Testes de Hipóteses

Uma **hipótese estatística** é uma suposição sobre determinado parâmetro da população, como média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, etc. Um **teste de hipótese** é um procedimento para decisão sobre a veracidade ou falsidade de determinada hipótese. Para que uma hipótese estatística seja validada ou rejeitada com certeza, seria necessário examinarmos toda a população, o que na prática é inviável. Como alternativa, extraímos uma amostra aleatória da população de interesse. Como a decisão é tomada com base na amostra, podem ocorrer erros (rejeitar uma hipótese quando ela for verdadeira ou não rejeitar uma hipótese quando ela for falsa), como será visto mais adiante.

O procedimento e os conceitos necessários para a construção de um teste de hipótese serão apresentados a seguir. Vamos considerar X uma variável aleatória associada a uma população e θ determinado parâmetro dessa população.

Devemos definir a hipótese a ser testada sobre o parâmetro θ dessa população, que é chamada de hipótese nula:

$$\mathbf{H_0 : \theta = \theta_0}$$

Definiremos também a hipótese alternativa (H_1), caso H_0 seja rejeitada, que pode ser caracterizada da seguinte forma:

$$\mathbf{H_1 : \theta \neq \theta_0}$$

e o teste é chamado de **teste bilateral (ou bicaudal).**

O **nível de significância** (α) de um teste representa a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela for verdadeira (é um dos dois tipos de erros que podem ocorrer, conforme veremos a seguir). A região crítica (RC) de um teste bilateral é representada por duas caudas de tamanhos iguais, respectivamente ria extremidade esquerda e direita da curva de distribuição, e cada uma delas corresponde à metade do nível de significância a, conforme mostra a Figura 1 abaixo

RC

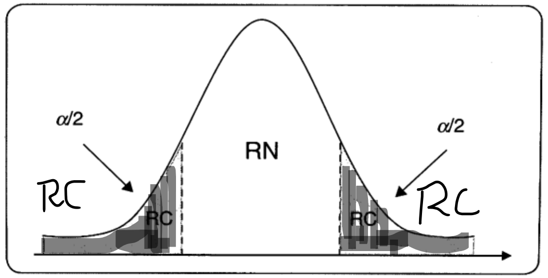


Figura 1. Região crítica (RC) de um teste bilateral, com destaque também para a região de não rejeição da hipótese nula (RN)

Outra forma de definir a hipótese alternativa (H_1) seria:

$$H_1: \theta < \theta_0$$

e o teste é chamado **unilateral** (ou unicaudal) **à esquerda**.

Nesse caso, a região crítica está na cauda esquerda da distribuição e corresponde ao nível de significância α, como mostra a Figura 2.

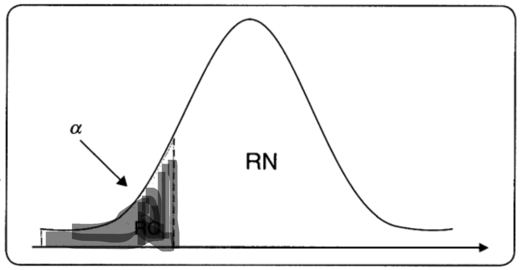


Figura 2 Região crítica (RC) de um teste unilateral à esquerda, com destaque também para a região de não rejeição da hipótese nula (RN).

Nesse caso, a região crítica está na cauda esquerda da distribuição e corresponde ao nível de significância α, como mostra a Figura 2.

Ou ainda, a hipótese alternativa poderia ser:

$$H_1: \theta > \theta_0$$

e o teste é chamado **unilateral** (ou unicaudal) **à direta**. Nesse caso, a região crítica está na cauda direita da distribuição e corresponde ao nível de significância a, como mostra a Figura .3.

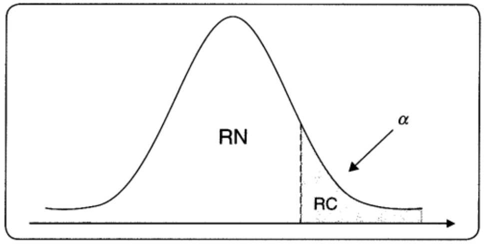


Figura 3 Região crítica (RC) de um teste unilateral à direita, com destaque também para a região de não rejeição da hipótese nula (RN).

Definida a hipótese nula a ser testada, por meio de uma amostra aleatória coletada na população, comprovamos ou não tal hipótese. Como a decisão é tomada com base na amostra, dois tipos de erros podem ocorrer:

Erro do tipo I: rejeitar a hipótese nula quando ela for verdadeira. A probabilidade desse tipo de erro é representada por α:

$$P(\text{ erro do tipo 1}) = P(\text{rejeitar } \mathbf{H_0} \mid \mathbf{H_0} \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

Erro do tipo II: não rejeitar a hipótese nula quando ela for falsa.A probabilidade desse tipo de erro é representada por β:

$$P(\text{erro do tipo II}) = P(\text{não rejeitar } \mathbf{H_0} \mid \mathbf{H_0} \text{ é falsa}) = \beta$$

O Quadro abaixo apresenta os tipos de erros que podem ocorrer em um teste de hipótese.

Quadro 2 Tipos de Erro

Decisão	$\mathbf{H_0}$ é verdadeira	$\mathbf{H_0}$ é falsa
não rejeitar $\mathbf{H_0}$	Decisão correta (1-α)	Erro do tipo II (α)
rejeitar $\mathbf{H_0}$	Erro do tipo I (α)	Decisão correta (1-α)

O procedimento para a construção dos testes de hipóteses envolve as seguintes etapas:

Passo 1: Escolher o teste estatístico adequado, dado o intuito do pesquisador.

Passo 2: Apresentar a hipótese nula $\mathbf{H_0}$ e a hipótese alternativa $\mathbf{H_1}$ do teste.

Passo 3: Fixar o nível de significância α.

Passo 4: Calcular o valor observado da estatística do teste com base na amostra extraída da população.

Passo 5: Determinar a região crítica do teste em função do valor de α fixado no passo 3.

Passo 6: Decidir - se o valor da estatística pertencer à região crítica, rejeitar $\mathbf{H_0}$; caso contrário, não rejeitar $\mathbf{H_0}$.

O **P-valor**

P-value (P-valor ou valor-P) que corresponde à probabilidade associada ao valor da estatística do teste calculado a partir da amostra. O P-value indica o menor nível de significância observado que levaria à rejeição da hipótese nula.Assim, rejeitamos $\mathbf{H_0}$ se $P \leq \alpha$

Se utilizarmos o P-value em vez do valor crítico da estatística, os passos 5 e 6 da construção dos testes de hipóteses serão:

Passo 5: Determinar o P-value que corresponde à probabilidade associada ao valor da estatística do teste calculado no passo 4.

Passo 6: Decidir - se o valor de P-value for menor do que o nível de significância a estabelecido no passo 3, rejeitar $\mathbf{H_0}$; caso contrário, não rejeitar $\mathbf{H_0}$.

TESTES PARAMÉTRICOS

Os testes de hipóteses dividem-se em paramétricos e não paramétricos. Neste momento, estudaremos apenas os testes paramétricos.

Os testes paramétricos envolvem parâmetros populacionais. Um parâmetro é qualquer medida numérica ou característica quantitativa que descreve a população; são valores fixos, usualmente desconhecidos e representados por caracteres gregos, como a média populacional(μ), o desvio-padrão populacional (**σ**), a variância populacional ($\boldsymbol{\sigma}^2$), etc.

Quando as hipóteses forem formuladas sobre os parâmetros da população, o teste de hipótese é chamado paramétrico. Nos testes não paramétricos, as hipóteses são formuladas sobre características qualitativas da população.

Os métodos paramétricos são então aplicados para dados quantitativos e exigem suposições fortes para sua validação, incluindo:

I. as observações devem ser independentes;
II. a amostra deve ser retirada de populações com determinada distribuição, geralmente a normal;

III. as populações devem ter variâncias iguais para testes de comparação de duas médias populacionais emparelhadas ou k médias populacionais ($k \geq 3$);

IV. as variáveis em estudo devem ser medidas em escala intervalar ou de razão, do modo que seja possível utilizar operações aritméticas sobre os respectivos valores.

Estudaremos os principais testes paramétricos, incluindo testes de normalidade, testes de homogeneidade de variâncias, teste t de Student e suas aplicações.

Para verificar a normalidade univariada dos dados, os testes mais utilizados são os de Kolmogorov-Smirnov, de Shapiro-Wilk e de Shapiro-Francia. Para a comparação da homogeneidade de variâncias entre populações, temosos testes χ^2 de Bartlett (1937), C de Cochran (1947), $F_{máx}$ de Hartley (1950) e F de Levene (1960).

Descreveremos o teste t de Student para três situações: testar hipóteses sobre uma média populacional, testar hipóteses para comparar duas médias independentes e para comparar duas médias emparelhadas.

TESTES PARA NORMALIDADE UNIVARIADA

Dentre os testes de normalidade univariada, os mais utilizados são: Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk e Shapiro-Francia.

Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) é um teste de aderência, isto é, compara a distribuição de frequências acumuladas de um conjunto de valores amostrais (valores observados) com uma distribuição teórica. O objetivo é testar se os valores amostrais são oriundos de uma população com suposta distribuição teórica ou esperada, neste caso a distribuição normal. A estatística do teste é o ponto de maior diferença (em valor absoluto) entre as duas distribuições.

Para utilização do teste de K-S, a média e o desvio-padrão da população devem ser conhecidos. Para pequenas amostras, o teste perde potência, de modo que deve ser utilizado em amostras grandes ($n \geq 30$).

O teste de K-S assume as seguintes hipóteses:

H_0.: a amostra provém de uma população com distribuição N (μ, σ)

H_1: a amostra não provém de uma população com distribuição N (μ, σ)

Seja $F_{esp}(X)$ uma função de distribuição esperada (normal) de frequências relativas acumuladas da variável X, em que $F_{esp}(X) \sim N(\mu, \sigma)$, e F_{obs},(X) a distribuição de frequências relativas acumuladas observada da variável X. O objetivo é testar se

$$H_0.: F_{obs}(X) = F_{esp}(X)$$

contra a alternativa de que

$$H_1: F_{obs}(X) \neq F_{esp}(X)$$

A estatística do teste é:

$$D_{cal} = max\left\{\left|F_{esp}(X_i) - F_{obs}(X_i)\right|, \left|F_{esp}(X_i) - F_{obs}(X_{i-1})\right|\right\},\ i = 1,2 \ldots, n.$$

em que:

$F_{esp}(X_i)$: frequência relativa acumulada esperada na categoria i;

$F_{obs}(X_i)$: frequência relativa acumulada observada na categoria i;

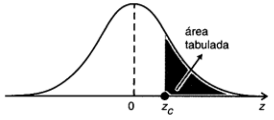
$F_{obs}(X_{i-1})$: frequência relativa acumulada observada na categoria i - 1.

Os valores críticos da estatística de Kolmogorov-Smirnov (*Dc* estão na Tabela. Essa tabela fornece os valores críticos de *Dc* tal que $P(D_{cal} > D_c)$ = α (para um teste unilateral à direita). Para que a hipótese nula $\mathbf{H_0}$ seja rejeitada, o valor da estatística D_{cal} deve pertencer à região crítica, isto é, $D_{cal} > D_c$; caso contrário, não rejeitamos $\mathbf{H_0}$.

O **P-value** (probabilidade associada ao valor da estatística calculada D_{cal} a partir da amostra) também pode ser obtido da Tabela G. Nesse caso, rejeitamos $\mathbf{H_0}$ se $P \leq \alpha$

Tabela E Distribuição normal padrão.

$P(z_{cal} > z_c) = \alpha$



Probabilidades associadas na cauda superior

z_c	Segunda decimal de z_c									
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2842	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,008	0,0008	0,0008	0,0008	0,007	0,007
3,2	0,0007									
3,3	0,0005									
3,4	0,0003									

Tabela G Valores críticos de D_c no teste de Kolmogorov-Smirnov tal que $P(D_{cal} > D_c) = \alpha$.

Tamanho da amostra *(N)*	**Nível de significância α**				
	0,20	**0,15**	**0,10**	**0,05**	**0,01**
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0.266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
Acima de 50	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

EXEMPLO 1 - APLICAÇÃO DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

A Tabela 7 .1 apresenta os dados de produção mensal de máquinas agrícolas de uma empresa nos últimos 36

meses.Verifique se os

Tabela 7.1 Produção de máquinas agrícolas nos últimos 36 meses.

Quadro 2

52	50	36	40	30	42	38	38	52	44	36	34
50	42	34	55	36	55	42	52	34	48	55	44
44	30	48	40	40	44	40	44	38	36	50	42

SOLUÇÃO

Passo 1: Como o objetivo é verificar se os dados da **Quadro 2** são provenientes de uma população com distribuição normal, o teste indicado é o de Kohnogorov-Smirnov (K-S).

Passo 2:As hipóteses do teste de K-S para este exemplo são:

H 0: a produção de máquinas agrícolas na população segue distribuição N (μ, σ)

H 1: a produção de máquinas agrícolas na população não segue distribuição N (μ, σ)

Passo 3: O nível de significância a ser considerado é de 5%.

Passo 4: Todos os passos necessários para o cálculo de D_{cal} a partir da expressão (7. 7) estão especificados no **Quadro 2**

Passo 5: De acordo com a Tabela G do apêndice do livro, para n = 36 e a= 5%, o valor crítico da estatística de Kolmogorov-Smirnov é De = 0,23.

Passo 6: Decisão - como o valor calculado não pertence à região crítica (D calc < Dc, a hipótese nula não é rejeitada, o que nos permite concluir, ao nível de confiança de 95%, que a amostra é obtida de uma população com distribuição normal.

Média	42,63889
Erro padrão	1,183318
Desvio padrão	7,099911
Variância da amostra	50,40873
Mínimo	30
Máximo	55
Soma	1535
Contagem	36

X_i	F_{abs}	F_{ac}	F_{obs}	Z_i	F_{esp}	$\lvert F_{esp}(X_i) - F_{obs}(X_i)\rvert$	$\lvert F_{esp}(X_i) - F_{obs}(X_{i-1})\rvert$
30	2	2	0,056	-1,78	0,0375	0,01805556	0,0375
34	3	5	0,139	-1,22	0,1112	0,02768889	0,05564444
36	4	9	0,25	-0,94	0,1762	0,0738	0,03731111
38	3	12	0,333	-0,65	0,2578	0,07553333	0,0078
40	4	16	0,444	-0,37	0,3557	0,08874444	0,02236667
42	4	20	0,556	-0,09	0,4681	0,08745556	0,02365556
44	5	25	0,694	0,19	0,5753	0,11914444	0,01974444
48	2	27	0,75	0,76	0,7764	0,0264	0,08195556
50	3	30	0,833	1,04	0,8508	0,01746667	0,1008
52	3	33	0,917	1,32	0,9049	0,01176667	0,07156667
55	3	36	1	1,74	0,9591	0,0409	0,04243333

$$D_{calc} = max\{\lvert F_{esp}(X_i) - F_{obs}(X_i)\rvert, \lvert F_{esp}(X_i) - F_{obs}(X_{i-1})\rvert\}, = 0{,}11914444$$

$D_c = 0{,}23$

Para que a hipótese nula $\mathbf{H_0}$.seja rejeitada, o valor da estatística D_{calc} deve pertencer à região crítica, isto é, $D_{calc} > D_c$; caso contrário, não rejeitamos $\mathbf{H_0}$.

O P-value (probabilidade associada ao valor da estatística calculada Dcal a partir da amostra) também pode ser obtido da Tabela G.

Se utilizarmos o P-value em vez do valor crítico da estatística, os passos 5 e 6 serão:

Passo 5: De acordo com a Tabela G do apêndice do livro, para uma amostra de tamanho n = 36, a probabilidade

associada à estatística Dca1 = 0,118 tem como limite inferior P = 0,20.

Passo 6: Decisão - como P > 0,05, não rejeitamos $\mathbf{H_0}$.

Teste de Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk (S-W) é baseado em Shapiro e Wilk (1965) e pode ser aplicado para amostras de tamanho 4 ~ n ~ 2.000, sendo uma alternativa ao teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov (K-S) no caso de pequenas amostras (n < 30).

Analogamente ao teste de K-S, o teste de normalidade de S-W assume as seguintes hipóteses:

$\mathbf{H_0}$.: a amostra provém de uma população com distribuição N (μ, σ)

$\mathbf{H_1}$: a amostra não provém de uma população com distribuição N (μ, σ)

O cálculo da estatística de Shapiro-Wilk (W_{calc}) é dado por:

$$W_{calc} = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \; para \; i = 1, \dots, n \quad (1)$$

e

$$b = \sum_{i=1}^{n/2} a_{i,n}\left(X_{(n-i-1)} - X_{(i)}\right) \qquad (2)$$

Onde

$X_{(i)}$ são as estatísticas de ordem i da amostra, ou seja, a i-ésima observação ordenada, de modo que $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$;

$\bar{X}$ é $a\ média\ de\ X;$

$a_{i,n}$ são constantes geradas das médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n a partir de uma distribuição normal. Seus valores são apresentados na Tabela H_{2}.

Pequenos valores de W_{calc} indicam que a distribuição da variável em estudo não é normal. Os valores críticos da estatística de Shapiro-Wilk (W_c) estão na Tabela H . Diferente da maioria das tabelas, essa tabela fornece os valores críticos de W_c tal que P(W_{calc} < W_c) =α (para um teste unilateral à esquerda). Para que a hipótese nula $\mathbf{H_0}$ seja rejeitada, o valor da estatística W_{ca1c} deve pertencer à região crítica, isto é, W_{calc} < W_c caso contrário, não rejeitamos $\mathbf{H_0}$:.

O P-value (probabilidade associada ao valor da estatística calculada i:t:az a partir da amostra) também pode ser obtido da Tabela H1. Nesse caso, rejeitamos $\mathbf{H_0}$ se P ≤.

Tabela H$_1$ Valores críticos da estatística W_c de Shapiro-Wilk tal que $P(W_{cal} < W_c) = \alpha$.

Tamanho da amostra N	Nível de significância α								
	0,01	**0,02**	**0,05**	**0,10**	**0,50**	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
3	0,753	0,758	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1,000	1,000
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,936	0,989
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947	0,975	0,980	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	0,976	0,980	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,975	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988
21	0,873	0,888	0,908	0,823	0,960	0,980	0,983	0,987	0,989
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	0,980	0,984	0,987	0,989
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	0,981	0,984	0,987	0,989
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963	0,981	0,984	0,987	0,989
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	0,981	0,985	0,988	0,989
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	0,982	0,985	0,988	0,989
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965	0,982	0,985	0,988	0,990
28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967	0,983	0,985	0,988	0,900

Tabela H_2 Coeficientes $a_{i,n}$ para o teste de normalidade de Shapiro-Wilk.

i/n		2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739
2			0,0000	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291
3					0,0000	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141
4							0,0000	0,0561	0,0947	0,1224
5									0,0000	0,0399

i/n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	0,0000	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7			0,0000	0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013
8					0,0000	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9							0,0000	0,0163	0,0303	0,0422
10									0,0000	0,0140

i/n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0,0000	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12			0,0000	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13					0,0000	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14							0,0000	0,0084	0,0159	0,0227
15									0,0000	0,0076

EXEMPLO 2 - APLICAÇÃO DO TESTE DE SHAPIRO-WILK

A Quadro 3 apresenta os dados de produção mensal de aviões

15	19	23	24	28	30	32	36
16	20	23	25	29	31	34	39
18	22	24	28	30	32	36	46

SOLUÇÃO

Passo 1: Para um teste de normalidade em que $n < 30$, o teste indicado é o de Shapiro-Wilk (S-W).

Passo 2: As hipóteses do teste de S-W para este exemplo são:

$\mathbf{H_0}$: a produção de aviões na população segue distribuição normal N (μ, σ)

$\mathbf{H_1}$: a produção de aviões na população não segue distribuição normal N(μ, σ)

Passo 3: O nível de significância a ser considerado é de 1 %.

Passo 4: O cálculo da estatística de S-W para os dados da Tabela 7.3, de acordo com as expressões (1) e (2), está detalhado a seguir.

i	$n-i-1$	$a_{i,n}$	$X_{(n-i-1)}$	$X_{(i)}$	$a_{i,n}\left(X_{(n-i-1)}-X_{(i)}\right)$
1	24	0,4493	46	15	13,9283
2	23	0,3098	39	16	7,1254
3	22	0,2554	36	18	4,5972
4	21	0,2145	36	19	3,6465
5	20	0,1807	34	20	2,5298
6	19	0,1512	32	22	1,512
7	18	0,1245	32	23	1,1205
8	17	0,0997	31	23	0,7976
9	16	0,0764	30	24	0,4584
10	15	0,0539	30	24	0,3234
11	14	0,0321	29	25	0,1284
12	13	0,0107	28	28	0
					B=36,1675

Média	27,5
Erro padrão	1,556892
Mediana	28
Modo	23
Desvio padrão	7,627183
Variância da amostra	58,17391
Curtose	0,04227
Assimetria	0,405997
Intervalo	31
Mínimo	15
Máximo	46
Soma	660
Contagem	24

$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 =$ 58,17391*23 = 1338

Logo

$W_{calc} = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\mathbf{36{,}1675}^2}{1338}$ =0,977644338

Passo 5: De acordo com a Tabela H 1 do apêndice do livro, para n = 24 e a= 1 %, o valor crítico da estatística de Shapiro-Wilk é Wc = 0,884.

Passo 6: Decisão - a hipótese nula não é rejeitada, já que Wca1 > VV,, (a Tabela H 1 fornece os valores críticos de W_c, tal que tal que $P(W_{cal} < W_c) = \alpha$, o que nos permite concluir, ao nível de confiança de 99%, que a amostra é obtida de uma população com distribuição normal.

Teste de Shapiro-Francia

Este teste é baseado em Shapiro e Francia (1972). De acordo com Sarkadi (1975), os testes de Shapiro-Wilk(S-W) e Shapiro-Francia (S-F) têm a mesma forma, sendo diferentes apenas na definição dos coeficientes. Além disso, o cálculo do teste de S-F é muito mais simples, podendo ser considerado uma versão simplificada do teste de S-W. Apesar da simplicidade, é tão robusto quanto o teste de Shapiro-Wilk, tornando-se um substituto de S-W

O teste de Shapiro-Francia pode ser aplicado para amostras de tamanho 5 ≤n≤ 5.000, sendo similar ao teste de Shapiro-Wilk para grandes amostras.

Analogamente ao teste de S-W, o teste de S-F assume as seguintes hipóteses:

$\mathbf{H_0}$.: a amostra provém de uma população com distribuição N (μ, σ)

$\mathbf{H_1}$: a amostra não provém de uma população com distribuição N (μ, σ)

O cálculo da estatística de Shapiro-Francia (Wcalc) é dado por:

$$W_{calc} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} m_i X_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \quad i = 1 \dots n$$

Onde $X_{(i)}$ são as estatísticas de ordem i da amostra, ou seja, a i-ésima observação ordenada, de modo que $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$;

m; é o valor esperado aproximado da i-ésima observação (Z*score*). Os valores de m; são aproximados por:

$$m_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

Onde Φ^{-1} corresponde ao inverso da distribuição normal padrão com média zero e desvio-padrão 1. Esses valores podem ser extraídos da tabela E.

Pequenos valores de Wcal indicam que a distribuição da variável em estudo não é normal. Os valores críticos da estatística de Shapiro-Francia W'c, estão na Tabela H 1 do apêndice do livro. Diferente da maioria das tabelas,essa tabela fornece os valores críticos de W', tal que P(Wcal < Wc) = a (para um teste unilateral à esquerda). Para que a hipótese nula $\mathbf{H_0}$ seja rejeitada, o valor da estatística Wcalc deve pertencer à região crítica, isto é, Wcalc < Wc; caso contrário, não rejeitamos $\mathbf{H_0}$.

EXEMPLO 3 - APLICAÇÃO DO TESTE DE SHAPIRO-FRANCIA

A Tabela 7.6 apresenta os dados de produção diária de bicicletas de determinada empresa nos últimos 60 dias. Verifique se os dados são provenientes de uma população com distribuição normal, considerando α = 5%.

85	88	66	80	80	54	91	67	80	63	76	68
70	80	60	55	64	59	57	70	81	59	81	76
74	91	72	54	60	78	59	76	70	60	79	71
49	57	81	93	63	73	64	78	77	61	78	72
67	63	73	77	67	84	68	75	65	74	60	84

i	$X_{(i)}$	*i/(n+1)*	m_i	$m_iX_{(i)}$	m_i^2	$(X_i - \bar{X})^2$
1	49	0,01639	-2,13	-104,37	4,5369	2,0449
2	54	0,032786885	-1,85	-99,9	3,4225	12,7449
3	54	0,049180328	-165	-8910	27225	12,7449
4	55	0,065573770	-1,51	-83,05	2,2801	20,8849
5	57	0,08196	-1,40	-79,8	1,96	43,1649
6	57	0,09836	-1,29	-73,53	1,6641	43,1649
7	59	0,11475	-1,21	-71,39	1,4641	73,4449
8	59	0,1311	-1,12	-66,08	1,2544	73,4449
9	59	0,14754	-1,05	-61,95	1,1025	73,4449
10	60	0,163934	-0,98	-58,8	0,9604	91,5849
11	60	0,180328	-0,91	-54,6	0,8281	91,5849
12	60	0,196721	-0,86	-51,6	0,7396	91,5849

13	60	0,213115	-0,78	-46,8	0,6084	91,5849
14	61	0,229508	-0,74	-45,14	0,5476	111,7249
15	63	0,245902	-0,68	-42,84	0,4624	158,0049
16	63	0,262295	-0,62	-39,06	0,3844	158,0049
17	63	0,278689	-0,59	-37,17	0,3481	158,0049
18	64	0,295082	-0,54	-34,56	0,2916	184,1449
19	64	0,311475	-0,51	-32,64	0,2601	184,1449
20	65	0,327869	-0,42	-27,3	0,1764	212,2849
21	66	0,344262	0,40	26,4	0,16	242,4249
22	67	0,360656	-0,34	-22,78	0,1156	274,5649
23	67	0,377049	-0,31	-20,77	0,0961	274,5649
24	67	0,393443	-0,27	-18,09	0,0729	274,5649
25	68	0,409836	-0,23	-15,64	0,0529	308,7049
26	68	0,42623	-018			
27	70	0,442623	-0,15			
28	70	0,459016	-0,11			
29	70	0,47541				
30	71	0,491803				
31	72	0,508197	0,00			
32	72	0,52459	0,07			
33	73	0,540984				
34	73	0,557377				
35	74	0,57377				
36	74	0,590164				
37	75	0,606557				
38	76	0,622951				

39	76	0,639344				
40	76	0,655738				
41	77	0,672131				
42	77	0,688525				
43	78	0,704918				
44	78	0,721311				
45	78	0,737705				
46	79	0,754098				
47	80	0,770492				
48	80	0,786885				
49	80	0,803279				
50	80	0,819672				
51	81	0,836066	0,92			
52	81	0,852459				
53	81	0,868852				
54	84	0,885246				
55	84	0,901639				
56	85	0,918033				
57	88	0,934426				
58	91	0,95082				
59	91	0,967213				
60	93	0,983607	2,13			

TESTES PARA HOMOGENEIDADE DE VARIÂNCIAS

Uma das condições para se aplicar um teste paramétrico para comparação de k médias populacionais é que as variâncias das populações, estimadas a partir de k amostras representativas, sejam homogêneas ou iguais. Os testes mais utilizados para verificação da homogeneidade de variâncias são os testes χ^2 de Bartlett (1937), C de Cochran (1947), F_{max} de Hartley (1950) e F de Levene (1960).

Na hipótese nula dos testes de homogeneidade de variância, as variâncias das k populações são homogêneas.

Na hipótese alternativa, pelo menos uma variância populacional é diferente das demais. Ou seja:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \cdots = \sigma_n^2$$

$$H_1: \exists\exists i, j\ ;\ \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 (i, j = 1,2, \ldots, n)$$

O Teste χ^2 de Bartlett

O teste original proposto para verificar a homogeneidade de variâncias entre grupos é o teste χ^2de Bartlett (1937). Esse teste é muito sensível aos desvios de normalidade, sendo o teste de Levene uma alternativa nesse caso.

A estatística de Bartlett é calculada a partir de q:

$$q = (N-k)\log\left(S_p^2\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log\left(S_i^2\right)$$

Onde:

$n_i \;\; i = 1, \ldots, k$ é o tamanho de cada amostra í, de modo que $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$

$S_i^2, i = 1, \ldots, k$ é a variância em cada amostra i;

e $S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2}{N-k}$

Um fator de correção e é aplicado à estatística q, com a seguinte expressão:

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k}\right)$$

de modo que a estatística de Bartlett (B_{calc}) segue aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com k - 1 graus de liberdade, ou seja:

$$B_{calc} = \frac{q}{c} \sim \chi_{k-1}^2$$

Pelas expressões anteriores, verificamos que, quanto maior a diferença entre as variâncias, maior também será o valor de B. Por outro lado, se todas as variâncias amostrais forem iguais, seu valor será zero. Para confirmar se a hipótese nula de homogeneidade de variâncias será ou não rejeitada, o valor calculado deve ser comparado com o valor crítico da estatística (χ_c^2) que está disponível na Tabela D.

Essa tabela fornece os valores críticos de χ_c^2 tal que $Prob(\chi_{cal}^2 > \chi_c^2) = \alpha$ (para um teste unilateral à direita).Assim, rejeitamos a hipótese nula se $B_{calc} > \chi_c^2$. Por outro lado, se $B_{calc} \leq \chi_c^2$ não rejeitamos H_0

O *P-value* (probabilidade associada à estatística χ_{cal}^2) também pode ser obtido a partir da Tabela D. Nesse caso, rejeitamos H_0 se P ≤ α.

EXEMPLO 4 - APLICAÇÃO DO TESTE χ^2 DE BARTLETT

Um supermercadista deseja estudar o número de clientes atendidos diariamente para tomar decisões estratégicas de operações. A Tabela abaixo apresenta os dados de três lojas ao longo de duas semanas. Verifique se as variâncias entre os grupos são homogêneas. Considere $\alpha = 5\%$.

	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Dia 1	620	710	924
Dia 2	630	780	695
Dia 3	610	810	854
Dia 4	650	755	802
Dia 5	585	699	931
Dia 6	590	680	924
Dia 7	630	710	847
Dia 8	644	850	800
Dia 9	595	844	769
Dia 10	603	730	863
Dia 11	570	645	901
Dia 12	605	688	888
Dia 13	622	718	757
Dia 14	578	702	712
Desvio-padrão	**24,4059**	**62,2466**	**78,9144**
Variância	**595,6484**	**3.874,6429**	**6.227,4780**

TESTES DE HIPÓTESES SOBRE UMA MÉDIA POPULACIONAL(μ) A PARTIR DE UMA AMOSTRA ALEATÓRIA

O objetivo é testar se uma média populacional assume ou não determinado valor.

Esse teste é aplicado quando uma amostra aleatória de tamanho n for extraída de uma população com distribuição normal com média (μ) desconhecida e desvio-padrão (σ) conhecido. Caso a distribuição da população não seja conhecida, é necessário trabalhar com amostras grandes (n > 30), pois o teorema do limite central garante que, à medida que o tamanho da amostra cresce, a distribuição amostral de sua média aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal.
Para um teste bilateral, as hipóteses são:

H_0: a amostra provém de uma população com determinada média ($\mu = \mu_o$)
H_1: contesta a hipótese nula ($\mu \neq \mu_0$)

A estatística do teste utilizada aqui refere-se à média amostral $(\bar{X})$ Para que a média da amostra possa ser comparada ao valor tabelado, deve ser padronizada, de modo que:

$$Z_{calc} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0,1) \quad \text{onde} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Os valores críticos da estatística (z_c) são apresentados na Tabela E do apêndice. Essa tabela fornece os valores críticos de z_c tal que $P(Z_{calc} > z_c) = \alpha$ (para um teste unilateral à direita). Para um teste bilateral, devemos considerar $P(Z_{calc} > z_c) = \alpha/2$, já que $P(Z_{calc} < -z_c) + P(Z_{calc} > z_c) = \alpha$. A hipótese nula H_0 de um teste bilateral é rejeitada se o valor da estatística Z_{calc} pertencer à região crítica, isto é, se $Z_{calc} < -z_c$ ou $Z_{calc} > z_c$ Caso Contrário, não rejeitamos H_0.
As probabilidades unilaterais associadas à estatística Z_{calc} (P) também podem ser obtidas a partir da Tabela E.
Para um teste unilateral, consideramos que P = P1. Para um teste bilateral, essa probabilidade deve ser dobrada (P = 2.P1). Assim, para ambos os testes, rejeitamos H_0 se $P \leq \alpha$.

EXEMPLO 8 - APLICAÇÃO DO TESTE z PARA UMA AMOSTRA
Um fabricante de cereais afirma que a quantidade média de fibra alimentar em cada porção do produto é, no mínimo, de 4,2 g com um desvio-padrão de 1g. Uma agência de saúde deseja verificar se essa afirmação procede, coletando uma amostra aleatória de 42 porções, em que a quantidade média de fibra alimentar é de 3,9g. Com um nível de significância de 5%, existem evidências para rejeitar a afirmação do fabricante?

Teste t de Student quando o desvio-padrão populacional (σ) não for conhecido

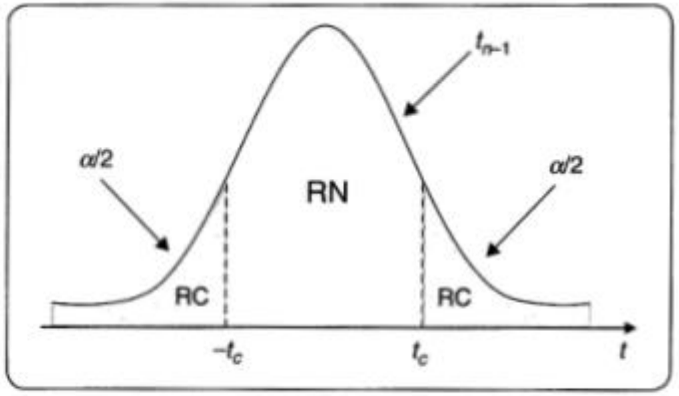
O teste t de Student para uma amostra é aplicado quando não conhecemos o desvio-padrão da população **(σ)** de modo que seu valor é estimado a partir do desvio-padrão da amostra (S). Porém, ao substituirmos **σ** por S em onde $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
a distribuição da variável Zca1 passa a não ser mais normal, tornando-se uma distribuição t de Student com n - 1 graus de liberdade.
Analogamente ao teste z, o teste t de Student para urna amostra assume as seguintes hipóteses para um teste bilateral:

H_0: $\mu = \mu_o$
H_1: $\mu \neq \mu_0$

E o cálculo da estatística passa a ser:

$$T_{calc} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

O valor calculado deve ser comparado com o valor tabelado da distribuição t de Student (Tabela B). Essa tabela fornece os valores críticos de t, tal que P(T_{calc} > t_c) (para um teste unilateral à direita). Para um teste bilateral, temos que P(T_{calc}<-t_c) = α/2 = P(T_{calc} > t_c) como mostra a figura



EXEMPLO 9 - APLICAÇÃO DO TESTE t DE STUDENT PARA UMA AMOSTRA

O tempo médio de processamento de determinada tarefa em uma máquina tem sido de 18 minutos. Foram introduzidos novos conceitos para reduzir o tempo médio de processamento. Desta forma, após certo período, coletou-se uma amostra de 25 elementos, obtendo-se o tempo médio de 16,808 minutos com desvio-padrão de 2, 733 minutos. Verifique se esse resultado evidencia uma melhora no tempo médio de processamento. Considere α= 1%

TESTE t DE STUDENT PARA COMPARAÇÃO DE DUAS MÉDIAS POPULACIONAIS A PARTIR DE DUAS AMOSTRAS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

O teste t para duas amostras independentes é aplicado para comparar as médias de duas amostras aleatórias (X_1 i = 1, ... , n_1; X_2 1,j = 1, ... , n_2) extraídas da mesma população. Neste teste, a variância populacional é desconhecida.

Para um teste bilateral, na hipótese nula as médias populacionais são iguais; se as médias populacionais forem diferentes, a hipótese nula é rejeitada, de modo que:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

O cálculo da estatística T depende da comparação das variâncias populacionais entre os grupos.

CASO 1 $\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$

Considerando que as variâncias populacionais são diferentes, a estatística T é dada por:

$$T_{calc} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

E o número de graus de liberdade é dado por:

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{(n_2 - 1)}}$$

CASO 2 $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$

Quando as **variâncias populacionais forem homogêneas,** o cálculo da estatística T será dado por:

$$T_{calc} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Onde

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

sendo que T_{calc} segue uma distribuição t de *Student* com $\nu = n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

O valor calculado deve ser comparado com o valor tabelado da distribuição t de Student.

EXEMPLO 10 - APLICAÇÃO DO TESTE t DE STUDENT PARA DUAS AMOSTRAS INDEPENDENTES
Um engenheiro de qualidade desconfia que o tempo médio de fabricação de determinado produto plástico pode depender da matéria-prima utilizada que é proveniente de dois fornecedores. Uma amostra com 30 observações de cada fornecedor é coletada para teste e os resultados são apresentados nas Tabelas 7 .10 e 7.11. Para onível de significância $\alpha = 5\%$, verifique se há diferença entre as médias.

Tabela 7.10 Tempo de fabricação utilizando matéria-prima do fornecedor 1.

22,8	23,4	26,2	24,3	22,0	24,8	26,7	25,1	23,1	22,8
25,6	25,1	24,3	24,2	22,8	23,2	24,7	26,5	24,5	23,6
23,9	22,8	25,4	26,7	22,9	23,5	23,8	24,6	26,3	22,7

Tabela 7.11 Tempo de fabricação utilizando matéria-prima do fornecedor 2.

26,8	29,3	28,4	25,6	29,4	27,2	27,6	26,8	25,4	28,6
29,7	27,2	27,9	28,4	26,0	26,8	27,5	28,5	27,3	29,1
29,2	25,7	28,4	28,6	27,9	27,4	26,7	26,8	25,6	26,1

TESTE t DE STUDENT PARA COMPARAÇÃO DE DUAS MÉDIAS POPULACIONAIS A PARTIR DE DUAS AMOSTRAS ALEATÓRIAS EMPARELHADAS

Este teste é aplicado para verificar se as médias de duas amostras emparelhadas ou relacionadas, extraídas da mesma população (antes e depois) com distribuição normal, são ou não diferentes significativamente. Além da normalidade dos dados de cada amostra, o teste exige a homogeneidade das variâncias entre os grupos.

Ao contrário do teste t para duas amostras independentes, devemos calcular, inicialmente, a diferença entrecada par de valores na posição i ($d_i = X_{antes,i} - X_{depois,i}$, $i = 1, \dots, n$) e, a partir daí, testar a hipótese nula de que a média das diferenças na população é zero.

Para um teste bilateral, temos que:

$$H_0: \mu_d = 0, \qquad \mu_d = \mu_{antes} - \mu_{depois}$$
$$H_1: \mu_d \neq 0.$$

A estatística do teste é:

$$T_{calc} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}}$$

Onde $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$ e $S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$

O valor calculado deve ser comparado com o valor tabelado da distribuição t de Student.

EXEMPLO 11 - APLICAÇÃO DO TESTE t DE STUDENT PARA DUAS AMOSTRAS EMPARELHADAS

Um grupo de 10 operadores de máquinas, responsável por realizar determinada tarefa, é treinado para executar a mesma tarefa mais eficientemente. Para verificar se há redução no tempo de execução da tarefa, mede-se o tempo gasto por cada operador, antes e depois do treinamento. Teste a hipótese de que as médias populacionais das duas amostras emparelhadas são semelhantes, isto é, de que não há redução no tempo de execução da tarefa após o treinamento. Considere $\alpha = 5\%$.

Tabela 7.12

Tempo gasto por operador antes do treinamento.

3,2 3,6 3,4 3,8 3,4 3,5 3,7 3,2 3,5 3,9

Tabela 7.13

Tempo gasto por operador depois do treinamento.

3,0 3,3 3,5 3,6 3,4 3,3 3,4 3,0 3,2 3,6