i)$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

- Fungsi kernel dituliskan kembali menjadi berikut :
  $K(x,x_i) = (x^T.x_i + 1)^2$ dengan $w = \sum_{i=1..N} \alpha_i y_i \phi(x_i)$
- Menghitung matrik kernel **$K(x,x_i) = \Phi(x).\Phi(x_i)$**
- Misal, Menghitung K(u,z) : dengan u=(1,1) dan z=(1,-1)

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

$k(u=(1,1),z=(1,-1)) = (((u_1.z_1)+(u_2.z_2))+1)^2 = ((u_1.z_1)+(u_2.z_2))^2+2((u_1.z_1)+(u_2.z_2)).1 + 1^2$

$= (u_1.z_1)^2 + 2(u_1.z_1)(u_2.z_2) + (u_2.z_2)^2 + 2(u_1.z_1) + 2(u_2.z_2) + 1$

$$= \begin{pmatrix} u_1{}^2 \\ \sqrt{2}u_1u_2 \\ u_2{}^2 \\ \sqrt{2}u_1 \\ \sqrt{2}u_2 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1{}^2 \\ \sqrt{2}z_1z_2 \\ z_2{}^2 \\ \sqrt{2}z_1 \\ \sqrt{2}z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \phi(u).\phi(z)$$

$$= u_1{}^2z_1{}^2 + 2u_1u_2z_1z_2 + u_2{}^2z_2{}^2 + 2u_1z_1 + 2u_2z_2 + 1$$

$$= (u_1z_1)^2 + 2(u_1z_1)(u_2z_2) + (u_2z_2)^2 + 2(u_1z_1) + 2(u_2z_2) + 1$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

- Fungsi kernel dituliskan kembali menjadi berikut :
  $K(x,x_i) = (x^T.x_i + 1)^2$ dengan $w = \sum_{i=1..N} \alpha_i y_i \phi(x_i)$
- Menghitung matrik kernel **$K(x,x_i) = \Phi(x).\Phi(x_i)$**
- Misal, Menghitung K(u,z) : dengan u=(1,1) dan z=(1,-1)

$k(u=(1,1),z=(1,-1)) = (((u_1.z_1)+(u_2.z_2))+1)^2 = ((u_1.z_1)+(u_2.z_2))^2+2((u_1.z_1)+(u_2.z_2)).1 + 1^2$

$= (u_1.z_1)^2 + 2(u_1.z_1)(u_2.z_2) + (u_2.z_2)^2 + 2(u_1.z_1) + 2(u_2.z_2) + 1$

$$= \begin{pmatrix} u_1^2 \\ \sqrt{2}u_1u_2 \\ u_2^2 \\ \sqrt{2}u_1 \\ \sqrt{2}u_2 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1^2 \\ \sqrt{2}z_1z_2 \\ z_2^2 \\ \sqrt{2}z_1 \\ \sqrt{2}z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \phi(u).\phi(z)$$

$$= u_1^2 z_1^2 + 2u_1u_2z_1z_2 + u_2^2 z_2^2 + 2u_1z_1 + 2u_2z_2 + 1$$

$$= (u_1z_1)^2 + 2(u_1z_1)(u_2z_2) + (u_2z_2)^2 + 2(u_1z_1) + 2(u_2z_2) + 1$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

– Misal, Menghitung K(u,z) : dengan u=(1,1) dan z=(1,-1)

k(u=(1,1),z=(1,-1)) = (((1.1)+(1.(-1)))+1)^2 = ((1.1)+(1.(-1)))^2+2((1.1)+(1.(-1))).1 + 1^2

= (1.1)^2 + 2(1.1)(1.(-1)) + (1.(-1))^2 + 2(1.1) + 2(1.(-1)) + 1

= 1 - 2 + 1 + 2 - 2 + 1 = 1

$$
= \begin{pmatrix} u_1^{\ 2} \\ \sqrt{2}u_1u_2 \\ u_2^{\ 2} \\ \sqrt{2}u_1 \\ \sqrt{2}u_2 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1^{\ 2} \\ \sqrt{2}z_1z_2 \\ z_2^{\ 2} \\ \sqrt{2}z_1 \\ \sqrt{2}z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 \\ \sqrt{2}.1.1 \\ 1^2 \\ \sqrt{2}.1 \\ \sqrt{2}.1 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1^2 \\ \sqrt{2}.1.(-1) \\ (-1)^2 \\ \sqrt{2}.1 \\ \sqrt{2}.(-1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 1 + 2 - 2 + 1 = 1
$$

$$
= \phi(u).\phi(z)
$$

$$
= u_1^{\ 2}z_1^{\ 2} + 2u_1u_2z_1z_2 + u_2^{\ 2}z_2^{\ 2} + 2u_1z_1 + 2u_2z_2 + 1
$$

$$
= (u_1z_1)^2 + 2(u_1z_1)(u_2z_2) + (u_2z_2)^2 + 2(u_1z_1) + 2(u_2z_2) + 1
$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

– Menghitung matrik kernel **$K(x,x_i) = \Phi(x).\Phi(x_i)$**

x_1	x_1	$K(1,1) = (x_1.x_1 + 1)^2 = (1.1 + 1.1 + 1)^2 = 3^2 = 9$
	x_2	$K(1,2) = (x_1.x_2 + 1)^2 = (1.1 + 1.(-1) + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_3	$K(1,3) = (x_1.x_3 + 1)^2 = (1.(-1) + 1.1 + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_4	$K(1,4) = (x_1.x_4 + 1)^2 = (1.(-1) + 1.(-1) + 1)^2 = (-1)^2 = 1$
x_2	x_1	$K(2,1) = (x_2.x_1 + 1)^2 = (1.1 + (-1).1 + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_2	$K(2,2) = (x_2.x_2 + 1)^2 = (1.1 + (-1).(-1) + 1)^2 = 3^2 = 9$
	x_3	$K(2,3) = (x_2.x_3 + 1)^2 = (1.(-1) + (-1).1 + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_4	$K(2,4) = (x_2.x_4 + 1)^2 = (1.(-1) + (-1).(-1) + 1)^2 = 1^2 = 1$
X_3	x_1	$K(3,1) = (x_3.x_1 + 1)^2 = ((-1).1 + 1.1 + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_2	$K(3,2) = (x_3.x_2 + 1)^2 = ((-1).1 + 1.(-1) + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_3	$K(3,3) = (x_3.x_3 + 1)^2 = ((-1).(-1) + 1.1 + 1)^2 = 3^2 = 9$
	x_4	$K(3,4) = (x_3.x_4 + 1)^2 = ((-1).(-1) + 1.(-1) + 1)^2 = 1^2 = 1$
x_4	x_1	$K(4,1) = (x_4.x_1 + 1)^2 = ((-1).1 + (-1).1 + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_2	$K(4,2) = (x_4.x_2 + 1)^2 = ((-1).1 + (-1).(-1) + 1)^2 = 1^2 = 1$
	x_3	$K(4,3) = (x_4.x_3 + 1)^2 = ((-1).(-1) + (-1).1 + 1)^2 = 1^2 = 1$
	X_4	$K(4,4) = (x_4.x_4 + 1)^2 = ((-1).(-1) + (-1).(-1) + 1)^2 = 3^2 = 9$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

– Didapatkan matrik kernel K dengan ukuran N x N :

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

K(x,x$_i$) =

9	1	1	1
1	9	1	1
1	1	9	1
1	1	1	9

– Setiap elemen matrik kernel K(x,x$_i$) digunakan untuk menggantikan dot-product $\mathbf{x_i.x_j}$ dalam persamaan dualitas Lagrange Multiplier.

- Maksimalkan Ld :

$$\text{Ld} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i . x_j)$$

$$\text{Ld} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9\alpha_1\alpha_1 - 1\alpha_1\alpha_2 - 1\alpha_1\alpha_3 + 1\alpha_1\alpha_4 \; - \\ 1\alpha_2\alpha_1 + 9\alpha_2\alpha_2 + 1\alpha_2\alpha_3 - 1\alpha_2\alpha_4 \; - \\ 1\alpha_3\alpha_1 + 1\alpha_3\alpha_2 + 9\alpha_3\alpha_3 - 1\alpha_3\alpha_4 \; + \\ 1\alpha_4\alpha_1 - 1\alpha_4\alpha_2 - 1\alpha_4\alpha_3 + 9\alpha_4\alpha_4 \end{pmatrix}$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

- Setiap elemen matrik kernel $K(x,x_j)$ digunakan untuk menggantikan dot-product $\mathbf{x_i.x_j}$ dalam persamaan dualitas Lagrange Multiplier.
  - Maksimalkan Ld :

$$\mathrm{Ld} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9\alpha_1{}^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_4 \ + \\ 9\alpha_2\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4 \ + \\ 9\alpha_3{}^2 - 2\alpha_3\alpha_4 \ + 9\alpha_4{}^2 \end{pmatrix}$$

$$Syarat\ : 0 \le \alpha_i \le C \ \ dan \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0$$

Syarat 1 : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ge 0$

Syarat 2 : $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$

(*Note* : Untuk hasil optimal Ld, gunakan koding)

- Misalkan didapatkan nilai Max Ld dengan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.125$. Sehingga nilai Ld = 0.25.
- Hitung nilai w dan b : $X_i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}, \ \ jika \ \ X_1 \, adalah \ data \ ke-1,$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \phi(X_i) = \left(\mathrm{x}_1^{i\,2} \quad \sqrt{2}\mathrm{x}_1^i\mathrm{x}_2^i \quad \mathrm{x}_2^{i\,2} \quad \sqrt{2}\mathrm{x}_1^i \quad \sqrt{2}\mathrm{x}_2^i \quad 1\right)^T$$

dimana x_1^i adalah nilai pada dimensi ke-1 pada data ke-i.

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

- Hitung nilai w dan b : $X_i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}$, $jika\ \ X_1\ adalah\ data\ ke-1,$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \phi(X_i) = \left(\mathrm{x}_1^{i\ 2} \quad \sqrt{2}\mathrm{x}_1^i\mathrm{x}_2^i \quad \mathrm{x}_2^{i\ 2} \quad \sqrt{2}\mathrm{x}_1^i \quad \sqrt{2}\mathrm{x}_2^i \quad 1\right)^T$$

dimana x_1^i adalah nilai pada dimensi ke-1 pada data ke-i.

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \phi(X_i)$$

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \phi(X_i) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i y_i \phi(X_i) = \alpha_1 y_1 \phi(X_1) + \alpha_2 y_2 \phi(X_2) + \alpha_3 y_3 \phi(X_3) + \alpha_4 y_4 \phi(X_4)$$

$$w = -0.125 \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1^{1\ 2} = 1^2 = 1 \\ \sqrt{2}\mathrm{x}_1^1\mathrm{x}_2^1 = \sqrt{2}(1)(1) = \sqrt{2} \\ \mathrm{x}_2^{1\ 2} = 1^2 = 1 \\ \sqrt{2}\mathrm{x}_1^1 = \sqrt{2}(1) = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\mathrm{x}_2^1 = \sqrt{2}(1) = \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 0.125 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 0.125 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - 0.125 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

- Misalkan didapatkan nilai Max Ld dengan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.125$. Sehingga nilai Ld = 0.25.
- Hitung nilai w dan b :

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \phi(X_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pilih salah satu Support Vector dari Kelas “+1” dan “-1” untuk menghitung nilai b.

$$b = -\frac{1}{2}\left(w.x^{+} + w.x^{-}\right) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

- Misalkan didapatkan nilai Max Ld dengan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.125$. Sehingga nilai Ld = 0.25.
- Hitung nilai w dan b :

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

Pilih salah satu Support Vector dari Kelas "+1" dan "-1" untuk menghitung nilai b.

$$b = -\frac{1}{2}\left(w.x^{+} + w.x^{-}\right) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$b = -\frac{1}{2}\left((-0.71)\left(-\sqrt{2}\right) + (-0.71)\left(\sqrt{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left((-0.71)\left(-\sqrt{2}\right) + (-0.71)\left(\sqrt{2}\right)\right) = 0$$

Contoh Studi Kasus 2 (Cont.)

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

– Setelah didapatkan nilai w dan b :

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} & w.\phi(x_t) + b = w.\phi(x_t) + 0 \\ & = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \phi(x_i).\phi(x_t) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i y_i K(x_i, x_t) \end{aligned}}$$

Maka model SVM siap digunakan untuk proses klasifikasi.

$$f(\phi(x)) = sign(w.\phi(x) + b) = sign\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \phi(x_i).\phi(x) + b\right)$$

Misalkan data uji/ data test x_t = (1,5) maka **$K(x_i,x_t) = \Phi(x_i).\Phi(x_t)$**

x_t=(1,5)	x_1	$K(1,t) = (x_1.x_t + 1)^2 = (1.1 + 5.1 + 1)^2 = 7^2 = 49$	(-0.125)(49)
	x_2	$K(2,t) = (x_2.x_t + 1)^2 = (1.1 + 5.(-1) + 1)^2 = 3^2 = 9$	(0.125)(9)
	x_3	$K(3,t) = (x_3.x_t + 1)^2 = (1.(-1) + 5.1 + 1)^2 = 5^2 = 25$	(0.125)(25)
	x_4	$K(4,t) = (x_4.x_t + 1)^2 = (1.(-1) + 5.(-1) + 1)^2 = (-5)^2 = 25$	(-0.125)(25)

+

-5

$$f(\phi(x_t)) = sign(w.\phi((1,5)) + b) = sign(-6.125 + 1.125 + 3.125 - 3.125 + 0) = sign(-5) \Rightarrow -1$$

Jadi data x_t = (1,5) tersebut masuk ke kelas negatif.

Latihan Individu

1. Perhatikan dataset SVM Linier berikut :

x_1	x_2	Kelas (y)	Support Vector (SV)
1	1	+1	1
1	-1	-1	1
0	2	-1	1
-1	-1	-1	0

dataset 1

x_1	x_2	Kelas (y)	SV1	SV2
2	3	-1	1	0
3	4	-1	1	1
5	2	+1	1	1
6	3	+1	0	0

dataset 2

Tentukan Visualisasi Hyperplane masing-masing dataset di atas !

2. Perhatikan dataset SVM non-Linier berikut :

x_1	x_2	Kelas (y)	SV
0.5	0	-1	1
1	-1	+1	1
-1	1	+1	1
-0.5	-0.5	-1	1

Tentukan persamaan Hyperplanenya, lalu uji kelas data $x_t = (1,1)$!

Terima kasih