

Modélisation des écoulements en milieu poreux

Vincent Baron

Mél : vincent.baron@univ-nantes.fr

Résumé : La modélisation des écoulements en milieu poreux est devenu un outil incontournable dans de nombreux domaines de la physique, parmi lesquels l'hydrologie, l'industrie pétrolière, ou plus récemment la géothermie et le stockage géologique de CO₂. Le présent article commence par poser les bases de la stratégie de modélisation sur l'exemple classique de l'équation de Laplace à une dimension d'espace, que l'on approche par le schéma à deux points. On considère ensuite un problème d'écoulement en milieu poreux décrit par l'équation de Richards. Cette dernière est discrétisée par une méthode dite de "volumes finis", le schéma DDFV (Discrete Duality Finite Volume). Des simulations numériques illustrent le comportement de ce schéma sur un cas test en milieu hétérogène anisotrope.

Mots clés : *Milieu poreux, schéma volumes finis, équation de Richards.*

Collaborations : Université de Nantes, Bureau des Recherches Géologiques et Minières (BRGM).

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce qu'un milieu poreux ?

Un sol (défini comme la fine couche de la surface terrestre) est un milieu perméable continu comportant des vides interstitiels interconnectés appelés pores. Il se compose de trois phases :

1. Une matrice solide appelée *squelette*, formée d'un empilement de grains, qui assure la cohésion du milieu.
2. De l'air occupant une partie des pores (*phase gazeuse*).
3. De l'eau dans l'espace poreux restant (*phase liquide*).

1.2 Modélisation

- Une multitude de phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) : ce sont des relations entre une fonction inconnue (la quantité étudiée, la pression du fluide par exemple dans le cadre d'un écoulement), ses dérivées spatiales et temporelles, et éventuellement la (les) variable(s) d'espace. Ces équations sont censées décrire un comportement physique.
- Le problème majeur est qu'il est en pratique très rare de savoir résoudre ces EDP de manière analytique dans des cas réalistes, c'est pourquoi on les approche par des systèmes linéaires que l'on peut résoudre numériquement (à l'aide d'un ordinateur).

2 Discrétisation d'une Equation aux Dérivées Partielles

Nous cherchons ici à résoudre numériquement l'équation de Laplace à une dimension d'espace (typiquement sur le segment $[0, 1]$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in]0, 1[\\ T(0) = 0 \\ T(1) = 0 \end{cases} . \quad (1)$$

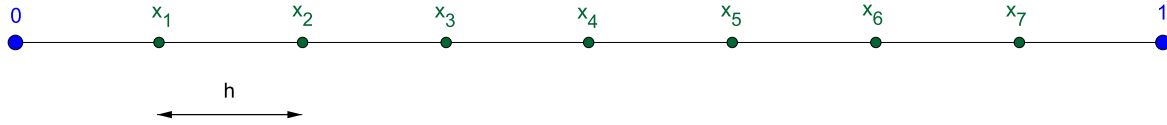


FIGURE 1 – Subdivision régulière du segment $[0, 1]$

- Un ordinateur ne peut pas appréhender l'espace des réels, ni même la notion de continuité d'une fonction : il ne peut comprendre et renvoyer que des valeurs discrètes. Ainsi, on va chercher à approcher la solution exacte de (1) seulement en certains points de $[0, 1]$. De manière naturelle, on divise $[0, 1]$ en sous-intervalles, tous de même longueur pour simplifier notre étude. L'équation (1) doit être vérifiée en chacun des points x_i de la discrétisation, ce qui mène à la résolution du système semi-discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_1) = 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_2) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_n) = 0 \end{cases}.$$

- Comme on ne sait pas résoudre (1), on va écrire une EDP "discrète" (*i.e.* une relation faisant intervenir seulement des valeurs ponctuelles de la fonction inconnue et non plus la fonction inconnue elle-même) qui va être le plus proche possible de (1). Pour cela, il s'agit d'approcher au mieux la dérivée seconde qui apparaît dans l'équation. L'outil principal est la formule de Taylor-Young, écrite ici à l'ordre 1 : pour une fonction dérivable f , on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + o(h) \\ &\approx f(x) + hf'(x) \\ f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Appliquée à notre fonction inconnue T , la formule précédente pour tout x_i devient donc : $\frac{\partial T}{\partial x}(x_i) \approx \frac{T(x_i+h) - T(x_i)}{h}$. Cette approximation est très naturelle, la dérivée en x_i est approchée par le taux d'accroissement de T en x_i .

Il est alors aisé d'obtenir une formule similaire pour la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i)$ en écrivant une formule de Taylor-Young à l'ordre 2. On trouve alors : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{T(x_i-h) - 2T(x_i) + T(x_i+h)}{h^2}$. Ainsi, la version discrétisée de l'équation (1), d'inconnue une fonction discrète T_h , s'écrit :

$$\begin{cases} T_h(x_1-h) - 2T_h(x_1) + T_h(x_1+h) = 0, \\ T_h(x_2-h) - 2T_h(x_2) + T_h(x_2+h) = 0, \\ \dots \\ T_h(x_n-h) - 2T_h(x_n) + T_h(x_n+h) = 0. \end{cases}$$

Si on pose $T_i := T_h(x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, le système précédent peut se mettre sous la forme

matricielle suivante : il s'agit de résoudre $AX = 0$, où $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice du laplacien

et $X = (T_1, T_2, \dots, T_n)^t$ est le vecteur des inconnues discrètes. Ce système linéaire admet une unique solution (la matrice du laplacien est symétrique définie positive, donc inversible).

3 Une équation plus réaliste en 2D

On se place désormais dans le plan (x,z) sur un domaine rectangulaire. Richards a proposé en 1931 un modèle décrivant des écoulements en milieu insaturé ; son équation s'écrit sous forme conservative :

$$\begin{cases} \partial_t \theta(\psi) - \operatorname{div}((K(\psi) \nabla(\psi + z))) = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T], \\ \psi = \psi^0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \\ \psi = \psi_D & \text{sur } \partial\Omega^D \times]0, T]. \end{cases} \quad (2)$$

Elle dérive de la combinaison de la conservation de la masse et de la loi de Darcy. L'inconnue ψ n'est pas la pression mais la charge hydraulique, qui est une grandeur caractéristique de l'écoulement considéré et qui peut notamment être reliée à la pression. La dernière équation est la condition aux limites, elle impose la valeur de la charge sur le bord du domaine. Nous allons chercher à résoudre cette équation de la même manière que l'équation de Laplace du paragraphe précédent.

3.1 Maillages cartésiens

La discrétisation la plus naturelle du domaine rectangulaire est la grille cartésienne : on maille le rectangle par des carrés, et on va demander à trouver une valeur approchée de la charge hydraulique ψ au centre de chaque maille ainsi construite.

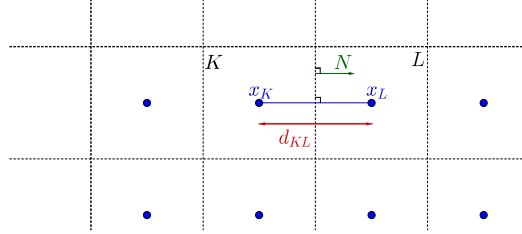


FIGURE 2 – Maillage cartésien et notations

Quelques manipulations sur l'équation de Richards (intégration et application de la formule de Green) ramènent le problème de l'approximation de l'opérateur $\operatorname{div}(\nabla)$ sur chaque maille à celui de l'approximation de la composante normale du gradient sur chaque arête. Or, une arête donnée partagée par deux mailles, notées K et L , est orthogonale au segment $[x_K, x_L]$. Ainsi, une bonne approximation de la composante normale cherchée est donnée par le flux à deux points :

$$\nabla \psi \cdot N \approx \frac{\psi(x_K) - \psi(x_L)}{d_{KL}}.$$

La matrice du système discret obtenu ne contient que peu de coefficients non nuls et s'inverse rapidement. Malheureusement, l'opportunité de choisir un maillage cartésien est rare en pratique : un sol est en général hétérogène (composé de plusieurs milieux de nature différente) et peut comporter des failles obliques. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des maillages plus généraux pour intégrer la géométrie du milieu.

3.2 Maillages triangulaires

Les maillages les plus utilisés sont les maillages triangulaires, qui peuvent décrire plus fidèlement un sol réel. Malheureusement, le schéma à deux points est inadapté à de tels maillages, puisque l'orthogonalité décrite au-dessus n'est plus valable : l'approximation est nettement moins bonne, et la solution approchée n'est pas assez proche de la solution continue du problème de départ (elle en diffère parfois beaucoup). La méthode utilisée dans ce travail de thèse (schéma DDFV) consiste à chercher des valeurs approchées de la solution continue également aux sommets du maillage. Il est alors possible d'approcher la composante normale du gradient en utilisant ces nouvelles inconnues ($|D|$ désigne l'aire du quadrilatère $x_K x_A x_L x_B$) :

$$\nabla\psi \cdot N \approx \frac{1}{2|D|} \left([\psi(x_L) - \psi(x_K)]N + [\psi(x_B) - \psi(x_A)]N^* \right).$$

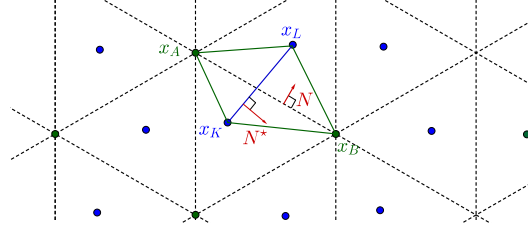
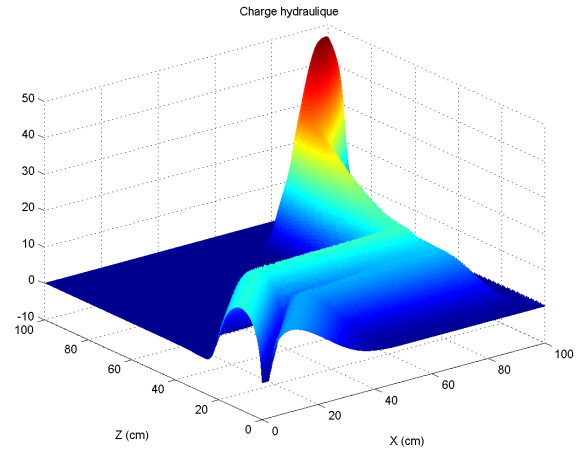
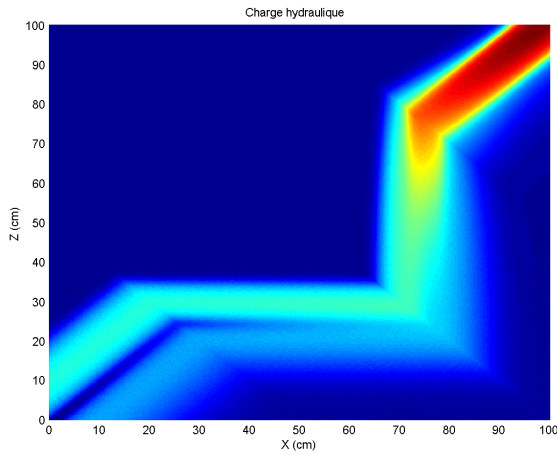


FIGURE 3 – Maillage triangulaire et notations

L'approximation obtenue est beaucoup plus précise. Le prix à payer est un temps de calcul plus élevé, notamment parce que la reconstruction du gradient a nécessité quatre points au lieu de deux. Les figures ci-dessous présentent des profils de la charge hydraulique, obtenus après six heures de simulation. De l'eau a été injectée par le coin supérieur droit pour s'échapper par le coin inférieur gauche.



Références

- [1] Boyer, F., Hubert, F., Finite volume method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **46(6)**, (2008) 3032 - 3070.
- [2] Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P.J., Vachaud, G. : A Comparison of Numerical Simulation Models for one-dimensionnal Infiltration, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 41, 285–294, (1977)
- [3] Manzini, G., Ferraris, S. : Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards equation, *Adv. water resour.*, 27, 1199–1215, (2004)