

Problème H2 bien posé pour la commande optimale à 2 degrés de liberté

Clement Fauvel

Mél : clement.fauvel@mines-nantes.fr

Résumé : Prédictive et robuste sont deux propriétés que doit impérativement vérifier toute loi de commande digne de ce nom ; on sait aujourd'hui formaliser explicitement le processus d'une synthèse robuste d'un côté (au moins dans un cadre linéaire étendu) et prédictive de l'autre. Une idée force de ma thèse est de précalculer un régulateur optimal H2 et d'en faire usage pour le développement de lois de commande prédictives peu gourmandes en ressources de calcul, et donc applicable dans le cadre de systèmes dynamiques « rapides ». La classe de modèles visée concerne les modèles simplifiés de systèmes de gestion énergétiques tels que proposés par la société SHERPA Engineering. L'article focalise sur la mise en forme d'un problème de commande par retour d'état à deux degrés de liberté sous la forme d'un problème H2 structuré, sur sa résolution, et sur son exploitation méthodologique.

Mots clés : *Problème d'optimisation, commande H2, bien-posé, régulateurs structurés*

Collaborations : Projet SHERPA ENGINEERING

1 Introduction

La synthèse multi-objectifs de compensateurs soumis à des contraintes structurelles fait l'objet d'une demande récurrente de la part des industriels. Les objectifs poursuivis peuvent être de différentes natures, mais force est de constater que beaucoup s'exprime sous la forme de normes sur les signaux ad hoc, autrement formulées comme norme H2 ou Hinf sur certains transferts en boucle fermée. Les techniques existantes, à base de formulation LMI notamment, se révèle être d'une efficacité relative, car la présence de contraintes structurelles sur le régulateur ne permet pas de formaliser le problème de synthèse sous la forme d'un problème d'optimisation convexe.

Une autre voie consiste à faire appel à de l'optimisation non convexe, sans chercher nécessairement une relaxation. On peut alors utiliser des algorithmes itératifs procédant à chaque itération à une optimisation convexe (algorithme ILMI ; cf. e.g. [1, 2], soit encore à des algorithmes d'optimisation non lisse ([3, 4]). L'un des intérêts de procéder à une optimisation directe des paramètres d'un régulateur de structure fixée a priori est que le nombre de variables de décision n'est plus directement dépendant de l'ordre du modèle standard supportant la synthèse. A contrario, les méthodes à base de LMI procèdent indirectement, et déduisent le régulateur de problèmes d'optimisation possédant un grand nombre de variables de décision. Quoiqu'il en soit, procédant par optimisation paramétrique non convexe, on perd la garantie d'obtenir une solution globale.

Des contraintes structurelles sur les régulateurs apparaissent pour diverses raisons. Celle qui nous intéresse ici concerne la lisibilité du correcteur ([5, 6]). A l'évidence, un correcteur facile de compréhension, permet une plus grande maîtrise de sa réalisation embarquée. Les structures du type estimation/commande, présentent des caractéristiques particulièrement intéressantes de ce point de vue. Elles font intervenir explicitement les paramètres du modèle du processus, ainsi qu'une estimation de son état instantané dont le sens physique est le plus souvent explicite. La forme structurée correspondante est paramétrée par deux « gains » (matrices) : le gain du retour d'état et celui de l'observateur [6, 7, 1].

Pour donner davantage de sens physique encore à la forme structurée du régulateur, nous supposons ici disposer, en sus du modèle du processus, du modèle de son « environnement ». Le modèle de l'environnement du processus est un exosystème qui regroupe les modèles des signaux exogènes, qu'il s'agisse de perturbations ou de consignes. On s'inspire ici de travaux anciens tels que [8, 9, 10], en privilégiant pour l'exo-système un positionnement amont (signal entrant). Cet exo-système peut être perçu, dans le cadre H2 ou Hinf comme une pondération fréquentielle [11, 12]. L'avantage de procéder ainsi a bien été perçu et popularisé par P. de Larminat, par le biais du « contrôle d'état standard » ([12] et référence incluses). Il a également été souligné dans [7] qui met lui l'accent sur le caractère non biaisé de l'observateur sous-jacent (l'observateur reconstruit simultanément l'état du processus et des perturbations).

La structure a été choisie à des fins particulières, qui nous conduisent à nommer *commande de référence* (resp. *états de références*) le signal $u_{ref} = Gx_w$ (resp. $x_{ref} = Tx_w$). $\tilde{x}_p = x_p - x_{ref}$ et $\tilde{u}_p = u - u_{ref}$ s'en déduisent et constituent les signaux d'écart. Z , signal vectoriel résultant de la pondération de ces

écarts, définit le critère à optimiser. w est un signal irréductible et Y le vecteur des sorties accessibles au régulateur.

$$(\Sigma_s) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_w \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_p \\ x_w \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix}}_{B_1} w + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{p2} & 0 & B_{p2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} U_s \\ Z = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix}}_{C_1} \begin{bmatrix} x_p \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{121}^1 & 0 & D_{122}^1 \\ D_{121}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{12}} U_s \\ Y = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} x_p \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{22}} U_s \end{cases} \quad \text{et } K_s = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & T \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (1)$$

Il s'agit alors de déterminer K_s stabilisant le processus et minimisant le problème **H2_RES** défini par : $K_{s_{opt}} = \begin{bmatrix} K_{opt} & 0 \\ 0 & T_{opt} \\ 0 & G_{opt} \end{bmatrix} = \arg \min_{K, G, T} \|T_{zw}\|_2$, sachant que $T_{zw} = \mathcal{F}_l(\Sigma_s, K_s)$. Ceci revient à minimiser la réponse impulsionnelle du système bouclé au travers du critère quadratique :

$$J_s = \int_0^\infty \left(\tilde{x}_p^T(t) Q \tilde{x}_p(t) + 2\tilde{x}_p^T(t) S e_u(t) + e_u^T(t) R e_u(t) \right) dt \quad \text{Avec} \quad Q = C_1^T C_1 \quad S = C_1^T D_{12} \quad R = D_{12}^T D_{12} \quad (2)$$

Par ailleurs, on retiendra les deux propriétés suivante :

Propriété 1 (Equivalence avec le problème H2-LQ classique).

Lorsque $G = 0$ et $T = 0$ (trajectoires de référence nulles) on retrouve le critère LQ classique :

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t) Q x(t) + 2x^T(t) S u_p(t) + u_p^T(t) R u_p(t) \right) dt \quad (3)$$

Propriété 2 (Régulateur à 2 DOF).

Le régulateur ainsi synthétisé appartient à la classe des correcteurs à deux degrés de liberté. Par transformations, il peut se réécrire sous la forme feedback/feedforward (FB/FF) $u_p = K_{FB}x_p + K_{FF}x_w$ avec $K_{FB} = K$ et $K_{FF} = KT + G$

Une telle structuration à l'avantage de laisser apparaître plusieurs éléments non-systématiquement visibles (caractère *physique* des signaux et critère optimisé). La synthèse directe du régulateur pris sous cette forme est cependant rendue délicate par la structuration et la présence d'une boucle algébrique (i.e. D_{22} non-nul)

La section suivante présente les pistes de résolution envisagées.

3 Résolution du problème bien-posé

Le problème **H2_RE** ainsi formulé et bien posé à la fois du point de vue de l'optimisation (cf. théorème 1) que d'un point de vue méthodologique : on peut très bien utiliser une trajectoire de référence définie par ailleurs (par inversion directe ou à travers la sortie plate, occultation, etc.), ouvrir la boucle de la Figure 1 en u_{ref} et x_{ref} , et résoudre le problème d'optimisation résultant. Ceci étant, le problème **H2_RE** proposé est a priori difficile, relevant de l'optimisation non-convexe. Les algorithmes *hinstruct* [3] ou *HIFOO* [4] ont été spécifiquement développés pour résoudre cette classe de problèmes, et permettre l'optimisation directe des paramètres du régulateur plutôt que de passer par des variables de décision intermédiaires. On cherche ici malgré tout, à exploiter tout élément simplificateur lié à la nature particulière du problème considéré. Les résultats ci-dessous nous y aiderons.

Théorème 1.

Une solution au problème **H2_RE** existe dès lors que le processus est stabilisable. De plus, la solution optimale est telle que :

$$K_{s_{opt}} = \begin{bmatrix} K_{opt} & 0 \\ 0 & T_{opt} \\ 0 & G_{opt} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_{opt} = R^{-1} B_{p2}^T P \quad (4)$$

et ce indépendamment des valeurs particulières prises par la matrice A_w ; la matrice P peut être obtenue par résolution de l'équation de Riccati : $A_{11}^T P + P A_{11} - P B_{p2} R^{-1} B_{p2}^T P + Q = 0$.

Démonstration. Omise par manque de place. □

Théorème 2. Dans le cas où l'exo-système est anti-stable, la solution optimale en G et T peut être obtenue de manière analytique selon l'équation de Sylvester [12, 11].

De plus, la trajectoire (u_{ref}, x_{ref}) est une trajectoire possible pour le processus considéré.

Remarque 1. Lorsque l'exo-système est stable en revanche, la trajectoire de référence obtenue à l'issue de l'optimisation du problème **H2_RES** est dépendante de K_{opt} . Tirant parti du fait que K_{opt} peut être obtenue préalablement (cf. Théorème 1), on peut fixer $K = K_{opt}$ et ne réaliser l'optimisation que sur G et T ; ceci permet en outre de supprimer la boucle algébrique (i.e. D_{22} non-nulle). Dès lors que la dynamique de rétroaction visé est rapide en regard de celle de l'exos-système, il est judicieux d'initialiser l'optimisation non-convexe par la solution (G, T) du théorème 2.

4 Conclusion

Le problème **H2_RES** proposé dans cet article est important, au moins d'un point de vue méthodologique. Il permet simplement la formalisation d'un problème de commande à deux degrés de liberté sous la forme d'un problème d'optimisation intrinsèquement bien-posé. Faisant apparaître des grandeurs dont la signification physique est claire, il permet l'élaboration d'un régulateur particulièrement lisible. L'approche proposée permet de traiter le cas où l'exo-système est stable aussi bien qu'anti-stable. Elle est compatible par ailleurs avec les approches procédant en deux temps, pour lesquelles la trajectoire de référence est élaborée préalablement par inversion. Elle ouvre enfin des perspectives intéressantes, vers le cas du retour de sortie en utilisant un observateur, vers le cas de trajectoire connues à l'avance (H2-preview [14]). Elle peut enfin servir de support à la synthèse d'une commande MPC [15].

Références

- [1] Mohamed Yagoubi and Philippe Chevrel. An ilmi approach to structure-constrained lti controller design. In *ECC'01 European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.
- [2] Mohamed Yagoubi and Philippe Chevrel. An lmi based method for h2/hinfini control under sparsity constraints. In *16th IFAC World Congress*, Pragues, République Tchèque, 2005.
- [3] Pierre Apkarian, D Noll, and A Rondepierre. Mixed h2/h ∞ control via nonsmooth optimization. *SIAM, J. on Control and Optimization*, 47(3) :1516–1548, 2008.
- [4] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton. hifoo - a matlab package for fixed-order controller design and h ∞ optimization. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006.
- [5] Fabien Delmond. *Alternatives à la synthèse multi-objectifs : forme standard de passage et ajustement de loi de commande*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'ENSAE, 2005.
- [6] D Alazard and P Apkarian. Exact observer-based structures for arbitrary compensators. *International Journal on Robust Nonlinear Control*, 9 :101–118, 1999.
- [7] M Berriri, P Chevrel, Mohamed Yagoubi, and Fabien Claveau. Observer-based gain scheduling h ∞ controller for a 3 motors web transport system. In *5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, pages 232–237, Toulouse, 2006.
- [8] B.D.O Anderson and J.B. Moore. *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. 1989.
- [9] Lisa A. Sievers and Andreas H. Von Flotow. Comparison of two lqg-based methods for disturbance rejection. In *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on*, pages 483–485 vol.1, 1989.
- [10] H.G. Kwatny and K. C. Kalnitsky. On alternative methodologies for the design of robust linear multivariable regulators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 23(5) :930–933, 1978.
- [11] KZ Liu, H Zhang, and T Mita. Solution to nonsingular h 2 optimal control problem with unstable weights. *Systems & control letters*, 32 :1–10, 1997.
- [12] Philippe Chevrel. Méthodologie de la commande par approche d'état. In Philippe (sous la direction de) Larminat, editor, *Commande des systèmes linéaires*, chapter Chap. 5, page 288. Hermes Science, Paris, traité ic2 edition, 2002.
- [13] Yu Feng, Mohamed Yagoubi, and Philippe Chevrel. Control with unstable and nonproper weights for descriptor systems. *Automatica*, 48(5) :991–994, May 2012.
- [14] Louay Saleh. *Contrôle latéral partagé d'un véhicule automobile*. PhD thesis, Thèse de l'Ecole Centrale de Nantes, 2012.
- [15] Liuping Wang. *Model predictive control system design and implementation using MATLAB*. Springer Verlag, London, springer-v edition, 2009.