

COMMANDE MPC STABILISANTE AVEC PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES SUR LA COMMANDE : CAS SIMPLIFIE

El JAMAL, Jinane
Mél: jeljam12@mines-nantes.fr

Résumé : Le sujet traité s'inscrit dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'Université Libanaise et l'Ecole des Mines de Nantes portant essentiellement sur la commande prédictive à temps continu sous contraintes sur la commande et sur l'état. Nous présentons à ce stade une méthode de commande assurant i) un fonctionnement optimal au sens d'un critère LQ en dehors du régime de contrainte, ii) permettant la gestion des contraintes sur la commande et sur sa dérivée tout en garantissant la stabilité du système asservi. L'approche retenue procède par modulation du « gain » de la commande par retour d'état afin de respecter les contraintes, plutôt que par calcul direct du signal de commande sur l'horizon de prédiction comme le fait la commande prédictive classique. Finalement, la loi de commande proposée est comparée à la commande prédictive à temps continu sous contraintes développée par L. Wang dans [1].

Mots clés : *Commande prédictive à temps continu, commande optimale, commande sous contraintes, critère du cercle.*

Collaborations : Thèse en cotutelle avec l'Université Libanaise (Liban).

1 Introduction

La commande prédictive (voir [2] et les références incluses), connue sous le nom de MPC (Model Predictive Control) ou de commande à horizon glissant, est une technique de commande basée sur la notion de prédiction du comportement futur de la sortie du système. L'idée principale du MPC est d'insérer, dans l'algorithme de commande, un élément de prédiction concernant l'évolution des sorties du procédé, donné par un modèle. Le calculateur détermine alors, à l'instant de calcul présent, la séquence de commandes à appliquer sur un horizon de prédiction fixé. A l'instant de calcul suivant, seule la première composante de cette séquence est effectivement appliquée au procédé et la résolution est renouvelée de la même manière en prenant en compte les nouvelles mesures du procédé. En résumé, le MPC procède à la simulation en ligne d'un modèle du processus à contrôler pour prédire la sortie du système, à l'évaluation d'un critère quadratique de performance sur un horizon fuyant et enfin, au calcul d'une commande optimale par optimisation, au sens du critère et de l'horizon de prédiction retenus, de la trajectoire future du système. L'attrait principal de ce type de commande réside dans le fait de fournir une loi de commande optimale prenant en compte des contraintes sur l'état ou la commande et/ou traitant la connaissance anticipée des signaux exogènes [2].

Si la majeure partie des développements sur la commande prédictive a porté sur le cas du temps discret, les premiers développements à temps continu ont vu le jour à partir des années 90 ([3], [4]). Nous nous focaliserons ici sur le cas de la commande prédictive à temps continu, à l'instar de Wang [1]. Parmi les avantages de travailler en continu, on citera l'intérêt méthodologique de i) découpler l'étape de conception de la loi de commande des choix liés à la discrétisation, ii) permettre une paramétrisation davantage parcimonieuse de la loi de commande, ou encore iii) permettre l'utilisation d'un échantillonnage aperiodique (discrétisation effectuée *a posteriori* (i.e. à l'étape de mise en œuvre). La commande MPC telle que proposée par Wang produit une loi de commande à temps continu capable de satisfaire différents types de contraintes, mais ne garantit pas la stabilité. La solution que nous proposons ci-après en revanche, même s'il ne s'agit que d'une ébauche de travaux à venir, garantit la stabilité tout en tenant compte des contraintes sur la commande et sa dérivée.

2 Commande prédictive sous contraintes à temps continu [1]

La commande prédictive considérée ici procède par calcul anticipé du signal de commande permettant d'optimiser le comportement futur du système. L'optimisation est effectuée sur une fenêtre de temps glissante caractérisée par l'instant de calcul (optimisation) t_i et l'horizon de prédiction T_p . La conception de la commande prédictive à temps continu selon Wang [1] procède par projection de la commande sur une base de fonctions (à temps continu) orthonormées (fonctions de Laguerre). Ceci est possible, y compris pour un horizon de prédiction infini, dès lors que :

$$\int_0^\infty u(t)^2 dt < \infty \quad (1)$$

Le signal de commande n'étant pas nécessairement de carré intégrable, dans le cas de signaux de consignes constants notamment, Wang préfère travailler sur la dérivée $\dot{u}(t)$ du signal de commande, et supposer :

$$\int_0^\infty \dot{u}(t)^2 dt < \infty \quad (2)$$

Supposons le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u(t) \\ y(t) = C_m x_m(t) \end{cases} \quad (3)$$

dans laquelle : $x_m \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^q$ et A_m , B_m et C_m sont des matrices de dimensions appropriées. On suppose que le nombre de sorties est inférieure ou égale au nombre d'entrées (dans le cas contraire nous ne pouvons espérer de contrôler chacune des sorties mesurées indépendamment avec des erreurs statiques nulles). Sous l'hypothèse d'un signal de consigne constant, le modèle du processus (3) est augmenté par l'écart entre la sortie et la référence. On obtient alors le modèle suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{x}_m(\tau) \\ \dot{e}(\tau) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m & o_{q \times q}^T \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_m(t_i + \tau | t_i) \\ e(t_i + \tau | t_i) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ o_{q \times m} \end{bmatrix}}_B \dot{u}(\tau) \\ z = \underbrace{\begin{bmatrix} o_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \dot{x}_m(\tau) \\ e(\tau) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

La fonction de coût considérée est définie par :

$$J = \int_0^{T_p} \left(x(\tau)^T Q x(\tau) + \dot{u}(\tau)^T R \dot{u}(\tau) \right) d\tau \quad (5)$$

avec $x(t_i)$: état connu et (Q, R) les matrices de pondération respectivement semi-définie positive et définie positive. En considérant des contraintes sur les commandes et leurs dérivées, le problème de commande MPC résultant consiste à minimiser le critère (5) sous les contraintes suivantes :

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad u_i^{\min} \leq u_i(t) \leq u_i^{\max}, \quad du_i^{\min} \leq \dot{u}_i(t) \leq du_i^{\max} \quad (6)$$

La résolution de ce problème implique donc la résolution itérative, à chaque instant t_i , d'un problème d'optimisation d'un critère quadratique sous contraintes linéaires. La projection de $\dot{u}_i(\tau)$ dans l'espace des fonctions orthonormées de Laguerre (dont le $k^{\text{ème}}$ élément est donné par : $l_k(\tau) = \sqrt{2p} \frac{e^{p\tau}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}} (\tau^{k-1} e^{-2p\tau})$,

$p \in \mathbb{R}^{+\bullet}$) donne : $\dot{u}_i(\tau) = L_i(\tau)^T \eta_i$ avec : $L_1^i(\tau)^T = [l_1^i(\tau) \ l_2^i(\tau) \ \dots \ l_{N_i}^i(\tau)]$ et le vecteur des coefficients $\eta_i = [c_1^i \ c_2^i \ \dots \ c_{N_i}^i]^T$. À noter que chaque $L_i(\tau)$ est définie par la paire (N_i, p_i) (N_i : ordre de l'approximation).

Enfin, notons que la variable d'état $x(t)$ contient deux composantes : la dérivée de l'état du système $\dot{x}_m(t)$ et le signal d'erreur $(y(t) - r(t))$ ce qui se traduit par une commande sous forme d'un retour d'état :

$$\dot{u}(t) = -K_{mpc} x(t) = -\begin{bmatrix} K_{lq} & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ y(t) - r(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

La commande finale est obtenue par intégration comme suit : $u(t) = \int_0^t \dot{u}(\tau) d\tau$.

3 Commande LQ sous contraintes à un paramètre de réglage

3.1 Présentation de la méthode

Notre objectif ici est de concevoir une commande permettant de satisfaire les contraintes (6) tout en assurant la stabilité de la boucle fermée. L'idée, de façon sommaire, consiste à partir d'une commande LQ « prudente », i.e. pour laquelle la pondération sur la commande est élevée, et à multiplier cette commande par un gain ajustable, noté g , permettant de satisfaire, en régime transitoire, les contraintes (6).

La loi de commande, dans ce cas, s'écrit :

$$\dot{u}(t) = -Kx(t) = -g \begin{bmatrix} K_{lq} & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ y(t) - r(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ce qui correspond au schéma de la figure suivante :

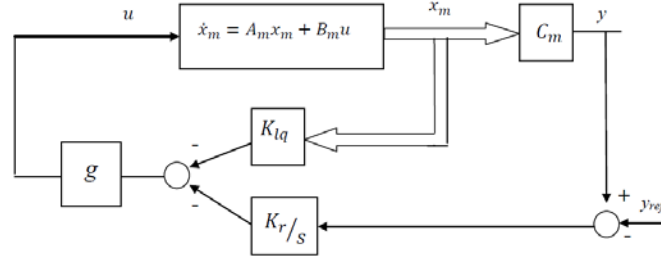


Figure 1 : L'architecture de la loi de commande proposée

La synthèse de cette loi de commande résulte d'un certain nombre d'étapes décrites ci-après :

Etape 1 : Synthèse (hors ligne) d'une loi de commande LQ « prudente » (à horizon infini), i.e. qui minimise le critère $J = \int_0^\infty (x(t_i + \tau | t_i)^T Q_0 x(t_i + \tau | t_i) + \dot{u}(\tau)^T R_0 \dot{u}(\tau)) d\tau$ avec R_0 suffisamment « grande » pour que les contraintes sur la commande ne soient pas actives. On notera ce gain LQ K_0 .

Etape 2 : Calcul de g_{\max} de manière à maximiser les performances ; la commande correspondante ayant la forme $\dot{u} = g_{\max} K_0 x$, avec g_{\max} choisi de manière à conférer au système asservi la marge de retard minimale admissible.

Etape 3 : Synthèse de la loi de commande finale $\dot{u} = g K_0 x$ en adaptant à chaque pas de calcul τ le gain g c.à.d. on multiplie g par $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \varepsilon \prec 1$) si les contraintes (6) sont vérifiées et $g \prec g_{\max}$ et on divise g par $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \varepsilon \prec 1$) si les contraintes (6) ne sont pas vérifiées et $g \succ 1/2$.

Etape 5 : La commande finale est obtenue par intégration.

Remarque 1 : La condition $g \succ 1/2$ est la condition théorique permettant de garantir la stabilité (cf. *critère du cercle* [5]). On imposera en pratique la condition $g \succ g_{\min} \succ 1/2$ (avec e.g. $g_{\min} = 3/4$) pour éviter de trop dégrader les marges de robustesse.

Remarque 2 : Si g tend vers g_{\min} , on retrouve la commande dite « LQ prudente » et si g tend vers g_{\max} , on a les performances maximales obtenues par le retour d'état de l'étape 2.

Remarque 3 : Si le gain g est supposé constant dans l'étape de prédiction sur l'horizon t_i à $t_i + T_p$, la commande elle varie continument selon la loi $\dot{u} = g K_0 x$.

3.2 Exemple académique

Dans l'optique de comparer notre démarche à celle de Wang, nous avons appliqué la méthode présentée ci-dessus, sur un exemple du second ordre traité dans [1] (problème-7.2- page 267):

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (9)$$

Le modèle d'état augmenté admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (10)$$

On considère les données suivantes : $a_0 = 0.1, a_1 = 1, b_0 = 1, u^{\min} = du^{\min} = -0.1$ et $u^{\max} = du^{\max} = 0.1$. Les paramètres utilisés pour la synthèse sont : $(Q_0 = C^T C, R_0 = 700, \tau = 0.1s)$. La valeur maximale $g_{\max} = 4.434$ a été déterminée de manière à garantir, hors contraintes, la marge de retard $Mr_{opt} = 1.098s$. La figure suivante montre les résultats obtenus pour une entrée de consigne en échelon. Ces résultats temporels sont sensiblement équivalents à ceux obtenu par Wang dans [1], alors même que nous garantissons la stabilité.

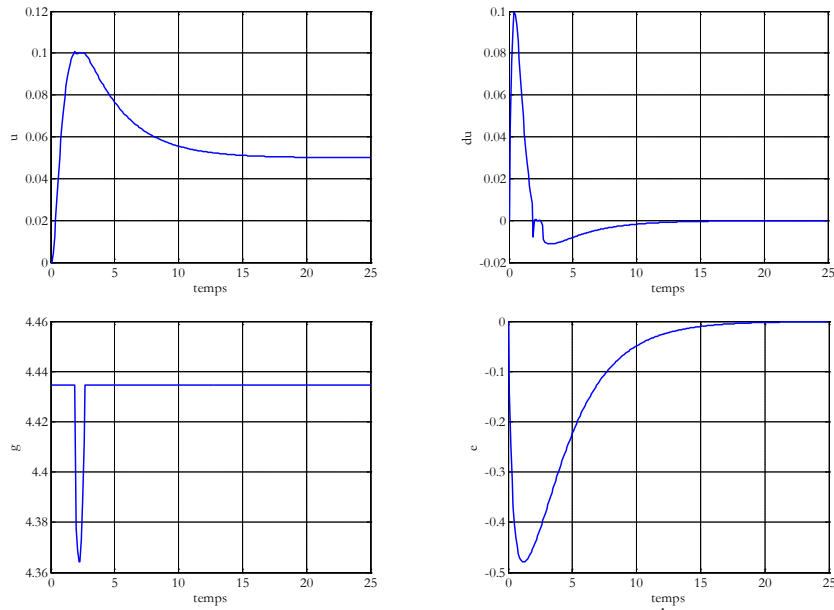


Figure 1 : Résultats obtenus pour un système de 2nd ordre.

4 Conclusion

Dans cet article nous présentons une méthode de commande, basée sur la commande LQ, permettant la prise en compte des contraintes sur la commande et sur la dérivée de la commande (avec extension possible sur l'état) par le biais d'un paramètre de réglage unique, tout en garantissant la stabilité de l'ensemble. La démarche est comparée à la commande prédictive à temps continu proposée dans [1].

Nous nous focalisons actuellement sur le détail de la mise en œuvre algorithmique (e.g. période de calcul, choix des fonctions de Laguerre ou solutions alternatives, horizon de prédiction pour la prise en compte des contraintes, etc.), et au-delà sur les possibilités de généralisation en tirant parti des résultats existant sur la commande LPV.

Références

- [1] L. Wang, "Model predictive control system design and implementation using MATLAB", Springer, 2009.
- [2] M. B. Ben Slimen, "Conception de lois de commande structurées (hiérarchisées, décentralisées) pour les chaînes de traction pilotées", Thèse de Université de Nantes, 2011.
- [3] H. Demircioglu et P.J. Gawthrop, "Continuous-time generalised predictive control", Automatica, vol. 27, pp. 55-74, 1991.
- [4] H. Demircioglu et P.J. Gawthrop, "Multivariable continuous-time generalised predictive control". Automatica, vol. 28, pp. 697-713, 1992.
- [5] M. G. Safonov et M. Athans. A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis. IEEE Trans. Autom. Control, AC-26(2):415-422, Avril 1981.