

DES MANUELS POUR UNE RÉNOVATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHÉMATIQUES : LE COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES SOUS LA DIRECTION DE DARBOUX (1894-1901)

Renaud, Hervé

Mél: herve.renaud@etu.univ-nantes.fr

Résumé : En 1902 eut lieu une réforme majeure du système français d'enseignement secondaire. Elle unifia un enseignement partagé entre enseignement classique et enseignement moderne et donna aux sciences une place qui leur était jusqu'alors contestée. En mathématiques, elle se traduisit par l'introduction de théories nouvelles dans l'enseignement comme l'analyse. Cette réforme profonde de l'enseignement des mathématiques marque l'aboutissement d'un mouvement qu'il faut analyser aussi bien dans un cadre épistémologique que dans un cadre institutionnel. Le XIX^e siècle est marqué par l'industrialisation du pays, par la nécessité de former des cadres ayant une culture scientifique. Mais une certaine élite sociale reste attachée à un enseignement dominé par l'étude du latin et du grec. En mathématiques, c'est le siècle de la recherche d'une rigueur démonstrative en analyse, qui se traduit par une nouvelle formulation des principes de l'arithmétique. La géométrie s'oriente vers une géométrie des transformations et elle voit l'invention des géométries non euclidiennes. Certaines de ces nouveautés vont trouver un écho dans des manuels scolaires qui influenceront la réforme de 1902.

1 Question de méthode : les sciences, l'éducation et la société

L'enseignement secondaire français au XIX^e siècle est l'héritier des lycées napoléoniens de 1802, un réseau de lycées, de collèges communaux et d'institutions libres (privées) sous l'autorité du ministre de l'Instruction publique secondé par le Conseil supérieur de l'instruction publique. L'enseignement des sciences y est réduit à la portion congrue, à l'exception de courtes périodes : la réforme dite de la bifurcation en 1852 voit, parallèlement à la filière littéraire, la création d'une véritable filière scientifique à l'issue de la classe de 4^e ; la réforme de 1880 sous le ministère de Jules Ferry développe l'enseignement des sciences. Ces réformes seront à chaque fois remises en question par les tenants d'un enseignement classique fondé sur les humanités gréco-latines.

L'industrialisation de la France qui s'accélère à partir de 1830, la nécessité qui s'ensuit de former plus de cadres, l'émergence d'une classe moyenne, contribuent au développement d'un enseignement secondaire à visée plus utilitaire aux côtés de l'enseignement classique. Dans cet enseignement sans latin ni grec, qualifié d'abord de spécial puis de moderne, les sciences et les langues vivantes trouvent une place plus importante. La réforme de 1902 unifiera ces deux ordres d'enseignement, reconnaîtra la place de l'enseignement des sciences et donnera à l'enseignement secondaire une structure stable qui se prolongera jusque dans les années 1960.

Etudier l'enseignement des mathématiques dans le secondaire durant cette période qui va de l'abandon de la réforme de la bifurcation à la réforme de 1902 c'est donc questionner le cadre institutionnel qui le conditionne. Mais c'est aussi interroger la recherche mathématique et ses liens avec l'enseignement. L'obligation faite aux mathématiciens d'enseigner a joué un rôle heuristique essentiel et les a conduits à renouveler la recherche sur les principes. L'analyse, puis l'arithmétique se sont détachées de la notion euclidienne de grandeur pour se fonder sur le seul nombre entier. Les méthodes d'invention en géométrie amenèrent à considérer les relations entre les objets mathématiques et conduisirent à une géométrie des transformations. C'est aussi dans la première moitié du XIX^e siècle que se développent les théories des géométries non euclidiennes. Arithmétique, analyse et géométrie fournissent la trame d'un cadre épistémologique, entre ruptures et permanences qu'il convient aussi d'analyser.

Les travaux décrits dans cet article portent essentiellement sur la dernière décennie du XIX^e siècle. Entre une réforme en 1890 qui ramène à son plus bas niveau l'enseignement des sciences dans le secondaire classique et la réforme de 1902 qui leur accorde une place qui ne sera plus vraiment contestée, se fait jour une volonté de rénovation des programmes de mathématiques du secondaire.

2 Le cadre institutionnel : l'enseignement secondaire aux débuts de la III^e République [1]

L'enseignement secondaire est, au XIX^e, est un enseignement destiné à une élite sociale qui s'ouvre progressivement aux classes moyennes émergentes. Il s'agit d'un enseignement réservé aux garçons fréquenté par environ 160 000 élèves partagés à peu près équitablement entre établissements publics et établissements privés.

La III^e République instaurée après la défaite de 1870, est dominée à ses débuts par les conservateurs

(monarchistes et bonapartistes) et ne s'installe que progressivement. Il faut attendre 1879 pour que les républicains disposent de tous les leviers du pouvoir. Durant cette décennie, l'Instruction publique connut peu de réformes marquantes. Le baccalauréat ès sciences resta inchangé. On le présentait soit directement après le baccalauréat ès lettres, soit après la classe de mathématiques élémentaires. Pouvaient accéder à cette dernière les bacheliers ès lettres ou les élèves issus de la classe de rhétorique. Il était aussi possible d'y parvenir après une année de classe préparatoire à l'issue de la classe de 3^e ou de 2nde. Le baccalauréat ès sciences était la clef qui ouvrait la porte de la classe de mathématiques spéciales préparant aux prestigieuses écoles du gouvernement : l'école Polytechnique, Saint Cyr, l'École normale supérieure, etc.

2.1 L'impulsion réformatrice : 1879-1890

A leur arrivée au pouvoir, les républicains vont appliquer leur programme de réformes de l'Instruction publique. Ils interprétaient la défaite de 1870 comme la victoire de la science allemande et comme celle de l'instituteur prussien sur le frère des écoles chrétiennes. Leurs réformes sont empreintes de cette interprétation.

La décennie est riche en textes nouveaux. Dans le secondaire, la réforme de 1880 citée plus haut prévoyait de la classe de 6^e à la classe de rhétorique trois heures hebdomadaire d'enseignement des sciences (quatre heures en 5^e) : mathématiques, sciences physiques et sciences naturelles. En classe de philosophie (terminale), la réforme instituait neuf heures de sciences. Mais, ne modifiant presque pas les horaires des matières littéraires, cette réforme créait une surcharge de travail pour les lycéens. Les allègements de 1885 portèrent sur le Français, les langues vivantes et les sciences, sans toucher au latin et au grec. Cette victoire des anciens sur les modernes fut celle des politiques conservateurs, de l'opinion publique, mais aussi des enseignants appelés à s'exprimer à son sujet au travers des conseils de professeurs et du Conseil supérieur de l'instruction publique.

Au cours de cette décennie l'enseignement spécial sera lui aussi profondément remanié : la durée des études passe de quatre à six ans et un baccalauréat de l'enseignement spécial est créé en 1882. Les programmes sont modifiés, rapprochant l'enseignement spécial de l'enseignement classique.

2.2 Les réformes de 1890-1891 : contre l'enseignement des mathématiques

Les nouveaux programmes de l'enseignement classique arrêtés au début de 1890 semblèrent marquer la victoire définitive des conservateurs sur la réforme de 1880. Les sciences en firent les frais. L'enseignement des mathématiques fut réduit à 1h20 hebdomadaire en 6^e et 5^e, 1h1/2 en 4^e, 3h en 3^e et 1h1/2 en 2nde et rhétorique.

Puis ce fut la suppression du baccalauréat ès sciences. Tous les élèves de l'enseignement classique devaient passer par la classe de rhétorique pour choisir ensuite entre la classe de philosophie et la classe de mathématiques élémentaires. Cette réforme fut complétée en 1891 par la réforme de l'enseignement spécial qui prit le nom d'enseignement moderne. Le baccalauréat auquel il conduisait fut partagé en trois options dont l'option Lettres-mathématiques destinée à remplacer le baccalauréat ès sciences. Les opposants à la réforme prévoyaient la fuite d'un certain nombre d'élèves de l'enseignement classique vers l'enseignement moderne.

Simultanément, le baccalauréat de l'enseignement moderne fut doté de nouvelles prérogatives. Les facultés des sciences, l'école Polytechnique étaient déjà ouvertes aux titulaires du baccalauréat spécial. Saint Cyr, la section sciences de l'École normale supérieure, les facultés de pharmacie, leur devenaient accessibles.

L'enseignement moderne apparut alors à certains comme une menace contre l'enseignement classique.

3 Le « Cours complet de mathématiques élémentaires » sous la direction de Gaston Darboux

C'est cependant durant cette décennie, au moment où l'enseignement des mathématiques dans le secondaire classique était à son étiage, que fut publié un ensemble de cinq livres destinés à la classe de mathématiques élémentaires : le « Cours complet de mathématiques élémentaires », sous la direction du mathématicien Gaston Darboux¹. Leur aspect novateur, tant dans le fond que sur la forme, était un plaidoyer pour une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. Les nombreuses éditions qu'ils connaîtront sont un indicateur de leur influence dans les décennies suivantes.

3.1 Le directeur de publication et les auteurs : d'anciens normaliens

Gaston Darboux est, dans les années 1890, une personnalité éminente des mathématiques françaises. Reçu premier en 1866 à Polytechnique et à l'École normale supérieure, il fut le premier à avoir opté pour cette dernière. On date habituellement de cette période, sous l'administration de Pasteur, le basculement de la

¹ Un sixième livre, *Leçons de Cosmographie*, de F. TISSERAND et H. ANDOYER complète ce cours.

formation des mathématiciens français de Polytechnique vers l'École normale supérieure.

Son œuvre mathématique est considérable dans les décennies qui suivent : plus d'une soixantaine de textes publiés dans diverses revues, essentiellement en géométrie analytique mais aussi en analyse et en mécanique. Citons en analyse son *Mémoire sur les fonctions discontinues*. Les fonctions discontinues, ou continues mais non dérivables étaient laissées de côté par bien des mathématiciens français. Le mémoire de Darboux qui approfondissait la notion de continuité fut reçu froidement par la communauté des mathématiciens français [2].

Darboux, qui a succédé à Chasles en 1880 à la Sorbonne dans la chaire de Géométrie supérieure, occupe, au début des années 1890, de multiples fonctions institutionnelles. Doyen de la faculté des sciences, membre du Conseil supérieur de l'instruction publique, il fait partie de la commission des programmes qui, à l'occasion de la réforme de 1890, redéfinit ceux de la classe de mathématiques élémentaires.

Darboux n'a rédigé aucun des manuels de ce cours mais lui a donné une direction indiquée par chacun des auteurs dans leurs préfaces respectives. Le livre d'arithmétique est de Jules Tannery, sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure, lui aussi ancien élève de cette école. Les quatre autres manuels sont l'œuvre de jeunes mathématiciens prometteurs, eux aussi anciens élèves de l'École : Carlo Bourlet pour l'algèbre et la trigonométrie rectiligne ; Jacques Hadamard pour la géométrie plane et la géométrie dans l'espace [3]. Jules Tannery joue un rôle intermédiaire dans ce quatuor. Ancien élève de Darboux, de quelques années son cadet, il a été le professeur de Bourlet et Hadamard. L'attribution du manuel d'arithmétique à Tannery correspond parfaitement à l'intérêt manifesté par ce dernier pour la question des principes mathématiques.

3.2 Un cours destiné aux professeurs de la classe de mathématiques élémentaires, un réseau composé principalement d'anciens normaliens

Les premiers lecteurs du cours sont les professeurs de la classe de mathématiques élémentaires. Ils sont relativement peu nombreux. En 1890 on en compte trente quatre dans les lycées de province dont vingt trois au moins sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure. Parmi ceux-ci, dix sept sont d'anciens élèves de Darboux et Tannery. La proportion d'anciens élèves de Darboux et Tannery est plus faible parmi les vingt et un professeurs de mathématiques élémentaires des lycées parisiens, en raison de la plus grande ancienneté dans le métier de ces derniers. Un tel relevé effectué en 1894, date de parution du premier manuel, renforcerait la proportion d'anciens élèves de Darboux et Tannery par le simple jeu des promotions et départs à la retraite.

Un public composé pour partie d'anciens élèves n'est pas nécessairement un public acquis. Mais des lecteurs retrouvant le style et les conceptions mathématiques de leurs anciens maîtres forment un public plus attentif, plus facile à convaincre. Cela a sans doute compté dans le succès d'édition que connut ce cours.

3.3 Les Leçons d'Arithmétique de Tannery : des principes aux théories les plus récentes

Le livre renverse les présentations traditionnelles de l'arithmétique fondée sur les grandeurs². Les nombres vont devenir premiers et les grandeurs, ensembles munis des propriétés adéquates, y seront définies par correspondance univoque (bijection) entre les nombres, rationnels et irrationnels et les états de la grandeur. Cette présentation s'inscrit dans la continuité des travaux de Bolzano durant les années 1810 [3]. Ce mathématicien avait proposé une définition de la continuité dans son sens actuel et proposé une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires qui refusait le recours à l'intuition géométrique. Ceci avait conduit à l'introduction des nombres irrationnels : travaux de Méray (1869), Cantor, Heine et Dedekind (1872). Les *Leçons d'arithmétique* présentent d'ailleurs une construction des irrationnels par les coupures, la méthode de Dedekind.

Le questionnement sur les principes s'était étendu aux nombres entiers et aux fractions. Le livre de Tannery s'en fait l'écho. Partant du nombre cardinal comme l'idée même d'une collection d'objets distincts, il propose une définition des fractions qui se passe des grandeurs.

Un dernier chapitre propose des éléments de la théorie des nombres. Tannery y introduit la théorie des congruences développée notamment par Euler, Legendre, Gauss et utilisée par Kronecker. L'auteur y propose en particulier deux démonstrations du théorème de Fermat, la loi de réciprocité quadratique et la théorie des indices qu'il applique à la résolution des congruences du premier degré. Aucune des notions développées dans ce chapitre ne figure au programme de la classe de mathématiques élémentaires, ni même au programme de la classe de mathématiques spéciales. Il faut probablement lire ce que Tannery appelle une « introduction à l'Arithmétique supérieure » comme une tentative d'introduction de cette théorie dans de futurs programmes.

3.4 Les Leçons d'Algèbre de Bourlet : l'analyse accessible aux élèves du secondaire

Les programmes de 1891 ont placé les nombres positifs et négatifs au début de l'algèbre. Pour les introduire,

² Une grandeur étant alors « tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution »

Bourlet s'appuie sur la notion de segments portés par un axe (les vecteurs), théorie qui doit selon lui faciliter l'introduction des nombres négatifs [4].

Cette approche des nombres relatifs n'est pas le seul aspect novateur du texte de Bourlet. On y trouve, pour la première fois dans l'enseignement secondaire classique des éléments d'analyse. La notion de fonction dérivée y est définie et utilisée pour l'étude des variations d'une fonction. Ceci passait à l'époque pour une « hardiesse » selon le mot de l'auteur. Hardiesse mesurée puisque préparée, dès 1891, par son introduction dans les programmes de l'enseignement moderne. L'enseignement moderne, banc d'essai de l'enseignement classique ? Où plutôt, pour les réformateurs de l'enseignement des mathématiques de la fin du XIX^e, un aiguillon destiné à faire avancer leurs idées de modernisation des programmes de sciences. Les mathématiques ne sont en effet pas seules en cause. La véritable introduction de l'analyse aura lieu à l'occasion de la réforme de 1902. Elle liera l'étude des fonctions à l'étude des phénomènes physiques.

Cependant, la pertinence de l'outil « fonction dérivée » en sciences physiques, ou l'intérêt d'une méthode générale pour l'étude des variations d'une fonction comme la présente Bourlet dans sa préface, ne suffisent probablement pas à eux seuls à justifier l'introduction de cette notion dans le secondaire. Après la définition des nombres irrationnels l'analyse ne rencontrait plus aucun obstacle épistémologique. Il devenait donc possible d'enseigner à des élèves du secondaire une science à présent totalement constituée.

3.5 Les Leçons de Géométrie de Hadamard : des questions de définitions

Nous nous contenterons d'évoquer deux points du manuel de géométrie plane de Hadamard. Ils ne font pas partie des leçons proposées dans le texte lui-même qui, comme ceux de Tannery et Bourlet s'apparente à un plaidoyer pour l'introduction de notions nouvelles dans les programmes. Il s'agit de deux notes situées à la fin du livre, révélatrices encore une fois du cadre épistémologique dans lequel s'inscrit ce cours.

La première porte sur la notion d'aire. Hadamard rappelle que la définition habituelle de la notion d'aire repose sur le postulat suivant : on peut faire correspondre à chaque polygone plan un nombre, appelé son aire vérifiant notamment la propriété d'additivité. Hadamard nie la nécessité d'un tel postulat. Il en propose une démonstration, définissant l'aire d'un triangle comme le produit d'un de ses côtés par la hauteur correspondante, multiplié par un coefficient k pour lequel il justifiera ensuite le choix de $1/2$.

La deuxième note concerne le postulat des parallèles d'Euclide. Hadamard cite les géométries non-euclidiennes de Bolyai et Lobatchevski. Ces théories qui datent des années 1830 n'avaient été admises que tardivement par les mathématiciens. Des démonstrations du postulat des parallèles étaient encore proposées dans les années 1870. En cette fin de siècle, comme pour l'analyse, la rupture épistémologique est consommée et les auteurs du cours considèrent, qu'à défaut d'enseigner ces nouvelles géométries, les élèves doivent savoir que ce postulat d'Euclide n'est, comme l'indique Poincaré, qu'une définition.

4 Conclusion

Tentatives de modification des programmes et de la pédagogie, les nouveautés proposées par ce cours connaîtront des fortunes diverses. Nous l'avons vu, l'analyse sera retenue. Les nouveautés en géométrie seront accentuées et l'introduction des irrationnels se fera timidement en classe de mathématiques spéciales. Mais la théorie des congruences attendra longtemps avant d'être admise dans les programmes du secondaire, et la définition d'une grandeur du livre d'arithmétique n'aura pas de suite. Quoi qu'il en soit, ce cours fera date dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques.

Références

- [1] Ce paragraphe s'appuie notamment sur les livres de A. PROST, *Histoire de l'enseignement en France 1800-1967*, Paris : Armand Colin, 1968 et de B. BELHOSTE, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels*, Paris : Economica, 1995
- [2] H. GISPERT, « Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880) », *Revue d'histoire des sciences*, tome 43, n° 2-3, p. 181-220, 1990
- [3] Les livres de ce cours, tous publiés chez Armand Colin (Paris) sont : J. TANNERY, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, 1894 ; C. BOURLET, *Leçons d'Algèbre élémentaire*, 1896 et, *Leçons de trigonométrie rectiligne*, 1898 ; J. HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire (géométrie plane)*, 1898 et *Leçons de géométrie élémentaire (géométrie dans l'espace)*, 1901
- [4] Voir le livre de J. BONIFACE, *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Paris : Ellipses, 2002
- [5] Voir la thèse de A-J. GLIERE, *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours*, EHESS, Paris, 2007