PRES LUNAM
Ecole Doctorale STIM
Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques

**Spécialité :** Mathématiques
**Laboratoire :** LAREMA
**Equipe :** Analyse, Probabilités et Statistique

**Sur les revêtements ramifiés de la sphère.**

Tomasini Jérôme
Mél : tomasini@math.univ-angers.fr

**Résumé :** Le développement de ce sujet repose sur deux objectifs distincts. Premièrement, nous nous intéressons à la notion de revêtements ramifiés génériques de la sphère par elle-même, que nous définirons au préalable, afin de lui associer une structure combinatoire simple définie à l'aide de carte planaire, permettant par ailleurs une classification de ces objets mathématiques. Cette première partie repose sur un résultat démontré par W.Thurston qui n'a encore jamais été publié à ce jour. Puis, dans un second temps, nous étudierons le problème lié à la réalisabilité de revêtement ramifié (général) de la sphère en essayant d'y apporter un point de vue novateur dans le but de mieux cerner ce problème qui reste encore très mal compris des mathématiciens malgré quelques récents progrès dans le domaine proposés d'abord par K.Baranski[1] puis par H.Zheng[2].

**Mots clés :** *Revêtement ramifié, réalisabilité, carte planaire, problème de Hurwitz.*

# 1 Introduction.

Soient $M$, $N$ deux espaces topologiques fermées connexes, et $f : M \to N$ une application continue de $M$ dans $N$. On dira que $f$ est un revêtement de $N$ par $M$ de degré $d > 1$ si $f$ est surjective, et pour tout $x \in N$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ tel que l'image réciproque de $U$ par $f$ soit une union disjointe de $d$ ouverts de $M$, chacun homéomorphe à $U$.
De même, on dira que $f$ est un revêtement ramifié de degré $d > 1$ s'il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \dots, x_n \in N$ tels que $f_{|M\setminus f^{-1}(\{x_1,x_2,\dots,x_n\})}$ est un revêtement de $N \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de degré $d$, et pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $k_i > 0$ points $c_{i,1}, \dots, c_{i,k_i} \in M$ et $k_i$ entiers positives $d_{i,1}, \dots, d_{i,k_i}$ telles que :

- $d_{i,j} > 1$ pour un $j \in \{1, \dots, k_i\}$.
- $\sum_j d_{i,j} = d$.
- pour tout $j = 1, \dots, k_i$, il existe un voisinage ouvert $U_{i,j} \subset M$ de $c_{i,j}$, avec $f(c_{i,j}) = v_i$, tel que $f$ est conjugué à la fonction $z \mapsto z^{d_{i,j}}$.

Ainsi, chaque revêtement ramifié $f$ définit une donnée d'entier $\mathcal{D}(f) = [d_{i,j}]_{i,j}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, k_i$ qui est appelée le passeport de $f$.

**Ex :** $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto z^d$ est un revêtement ramifié de $\hat{\mathbb{C}}$ par $\hat{\mathbb{C}}$ de passeport $\mathcal{D}(f) = [[d], [d]]$.

En posant $\nu(x_i) = \sum_{j=1}^{k_i} d_{i,j} - 1 = d - k_i$, on définit la ramification totale de $f$ par $\nu(\mathcal{D}(f)) = \sum_i \nu(x_i)$. Maintenant, $M$ et $N$ étant fixé, la question qui se pose est étant donné un passeport $\mathcal{D}$ donné, existe-t-il un revêtement ramifié $f : M \to N$ tel que $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}$. On dira alors que le passeport $\mathcal{D}$ est réalisable.

Évidemment, il existe de nombreuses conditions nécessaires pour que $\mathcal{D}$ soit réalisable, dont l'une des plus importante est donnée par la formule de Riemann-Hurwitz :

$$\chi(M) = d \cdot \chi(N) - \nu(\mathcal{D}), \tag{1}$$

où $\chi$ est la caractéristique d'Euler.

Ce genre d'étude remonte à la fin du 19ème siècle avec les travaux de Hurwitz qui a démontré en particulier que ce problème de réalisabilité est équivalent à trouver un ensemble de permutations dans le groupe symétrique $\sigma_d$ à $d$ éléments satisfaisant certaines conditions algébriques.

À partir de maintenant, nous supposerons toujours que $M = N = \mathbb{S}^2$. Remarquons que dans ce cas, la formule (1) de Riemann-Hurwitz implique que chaque passeport $\mathcal{D}$ réalisable doit satisfaire l'égalité $\nu(\mathcal{D}) = 2d - 2$. L'un des résultats les plus importants dans ce cas est le suivant : si un passeport $\mathcal{D}$ est réalisable par un revêtement ramifié $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ de degré $d$, alors il est également réalisable par une fonction rationnelle de degré $d$ sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Aussi, le problème de réalisabilité est ici équivalent à un problème d'existence de fonction rationnelle avec un degré et une combinatoire des valeurs et points critiques données (voir [3]).

Malgré quelques progrès récents sur le sujet (voir [1] et [2]), ce problème de réalisabilité reste encore mal compris par les mathématiciens, dans le sens où de nombreux résultats reste encore conjecturale, le plus symbolique étant le suivant :

**Conjecture 1.1** *Si $d$ est premier, alors tout passeport $\mathcal{D}$ (de degré $d$) est réalisable si et seulement si il satisfait la condition de Riemann-Hurwitz.*

Le but de cette article est de donner la construction d'un ensemble de graphe (proposé par W.Thurston) défini à l'aide de revêtement ramifié $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ générique de degré $d$, puis de donner certaines propriétés sur ces graphes afin de revenir sur l'étude du problème de réalisabilité, ce qui va permettre par exemple de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.2** *Tout passeport "polynomial" est réalisable.*

# 2 Première approche.

## 2.1 Rappel sur la théorie des graphes.

Un graphe planaire $G$ est un graphe connexe que l'on peut tracer sur le plan $\mathbb{R}^2$ de sorte que tous couples d'arêtes de $G$ ne s'intersectent qu'en un sommet de $G$. Une carte planaire est le plongement d'un graphe planaire sur la sphère $\mathbb{S}^2$ considérée à homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation. En d'autres mots, une carte planaire est simplement un graphe planaire tracé sur la sphère et défini à des déformations continues près.

L'une des relations fondamentales vérifiée par une carte planaire est la suivante : soit $G$ une carte planaire, $n_f$ le nombre de faces de $G$, $n_a$ le nombre d'arêtes de $G$ et $n_s$ le nombre de sommets de $G$, alors :

$$\text{(formule d'Euler)} \qquad n_f + n_s = n_a + 2. \tag{2}$$

Une autre notion qui sera très importante par la suite est la notion de degré. On définit le degré d'un sommet comme le nombre d'arêtes ayant pour extrémité ce sommet, compté avec multiplicité. Une carte planaire dont tous les sommets sont de même degré $k$ est appelée une carte $k$-régulière.

## 2.2 Construction de Thurston.

Soit $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ un revêtement ramifié de la sphère de degré $d$ générique, dans le sens où il possède $2d - 2$ valeurs critiques. Ceci force donc les points critiques de $f$ à être tous simples. En particulier, le passeport d'une telle application est

$$\mathcal{D}(f) = [[2, 1, \ldots, 1], \ldots, [2, 1, \ldots, 1]] .$$

Construisons à présent une courbe de Jordan $\Sigma$ passant par toutes les valeurs critiques de $f$. Ainsi, $\Sigma$ peut-être considérée comme une carte planaire possédant $2d-2$ sommets tous de degré 2, et considérons le tiré-en-arrière de la courbe $\Sigma$ par le revêtement $f$, noté $f^{-1}(\Sigma)$. Il est facile de voir que $f^{-1}(\Sigma)$ est aussi une carte planaire avec $(d-1)(2d-2)$ sommets, dont $2d-2$ sont de degré 4 (ceux associés au points critiques), et les autres sont de degré 2, et avec $2d$ faces. Ainsi, en effaçant tous les sommets qui sont de degré 2, on obtient une carte planaire $\Gamma$ 4-régulière qui est naturellement associé à $f^{-1}(\Sigma)$.

La question naturelle qui se pose à présent est la suivante : quels sont les cartes planaires 4-régulières qui sont réalisées par une carte sous-jacente $f^{-1}(\Sigma)$ comme définie précédemment ? La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *(W.Thurston). Soit $\Gamma$ une carte 4-régulière, $\Gamma$ est réalisées par une carte sous-jacente $f^{-1}(\Sigma)$ si et seulement si en colorant les faces de $\Gamma$ en noir et en blanc de sorte que deux faces adjacentes (i.e deux faces partageant une même arête) soient de couleurs distinctes :*

- *(condition d'équilibre globale) $\Gamma$ possède autant de faces noires que de faces blanches.*
- *(condition d'équilibre locale) Pour toute courbe $\gamma$ fermée, simple tracée sur $\Gamma$ et orienté de sorte que à gauche de $\gamma$ se trouve toujours une face noire, il y a strictement plus de faces noires que de faces blanches à l'intérieur de $\gamma$.*

# 3 Les graphes équilibrés.

Si le théorème établi par W.Thurston apporte une réponse à la question initialement posée, il reste en pratique très difficile de voir si une carte 4-régulière donnée vérifie bien les conditions d'équilibre globale et locale. Aussi, nous allons commencer cette section par transformer l'ensemble des cartes 4-régulière en un ensemble de cartes où les conditions d'équilibres seront plus facile à vérifier, ce qui nous amènera à définir la notion de cartes équilibrées, puis nous donnerons certaines propriétés sur ces cartes.

Tout d'abord, considérons une carte 4-régulière $\Gamma$ muni d'une coloration noir/blanc de ces faces de sorte que deux faces adjacentes soient de couleurs distinctes. À partir de $\Gamma$, nous allons construire une nouvelle carte $G$ de la manière suivante : à toutes faces blanches de $\Gamma$ on fait correspondre un sommet de $G$ (placé au centre de la face en question), puis chaque fois que deux faces blanches partagent un sommet de $\Gamma$ on trace une arête reliant les deux sommets de $G$ associés aux deux faces de $\Gamma$. Par cette construction, on a donc une bijection entre les faces blanches de $\Gamma$ et les sommets de $G$, les sommets de $\Gamma$ et les arêtes de $G$, et enfin les faces noires de $\Gamma$ et les faces de $G$.

**Définition 3.1** *On dira que $G$ est une carte équilibrée si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*
- *(condition d'équilibre globale) $G$ possède autant de faces que de sommets.*
- *(condition d'équilibre locale) Soit $d$ le nombre de faces de $G$, alors pour tout ensemble de $n < d$ faces adjacentes de $G$, le nombre de sommets de $G$ appartenant à au moins une de ces faces est strictement supérieur à $n$.*

**Rq :** La construction de la carte $G$ ne dépend pas de la coloration choisie des faces de $\Gamma$ dans le sens où si l'on inverse cette coloration, la carte $\tilde{G}$ que l'on obtient par la même construction est la carte duale de $G$. En particulier, si $G$ est équilibré, sa carte duale est également équilibré (provenant tous deux de la même carte $\Gamma$), et donc on peut redéfinir de manière équivalente la condition d'équilibre locale en remplaçant les rôle des sommets et des faces.

**Propriété 3.2** *Soit $G$ une carte équilibrée, et notons $S_G$ l'ensemble des sommets de $G$. Soit $S \subsetneq S_G$ de cardinal $n$, alors le nombre d'arête de $G$ dont toutes les extrémités sont des sommets de $S$ est au plus égale à $2n - 2$.*

**Corollaire 3.3** *Soit $G$ une carte équilibrée, et notons $S_G$ l'ensemble des sommets de $G$. Soit $S \subsetneq S_G$ de cardinal $n$, alors le nombre d'arête de $G$ dont au moins une extrémité est un sommet de $S$ est au moins égale à $2n$.*

En reprenant les notations et résultats des propriétés précédentes, nous allons pouvoir en déduire un théorème qui va redéfinir la notion de carte équilibrée.

**Théorème 3.4** *Soit $G$ une carte planaire, $G$ est équilibrée si et seulement si pour tout $S \subset S_G$, le nombre d'arêtes de $G$ dont toutes les extrémités sont des sommets de $S$ est inférieur ou égale à $2.Card(S) - 2$, avec égalité si $S = S_G$.*

**Rq :** Cette définition ne fait plus intervenir la notion de face, donc la notion d'équilibre que l'on vient d'introduire ne dépend pas de la représentation du graphe sur la sphère.

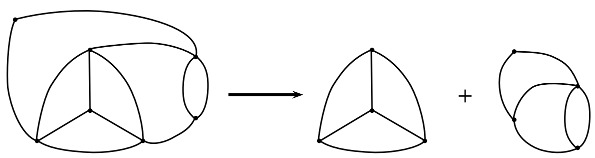



FIGURE 1 – Exemple de décomposition d'un graphe équilibré en deux graphes équilibrés.

**Corollaire 3.5** *S'il existe un ensemble $S \subsetneq S_G$ contenant au moins deux éléments et vérifiant l'égalité dans le Théorème 3.4, alors le graphe $G'$ constitué des sommets $S$ et des arêtes de $G$ dont les extrémités sont des sommets de $S$ est un graphe équilibré.*

Ce corollaire induit une décomposition des graphes équilibrés en graphes équilibrés contenant strictement moins de sommets (voir Figure 1)

# 4 Le problème de Hurwitz.

**Problème 4.1** *Soit $\sigma_d$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$. On cherche à trouver un ensemble ordonné de $2d-2$ permutations de deux éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2d-2} \in \sigma_d$ telle que :*
- $\alpha_1 \ldots \alpha_{2d-2} = 1$.
- $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{2d-2} \rangle$ *agit transitivement sur* $\{1, \ldots, d\}$.

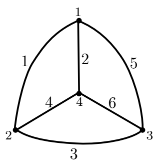
Dans cette section, nous allons voir comment ce problème est lié aux graphes équilibrés définis précédemment. Pour cela, nous devons encore définir la notion de carte croissante.

**Définition 4.2** *Une carte croissante $G$ est une carte planaire pour laquelle on a numéroté chaque arête (de 1 à $n_a$) de sorte que pour tout sommet $x$ de $G$, l'ordre d'apparition des arêtes ayant pour extrémité $x$ est croissant, en tournant autour de $x$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.*

Le résultat central qui va alors nous permettre de faire le lien entre les cartes équilibrées et les solutions du Problème 4.1 est le suivant :

**Théorème 4.3** *Pour toute carte équilibrée, il existe une numérotation des arêtes de sorte que la carte soit croissante. De plus, on a une bijection entre l'ensemble des solutions du problème de Hurwitz et l'ensemble des cartes équilibrées croissantes.*

Cette bijection se voit de la manière suivante : considérons une carte équilibrée, croissante $G$, et numérotons les sommets de $G$ (peu importe le choix de cette numérotation). Alors, en identifiant chaque arête de $G$ comme la permutation de deux éléments donnés par la numérotation des deux sommets qui forment les extrémités de l'arête, on construit un ensemble ordonné (défini par l'ordre des arêtes de $G$) de permutations qui est solution du Problème 4.1 (voir Figure 2 pour un exemple).




$$\longleftrightarrow \quad (12)(14)(23)(24)(13)(34) = 1$$

Figure 2 – Équivalence entre une carte équilibrée croissante et une solution au problème de Hurtwitz.

# Références

[1] K.Baranski. On realizability of branched coverings of the sphere. *Topology and its applications*, 116 :279–291, 2001.

[2] H.Zheng. Realizability of branched coverings of the sphere. *Topology and its applications*, 153 :2124–2134, 2006.

[3] A.L.Edmonds & R.S.Kulkarni & R.E.Strong. Realizability of branched coverings of surfaces. *Transactions of The American Mathematical Society*, 282 :773–790, 1984.