SIM & Treynor-Black

P. Hénaff

Version: 16 févr. 2022

Single Index Model (Sharpe)

Rendement

$$R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + e_i(t)$$

Rappel: Calcul du portefeuille tangent.

$$\frac{R_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{w^T(R - R_f)}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

$$\min \quad \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$

s.t.

$$\tilde{R}^T w = R^*$$

avec $\tilde{R} = R - R_f$, $R^* > R_f$.

Calcul du portefeuille tangent.

$$w^* = \lambda^* \Sigma^{-1} \tilde{R} \tag{1}$$

Normalisation des poids $\sum w_i^* = 1$:

$$w^* = \frac{\Sigma^{-1} \tilde{R}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \tilde{R}} \tag{2}$$

Allocation Treynor-Black

- Exploiter l'information donnée par α_i pour constituer un portefeuille "actif"
- Allouer le reste de son budget au portefeuille tangent en maximisant le ratio de Sharpe

Portefeuille Actif

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} \sigma^2(e_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma^2(e_n) \end{bmatrix}$$

$$w_{Ai} = \frac{\alpha_i / \sigma_i^2}{\sum \alpha_i / \sigma_i^2}$$

Portefeuille Actif

$$R_A = \alpha_A + \beta_A R_M$$
$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(e_A)$$

$$\alpha_A = \sum w_{Ai} \alpha_i$$
$$\beta_A = \sum w_{Ai} \beta_i$$
$$\sigma^2(e_A) = \sum w_{Ai}^2 \sigma^2(e_i)$$
$$w_{Ai} = \frac{\alpha_i / \sigma_i^2}{\sum \alpha_i / \sigma_i^2}$$

Allocation entre le Portefeuille Actif et le Portefeuille Tangent

$$w_A = \frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\alpha_A \sigma_M^2 (1 - \beta_A) + R_M \sigma^2(e_A)}$$

Relation avec Ratio de Sharpe

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_A^2}{\sigma^2(e_A)} &= \alpha^T \Sigma^{-1} \alpha \\
&= \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\sigma^2(e_i)}
\end{aligned}
$$