

## Génération de trajectoires optimales de sortie de position singulière pour les mécanismes parallèles

Georges Pagis<sup>1,2,3</sup>

Mél : georges.pagis@irccyn.ec-nantes.fr

**Résumé :** Les robots parallèles présentent de nombreux avantages face aux robots sériels, que ce soit en terme de rigidité ou de rapport masse embarqué/poids de la structure. Cependant, leur espace de travail est largement réduit par la présence de singularités, en particulier les singularités de Type 2. Des méthodes ont été développées afin d'augmenter l'espace de travail en évitant, traversant ou éliminant la présence de singularités. Entre autre, il est possible de planifier une trajectoire optimale permettant de traverser les singularités de Type 2 et donc de changer de mode d'assemblage. Cependant, si la trajectoire utilisée pour la traversée n'est pas assez robuste aux erreurs de modèles alors le robot peut s'arrêter dans une position singulière et s'y retrouver bloqué. Par conséquent, l'objectif de ce papier est de présenter une nouvelle méthode générique dont l'objectif est de permettre à un manipulateur parallèle de sortir d'une position singulière.

**Mots clés :** *Robots parallèles, Singularité, Planification de trajectoire, Modélisation dynamique.*

## 1 Introduction

Un des principal inconvénient des manipulateurs parallèles réside dans la présence de singularités [2, 3] qui séparent leur espace de travail en différentes parties correspondant à différents modes d'assemblages [4]. Ces singularités sont des positions du mécanisme pour lesquelles la plateforme perd ou gagne localement un degré de liberté.

De nombreuses approches ont été envisagé afin d'augmenter l'espace de travail des manipulateurs parallèles. Une de ces solutions consiste à changer de mode d'assemblage en passant par une position singulière [1]. Cette solution est prometteuse, mais la traversée engendre un risque pour le manipulateur de se retrouver bloqué à l'arrêt dans la position singulière. L'objectif de ce papier est de présenter une stratégie permettant à un mécanisme bloqué dans une position singulière d'en ressortir, en planifiant une trajectoire de sortie assurant la continuité des efforts moteurs.

## 2 Modèle dynamique des mécanismes parallèles

### 2.1 Formalisme de Lagrange

On considère un manipulateur parallèle composé de  $m$  liaisons, de  $n$  degrés de liberté et de  $n$  actionneurs. On peut exprimer le modèle dynamique d'un mécanisme parallèle en utilisant le formalisme de Lagrange [5],

$$\tau = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \lambda \quad (1)$$

où

- $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées moteurs,
- $\tau$  est le vecteur des efforts moteurs,
- $\lambda$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange est calculé en utilisant

$$\mathbf{A}^T \lambda = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{w}_p \quad (2)$$

avec

---

1. Institut Pascal, IFMA, MMS department, UMR CNRS 6602, 63000 Clermont-Ferrand

2. LUNAM, Ecole Centrale de Nantes, 44321 Nantes

3. Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN), UMR CNRS 6597, 44321 Nantes

- $\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \psi, \theta]^T$  est le vecteur des coordonnées de la plateforme et  $\mathbf{v}$  est sa dérivée,
- $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices du modèle cinématique telles que  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$  [4],
- $\mathbf{w}_p$  est le vecteur d'efforts appliqués sur la plateforme par les bras et les forces extérieures.

Enfin en remplaçant l'expression (2) dans l'équation (1), et en assumant que la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas singulière, on obtient l'expression du modèle dynamique [3] :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_b + \mathbf{J}^T {}^0\mathbf{w}_p, \text{ avec } \mathbf{w}_b = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (3)$$

où

- ${}^0\mathbf{w}_p$  est l'expression du torseur d'effort  $\mathbf{w}_p$  dans le repère global, i.e.  ${}^0\mathbf{w}_p = \mathbf{D}\mathbf{w}_p$  avec  $\mathbf{D}$  la matrice reliant le torseur cinématique de la plateforme  $\mathbf{t}$  (exprimé dans le repère global) au vecteur  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{t} = \mathbf{D}\mathbf{v}$  [4],
- $\mathbf{J} = {}^0\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  est la matrice Jacobienne reliant  $\mathbf{t}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$ , avec  ${}^0\mathbf{A}$  l'expression de la matrice cinématique  $\mathbf{A}$  dans le repère global, i.e.  ${}^0\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}$ .

En analysant l'expression (3), nous pouvons remarquer que le modèle dynamique du mécanisme ne peut plus être calculé si  ${}^0\mathbf{A}$  est singulière. La condition de singularité de la matrice cinématique  ${}^0\mathbf{A}$  est discutée dans la prochaine partie.

## 2.2 Les singularités des mécanismes parallèles

Les auteurs de [2] ont présenté une classification des singularités des mécanismes parallèles comportant 3 catégories basées sur l'analyse du modèle cinématique :

$${}^0\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

**Les singularités de Type 1** correspondent à des positions telles que la matrice cinématique  $\mathbf{B}$  n'est plus de rang plein. Dans ces configurations, le mécanisme perd localement sa capacité à se déplacer dans une direction.

**Les singularités de Type 2** correspondent à des positions telles que la matrice cinématique  ${}^0\mathbf{A}$  n'est plus de rang plein. Les singularités de Type 2 séparent l'espace de travail en plusieurs parties, engendrant une réduction importante de l'espace de travail du manipulateur.

**Les singularités de Type 3** sont les configurations dans lesquelles le mécanisme est à la fois en singularité de Type 1 et de Type 2.

## 2.3 Condition pour traverser une singularité de Type 2

Dans [1], il a été prouvé qu'un mécanisme parallèle peut traverser une singularité de Type 2 sans que le modèle dynamique (3) ne dégénère si et seulement si la trajectoire respecte un critère dynamique sur le point singulier :

$$\mathbf{t}_s^T {}^0\mathbf{w}_p = 0 \quad (5)$$

où le vecteur  $\mathbf{t}_s$  représente la direction du mouvement incontrôlable de la plateforme dans la position singulière.

Il en résulte que lors du passage de la singularité, si la trajectoire suivie par le manipulateur ne garantit pas la création d'un torseur dynamique  $\mathbf{w}_p$  respectant la condition (5) alors le modèle dynamique du robot dégénère. Afin de générer la trajectoire désirée, les efforts moteurs tendent alors vers l'infini. Physiquement, cette condition signifie qu'un manipulateur parallèle peut traverser une singularité de Type 2 si et seulement si le torseur dynamique exercé par les bras et les forces extérieures sur la plateforme  ${}^0\mathbf{w}_p$  est réciproque au torseur cinématique du mouvement incontrôlable  $\mathbf{t}_s$ .

## 3 Méthodologie pour sortir d'une position singulière

En considérant qu'un utilisateur de mécanisme parallèle souhaite traverser une singularité de Type 2, il encourt le risque de voir son mécanisme bloqué dans une position singulière. La prochaine partie propose une méthodologie consistant à générer une trajectoire optimale permettant au mécanisme de sortir de la singularité de Type 2 sans que le modèle dynamique ne dégénère.

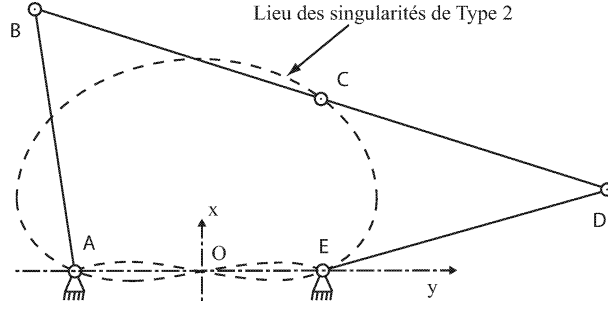


FIGURE 1 – MECANISME 5R EN POSITION SINGULIERE DE TYPE 2

### 3.1 Génération de trajectoire optimale afin de sortir d'une position singulière

Considérons que le mécanisme est à l'arrêt dans une position singulière  $\mathbf{x}_s$  (comme le mécanisme 5R représenté sur la Fig. 1). Afin de sortir de cette position, le mécanisme doit générer une trajectoire :

- Tangente au lieu des singularités au point  $\mathbf{x}_s$  puisque lorsqu'il est bloqué dans une telle configuration, il ne peut générer de mouvement orthogonal au lieu des singularités,
- Continue  $\mathcal{C}^2$  afin d'assurer que les efforts soient continues le long de la trajectoire,
- Respectent le critère (5) au point  $\mathbf{x}_s$  afin que son modèle dynamique ne dégénère pas.

A cause des pertes énergétiques, liées aux frottements et aux effets d'instabilité locaux (dus à la perte de rigidité autour du point singulier), le mécanisme risque de ne pas pouvoir sortir de la singularité lorsqu'il est à l'arrêt. Il est donc préférable d'augmenter son énergie cinétique en le déplaçant dans un premier temps le long des singularités. On peut donc séparer la trajectoire de sortie en deux parties, une première permettant à la plateforme de se déplacer le long des singularités, une deuxième trajectoire continue  $\mathcal{C}^2$  avec la première et permettant au robot de sortir de sa position singulière.

Evidemment, la trajectoire complète doit garantir que les efforts moteurs restent finis durant toute la trajectoire.

#### 3.1.1 Première partie de la trajectoire : déplacement le long des singularités

En général, calculer le lieu des singularités n'est pas un problème simple et rapide [4]. Il est donc difficile de trouver une équation analytique que la plateforme du mécanisme doive vérifier pour être sur une singularité. Il est cependant possible de trouver une condition sur les vitesses de la plateforme qui garantisse que le robot reste en position singulière.

Par définition, le vecteur  $\mathbf{t}_s$  vérifie  $\mathbf{t}_s \mathbf{A} = 0$ . En dérivant cette expression et en la manipulant on obtient la condition :

$$\mathbf{t} = - \left( \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{t}_s \mathbf{D}^{-1} + \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta \mathbf{q}} \mathbf{t}_s \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A} \dot{\mathbf{t}}_s \quad (6)$$

Les vecteurs  $\mathbf{t}_s$  et  $\dot{\mathbf{t}}_s$  étant uniquement définis sur les positions singulières, cette équation fournit une condition à vérifier pour que le mécanisme reste en position singulière. Si cette condition n'est pas vérifiée pour une seule valeur de  $\mathbf{t}_s$ , le manipulateur risque de sortir de sa position singulière.

Finalement, pour déplacer le mécanisme le long de la singularité, la trajectoire doit vérifier en tout point (6) pour obtenir les contraintes cinématiques assurant que le mécanisme reste en position singulière et (5) pour obtenir les contraintes dynamiques assurant que le modèle dynamique du mécanisme ne dégénère pas. En remplaçant (6) dans (5), on obtient une équation différentielle non linéaire du second ordre devant être résolue afin de se déplacer le long des singularités.

#### 3.1.2 Seconde partie de la trajectoire : sortir de la singularité

Une fois que le mécanisme a atteint une énergie suffisante, il est nécessaire de définir une seconde trajectoire continue  $\mathcal{C}^2$  avec la première afin d'éviter toute discontinuité dans les efforts moteurs. Il existe de nombreuses courbes de raccordement  $\mathcal{C}^2$ , comme les courbes de Lami ou les courbes en S. Dans le cadre de notre étude, il a été décidé d'utiliser les clothoïdes. La manière de relier ces courbes à la trajectoire le long de la singularité ne sera ici pas détaillée.

Lors du raccordement de la clothoïde, la direction de sortie est déterminée en observant, en simulation, la direction naturelle de déplacement du mécanisme. Cette direction est obtenue en débrayant les moteurs alors que le mécanisme est en mouvement.

### 3.1.3 Calcul des efforts le long de la trajectoire

En singularité de Type 2, la matrice cinématique  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible. Soit  $p$  le rang de cette matrice ( $p < n$ ). La relation (2) ne fournit donc que  $p$  équations linéairement indépendantes, et il existe une infinité de valeurs possibles de  $\lambda$  satisfaisant l'équation (2). Physiquement, le robot est surcontraint. Afin de calculer les efforts moteurs, il est donc nécessaire de fixer les  $n - p$  multiplicateurs de Lagrange.

Théoriquement, la matrice  $\mathbf{A}$  est inversible en dehors des singularités de Type 2, il est donc possible d'utiliser le modèle dynamique (1) pour calculer les efforts moteurs sur la deuxième partie de la trajectoire de sortie. Cependant, lorsque la plateforme est très proche de sa position singulière, le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  est très grand. Il en résulte que le modèle dynamique dégénère autour de la singularité. Une valeur maximale de conditionnement a été fixée arbitrairement, ce qui délimite un espace à proximité de la singularité dans lequel les efforts doivent être calculés en utilisant la même technique que lorsque le mécanisme est en position singulière.

Le modèle dynamique permet de calculer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange au premier point de la trajectoire en dehors de cet espace de mauvais conditionnement. Afin d'assurer la continuité des efforts moteurs, les multiplicateurs de Lagrange sont fixés comme égaux à ces valeurs sur toute la trajectoire de sortie.

## 4 Conclusion

Afin d'augmenter l'espace de travail, des travaux ont montré qu'il était possible de traverser une singularité de Type 2. Si la trajectoire de traversée n'est pas suffisamment robuste aux erreurs de modèles, le mécanisme risque cependant de se bloquer en position singulière. Ce papier présente le développement théorique afin de planifier une trajectoire optimale de sortie de position singulière. Après s'être déplacé le long des singularités, il a été prouvé que le mécanisme peut suivre une trajectoire de sortie à condition de respecter des critères dynamiques tout au long de la trajectoire. Ces développements ont été testés et validés sur un modèle de mécanisme 5R en simulation et sont en cours de validation sur un mécanisme 5R réel. D'autres travaux en cours se consacrent au développement d'une seconde méthode de sortie de singularité, plus simple mais applicable uniquement à certains mécanismes.

## Remerciement

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence Nationale de la Recherche au titre du programme Investissements d'avenir dans le cadre du projet EquipEx Robotex (ANR-10-EQPX-44), d'une aide de l'Union Européenne au titre du Programme Compétitivité Régionale et Emploi 2007-2013 (FEDER - Région Auvergne), d'une aide de l'Institut Français de Mécanique Avancée, et d'une aide de la Région Auvergne).

## Références

- [1] S. Briot and V. Arakelian, "Optimal force generation of parallel manipulators for passing through the singular positions", International Journal of Robotics Research, 2008.
- [2] C.M. Gosselin and J. Angeles, "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990.
- [3] D. Zlatanov and I.A. Bonev and C.M. Gosselin, "Constraint Singularities of Parallel Mechanisms", Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002), 2002.
- [4] J.P. Merlet, "Parallel Robots", 2006.
- [5] W. Khalil and E. Dombre, "Modeling, Identification and Control of Robots.", 2002.