Rapport du miniprojet
de recherche opérationnelle

Groupe 9
Cément ALLAIN, Ahmed BOUGHDIRI, Adrien CANCES

12 janvier 2020

1 Conception d'un réseau de transport de pétrole

Modélisons le problème.
Pour ce faire, construisons un graphe orienté G encodant l'information. L'ensemble V des sommets de G est composé de quatre sommets pour les puits, six pour les branchements, un pour le centre de traitement noté t et un pour la source virtuelle noté s. L'ensemble A des arêtes de G rassemble les tuyaux possibles ainsi que quatre arêtes reliant la source aux différents puits.
Introduisons maintenant plusieurs quantités utiles. Pour chaque arête $a = (u, v)$ de A, posons f_a la capacité donnée par le volume journalier à acheminer pour le puits codé par v si $u = s$, 200 sinon ; posons également c_a le coût donné par 0 si $u = s$, le coût du tuyau correspondant sinon.
Adoptons à présent une formulation linéaire.
Le problème peut s'écrire sous la forme qui suit, dont certains points méritent d'être explicités. Les variables x_a, pour a dans A, expriment le flot de s vers t. Les variables binaires y_a, pour a dans A, codent par l'action de la minimisation associée aux contraintes $\mathbb{1}_{\{x_a>0\}}$ (2) et (4). La contrainte (6) impose le flux sortant de la source tandis que la contrainte (5) assure la conservation de ce dernier à travers le réseau, ceci en respectant les capacités des tuyaux avec (2). La fonction objectif représente le coût total du réseau, dont la minimisation entraîne celle des x_a, et donc celle des y_a par le biais de la contrainte (4). Il s'agit en résumé de la formulation linéaire d'un problème de flot modifiée et enrichie.

$$\min \sum_{a\in A} y_a c_a$$

$$s.c.\quad \forall a \in A,\ x_a \geq 0 \tag{1}$$

$$\forall a \in A,\ x_a \leq f_a \tag{2}$$

$$\forall a \in A,\ y_a \in \{0, 1\} \tag{3}$$

$$\forall a \in A,\ \left(\max_{a\in A} f_a\right) y_a \geq x_a \tag{4}$$

$$\forall v \in V\backslash\{s,t\},\ \sum_{a\in\delta^-(v)} x_a = \sum_{a\in\delta^+(v)} x_a \tag{5}$$

$$\forall a \in \delta^+(s),\ x_a = f_a \tag{6}$$

La deuxième situation revient à ajouter, pour chaque arête de A étrangère à s, une arête reliant les mêmes sommets, de capacité 400 et de coût 50% supérieur.
Notre implémentation de ce modèle en Python exploite les outils de recherche opérationnelle développés par Google (OR-Tools).

En notant P_i les puits pour i dans $[\![1{,}4]\!]$ et T le centre de traitement, le premier réseau solution, de coût 135, comporte les tuyaux : P_1B, P_1C, P_2B, P_3E, P_4F, BD, CT, DT, ED, FT ; le second, de coût 122, les tuyaux : P_2B, P_3E, P_4F, ED, FT, P_1B, BD, DT.

2 Logistique amont d'une usine chez Renault

L'idée générale de notre approche est d'améliorer par des algorithmes plus ou moins heuristiques ou déterministes une première solution dite "initiale" et notée $\mathscr{S}_0$, qui se calcule de manière déterministe. Nous exposerons dans ce rapport les principales stratégies de résolution utilisées.

2.1 Travail "modulo" Q

Toutes les méthodes mises en œuvre reposent sur le fait que nous avons décider de travailler "modulo" la capacité Q du camion. Autrement dit, pour toute semaine s et tout fournisseur non sous-traité f, nous effectuons le plus possible de tournées à camion plein visitant uniquement ce fournisseur. Il reste alors des résidus $r_{f,s} = (d_{f,s} \mod Q)$ strictement inférieurs à Q. C'est uniquement pour récolter les résidus non nuls que nous utilisons des tournées visitant plusieurs fournisseurs.

Comment justifier ce choix ? Il est difficile de produire une démonstration exacte (il se peut même qu'il ne faille pas toujours travailler modulo Q), mais considérons un cas simple avec deux fournisseurs f_1 et f_2 ayant respectivement des quantités de marchandises d_1 et d_2, et supposons par souci de simplicité que l'on puisse faire des "fractions de tournées". Les c_{d,f_i} ont même valeur, que nous noterons c. Notons également $c_i = c_{f_i,u}$ et $c_{12} = c_{f_1,f_2} = c_{f_2,f_1}$.

En effectuant uniquement des tournées à fournisseur unique, on a un coût total $C_{\text{sep}} = (c + c_1)\frac{d_1}{Q} + (c + c_2)\frac{d_2}{Q}$.

Une autre méthode assez naturelle est de répéter une même tournée P_0 passant par les deux fournisseurs jusqu'à ce que l'un deux n'ait plus de marchandise puis de prendre ce qu'il reste chez l'autre fournisseur avec des tournées visitant uniquement celui-ci.
Supposons sans perte de généralité $c_2 \leq c_1$, de sorte qu'il soit moins coûteux de visiter f_1 puis f_2. La tournée P_0 s'écrit alors $\quad d, (f_1, xQ), (f_2, (1-x)Q), u \quad$ avec $x \in]0, 1[$ la proportion de marchandises que l'on prend au fournisseur f_1, et a un coût $c + c_{12} + c_2$. Le coût total C_{ens} de cette méthode dépend du fournisseur dont on épuise la marchandise en premier, et donc de x. On trouve facilement qu'il s'agit de f_1 si et seulement si $x \geq \frac{d_1}{d_1+d_2}$, auquel cas on effectue $\frac{d1}{Qx}$ tournées P_0 puis $\frac{d_2'}{Q}$ tournées visitant uniquement f_2, où $d_2' = d_2 - (1-x)Q\frac{d1}{Qx}$ est la quantité qu'il reste à chercher chez ce fournisseur. D'où un coût total si $x \geq \frac{d_1}{d_1+d_2}$:

$$\begin{aligned} C_{\text{ens}}(x) &= (c + c_{12} + c_2)\frac{d1}{Qx} + (c + c_2)\frac{d_2 - (1-x)Q\frac{d1}{Qx}}{Q} = (c + \frac{c_{12}}{x} + c_2)\frac{d1}{Q} + (c + c_2)\frac{d_2}{Q} \\ &\geq \underbrace{(c + c_{12} + c_2)}_{\substack{\geq c_1 \\ \text{(inégalité triangulaire)}}}\frac{d_1}{Q} + (c + c_2)\frac{d_2}{Q} \geq (c + c_1)\frac{d_1}{Q} + (c + c_2)\frac{d_2}{Q} = C_{\text{sep}} \end{aligned}$$

Si $x < \frac{d_1}{d_1+d_2}$, on trouve par un raisonnement analogue et en utilisant $c_{12} \geq 0$:

$$C_{\text{ens}}(x) = (c + c_1)\frac{d_1}{Q} + (c + c_1 + \frac{c_{12} + c_2 - c_1}{1-x})\frac{d_2}{Q} \geq (c + c_1)\frac{d_1}{Q} + (c + c_1 + c_{12} + c_2 - c_1)\frac{d_2}{Q} \geq C_{\text{sep}}$$

Ansi, on a $C_{\text{ens}}(x) \geq C_{\text{sep}}$ quel que soit x. Cela ne constitue évidemment pas une preuve mais nous incite néanmoins à travailler modulo Q. Notons que nous avons exploité le fait que les coûts vérifient l'inégalité triangulaire.

2.2 Sous-traitance dans la solution initiale $\mathscr{S}_0$

Pour décider si on sous-traite ou non un fournisseur f dans la solution initiale $\mathscr{S}_0$, nous estimons le potentiel coût de non-sous-traitance de celui-ci, afin de le sous-traiter seulement si ce coût estimé est supérieur ou égal au coût de sous-traitance c_f. La condition de sous-traitance du fournisseur f, qui repose sur le fait que l'on travaille modulo Q, est donc la suivante :

$$\underbrace{(c_{d,f} + c_{f,u})}_{\substack{\text{coût d'une tournée} \\ \text{à camion plein}}} (\alpha H + \underbrace{\sum_{s=0}^{H-1} \left\lfloor \frac{d_{f,s}}{Q} \right\rfloor}_{\substack{\text{nombre de tournées} \\ \text{à camion plein}}}) \ \geq \ c_f \qquad \text{où } \alpha \text{ est une constante de } [0,1].$$

Notons que pour $\alpha = 1$, le côté gauche de cette inégalité correspond au coût d'une solution où l'on utiliserait des tournées à fournisseurs uniques pour récupérer les résidus $r_{f,s}$, et est donc une borne supérieure du coût de non-sous-traitance. Des essais de plusieurs valeurs de α nous ont conduit à choisir $\alpha = 0.2$, valeur pour laquelle la descente à partir de $\mathscr{S}_0$ est la plus fructueuse.

2.3 Confection des groupes dans la solution initiale $\mathscr{S}_0$

Une fois décidé quels éléments sont sous-traités, nous construisons les groupes. L'algorithme est le suivant :

$\mathcal{C} \leftarrow [\ ]$;
$L \leftarrow$ liste des fournisseurs non sous-traités ;
tant que *longueur*$(L) \geq 4$ **faire**
  Prendre $f \in L$ telle que la distance à son troisième point de $L \setminus f$ le plus proche soit minimale. ;
  Retirer f et les trois points f_1, f_2, f_3 de $L \setminus f$ les plus proches de f de la liste L. ;
  Ajouter le groupe $\{f, f_1, f_2, f_3\}$ à $\mathcal{C}$. ;
fin
si L *est non-vide* **alors**
  Ajouter le groupe L à $\mathcal{C}$;
fin

2.4 Confection des tournées pour un groupe donné et une semaine donnée

Fixons une semaine s et un groupe C de fournisseurs. Puisqu'on travaille modulo Q, il s'agit seulement d'organiser les tournées récupérant les résidus $r_{f,s}$. On considère donc le sous-ensemble $C^s_{\text{eff}} = \{f \in C : r_{f,s} > 0\}$. Nous utilisons deux méthodes distinctes et nous choisissons ensuite la meilleure d'entre elles pour le groupe C et la semaine s donnés.

1ère méthode : choisir de ne passer qu'une seule fois chez chaque fournisseur $f \in C^s_{\text{eff}}$. On explore alors toute les possibilités, qui sont en bijection avec l'ensemble des partitions de C^s_{eff} en ensembles ordonnés, chaque ensemble ordonné $(f_1, ..., f_k)$ correspondant à une tournée visitant $f_1, ..., f_k$ dans cet ordre.

2ème méthode : effectuer plusieurs fois une même tournée P visitant tous les fournisseurs de C^s_{eff} dans l'ordre optimal et prenant chez chacun d'eux une quantité proportionnelle à son résidu, à savoir $\left\lfloor \dfrac{r_{f,s}}{\sum_{f'} r_{f',s}} Q \right\rfloor$ pour le fournisseur f, afin de ne pas dépasser la capacité du camion. La partie entière dans ces quantités fait qu'il reste souvent de la marchandise chez certains fournisseurs après les tournées P, auquel cas on ramasse tous ces restes dans une même tournée si leur somme est inférieure à Q, ou on passe les prendre un par un dans des tournées distinctes sinon.

2.5 Amélioration de la solution initiale $\mathscr{S}_0$

Plutôt que de faire un recuit simulé dont les paramètres sont souvent délicats à choisir, nous avons pris le parti d'effectuer une descente sans remontées, mais avec des voisinages relativement grands afin de réduire le nombre de minima locaux.

Pour améliorer la répartition des fournisseurs non sous-traités en groupe, nous avons réalisé une fonction qui à partir de deux groupes C_1 et C_2 essait toutes les façons de répartir les fournisseurs de ces groupes en un ou deux groupes, et garde la moins coûteuses. Les cardinaux des groupes devant être d'au plus quatre, l'application de la méthode de confection des tournées vue plus haut à chacune des possiblités de répartition est relativement rapide.

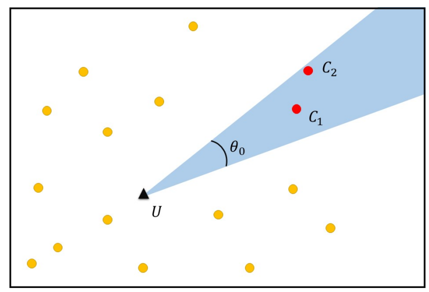

Figure 1: Les groupes C_1 et C_2 forment un angle inférieur à θ_0.

Il s'agit ensuite d'appliquer cette fonction à des paires de groupes bien choisies. Pour alléger le temps de calcul, nous nous restreignons aux paires de groupes dont les barycentres géographiques forment avec l'usine un angle d'au plus θ_0.

L'idée est alors d'appliquer successivement cette fonction aux paires de groupes vérifiant cette condition, et de réitérer cela autant de fois que possible afin d'améliorer les tournées.

Ci-dessous, le graphe du coût de la solution en fonction du temps. Les triangles sur la courbe correspondent aux instants où le coût a diminué.

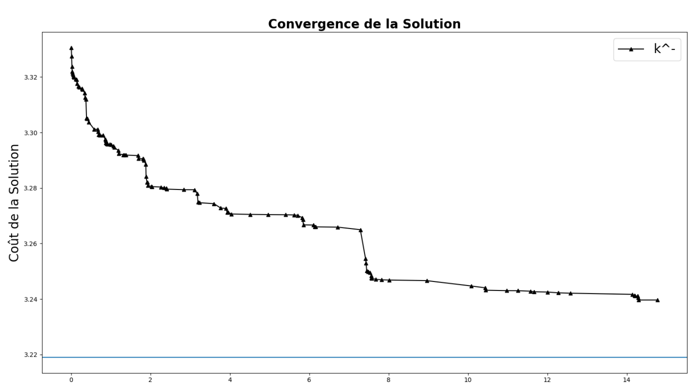

Figure 2: Descente du coût en fonction du temps