PRES LUNAM
Ecole Doctorale STIM
Sciences et Technologies de
l'Information et Mathématiques

Spécialité : Mathématiques
Laboratoire : Laboratoire Jean Leray
Equipe : Topologie, Géométrie et Algèbre

Géométrie de contact et théorie des noeuds

Thomas Guyard
Mèl : thomas.guyard@univ-nantes.fr

Résumé : Nous proposons ici l'étude des noeuds legendriens. Nous étudierons d'abord les noeuds classiques dans $\mathbb{R}^3$ ainsi que les principaux outils associés. Différentes notions d'équivalence de noeuds seront comparées. Pour raffiner ces outils, nous étudierons ensuite la géométrie de contact afin de transposer les outils de la théorie classique des noeuds dans la théorie des noeuds legendriens. Cela sera fait dans le cadre particulier de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure standard. Nous vérifierons que cet exemple particulier reste un cadre suffisament général de la théorie classique. Une fois que tous les outils de la théorie classique seront transposés en géométrie de contact, nous pourrons définir un premier invariant : l'invariant de Thurston-Bennequin. Nous pourrons le calculer de manière simple et combinatoire. Pour finir, nous évoquerons le problème de la stabilisation qui se pose en géométrie de contact.

Mots clés : *noeud,structure de contact,carte de Darboux,invariant de Thurston-Bennequin, stabilisation*

1 Théorie des noeuds

On présente ici succintement les bases de la théorie des noeuds.

Définition 1.1 *Un noeud est un plongement de S^1 dans $\mathbb{R}^3$ (ou S^3). C'est-à-dire une application continue qui induit un homémorphisme sur son image.*

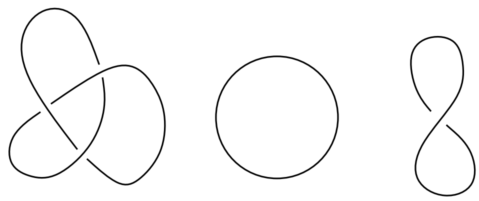

FIGURE 1 – Exemple de noeuds (dans l'ordre : noeud de trêfle, noeud trvial, noeud trivial à 1 croisement

Par abus de language, un noeud désigne à la fois la fonction, son image et son diagramme.

Le noeud est ainsi une ficelle idéalisée (sans épaisseur et élastique) sans extrémité. On veut classer les noeuds. Pour cela, il faut définir une équivalence de noeuds qui permettra de les rassembler. La plus naturelle est la notion d'isotopie :

Définition 1.2 *Une isotopie entre deux noeuds f_0 et f_1 est une application continue $h : S^3 \times [O; 1] \to S^3$ telle que $\forall x \in S^3 h(x, 0) = f_0(x)$ et $h(x, 1) = f_1(x)$.*

L'isotopie correspond au fait de déplacer continuement un noeud dans l'espace, en gardant à chaque moment le fait qu'il est un noeud. Le problème est que tout noeud est isotope au noeud trivial (qui correspond au noeud non noué) comme on peut le voir sur la Figure 2.

Il faut donc une autre notion d'équivalence pour les noeuds. On raffine la notion d'isotopie pour l'appliquer à tout l'espace.

Définition 1.3 *Une isotopie ambiante entre deux noeuds f_0 et f_1 est une application continue $H : S^3 \times [O; 1] \to S^3$ telle que $H(x, 0) = x$ et $H(f_0(x), 1) = f_1(x)$.*

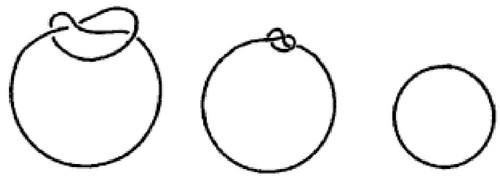

FIGURE 2 – Problème de l'isotopie simple

Contrairement à l'isotopie simple, l'isotopie ambiante déforme tout l'espace pour superposer les deux noeuds. On dira que deux sont équivalents s'il existe une isotopie ambiante entre les deux et on a Il faut maintenant trouver comment caractériser l'existence d'isotopie ambiante entre deux noeuds. Pour cela, on va chercher des invariants, c'est à dire associer à chaque noeud un élément (un nombre, une fonction, un groupe ...) tel que si deux noeuds sont équivalents alors l'invariant est le même sur les deux noeuds. Il existe de nombreux invariants (tricolorabilité, invariants polynomiaux,...).

Pour simplifier l'étude des noeuds, on utilisera les diagrammes de noeuds :

Définition 1.4 *Le diagramme d'un noeud est une projection admissible du noeud sur un plan, c'est-à-dire une projection dont les seuls points multiples sont des points doubles, isolés, dont les brins ne sont pas tangents ou confondus.*

Comme il est difficile de visualiser et manipuler un objet dans l'espace, on travaillera principalement sur les diagrammes de noeud qui sont des objets du plan. De plus on indiquera sur chaque croisement du diagramme, le brin qui passe dessous et celui qui passe dessus. Ainsi tout noeud peut être projeté en un diagramme et à partir de chaque diagramme on peut retrouver le noeud initial à isotopie ambiante près. Pour travailler sur les diagrammes de noeuds, il faut établier une équivalence de diagrammes qui correspond à l'isotopie ambiante sur les noeuds.

Définition 1.5 *Deux diagrammes de noeuds sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par des isoptopies planes et un nombre fini de mouvements de Reidemeiseter de type I,II ou III.*

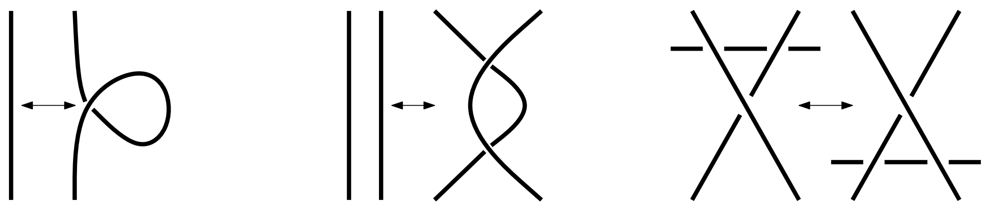

FIGURE 3 – Mouvements de Reidemeister I, II et III

Théorème 1.1 *Deux noeuds sont équivalents si et seulement si tous leurs diagrammes sont équivalents.*

Ceci nous donne donc un moyen pour travailler sur les diagrammes de noeuds. On peut maintenant trouver des invariants calculés sur les diagrammes. Pour prouver que ce sont bien des invariants de noeuds, il suffira de démontrer que ces invariants restent inchangés sur les mouvements de Reidemeister (et les isotopies planes), respectant ainsi l'équivalence de diagramme et de noeuds.

2 Géométrie de contact

Le but de cette section est de définir la géométrie de contact ansi qui les outils qui permetteront de l'appliquer aux noeuds. Les noeuds sont des objets topologiques et l'idée ici est de leur rajouter une structure plus rigide (afin de permettre plus de constructions) mais qui ne soit pas trop contraignante.

Définition 2.1 *Une strucute de contact ξ sur une variété de dimension 3 est un champ de plans tangents (plus généralement d'hyperplans) qui est complètement non-intégrable. Localement ξ est le noyau d'une forme de contact α avec α une 1-forme diférentielle telle que $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule en aucun point.*

Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$:
Sur $\mathbb{R}^3$, on a la structure suivante $\xi_{std} = ker(\alpha_{std})$ où $\alpha_{std} = dz - ydx$. Cette structure est appelée structure standard car toute autre structure de contact ressemble localement à cette strucutre.

Théorème 2.1 (Théorème de Darboux[1]) *Sur une variété M de dimension 3 une structure de contact se définit localement par une forme de contact α. Tout point x de M possède un voisinage qui est le domaine d'une carte locale envoyant x sur 0 dans $\mathbb{R}^3$ et α sur α_{std}. Ces cartes sont appelées cartes de Darboux.*

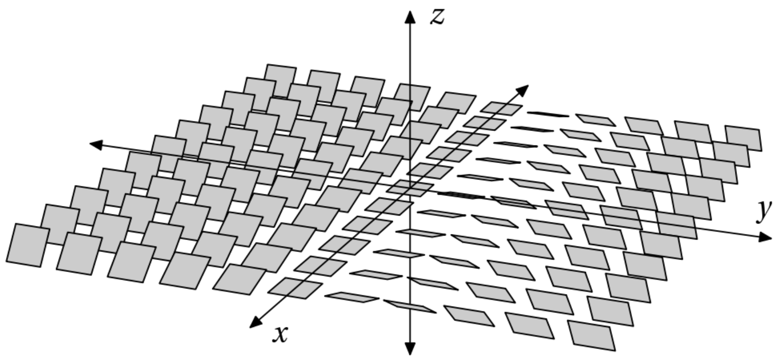

FIGURE 4 – Structure de contact standard

Ainsi les problèmes qui se posent en géométrie de contact sont des problèmes globaux car tous les problèmes locaux peuvent être étudiés dans $\mathbb{R}^3$.

3 Théorie des noeuds Legendriens

On s'intéresse maintenant aux noeuds qui respecte la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.1 *Un noeud est legendrien s'il est en tout point tangent à la structure de contact.*

Les noeuds doivent donc suivre le champ de plans locaux défini par ξ. Pour que cette étude soit intéressante, il faut vérifier que la théorie des noeuds legendriens est aussi générale que celle des noeuds. Autrement dit, il faut que tout noeud se déforme (par isotopie ambiante) en un noeud legendrien. Ainsi chaque classe d'isotopie de noeud possèdra au moins un représentant legendrien.

Pour cela, au lieu de déformer les noeuds, on va s'intéresser à leur diagramme.
Soit p la projection $(x, y, z) \to (x, z)$, p est appelée projection frontale (ou front d'onde). Un noeud K est legendrien si $\alpha|_K = 0$. Cette condition projetée sur le plan (x,y) donne $y = \frac{dz}{dx}$. Autrement dit, la tangente un point (x, y) diagramme donne y tel que le relevé du diagramme en (x, y, z) soit legendrien. La tangente du diagramme doit donc varier continument et ne jamais etre verticale. Ainsi on peut transformer un diagramme quelconque en un diagramme de noeud legendrien (les points de rebroussements correspondent à des boucles dans $\mathbb{R}^3$) [2] :

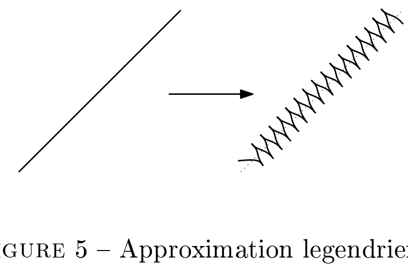

FIGURE 5 – Approximation legendrienne

Ainsi on montre que l'étude des noeuds legendriens ne perd pas en généralité.

3.1 Invariant de Thurston-Bennequin

On va maintenant pouvoir définir un premier invariant de noeuds legendriens.

Définition 3.2 *Soit K un noeud legendrien, l'invariant de Thurston-Bennequin de K noté $tb(K)$ est l'enlacement de K avec K' où K' est obtenu en déplacement légèrement K le long d'un flot non-singulier transverse à ξ. On a aussi une définition sur les diagrammes : $tb(K) = w(K) - \frac{1}{2}c(K)$ avec $w(K)$ le nombre de croisements (comptés avec signe) de la projection frontale et $c(K)$ le nombre de point de rebroussement.*

Théorème 3.1 *L'invariant de Thurston-Bennequin est bien un invariant de noeuds legendriens. Autrement dit si K et K' sont isotopes (d'un point de vue legendrien) alors $tb(K) = tb(K')$.*

Pour démontrer que c'est bien un invariant, il faut regarder les mouvements de Reidemeister legendriens. Il suffit ensuite de vérifier que l'invariant de Thurston-Bennequin ne change pas sur les deux parties de chaque mouvement de Reidemeister. Pour cela, on utilise la définition de l'invariant par sa formule sur les diagrammes et on le calcule sur les mouvements suivants (le mouvements de type III ne change pas) [3] :

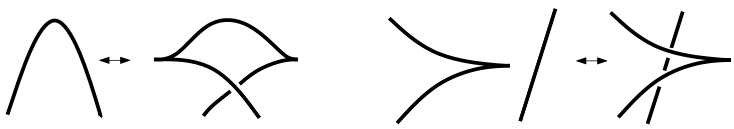

FIGURE 6 – Mouvements de Reidemeister legendriens de type I et II

Pour R_I, le nouveau croisement est compensé par les deux nouveaux points de rebroussements. Pour R_{II}, les deux nouveaux croisements sont de signes opposés et donc s'annulent. R_{III} ne change pas le nombre de croisements ou de points de rebroussement. Donc l'invariant de Thruston-Bennequin est bien un invariant de noeud.

3.2 Problème de la stabilisation

L'invariant de Thurston-Bennequin fait apparaitre un problème. Pour un noeud donné, il est possible de baisser l'invariant de Thurston-Bennequin en suivant l'opération dite de stabilisation :

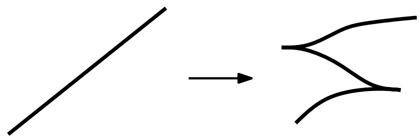

FIGURE 7 – Stabilisation

Cette opération change la nature du noeud legendrien : Si K est un noeud et K_s est la stabilisation du noeud, on a $tb(K_s) = tb(K) - 1$. Mais cette opération ne change pas le noeud dans la théorie classique. Ainsi on peut avec un même noeud obtenir deux noeuds legendriens différents au sens legendrien.

Problèmatique : Comment trouver un invariant de noeud legendrien qui reste invariant par stabilisation ? Existe-il d'autres opérations qui transforme un même noeud en deux noeuds legendriens différents ?

Références

[1] Emmanuel Giroux. Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg). *Astérisque*, (216) :Exp. No. 760, 3, 7–33, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.

[2] John B. Etnyre. Legendrian and transversal knots. In *Handbook of knot theory*, pages 105–185. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[3] Baptiste Chantraine. *Cobordismes Lagrangiens des Noeuds Legendriens.* PhD thesis, Université du Québec à Montréal, 2009.