

VALIDATION DE LA RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE MOJETTE A PARTIR D'ACQUISITIONS DANS L'ESPACE DE RADON

Henri DER SARKISSIAN

Mél : henri.der-sarkissian@irccyn.ec-nantes.fr

Résumé : L'imagerie médicale tomographique repose sur la transformée de Radon et est un problème mal posé. L'équipe IVC de l'IRCCyN a développé la transformée Mojette, version discrète et exacte de la transformée de Radon. La transformée Mojette possède des propriétés intéressantes pour l'application à la tomographie médicale, mais ces propriétés qui en font sa force font aussi sa faiblesse : aujourd'hui aucun appareil médical n'est compatible avec la géométrie particulière de la transformée Mojette. Nous montrons dans ce papier que cette limitation peut être contournée en interpolant les données acquises dans l'espace de Radon à l'espace Mojette. A cet effet, nous présentons deux méthodes de remplissage de l'espace Mojette à partir de l'espace Radon. L'erreur commise à la fois sur chaque projection et sur l'image reconstruite est ensuite évaluée pour les deux méthodes. Nous montrons que nos méthodes permettent d'obtenir des résultats comparables si ce n'est meilleur qu'avec les algorithmes classiques de reconstruction tomographique.

Mots clés : *Tomographie, Radon, Mojette, imagerie médicale.*

Collaborations : Cette thèse est cofinancée par Keosys et subventionnée par le projet FUI QuantiCardi de la région Pays de la Loire.

1 Introduction

La tomographie est une technique d'imagerie permettant d'obtenir des vues tridimensionnelles de l'intérieur d'un objet à imager en acquérant les projections de celui-ci dans plusieurs directions de l'espace. Cette technique est au cœur des dispositifs d'imagerie médicale modernes telles que la tomodensitométrie (*scanner*), la tomographie à émission de positons (TEP) ou imagerie à résonance magnétique (IRM). La tomographie repose sur la transformée de Radon et le théorème du même nom [1]. Si le cadre théorique est bien défini depuis de nombreuses années (moyennant quelques précautions mathématiques sur la régularité des fonctions à projeter), le problème inverse de reconstruction d'images à partir des projections de celle-ci est un problème mal posé et la mise en œuvre discrète reste encore aujourd'hui un problème ouvert.

La discrétisation de la transformée de Radon est l'objet de la transformée Mojette [2, 3, 4], qui est définie comme une version discrète et exacte de la transformée de Radon continue. Cette transformée développée par l'équipe IVC de l'IRCCyN possède des propriétés avantageuses du fait de la discrétisation *a priori* de l'opérateur de projection et permet de résoudre le problème inverse dans l'espace discret en s'affranchissant des problèmes liés à la non complétude des données acquises.

En 2D, la transformée Mojette projette une image, fonction discrète $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, dans une *direction discrète* θ définie par $\tan(\theta) = \frac{q}{p}$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ et $p \wedge q = 1$. Les fonctions discrètes comme les angles discrets sont donc définis sur un pavage discret qui peut être mis en bijection avec \mathbb{Z}^2 . Les entiers relatifs p et q peuvent être interprétés comme un déplacement horizontal et vertical sur ce pavage. Dans le cas d'images numériques, ce pavage est réalisé par les pixels. Chaque valeur de projection $\mathcal{M}_{p,q}(b)$ (appelée *bin*) est la somme des pixels traversés par la droite discrète d'équation $b = qk - pl$. La transformée Mojette de l'image f de taille $N \times N$ dans la direction discrète (p, q) est donc donnée par la formule :

$$\mathcal{M}_{p,q}(b) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k, l) \Delta(b - qk + pl) \quad (1)$$

où Δ est la fonction de Kronecker discrète. Cette équation met en évidence la principale différence avec la transformée de Radon : le nombre d'échantillon sur une projection est variable d'une projection à l'autre et dépend de la direction (p, q) choisie. Plus généralement, le nombre de bins sur une projection est

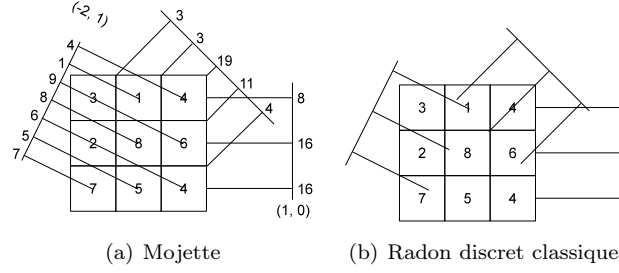


FIGURE 1 – Exemple d’une acquisition d’une image 3×3 selon les directions discrètes $(1,0)$, $(1,1)$ et $(-2,1)$. (a) En Mojetto. On remarque l’échantillonnage variable sur les projections selon la direction discrète. (b) En Radon discrétisé classiquement. On remarque que l’échantillonnage sur la projection d’angle $(1,0)$ est la même qu’en Mojetto.

$(N-1)(|p|+|q|)+1$. La figure 1 illustre le processus de projection. Cette particularité de la transformée Mojetto assure un échantillonnage uniforme de chaque pixel dans l’image et permet la reconstruction exacte de l’image originale à partir d’un ensemble de projections $\{\mathcal{M}_{p_i, q_i}, i \in I\}$ à l’aide des algorithmes Corner Based Inversion ou Rétroprojection Mojetto Exacte [3] à condition que les angles de projections $\{(p_i, q_i), i \in I\}$ vérifient une certaine propriété, le critère de Katz [5]. Dans un contexte bruité ou en cas de sous- ou sur-détermination des données, il est toujours possible d’utiliser des algorithmes classiques de tomographie adaptés à la géométrie Mojetto, comme FBP-Mojette (Filtered Back-Projection) [6] ou SART-Mojette (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique) [7].

L’ensemble de ces propriétés fait de la transformée Mojetto un outil de choix pour la tomographie médicale et nous nous proposons d’utiliser la reconstruction tomographique Mojetto avec les données issues de dispositifs médicaux existants. Dans ce papier, nous étudions différentes stratégies pour adapter les données acquises dans le domaine de Radon à l’espace Mojetto par interpolation entre les deux espaces de représentations.

2 Méthodes d’interpolation

Nous procédons en deux étapes pour transposer les données de l’espace de Radon dans l’espace Mojetto. D’abord une approximation sur l’angle d’acquisition doit être réalisée si l’angle d’acquisition original ne correspond pas à un angle discret sélectionné. En second lieu, l’échantillonnage variable sur chaque projection induit une seconde étape d’approximation pour produire les valeurs manquantes. Nous présentons dans cette section les étapes et les protocoles d’interpolation pour palier à ces problèmes.

2.1 Sélection d’un ensemble d’angles discrets

Nous commençons par fixer un ensemble d’angles discrets pour déterminer les directions de projection que nous désirons obtenir. Cet ensemble est donné par une suite de Farey-Haros d’un certain ordre (dénote F -order par la suite) [8] et est définie comme la suite de fraction irréductibles $\frac{q}{p}$, rangées dans l’ordre croissant, pour lesquelles on a $1 \leq p \leq F$ -order et $0 \leq q \leq p$. Il est important de déterminer cet ensemble à l’avance pour éviter les problèmes dus à un ordre de suite de Farey-Haros trop élevé. En effet, le nombre d’angles discrets donné par une telle suite croît de manière quadratique avec l’ordre de la suite, et le nombre de bins dépend linéairement de (p, q) . Il faut donc prendre des précautions et choisir l’ordre de la suite de Farey-Haros ni trop petit de manière à obtenir suffisamment d’angles pour minimiser les erreurs d’approximation angulaire mais tout en le gardant assez petit pour ne pas trop sur-échantillonner chaque projection.

Nous utilisons deux méthodes différentes pour construire l’ensemble des projections Mojetto à partir des directions existantes.

2.1.1 Approximation au plus proche

La première méthode est l’approximation au plus proche (PP). Nous supposons ici que chaque angle θ est suffisamment proche d’un angle discret (p, q) choisi de tel que $|\tan \theta - \frac{q}{p}| < \varepsilon$.

On choisit donc F -order de manière à générer plus d’angles que les N_θ acquis initialement. Puis on choisit dans cet ensemble les N_θ angles les plus proches des angles d’acquisition et on considère que l’écart angulaire est assez faible pour être négligé.

2.1.2 Interpolations angulaires

La deuxième méthode (dénotée ANG) consiste à utiliser tous les angles donnés par la suite de Farey-Haros d’un certain ordre et à interpoler angulairement chaque projection voulue à partir des projections initiales à l’aide de noyaux d’interpolations B-Spline cardinales [9].

Encore une fois, nous devons choisir F -order suffisamment grand pour produire suffisamment d’angles (au moins autant que N_θ) mais pas trop grand pour éviter le sur-échantillonnage (comme dans la méthode PP).

2.2 Interpolation sur les projections

Nous avons à présent déterminé l’ensemble des directions discrètes définissant l’espace Mojette et obtenu les projections correspondantes soit par approximation au plus proche (PP) ou par interpolation angulaire (ANG). Chaque projection est ensuite ré-échantillonnée pour tenir compte de l’échantillonnage spécifique Mojette variable selon l’angle. Ce ré-échantillonnage est réalisé à l’aide d’interpolations par noyaux B-Spline cardinales.

3 Expérimentations et résultats

3.1 Protocole expérimental

Nous utilisons un simulateur analytique sur le fantôme de Shepp-Logan [10] pour générer les projections non-bruitées dans l’espace de Radon. N_θ projections uniformément distribuées sur $[0, \pi[$ sont ainsi simulées. La taille de l’image de référence ainsi que le nombre d’échantillons sur chaque projection Radon sont fixés à 512.

Les performances sont évaluées à la fois dans le domaine image et le domaine des projections. L’erreur commise sur les projections Mojette est calculée comme l’erreur quadratique moyenne (MSE) entre les bins interpolés et la projection correspondant à l’acquisition Mojette idéale (simulée à l’aide du même simulateur). Dans le domaine image, la MSE est calculée entre l’image de référence et l’image reconstruite par les algorithmes FBP [11] et SART [12] et leur équivalent en géométrie Mojette.

3.2 Erreurs d’approximation par la méthode PP

Dans un premier temps, N_θ est fixé à 180 et nous faisons varier l’ordre de la suite de Farey. Nous reproduisons cette expérience pour différents ordres de B-Spline utilisées pour l’interpolation sur chaque projection. L’erreur est calculée dans le domaine Mojette et les résultats donnés dans le tableau 1. Ces résultats confirment qu’il est nécessaire de minimiser l’approximation angulaire en choisissant F -order > 15 , mais qu’il est inutile de le choisir trop grand car au-delà de 15, les résultats semblent stagner.

F-order	12	15	20	30	50	100
B_0	168.04	157.10	157.74	156.47	159.27	157.64
B_1	169.46	158.20	158.20	157.57	160.55	158.85
B_3	161.12	150.78	151.38	150.24	152.73	151.20

TABLE 1 – MSE calculées pour la méthode PP entre projections Mojette interpolées et acquisitions de référence Mojette.

3.3 Erreurs d’approximations par la méthode ANG

Dans cette partie, N_θ est fixé à 180 et nous étudions l’influence de F -order dans les images reconstruites. Les B-Spline cardinales d’ordre 1 sont utilisées à la fois angulairement et sur les projections. Les images sont reconstruites et la MSE est calculée dans le domaine image. Les résultats sont reproduits dans le tableau 2.

Les résultats donnés dans le tableau 2 montrent que cette méthode est très efficace lorsque F -order est grand. Les résultats se révèlent même supérieurs en FBP-Mojette ainsi interpolé qu’avec son équivalent dans le domaine de Radon.

F-Order	10	12	15	20	30	Radon
FBP	497.34	417.67	360.77	321.18	286.98	440.93
SART	375.08	367.34	340.94	314.35	286.16	236.40

TABLE 2 – MSE calculées entre les projections interpolées par la méthode ANG reconstruites en FBP-Mojette et SART-Mojette et l’image de référence en fonction de l’ordre de la suite de Farey-Haros F -order. La dernière colonne donne une base de comparaison avec les méthodes FBP et SART classiques.

4 Conclusion

Nous avons présenté et étudié deux algorithmes pour obtenir des projections Mojette à partir de données acquises dans l’espace de Radon (par un scanner médical par exemple). Les expériences menées nous permettent d’une part de montrer le bénéfice de l’utilisation d’algorithmes Mojette en reconstruction analytique (FBP) par rapport aux algorithmes classiques. D’autre part, nous nous apercevons que les méthodes PP et ANG sont complémentaire, la première donnant les meilleurs résultats lorsque le nombre de projections acquises est faible, la deuxième étant plus adapté à un nombre important de projections. Dans la suite, nous devons nous pencher sur une méthode hybride tirant avantage des deux méthodes.

Références

- [1] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Ver. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Kl.*, 69 :262–277, April 1917. In German. An english translation can be found in S. R. Deans : The Radon Transform and Some of Its Applications.
- [2] Jp. Guédon and N. Normand. The Mojette Transform : The First Ten Years. In Pascal Lienhardt Éric Andres, Guillaume Damiand, editor, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 3429 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 79–91, Poitiers, France, April 2005. Springer Berlin / Heidelberg.
- [3] Jp. Guédon, editor. *The Mojette Transform : Theory and Applications*. ISTE-Wiley, 2009.
- [4] Jp. Guédon and N. Normand. Spline Mojette Transform : Applications in Tomography and Communications. *EUSIPCO*, 3 :271–274, 2002.
- [5] M.B. Katz. *Questions of uniqueness and resolution in reconstruction from projections*. Springer-Verlag, 1978.
- [6] Myriam Servièrès, Nicolas Normand, and Jeanpierre Guédon. Interpolation method for the Mojette Transform. In *Proc. SPIE*, volume 6142, page 61424I, San Diego, USA, February 2006.
- [7] B. Recur, P. Desbarats, and J.-P. Domenger. Noise robust mojette reconstructions for missing wedge effect attenuation. *JMPT*, 1(4) :209–227, 2010.
- [8] M. Servièrès, N. Normand, Jp. Guédon, and Y. Bizais. The mojette transform : Discrete angles for tomography. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 20 :587 – 606, 2005.
- [9] P. Thévenaz, T. Blu, and M. Unser. Interpolation revisited. *IEEE transactions on medical imaging*, 19(7) :739–58, July 2000.
- [10] L. Shepp and B. Logan. The Fourier Reconstruction of a Head Section. *IEEE Transactions in Nuclear Science*, 21(2) :21 – 43, 1974.
- [11] P. Toft. *The Radon Transform : Theory and Implementation*. PhD thesis, Department of Mathematical Modelling, Section for Digital Signal Processing, Technical University of Denmark, 1996.
- [12] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2) :113 – 122, october 1982.