

Calcul propositionnel

Quotidiennement, nous faisons des affirmations et nous avons le choix de dire la vérité ou de mentir.

Ces affirmations seront alors vraies ou fausses.

Une proposition est une affirmation qui prend toujours la même valeur de vérité.

Il existe 2 valeurs: vrai et faux.

Une affirmation est soit vraie, soit fausse mais ne peut pas être en partie vraie et en partie fausse.

Voici les bases du calcul propositionnel

Savoirs et compétences associées

Comprendre une demande

Décomposer une demande en suite d'action simple

Etre à l'aise avec la logique propositionnelle

A quoi ça sert ?

Cela va vous permettre

- de découper encore plus finement votre raisonnement
- de vous baser sur la véracité de certaine affirmation dans votre raisonnement
- de conditionner certaines actions

Explication technique

L'affirmation

Soit une proposition P , P peut être soit vraie, soit fausse.

La négation

Soit une proposition P , sa négation se dit alors non P .

- Si P est vraie, non P est alors fausse.
- Si P est fausse, non P est alors vraie.

Exemple

Les affirmations suivantes sont des propositions

- 10 est un nombre pair
- la chaise est verte
- la porte est bleu
- l'eau de la casserole bout

Cas de la négation:

- la chaise n'est pas verte
- la porte n'est pas bleu
- l'eau de la casserole ne bout pas
- 10 n'est pas un nombre pair... *mais aussi* 10 est un nombre impair

Pratique décomposition unitaire

A l'aide de ses propositions vraies, rendez à chaque personne son chien et découvrez l'âge et le nom de chaque animal.

Max, le boxer, à moins de 3 ans et n'appartient pas à Thomas

Le chien de Marie a 4 ans et ne s'appelle pas Oscar

Paolo, le labrador, a 2 ans de moins que le caniche de Nadine

Pour plus de clarté, représentons le vrai par un 1 et le faux par un 0 dans la grille de résultat

[illegible]

Pratique décomposition unitaire

Max, le boxer, à moins de 3 ans et n'appartient pas à Thomas

Pratique décomposition unitaire

Max, le boxer, à moins de 3 ans et n'appartient pas à Thomas

- Max est le boxer.
- Max n'appartient pas à thomas.
- le boxer n'appartient pas à thomas.
- Max a moins de 3 ans.
- Le boxer a moins de 3 ans

Comme moins de 3 ans, signifie ici forcément 2 ans, nous avons les proposition suivantes :

- Max a 2 ans.
- Le boxer a 2 ans.
- le chien de Thomas n'as pas 2 ans

Pratique décomposition unitaire

Le chien de Marie a 4 ans et ne s'appelle pas Oscar

Pratique décomposition unitaire

Le chien de Marie a 4 ans et ne s'appelle pas Oscar

- Le chien de marie a 4 ans.
- le chien de marie ne n'appelle pas Oscar.
- Oscar n'a pas 4 ans

Pratique décomposition unitaire

Paolo, le labrador, a 2 ans de moins que le caniche de Nadine

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela			0				0					
Marie			0		0	0	1	0			0	
Nadine	0	0	1	0	0	0	0					
Thomas		0	0		0		0			0		
Horace		0		0	0							
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar		0		0	0		0					
Paolo	0	0	0	1	0		0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans		0	0									
4 ans		0		0								
5 ans		0		0								

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela			0				0					
Marie			0		0	0	1	0	1		0	
Nadine	0	0	1	0	0	0	0					
Thomas		0	0		0		0			0		
Horace		0		0	0	0	1	0				
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar		0		0	0	0	0	1				
Paolo	0	0	0	1	0	3	0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans	0	0	0	1								
4 ans		0		0								
5 ans		0		0								

Pratique décomposition unitaire

Paolo, le labrador, a 2 ans de moins que le caniche de Nadine

- Paolo est un labrador.
- Nadine a un caniche
- Paolo a 2 ans de moins que le caniche.
- Le labrador a 2 ans de moins que le caniche.
- Paolo a 2 ans de moins que le chien de Nadine.
- Le labrador a 2 ans de moins que le chien de Nadine

Pratique décomposition unitaire

Max, le boxer, à moins de 3 ans et n'appartient pas à Thomas

- Max est le boxer.
- Max n'appartient pas à Thomas.
- le boxer n'appartient pas à Thomas.
- Max a moins de 3 ans.
- Le boxer a moins de 3 ans

Le chien de Marie a 4 ans et ne s'appelle pas Oscar

- Le chien de Marie a 4 ans.
- le chien de Marie ne s'appelle pas Oscar.
- Oscar n'a pas 4 ans

Paolo, le labrador, a 2 ans de moins que le caniche de Nadine

- Paolo est un labrador.
- Paolo a 2 ans de moins que le caniche.
- Le labrador a 2 ans de moins que le caniche.
- Paolo a 2 ans de moins que le chien de Nadine.
- Le labrador a 2 ans de moins que le chien de Nadine

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela			0				0					
Marie			0		0	0	1	0			0	
Nadine	0	0	1	0	0	0	0					
Thomas		0	0		0		0			0		
Horace		0		0	0							
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar		0		0	0		0					
Paolo	0	0	0	1	0		0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans		0	0									
4 ans		0		0								
5 ans		0		0								

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela			0				0	0				
Marie			0		0	0	1	0			0	
Nadine	0	0	1	0	0	0	0	1				
Thomas		0	0		0		0	0		0		
Horace		0		0	0	0						
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar		0		0	0	0	0					
Paolo	0	0	0	1	0	1	0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans	0	0	0	1								
4 ans		0		0								
5 ans		0		0								

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela			0			0	0	0				
Marie			0		0	0	1	0			0	
Nadine	0	0	1	0	0	0	0	1				
Thomas		0	0		0	1	0	0		0		
Horace		0		0	0	0		0				
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar		0		0	0	0	0	1				
Paolo	0	0	0	1	0	1	0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans	0	0	0	1								
4 ans		0		0								
5 ans		0		0								

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela			0		1	0	0	0				
Marie			0		0	0	1	0			0	
Nadine	0	0	1	0	0	0	0	1				
Thomas		0	0		0	1	0	0		0		
Horace		0		0	0	0	1	0				
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar		0		0	0	0	0	1				
Paolo	0	0	0	1	0	1	0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans	0	0	0	1								
4 ans		0		0								
5 ans		0		0								

	berger allemand	boxer	caniche	labrador	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	Horace	Max	Oscar	Paolo
Angela	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
Marie	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Nadine	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
Thomas	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
Horace	1	0	0	0	0	0	1	0				
Max	0	1	0	0	1	0	0	0				
Oscar	0	0	1	0	0	0	0	1				
Paolo	0	0	0	1	0	1	0	0				
2 ans	0	1	0	0								
3ans	0	0	0	1								
4 ans	1	0	0	0								
5 ans	0	0	1	0								

Problématique

Quel est la négation de la proposition

a est plus grand que b ?

Explication technique

Le connecteur ET

Une proposition P est composée de plusieurs propositions connectées à l'aide du connecteur ET.

P sera alors considérée comme vraie, uniquement si toutes les propositions connectées sont vraies. Dans tous les autres cas, P sera fausse.

Le connecteur OU

Une proposition P est composée de plusieurs propositions connectées à l'aide du connecteur OU.

P sera alors considérée comme vraie, si au moins une des propositions connectées est vraie. P sera donc fausse uniquement si toutes les propositions connectées sont fausses.

Exemple

Soit 2 propositions :

- La chaise est verte
- La porte est bleu

La chaise est verte ET la porte est bleu n'est vraie que si la porte est effectivement bleu et la chaise verte

La chaise est verte OU la porte est bleu est vraie si la chaise est verte, peu importe la couleur de la porte ainsi que si la porte est bleue, quelque soit la couleur de la chaise.

Et notre *a* est plus grand que *b* ?

Explication technique

La négation dans le cas des connecteurs

- $P = A \text{ ET } B$
- $\text{NON } P = \text{NON } (A \text{ ET } B)$
- $\text{NON } (A \text{ ET } B) = (\text{NON } A) \text{ OU } (\text{NON } B)$
- $\text{NON } P = (\text{NON } A) \text{ OU } (\text{NON } B)$

- $P = A \text{ OU } B$
- $\text{NON } P = \text{NON } (A \text{ OU } B)$
- $\text{NON } (A \text{ OU } B) = (\text{NON } A) \text{ ET } (\text{NON } B)$
- $\text{NON } P = (\text{NON } A) \text{ ET } (\text{NON } B)$

Démonstration possible via la loi de Morgan.

Exemple

Soit 2 propositions :

- La chaise est verte
- La porte est bleu

la négation de *la chaise est verte ET la porte est bleu* est *la chaise n'est pas verte OU la porte n'est pas bleu*

la négation de *la chaise est verte OU la porte est bleu* est *la chaise n'est pas verte ET la porte n'est pas bleu*

Pratique

Un problème classique d'après Cervantes: Un missionnaire se fait capturer par des cannibales. Par respect pour sa fonction, les cannibales lui proposent de choisir son sort: il doit faire une courte déclaration, si elle est vraie il sera rôti, si elle est fausse, il sera bouilli. Quelle phrase le missionnaire doit-il dire pour sauver sa vie ?

1. je serai rôti
2. je serai bouilli A
3. je demande pitié