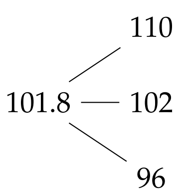
APT & Modèles Multifacteurs

Patrick Hénaff

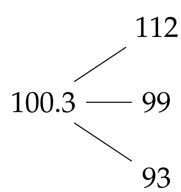
Version: 28 févr. 2022

1 Prix d'Etat et Valorisation par Arbitrage

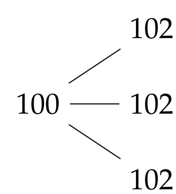
Soit une économie dotée de 2 actifs risqués et d'un taux sans risque. Pour l'année à venir, l'incertitude sur les rendements est modélisée par un arbre à trois branches. On ignore les probabilités associées à chaque scénario. Les prix des actifs A, B sont respectivement 102 €et 104 € tandis que le prix de l'actif sans risque R est arbitrairement fixé à 100 €, pour un taux sans risque de 2%.



Titre A

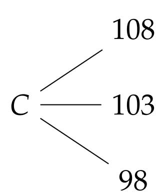


Titre B



Actif sans risque R

Quelle devrait être la valeur du titre C, dont les valeurs attendues selon les trois scenarios sont:



On constitue un portefeuille formé des titres A, B et R qui a la même valeur à terme que C. Les poids des titres dans ce portefeuille sont obtenus en resolvant:

```
M = matrix(c(110,102,96,112,99,93,102,102,102), nrow=3)
b = matrix(c(108,103,98))
P.0 = matrix(c(101.8, 100.3,100), nrow=3)
w = solve(M, b)
P.C = t(w) %*% P.0
rownames(w) <- c('A', 'B', 'R')
```

$$\begin{bmatrix} 110 & 112 & 102 \\ 102 & 99 & 102 \\ 96 & 93 & 102 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} 108 \\ 103 \\ 98 \end{bmatrix}$$

Soit,

$$W = \begin{bmatrix} 1.17 \\ -0.33 \\ 0.17 \end{bmatrix}$$

et donc un prix

$$\begin{aligned} P_C &= W^T \begin{bmatrix} 101.8 \\ 100.3 \\ 100 \end{bmatrix} \\ &= 102 \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, il est utile de s'interesser à des actifs élémentaires qui ont un rendement nul dans tous les scénarios sauf un: soit E_i un tel actif, ayant par convention une valeur de 1 à terme dans le scénario i. Calculons le vecteur P des prix de ces trois actifs. En reprenant la même logique que précédement,

```
b = diag(3)
w = solve(M, b)
P.E = t(w) %*% P.0
```

on obtient:

$$P_E = \begin{bmatrix} 0.29 \\ 0.61 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

Les actifs E_i sont appelés actifs d'Arrow-Debreu, et les prix P_{E_i} sont les prix d'états associés. Notons que pour éviter une opportunité d'arbitrage, $P_{E_i} \geq 0$. En appliquant ces prix d'état à l'actif sans risque, on observe que

$$(1+r) \sum_i P_{E_i} = 1$$

Posons $\pi_i = (1+r)P_{E_i}$, et considérons un actif quelconque Z de le prix Z_0, valant à terme Z_i si le scenario i se réalise. Par définition des prix d'états, on a

$$Z_0 = \sum_i P_{E_i} Z_i$$

ou bien,

$$Z_0 = \frac{1}{1+r} \sum_i \pi_i Z_i$$

avec $\sum_i \pi_i = 1, \pi_i \geq 0$. On peut interpréter π_i comme une probabilité associée à l'état i. Ainsi, la valeur de l'actif Z est l'espérance de valeur future sous la probabilité π, actualisée à la date du jour. Un agent qui valoriserait ainsi les actifs, en considérant uniquement l'espérance de valeur future, serait neutre par rapport au risque, et les pseudo-probabilités π sont de ce fait nommées "probabilités risque-neutre".

2 Le Modèle APT

On suppose que le rendement non-anticipé d'un actif est une fonction linéaire de facteurs de risque indépendents:

$$R_{it} = E_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt} + \epsilon_{it} \tag{1}$$

2.1 Version simplifiée

Commençons par une version simplifiée de (1), sans terme d'erreur. Avec N actifs risqués et K facteurs, la relation s'écrit:

$$r = \mu + Bf \tag{2}$$

ou B est une matrice $NxK, \mathrm{E}(f_i) = 0, \mathrm{Cov}(f) = \Phi$. Constituons un portefeuille d'actifs risqués de poids $w \in R^N$ tel que w est orthogonal aux colonnes de B

$$r_W = (1 - w^T \mathbf{1}) r_0 + w^T r \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(r_w) &= r_0 + \mathrm{E}(w^T(r - r_0\mathbf{1})) && (4) \\ &= r_0 + w^T(\mu - r_0\mathbf{1}) && (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(r_w) &= \mathrm{Cov}(w^T Bf, w^T Bf) && (6) \\ &= w^T B \,\mathrm{Cov}(f, f) B^T w && (7) \\ &= 0 && (8) \end{aligned}$$

Puisque le portefeuille w est sans risque, sont rendement $w^T \mu = r_0$, ou $w^T(\mu - r_0\mathbf{1}) = 0$. Ce qui implique que $(\mu - r_0\mathbf{1})$ est dans le sous-espace généré par les colonnes de B. Il existe donc un vecteur λ tel que:

$$(\mu - r_0 \mathbf{1}) = B\lambda \tag{9}$$

Pour revenir à la notation initial, on a établi que l'espérance d'excès de rendement d'un actif risqué est une fonction linéaire des primes de rique λ_k associées aux facteurs de risque:

$$\mu_i - r_0 = \sum_k \beta_{ik}\lambda_k \tag{10}$$

2.2 Modèle avec terme d'erreur

On considère maintenant le modèle complet, avec un terme d'erreur ϵ:

$$r = \mu + Bf + \epsilon \tag{11}$$

avec $\mathrm{Cov}(\epsilon) = \sigma^2 I, \mathrm{E}(\epsilon) = 0, \mathrm{Cov}(\epsilon, f) = 0$.

On construit $(N-K)$ portefeuilles $v_i, i = 1, \ldots, N-K$, orthogonaux entre eux et orthogonaux aux colonnes de B, et finalement le portefeuille v, moyenne des portefeuilles précédents:

$$v = \frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} v_i \tag{12}$$

Soit $a = \max |w_i|, i = 1, \ldots, N-K$, calculons la variance du rendement de ce portefeuille moyen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\, V^T r &= \mathrm{Var}(v^T Bf + v^T \epsilon) && (13)\\
&= \frac{1}{(N-K)^2} Var((\sum_i v_i)^T \epsilon) && (14)\\
&\leq \frac{1}{(N-K)^2} (N-K) a^2 \sigma^2 && (15)\\
&\leq \frac{1}{(N-K)} a^2 \sigma^2 && (16)
\end{aligned}$$

Pour $N >> K$, le portefeuille v est essentiellement sans risque, et donc:

$$\mathrm{E}(v^T r) = r_0 \tag{17}$$

Par un raisonnement similaire à celui de la section précédente, on déduit que dans ce modèle également, l'espérance de rendement est une fonction linéaire des primes de risque associées aux facteurs:

$$\mu - r_0 \mathbf{1} = B\lambda \tag{18}$$

Pour résumer, le modèle APT postule que le rendement des actifs risqués est une fonction linéraire d'un nombre limité de facteurs de risque:

$$R_{it} = E_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt} + \epsilon_{it} \tag{19}$$

et on en déduit que l'espérance de l'excès de rendement de ces actifs risqués est uniquement une fonction des prime de risques des facteurs auquels le titre est exposé:

$$E_i - r_0 = \sum_k \beta_{ik} (r_{F_k} - r_0) \tag{20}$$

3 Mise en oeuvre

Ce résultat a inspiré de nombreuses stratégies de mise en oeuvre; on peut même dire qu'il a donné naissance à une industrie à part entière. Deux grandes catégories de modèles se dégagent: les modèles implicites, et les modèles explicites.

3.1 Modèles factoriels implicites ou statistiques

Soit
$hatSigma$ l'estimation de la matrice de covariance et $X_k, k = 1, \ldots, K$ les vecteurs propres retenus. La série temporelle de réalisation du facteur k est:

$$\hat{f}_{kt} = X_k^T R_t$$

La projection de chaque titre i sur les facteurs est obtenue par regression linéaire, en utilisant la série temporelle du rendement du titre et les series temporelles de réalisation des facteurs:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i^T \hat{f}_t + \epsilon_{it}$$

Finalement, on peut calculer le prix du risque λ_k de chaque facteur en estimant la regression longitudinale

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \lambda_1 \hat{\beta}_{i1} + \lambda_K \hat{\beta}_{iK} + u_i$$

Ayant retenu K facteurs, la covariance des rendements est obtenue par:

$$\hat{\Sigma} = B \Sigma_F B^T + \Sigma_\epsilon$$

3.2 Modèles factoriels explicites à facteurs macroéconomiques (Chen, Roll et Ross - 1986)

Les facteurs de risques sont définis *a priori*, par exemple:

- Croissance de la production industrielle non-anticipée
- Variation de l'anticipation d'inflation
- Taux d'inflation non-anticipé
- Ecart de taux (Baa - AAA) non anticipé
- Variation de l'écart (T Bond - T Bill) non anticipé
- Rendement d'un indice de marché

1. Pour chacun de ces facteurs, on calcule la valeur non-anticipée du facteur:

$$\tilde{f_{kt}} = f_{kt} - \mathrm{E}(f_{kt})_{t-1})$$

2. Pour chaque actif risqué i, estimer les expositions β_{ik} aux facteurs en estimant l'équation de régression

$$r_{it} = a_i + \beta_{i1}\tilde{f_{1t}} + \ldots + \beta_{iK}\tilde{f_{Kt}} + \epsilon_{it}$$

3. Calculer le prix du risque λ_k de chaque facteur en estimant la regression longitudinale

$$\bar{r_i} = \lambda_0 + \lambda_1\hat{\beta}_{i1} + \lambda_K\hat{\beta}_{iK} + u_i$$

3.3 Modèles factoriels explicites à facteurs microéconomiques

On trouve dans cette rubrique deux types de modèles, qui illustrent la fléxibilité de l'approche factorielle.

3.3.1 Modèle de type "BARRA"

Selon cette approche, les β sont des données observables, spécifiques aux titres: capitalisation, catégorie industrielle, etc.) Voir le document "Risk Model Handbook"pour plus de détails. Ces β étant connus, on calcule pour chaque date le rendement du facteur f_t par la régression

$$R_t = \beta f_t + \epsilon_t$$

Si le facteur est le secteur industriel, les β sont de la forme

$$\beta_{ik} = 1 \text{si le titre} i \text{appartient à la catégorie} k \tag{21}$$
$$= 0 \text{autrement} \tag{22}$$

3.3.2 Modèle Fama-French

Ce modèle est également largement utilisé dans l'industrie.

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t + e_{i,t}$$

r_i Excédent de rendement, titre i

R_M Excédent de rendement, marché

SMB "Small Minus Big": Facteur Capitalisation

HML "High Minus Low": Facteur Valorisation

Ici, contrairement à l'approche BARRA, les rendements des facteurs sont connus, et les β sont estimés par regression, en utilisant les series de rendement des titres.

Les facteurs sont des portefeuilles à coût nul définis comme suit: on utilise deux caractéristiques pour définir une segmentation des titres:

		Valeur Comptable/Marché	
		Faible	**Forte**
Capitalisation	**Faible**	SG	SV
	Forte	LG	LV

Cette segmentation permet de construire deux facteurs:

SMB "Small Minus Big": Facteur Capitalisation

$$\frac{1}{2}(SG - SV) - \frac{1}{2}(LG - LV)$$

HML "High Minus Low": Facteur Valorisationa

$$\frac{1}{2}(SV + LV) - \frac{1}{2}(SG + LG)$$

On ajoute souvent au modèle original un quatrième facteur:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t + \beta_{i,UMD} R_{UMD,t} + \ldots + e_{i,t}$$

UMD (Up Minus Down): rendement d'un portefeuille de titres ayant eu les rendements les plus élevés sur les 2-12 derniers mois, moins le rendement d'un portefeuille de titres ayant eu les rendements les moins élevés sur la même période.

Il y a de multiples tentatives de justification de ce facteur:

1. Justifications inspirées par la finance comportamentale. On peut citer, entre autres, le "disposition effect" de Shefrin et Statman (1985), Frazzini (2006): Les investisseurs ont tendance à vendre les investissements profitables tôt, et conserver les perdants dans l'espoir de revenir au point mort. Il en résulte que les prix ont tendance à sous-réagir aux nouvelles, créant une inertie artificielle.

2. L'excès de redement lié au momentum pourrait simplement représenter la rémunération du risque pris. Une de ces justifications serait que les investisseurs dont les titres ont fortement augmenté sont plus exposés au risque de liquidité que ceux dont les titres ont baissé.

L'article de T. Moskowitz "Explanations for the Momentum Premium" présente une revue detaillée des théories justifiant le facteur "momentum".

4 Applications des modèles multi-factoriels

1. Estimation de la matrice de covariance

Si le rendement des titres est généré par un processus multi factoriel

$$R_t = \alpha + \beta^T F_t + \epsilon_t$$

alors la covariance des rendements est

$$\Sigma = \beta^T \Phi \beta + \Sigma_\epsilon$$

2. Estimation des espérances de rendements $E(R)$

3. Expression de "points de vue" sur le rendement des facteurs et construction de portefeuilles privilegiant ces "points de vue".

4. Ex-post, attribution de la performance des portefeuilles. à partir d'estimations de α, β, et des espérances de rendement des facteurs