PRES LUNAM
Ecole Doctorale STIM
Sciences et Technologies de
l'Information et Mathématiques

Spécialité : Automatique
Nom du Laboratoire : IRCCyN
Equipe: Commande

Résolution d'équations de Lyapunov et de Riccati paramétrées : une approche par la fonction signe matricielle

Guerra Jérémie
Mél: Jeremie.Guerra@mines-nantes.fr

Résumé : Cet article présente les grandes lignes d'une nouvelle approche dédiée à l'analyse de la stabilité robuste et la résolution des équations de Riccati et de Lyapunov dépendant des paramètres. Cette approche repose sur différentes définitions de la fonction signe matricielle et sur une représentation particulière des matrices dépendant des paramètres (avec des séries de puissances négatives et positives fonction des paramètres). Des solutions exactes et approximées des équations de Lyapunov et de Riccati dépendantes des paramètres sont proposées.

Mots clés : *Fonction signe matricielle, stabilité robuste, équations de Lyapunov et de Riccati.*

1 Introduction

L'analyse robuste de systèmes à temps invariant avec incertitudes paramétriques est un problème très étudié dans le domaine de la commande robuste [1], [2]. S'appuyant sur le paradigme de Lyapunov, une des stratégies pour l'analyse de stabilité robuste consiste à chercher une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres prouvant la stabilité robuste du système incertain considéré [3]. Nous nous intéressons dans cet article à une alternative permettant l'analyse de la stabilité robuste en déterminant la fonction signe matricielle d'une matrice paramétrée [4]. Par ailleurs, plusieurs problèmes de commande concernant des systèmes linéaires à temps invariant avec incertitudes paramétriques nécessitent la résolution *directe* d'équations de Lyapunov ou de Riccati paramétrées. Nous faisons appel à plusieurs définitions de la fonction signe matricielle et à une représentation particulière des matrices paramétriques (permettant la séparation des parties constante et dépendante des paramètres) pour proposer des solutions exactes et approximées à ce type d'équations [4], [5].

2 Fonction signe matricielle

2.1 Définition

La fonction signe est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$sign(z) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Re}(z) > 0 \\ -1, & \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Il est important de noter que si la partie réelle de z est nulle, son signe n'est pas défini. Considérons maintenant une matrice $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ quelconque et la forme canonique de Jordan donnée par $A = TJT^{-1}$ avec $J = diag(J_1, J_2)$ où J_1 et J_2 sont des matrices carrées avec des valeurs propres respectivement dans $\mathbb{C}^-$ et $\mathbb{C}^+$. Le signe de la matrice A est défini par :

$$sign(A) = T\begin{bmatrix} -I_{J_1} & 0 \\ 0 & I_{J_2} \end{bmatrix} T^{-1} \tag{2}$$

2.2 Définition intégrale

Une autre caractérisation de la fonction signe matricielle a été présentée par Roberts dans [7] permet son calcul sans faire appel à une méthode itérative comme celle citée ci-après.

L'expression intégrale est donnée par :

$$sign(Z) \triangleq \frac{2}{\pi} Z \int_0^\infty \left(y^2 I + Z^2\right)^{-1} dy \tag{3}$$

Cette définition a été généralisée au cas des matrices paramétriques pour la résolution d'équations de Riccati et de Lyapunov paramétrées dans [4].

2.3 Méthode itérative de Newton

Cette méthode est la plus utilisée des méthodes itératives pour le calcul de la fonction signe. Elle se définit par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} Z_0 = Z \\ Z_{t+1} = \dfrac{1}{2}\left(Z_t + Z_t^{-1}\right) \\ sign(Z) = Z_t, \quad t \to \infty \end{cases} \tag{4}$$

La convergence peut être lente si Z a des valeurs propres proches de l'axe imaginaire. D'autres méthodes ont été développées en réponse à ce constat comme par exemple les itérations de Newton-Schulz (sans inversion de matrices), les itérations de Padé (voir [6] et les références incluses). La généralisation de cet algorithme au cas des matrices paramétrées présente plusieurs inconvénients. Citons essentiellement l'inversion d'une matrice paramétrée d'ordre de plus en plus élevée (ou la somme de deux matrices à dépendance paramétrique de type linéaire fractionnaire) à chaque itération. Ajoutons que la convergence quadratique de l'agorithme de Newton peut être accélérée par des pondérations appropriées [6].

3 Une classe de matrices à dépendance multiparamétrique

3.1 Définition

Nous introduisons ici une classe de matrices paramétrées pouvant se mettre sous la forme suivante :

$$Z(\theta) \triangleq \bar{Z}\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{5}$$

avec : $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{n\times nw^{\gamma}}$, $\bar{\theta} = \left[\bar{\theta}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{\theta}_{\gamma}\right]^T \in \mathbb{R}^{w^{\gamma}}$ et $\bar{\theta}_k = \left[\theta_k^{-l} \;\; \cdots \;\; \theta_k^{-l} \;\; 1 \;\; \theta_k^{1} \;\; \cdots \;\; \theta_k^{m}\right]^T \in \mathbb{R}^{w}$, $\forall k \in [1,\gamma]$

Ici, $Z(\theta)$ est scindée en une partie constante $\bar{Z}$ et un vecteur de paramètres $\bar{\theta}$. Considérons aussi la matrice permutation $T \in \{0,1\}^{nw^{\gamma}\times nw^{\gamma}}$ vérifiant la relation $\left(I_n \otimes \bar{\theta}\right) = T\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right)$. Cette représentation nous permet d'effectuer plusieurs opérations algébriques en manipulant uniquement les parties constantes $\bar{Z}$.

3.2 Propriétés

Lemme 1 : Soient $Z(\theta) = \bar{Z}\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $V(\theta) = \bar{V}\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la somme $Z(\theta)+V(\theta)$, le produit $Z(\theta)V(\theta)$ et le produit de Kronecker $Z(\theta)\otimes V(\theta)$ sont donnés par :

$$Z(\theta) + V(\theta) = \left(\bar{Z} + \bar{V}\right)\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) \tag{6}$$

$$Z(\theta)\cdot V(\theta) = \bar{Z}\left(I_{m^p} \otimes \bar{V}\right)\left(\left(\bar{\theta} \otimes \bar{\theta}\right) \otimes I_n\right), \;\; p = m + l + 1 \tag{7}$$

$$Z(\theta) \otimes V(\theta) = \left(\bar{Z} \otimes \bar{V}\right)\left(I_n \otimes T \otimes I_n\right)\left(\left(\bar{\theta} \otimes \bar{\theta}\right) \otimes I_{n^2}\right) \tag{8}$$

Lemme 2: Soit $Z(\theta) = \bar{Z}\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et considérons la partition de $\bar{Z}$ donnée par $\bar{Z} = \left[Z_1 \;\; \cdots \;\; Z_{m^p}\right]$, $Z_{i\in\{1,\ldots,m^p\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p = m + l + 1$.

$$Tr\left(Z(\theta)\right) = \left[Tr\left(Z_1\right) \;\; \ldots \;\; Tr\left(Z_{m^p}\right)\right]\bar{\theta} \tag{9}$$

$$\left(Z(\theta)\right)^T = \bar{Z}'\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) = \left[Z_1^T \;\; \ldots \;\; Z_{m^p}^T\right]\left(\bar{\theta} \otimes I_n\right) \tag{10}$$

Les preuves de ces résultats ne sont pas présentées ici, par souci de concision, mais peuvent être retrouvées dans [4]-[7].

4 Résolution d'équations de Lyapunov et de Riccati multiparamétrique

4.1 Fonction signe et stabilité robuste

Dans un premier temps, il est connu que l'utilisation de la fonction signe matricielle conduit directement à l'équivalence suivante :

$$sign\left(A(\theta)\right) = -I_n \Leftrightarrow \lambda\left(A(\theta)\right) \in \mathbb{C}_- \tag{11}$$

De plus, cette méthode ne sert pas seulement à vérifier la stabilité robuste du système linéaire à temps invariant $\dot{x} = A(\theta)x$ mais aussi à caractériser le domaine exact de stabilité (qui peut être non convexe ou contenir plusieurs ensembles disjoints). En fait, $sign(A(\theta)) = -I_n$ nous ramène à un système d'équations non-linéaires qui caractérise le domaine paramétré de stabilité robuste.

4.2 Fonction signe et équation de Riccati

Considérons l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T(\theta)X(\theta) + X(\theta)A(\theta) - X(\theta)G(\theta)X(\theta) + Q(\theta) = 0 \quad (12)$$

pour laquelle toutes les matrices sont réelles et de dimension $n \times n$, la paire (A, G) est stabilisable, la paire (A, Q) est détectable, Q est semi-définie positive et G est définie positive. Considérons aussi la matrice Hamiltonienne associée :

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & -G(\theta) \\ -Q(\theta) & -A^T(\theta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (13)$$

Hypothèse : La matrice Hamiltonienne H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.
Théorème 1 : [6] Notons :

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = sign(H(\theta)) \quad (14)$$

Il existe une unique matrice symétrique semi-définie positive X_p satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{22} + I \end{bmatrix} X_P(\theta) = -\begin{bmatrix} S_{11} + I \\ S_{21} \end{bmatrix} \quad (15)$$

De plus, X_p est solution de l'équation de Riccati (12).
Le détail de la preuve peut être retrouvé dans [6].

4.3 Fonction signe et équation de Lyapunov

Considérons maintenant l'équation algébrique de Lyapunov donnée par :

$$A^T(\theta)X(\theta) + X(\theta)A(\theta) + Q(\theta) = 0 \quad (16)$$

Théorème 2 : [8] La solution de l'équation de Lyapunov (16) peut être déduite de la matrice Hamiltonienne :

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & 0 \\ -Q(\theta) & -A^T(\theta) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

grâce à l'égalité suivante :

$$sign(H(\theta)) = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ -2X(\theta) & I \end{pmatrix} \quad (18)$$

Le détail de la preuve découle de celle du théorème 1, et peut être retrouvé dans [8].

4.4 Exemples d'outils développés

Dans un premier temps, nous présentons un résultat d'inversion directe, basée sur le théorème de Cayley-Hamilton, pour la résolution d'équations de Lyapunov paramétrées. Pour ce faire, nous considérons l'équation généralisée de Lyapunov définie par :

$$A(\theta)^T X(\theta)E(\theta) + E(\theta)^T X(\theta)A(\theta) + Q(\theta) = 0 \quad (19)$$

avec $E(\theta) = \bar{E}(\bar{\theta} \otimes I_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nous supposons que toutes les matrices sont réelles et de dimension $n \times n$, la paire (A, G) est stabilisable, la paire (A, Q) est détectable, Q est semi-définie positive et G est définie positive.
Théorème 3 : La solution de l'équation de Lyapunov (19) est donnée par :

$$vec(X(\theta)) = \left[\sum_{k=1}^{n^2} \frac{p_{k-1}}{p_{n^2}} \left(\sum_{i=0}^{n^2-k} Z(\theta)^i \right) \right] vec(Q(\theta)) \quad (20)$$

avec $\begin{cases} p_k = -\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_{k-j} \left(\sum_{i=0}^{j} Tr\left(Z(\theta)^i\right) \right) \\ p_0 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} Z(\theta) = \left((\bar{E}' \otimes \bar{A}') + (\bar{A}' \otimes \bar{E}') \right) \tilde{T} \left((\bar{\theta} \otimes \bar{\theta}) \otimes I_{n^2} \right) \\ \tilde{T} = I_n \otimes T \otimes I_n \end{cases}$.

Pour le lecteur intéressé, la preuve de ce résultat est dans [5]. Notez qu'il est également possible de calculer l'inverse de Z par le biais des DFT (Transformée de Fourier discrète) [5]. Il s'agit cependant d'inverser une matrice paramétrée de dimension $n^2 \times n^2$. C'est pourquoi nous proposons une alternative, en utilisant la définition intégrale de la fonction signe matricielle et la classe des matrices à dépendance paramétrique introduit dans cet article, associée à la matrice hamiltonienne qui elle est de dimension $2n \times 2n$. Nous présentons ainsi un résultat permettant le calcul de la fonction signe matricielle dans le cas paramétrique.

Théorème 4 : Considérons une matrice paramétrique $Z(\theta)$ donnée par (5). Le signe matriciel de $Z(\theta)$, noté $sign(Z(\theta))$, est donné par:

$$sign(Z(\theta)) = \frac{2}{\pi} Z(\theta) \times \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} -\frac{p_{k-1}}{p_n} \left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} y^{2(n-k-i)} Z(\theta)^{2i} \right) \right] dy \tag{21}$$

avec : $p_0 = 1, p_k = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} y^{2(j-i)} trace\left(Z(\theta)^{2i}\right) \right)$.

Le résultat ci-dessus nous permet d'exhiber une solution exacte contrairement à l'emploi des itérations de Newton qui débouchent sur une approximation à l'ordre *k*. Par ailleurs, en vue de profiter de la convergence quadratique des itérations de Newton, nous proposons un résultat permettant le calcul de la fonction signe par le biais des itérations de Newton et d'une interpolation de l'inverse par des matrices paramétriques polynomiales [9]. Le choix d'une fonction signe étendue réside dans le fait qu'il est possible de calculer le signe d'une matrice ayant des valeurs propres sur l'axe des imaginaires, ce qui n'est pas le cas de l'implémentation classique de la fonction signe. Nous proposons pour la fonction signe matricielle étendue dans le cas paramétrique la définition suivante :

$$exsign(Z(\theta)) = \frac{1}{2}\left(sign\left(Z(\theta) + \varepsilon(\theta) I_n\right) + sign\left(Z(\theta) - \varepsilon(\theta) I_n\right) \right) \tag{22}$$

avec :

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\mu}{\left\| Z^D(\theta) \right\|_F}, \quad 0 < \mu < 1 \tag{23}$$

Où $Z^D(\theta)$ désigne l'inverse de Drazin de la matrice *Z* qui peut également être calculé, pour la classe des matrices paramétriques introduite dans ce papier, de manière itérative en ne manipulant que des matrices constantes.

4 Conclusion

Dans ce papier, nous nous intéressons à l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires continus dépendants de paramètres. Nous présentons des outils de résolution symbolique et hybride (symbolique/numérique) d'équations de Lyapunov et de Riccati dépendant de paramètres. Ces outils se basent essentiellement sur une classe particulière de matrices multiparamétriques et sur l'extension de la fonction signe matricielle au cas paramétrique. Des problèmes d'analyse et de commande toujours ouverts tels que : l'analyse de stabilité robuste, l'analyse et la synthèse H_2 robustes, la synthèse H_2, H_∞ (voire synthèse mixte) de systèmes paramétrés (ou à pondérations paramétrées) sont des applications envisageables.

Références

[1] B. R. Barmish, "New Tools for Robustness of Linear Systems", Macmillan Publishing Company, 1994.

[2] P. A. Bliman, "A Convex Approach to Robust Stability for Linear Systems with Uncertain Scalar Parameters", SIAM J. Control and Optimization, Vol. 42, No. 6, pp. 2016–2042, 2004.

[3] D. Arzelier, J. Bernussou, D. Peaucelle, "Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour l'analyse et la synthèse robuste", Hermes, 2000.

[4] J. Guerra, M. Yagoubi and P. Chevrel, "A Matrix Sign Function for Robust Stability Analysis and Parameter-dependent Lyapunov and Riccati Equalities", *IEEE Conference on Decision and Control*, 2012

[5] J. Guerra, M. Yagoubi and P. Chevrel, "Parametric Lyapunov Equation Approach for Robust H_2 Analysis and Structured H_2 Control Problems," *IFAC SSSC*, 2013.

[6] C. S. Kenney and A. J. Laub, "The Matrix Sign Function", IEEE transactions on automatic control, Vol. 40, pp. 1330-1348, 1995.

[7] J. D. Roberts, "Linear Model Reduction and Solution of the Algebraic Riccati Equation by Use of the Sign Function", Int. J. Contr., vol. 32, pp. 677-687, 1980.

[8] S. Lesecq, "Equations de Lyapunov et Sylvester", chapter 5, from "outil d'analyse numérique pour l'automatique", Hermès, 2002.

[9] J. Guerra, M. Yagoubi and P. Chevrel, "An Extended Matrix Sign Function Approach for Robust Stability Analysis and Parameter-Dependent Lyapunov Equality", submitted to *IEEE Conference on Decision and Control*, 2013