

Contexte et introduction

Lorsqu'une population se développe dans un environnement donné (ex. clients d'un service, bactéries dans une boîte de Pétri, utilisateurs d'un réseau social), sa croissance n'est pas infinie. En effet, divers facteurs limitent son expansion, comme :

- Les ressources disponibles (nourriture, espace, capacité du marché)
- La concurrence
- La saturation du marché

L'équation logistique permet de modéliser ce phénomène en intégrant une limite de croissance (capacité maximale K).

1 L'équation différentielle logistique

L'équation différentielle qui régit la croissance logistique est :

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (1)$$

où :

- $P(t)$ est la population (ou le nombre de clients/utilisateurs) à un instant t .
- r est le taux de croissance intrinsèque (vitesse de croissance si elle n'était pas limitée).
- K est la capacité limite, c'est-à-dire la population maximale que l'environnement (ou le marché) peut supporter.

2 Interprétation de l'équation

2.1 Quand P est petit (au début)

$$1 - \frac{P}{K} \approx 1 \quad (2)$$

L'équation devient :

$$\frac{dP}{dt} \approx rP \quad (3)$$

Ce qui correspond à une croissance exponentielle.

Au début, la population croît rapidement, sans limite.

2.2 Quand P devient grand (proche de K)

$$1 - \frac{P}{K} \approx 0 \quad (4)$$

Ce qui réduit la croissance à presque zéro.

La population atteint un équilibre autour de K .

2.3 Conclusion

Conclusion : la croissance est exponentielle au début mais ralentit quand la population sature.

Activité: Croissance des clients d'une startup SaaS

Problème : Une startup SaaS lance un produit sur le marché. Elle a un marché potentiel estimé à **100 000 clients**. Elle observe qu'au début, elle acquiert **500 clients par mois**, mais la croissance ralentit avec le temps.

Comment prédire **quand** la startup atteindra 50 000 clients ?

Hypothèses :

- $r = 0.05$ (croissance initiale rapide)
- $K = 100\,000$ (taille du marché total)
- $P_0 = 1000$ (clients initiaux)

Partie 1: Modélisation et compréhension mathématique du problème

1. Écrire l'équation différentiel avec les valeurs du problème.
2. Expliquer pourquoi l'interprétation fonctionne au début de l'activité et à la fin de l'activité.
3. Utiliser la méthode de discrétisation pour obtenir l'équation d'Euler qui permet d'approximer la valeur de la solution.
4. Implémenter en python cette équation en choisissant un pas approprié.

Partie 2: Etude de la précision de la solution

Il s'avère que cette équation possède une solution dite analytique (c'est à dire une solution exacte sous cette forme)

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0} \right) e^{-rt}}$$

1. Implémenter cette fonction
2. Comparer les résultats d'approximations avec le résultat de cette fonction pour plusieurs valeurs en vous basant sur la MSE.
3. Tracez les courbes de votre approximation et de la solution analytique.

Partie 3: Application sur des données réels et recalibrage du modèle

Le fichier **Dataset_nombre_utilisateurs.csv** contient le nombre d'utilisateurs par jour du SAS sur l'année.

1. Tracer la courbe du nombre d'utilisateurs.
2. Quand est ce qu'on atteint la phase de "saturation" ? Quand est ce qu'on atteint 50% de la saturation ?
3. Calculer la MSE pour les 2 solutions sur plusieurs intervalles de temps.
4. Tracer simultanément les 3 courbes.
5. Expliquer pour quelle(s) raison(s) les écarts sont significatifs ?
6. Proposer de nouvelles hypothèses pour donner une meilleur approximation
7. Recalculer la MSE et retracer les courbes

Partie 4: Question ouverte

Le pôle développement de la SAS souhaite lancer un nouveau produit et veut baser son business modèle sur les résultats du business modèle précédent. Vous êtes mandaté pour définir un plan de projection du chiffre d'affaires et des bénéfices réalisés par mois sur l'année de lancement du produit.

Est-ce que le business modèle est rentable ?

Est-ce qu'il manque des hypothèses ?

Voici les informations dont vous disposez:

- Le nombre d'utilisateurs maximum par serveur: 2000
- Prix d'un serveur par mois: 1000 euros
- Estimation du coût marketing marginal d'acquisition par utilisateur 10 euros
- Budget de campagne marketing corporate branding concentré à 35% au lancement du produit puis réparti équitablement sur le reste du mois: 50 000 euros
- Coût de l'abonnement mensuel du nouveau produit: 11,99 euros/mois
- Estimation de la taille du marché: 400 000 utilisateurs
- Part de marché: 20%
- Croissance initial moyennement rapide
- Nombre initial d'utilisateur au lancement: 500