

# Equations Différentielles I

STEP, MINES ParisTech\*

25 juillet 2021 (#5494b2a)

## Table des matières

<b>Un peu d'histoire</b>	<b>2</b>
<b>Objectifs du cours</b>	<b>3</b>
<b>Cadre de l'étude</b>	<b>4</b>
Equations différentielles en physique . . . . .	4
Solution d'une équation différentielle . . . . .	5
Problème de Cauchy ( <i>Initial Value Problem</i> ) . . . . .	6
Représentation intégrale des solutions . . . . .	6
Classe plus générale de solutions . . . . .	7
Portrait de phase . . . . .	7
<b>Etude du problème de Cauchy</b>	<b>7</b>
Existence de solutions locales . . . . .	7
Théorème de Peano-Arzelà . . . . .	7
Classe plus générale de solutions (pour la culture) . . . . .	9
Domaine d'existence des solutions . . . . .	9
Solution maximale . . . . .	9
Domaine maximal d'existence . . . . .	10
Critère d'existence globale . . . . .	11
Unicité des solutions maximales . . . . .	12
Théorème de Cauchy-Lipschitz (ou de Picard-Lindelöf) . . . . .	12
Relâchement à $f$ localement Lipschitzienne . . . . .	14
Approximations successives . . . . .	15
<b>Régularité et stabilité des solutions</b>	<b>16</b>
Sensibilité aux conditions initiales et erreurs de modèle . . . . .	16
Régularité en temps fini . . . . .	17
Chaos déterministe et horizon de Lyapunov . . . . .	18

---

\*Ce document est un des produits du projet  paulinebernard/CDIS issu de la collaboration de (P)auline Bernard (CAS) et (T)homas Romary (GEOSCIENCES). Il dérive du projet  boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

Propriétés asymptotiques . . . . .	19
Point d'équilibre . . . . .	20
Attractivité . . . . .	21
Stabilité, stabilité asymptotique . . . . .	21
Robustesse vis-à-vis des perturbations (pour la culture) . . . . .	21
Stabilité d'un système linéaire stationnaire . . . . .	22
Lien entre stabilité et stabilité du linéarisé tangent . . . . .	23
Caractérisation par Lyapunov . . . . .	24
<b>Exercices complémentaires</b>	<b>26</b>
Ecoulement dans un réservoir (+) . . . . .	27
Autour du Lemme de Grönwall . . . . .	27
Cycle limite I (+) . . . . .	28
Cycle limite II (+) . . . . .	28
Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire . . . . .	30
Contrôle d'un système . . . . .	30
<b>Solutions</b>	<b>30</b>
Exercices essentiels . . . . .	30
Ecoulement dans un réservoir . . . . .	34
Autour du Lemme de Grönwall . . . . .	35
Cycle limite I . . . . .	37
Cycle limite II . . . . .	38
Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire . . . . .	42
Contrôle d'un système . . . . .	43
<b>Annexes</b>	<b>43</b>
Preuve du théorème de Peano-Arzelà (Hors-programme) . . . . .	43
Preuve du théorème du domaine maximal d'existence . . . . .	45
Stabilité et linéarisé tangent . . . . .	46
<b>Références</b>	<b>47</b>

## Un peu d'histoire

L'étude des équations différentielles remonte au XVII<sup>e</sup> siècle lors de la découverte du calcul infinitésimal et de la modélisation du mouvement par Kepler et Newton. Avec Leibniz, leur premier réflexe est alors de chercher à résoudre ces équations de manière exacte, par exemple par des primitives de fonctions connues ou bien sous forme de série, mais ces méthodes atteignent vite leurs limites, sauf dans des cas très particuliers.

Alors que l'idée d'approximer les solutions apparaît au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle avec Euler, on cherche ensuite plutôt à caractériser leurs propriétés sans les connaître explicitement. Cauchy, et parallèlement Lipschitz, démontrent les premiers, au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, l'existence et l'unicité des solutions sous des hypothèses de régularités de l'équation différentielle. Laplace, qui s'intéresse alors à la mécanique céleste, s'émerveille devant la capacité de l'Homme à prédire

l'évolution du monde physique. C'est l'avènement du *déterminisme* c'est-à-dire la certitude que l'état du monde futur (ou passé) peut être prédit de manière unique par la connaissance de l'état initial.

Cependant, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les travaux de Poincaré et de ses contemporains mettent en évidence les limites de ce déterminisme. Le constat que le modèle physique n'est jamais exactement connu, ni sa condition initiale, amène les scientifiques à étudier la sensibilité des solutions à ces erreurs. Une sensibilité extrême chez certains systèmes rend leur simulation impossible sur des temps longs et mène à la théorie du *chaos* qui occupera les scientifiques durant une grande partie du XX<sup>e</sup> siècle.

En parallèle, l'étude de la stabilité et du comportement asymptotique des solutions intéresse dès le XIX<sup>e</sup> siècle, d'abord dans le cas des systèmes linéaires avec des mathématiciens comme Ruth, Hurwitz, etc. Mais c'est finalement la thèse de Lyapunov à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle qui lance la théorie générale de la stabilité des systèmes non linéaires qui sera ensuite étayée tout au long des XX<sup>e</sup> et XXI<sup>e</sup> siècles.

## Objectifs du cours

Ce cours est une introduction à l'étude non linéaire des équations différentielles. Pour une étude plus complète voir par exemple (Hale 2009). En première lecture, les objectifs "opérationnels" sont les suivants :

- savoir réduire une équation différentielle à l'ordre 1.
- savoir justifier l'existence de solutions par le théorème de Peano lorsque " $f$  est continue"
- comprendre la notion de solution maximale et savoir qu'elles sont définies tant qu'elles "n'explosent" pas et tant qu'elles n'atteignent pas la frontière du domaine où l'équation différentielle est définie. Savoir justifier qu'une solution est globale si ces éventualités ne peuvent se réaliser en temps fini et/ou en faisant appel au critère "linéairement borné".
- savoir justifier l'unicité des solutions maximales par le théorème de Cauchy-Lipschitz lorsque " $f$  est continûment différentiable par rapport à  $x$ ".
- comprendre (qualitativement) dans quelle mesure une erreur sur la condition initiale se répercute sur les solutions en temps fini.
- savoir trouver les points d'équilibre.
- savoir déterminer si un système linéaire est globalement asymptotiquement stable en regardant le signe de la partie réelle de ses valeurs propres.
- savoir déterminer si un point d'équilibre est localement asymptotiquement stable/instable par les valeurs propres de la matrice Jacobienne associée.
- savoir calculer la dérivée d'une fonction de Lyapunov le long des trajectoires et en déduire qu'un point d'équilibre est stable ou localement/globalement asymptotiquement stable.

En deuxième lecture :

- comprendre la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz en voyant la solution comme un point fixe de la représentation intégrale des solutions.

- savoir que l'on peut relâcher l'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz à “ $f$  Lipschitzienne par rapport à  $x$ ”.
- comprendre ce qu'est un système chaotique et ce que représente son exposant de Lyapunov.
- comprendre ce que la notion de stabilité apporte en plus de l'attractivité dans la notion de stabilité asymptotique.

### Notations

- $B(x, r)$  : boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $r$ .
- $\overline{B}(x, r)$  : boule fermée centrée en  $x$  et de rayon  $r$ .
- Pour  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  et  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ .

## Cadre de l'étude

Les équations différentielles apparaissent couramment en physique pour décrire l'évolution des grandeurs décrivant le système.

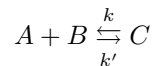
### Equations différentielles en physique

- La tension  $u_c$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC en série évolue selon

$$\ddot{u}_c = -\frac{R}{L}\dot{u}_c - \frac{1}{LC}u_c + u(t)$$

où  $R$ ,  $L$ ,  $C$  notent la résistance, inductance et capacité respectivement, et  $u$  la tension appliquée par le générateur. Cette équation différentielle implique les dérivées de  $u_c$  jusqu'à l'ordre 2, donc on parle d'équation différentielle d'ordre 2.

- En cinétique chimique, les concentrations des espèces chimiques intervenant dans une réaction



sont régies par une équation différentielle d'ordre 1 donnée par

$$\begin{aligned}\dot{c}_A &= -k c_A c_B + k' c_C \\ \dot{c}_B &= -k c_A c_B + k' c_C \\ \dot{c}_C &= k c_A c_B - k' c_C\end{aligned}$$

avec  $k, k'$  les constantes de réaction. Cette équation différentielle n'a pas de terme extérieur variant avec le temps. On dit qu'elle est *autonome*.

- La mécanique Newtonienne ou Lagrangienne amène typiquement à des équations du type

$$M\ddot{q} = \sum_k F_k(t, q, \dot{q})$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  modélise la position du système (spatiale, angulaire, etc),  $\dot{q}$  sa vitesse et  $\ddot{q}$  son accélération, avec  $M$  la matrice d'inertie, et  $F_k$  les forces/couples agissant sur le système. Ici il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2.

Dans tous ces cas, on s'intéresse aux signaux du temps  $t \mapsto y(t)$  de classe  $C^p$  qui vérifient une équation du type

$$y^{(p)}(t) = \psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$$

sur son ensemble de définition, où  $p \in \mathbb{N}^*$  désigne l'ordre de l'équation différentielle. En fait, on se rend compte que  $y$  de classe  $C^p$  vérifie l'équation différentielle ci-dessus si et seulement si  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)})$  de classe  $C^1$  vérifie

$$\dot{x} = f(t, x),$$

où  $f$  est définie par

$$f(t, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) = (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, \psi(t, y_0, \dots, y_{p-1})) .$$

Nous déduisons que résoudre une équation différentielle d'ordre  $p$  est en fait équivalent à résoudre une équation différentielle d'ordre 1, quitte à considérer comme inconnue la suite des dérivées  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)})$  de classe  $C^1$ , au lieu de  $y$  de classe  $C^p$ .  $x$  est appelé l'état du système.

**Exemple – Réduction à l'ordre 1** Reprenons les exemples plus haut :

— pour un circuit RLC, on prend  $x = (u_c, \dot{u}_c) \in \mathbb{R}^2$ , et

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + u(t) \end{bmatrix} .$$

— en cinétique chimique,  $x = (c_A, c_B, c_C) \in \mathbb{R}^3$  et

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -k x_1 x_2 + k' x_3 \\ -k x_1 x_2 + k' x_3 \\ k x_1 x_2 - k' x_3 \end{bmatrix}$$

— en mécanique,  $x = (q, \dot{q})$  et

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1} \sum_k F_k(t, x_1, x_2) \end{bmatrix} .$$

Ainsi, même si la physique nous donne initialement une équation différentielle d'ordre supérieur, on pourra toujours se ramener à l'ordre 1. Cette réduction est cruciale pour l'étudier mathématiquement ainsi que numériquement, et devra donc être systématique.

Commençons par définir le cadre de cette étude.

### Définition – Solution d'une équation différentielle

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. Une fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur un intervalle de temps  $I \subset J$  non réduit<sup>1</sup> à un point, est dite solution<sup>2</sup> de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

1. Certaines références autorisent les solutions définies sur un intervalle d'intérieur vide, c'est-à-dire réduit à un point, qui sont dites "triviales". Mais cela n'a pas grand intérêt ici et nous supposons donc que les solutions sont définies au moins "pendant un certain temps".

2. On omet de préciser l'intervalle  $I$  sur lequel  $x$  est solution lorsque  $I$  est l'ensemble de définition naturel (ou clairement défini) de  $x$ . Lorsque celui-ci est ambigu ou bien lorsque l'on veut insister sur l'intervalle de définition, on dira *solution sur  $I$* .

si  $x$  est continue sur  $I$  avec  $x(t) \in X$  pour tout  $t \in I$ , et de classe  $C^1$  sur  $\overset{\circ}{I}$  avec  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  pour tout  $t \in \overset{\circ}{I}$ .

L'équation différentielle est dite *autonome* si l'application  $f$  ne dépend pas de  $t$ . Dans ce cas, on peut aussi définir directement  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Lorsque l'intervalle de temps  $I$  de définition de la solution est  $J$  entier, on dira que la solution est *globale*. Mais on verra qu'il peut parfois arriver qu'une solution ne puisse être définie sur  $J$  entier, par exemple si elle explose avant, ou si elle s'apprête à quitter  $X$ .

Notons que  $f$  sera souvent définie sur  $J = \mathbb{R}$  et  $X = \mathbb{R}^n$ . Cependant, il peut arriver que cela ne soit pas le cas, comme par exemple pour deux corps de position  $y_a, y_b$  dont la force d'interaction gravitationnelle  $\frac{Gm_a m_b}{\|y_a - y_b\|^2}$  n'est définie que pour  $y_a \neq y_b$ .

La physique s'intéresse souvent aux solutions partant d'une *condition initiale* donnée. La recherche et l'étude de ces solutions particulières est due à Cauchy et porte le nom de *Problème de Cauchy* :

Dans mes leçons données à l'École Polytechnique, comme dans la plupart des ouvrages ou mémoires que j'ai publiés sur le calcul intégral, j'ai cru devoir placer en premier lieu la recherche, non pas des intégrales générales, mais des particulières ; en sorte que la détermination des constantes ou des fonctions arbitraires ne fût plus séparée de la recherche des intégrales.

### Définition – Problème de Cauchy (*Initial Value Problem*)

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in J \times X$  et  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. Le *problème de Cauchy* associé fait référence au système

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad .$$

On dira donc que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est solution du problème de Cauchy défini par  $f$  et  $(t_0, x_0)$  si

- $t_0 \in I$  et  $x(t_0) = x_0$
- $x$  est solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$  sur  $I$ .

On notera alors  $x \in S_f(t_0, x_0)$ .

Avant d'étudier les solutions d'un problème de Cauchy, il est crucial de remarquer la caractérisation qui suit.

### Théorème – Représentation intégrale des solutions

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $I \subset J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point,  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in X$ , et  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue telle que  $x(t) \in X$  pour tout  $t \in I$ . Alors,  $x \in S_f(t_0, x_0)$  si et seulement si  $x$  est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I \quad .$$

Notons que cette caractérisation n'aurait pas été possible si l'on avait gardé une équation différentielle d'ordre  $p > 1$ .

**Démonstration** Supposons  $x \in S_f(t_0, x_0)$ . Alors  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  sur  $\overset{\circ}{I}$ , et pour tout  $t \in I$ ,

$$x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s)ds = x(t) .$$

Réciproquement, si  $x$  vérifie l'équation intégrale sur  $I \subset J$ ,  $x(t_0) = x_0$ , et puisque  $f$  est continue sur  $I \times X$ ,  $x$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et par dérivation,  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  pour tout  $t \in I$ . ■

### Remarque – Classe plus générale de solutions

La définition sous forme intégrale des solutions montre que la recherche de solutions  $C^1$  et l'hypothèse de continuité de  $f$  pourraient être relâchées : il suffirait de pouvoir définir l'objet  $\int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$ . Mais il est tout de même souhaitable d'assurer un minimum de propriétés telles que l'existence de solutions, comme nous allons le voir dans la section suivante.

### Portrait de phase

En dimension 2 (ou 3), il est possible de visualiser géométriquement le comportement des solutions en traçant les courbes paramétriques  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$  dans le plan (ou  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  dans l'espace) pour différentes conditions initiales. C'est ce que l'on appelle un *portrait de phase*. Voir Figure (p. 8) ci-dessous dans le cas d'un pendule.

## Etude du problème de Cauchy

### Existence de solutions locales

Notre point de départ est le théorème suivant établi à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, qui assure l'existence locale de solutions au problème de Cauchy (p. 6) sous une simple hypothèse de continuité de  $f$ . En d'autres termes, dans le cadre de ce cours où  $f$  est supposée continue, il existe toujours des solutions pour toute condition initiale, définies au moins pour un certain temps.

### Théorème – Théorème de Peano-Arzelà

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. Pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times X$ , il existe  $\tau_m > 0$  et  $x : [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $x \in S_f(t_0, x_0)$ .

**Démonstration** La démonstration de ce résultat est hors-programme et fait appel au théorème d'Ascoli(-Arzelà). Seule la connaissance et la compréhension du résultat est exigible. Pour les curieux, la preuve est donnée en annexe (p. 43). ■



FIGURE 1 – Portraits de phase d'un pendule non amorti en haut et amorti en bas.  $x_1$  représente l'angle du pendule en abscisse et  $x_2$  sa vitesse de rotation en ordonnée. Le pendule sera décrit et étudié plus en détail dans la suite du cours.



### Remarque – Classe plus générale de solutions (pour la culture)

L'existence de solutions  $C^1$  est garantie lorsque  $f$  est continue. Il s'avère que l'existence de solutions *absolument continues*, est garantie sous les hypothèses plus faibles suivantes dans un voisinage de  $(t_0, x_0)$  :

- pour tout  $t$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est continue ;
- pour tout  $x$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est mesurable ;
- il existe une fonction intégrable  $t \mapsto b(t)$  telle que  $|f(t, x)| \leq b(t)$  pour tout  $(t, x)$ .

Ce sont les conditions de *Carathéodory*. Voir (Hale 2009). Un cadre encore plus général consiste à autoriser des discontinuités de  $f$  par rapport à  $x$  mais l'étude des solutions passe alors par celle des *inclusions différentielles* du type  $\dot{x} \in F(t, x)$ , ce qui nous amènerait bien trop loin de ce cours. Voir (Filippov 1988).

### Domaine d'existence des solutions

Nous venons de voir que des solutions locales au problème de Cauchy existent si  $f$  est continue. Nous savons qu'elles sont définies *au moins un certain temps*, mais il est intéressant de se demander quel est l'intervalle de temps *maximal* sur lequel elles peuvent être définies. En d'autre terme, on s'intéresse aux *solutions maximales*.

### Définition – Solution maximale

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. On dit que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution *maximale* de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

si elle n'est pas *prolongeable* en une solution définie plus longtemps dans  $J \times X$ . En d'autres termes, il n'existe pas de solution  $x' : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $I' \supsetneq I$  et  $x = x'$  sur  $I$ .

Il s'avère que l'intervalle maximal de définition  $I$  d'une solution maximale n'est pas nécessairement  $\mathbb{R}$  entier même si  $f$  est définie globalement sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

**Exemple – Explosion en temps fini** Considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = x^2 \quad , \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

L'application  $f : (t, x) \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , donc il existe au moins une solution. On peut par exemple vérifier que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \quad , \quad I = \left] -\infty, t_0 + \frac{1}{x_0} \right[$$

est bien solution. Vu qu'elle diverge au temps  $t_0 + \frac{1}{x_0}$ , elle ne peut être prolongée au delà. Elle est donc maximale et on dit qu'elle *explose en temps fini*.

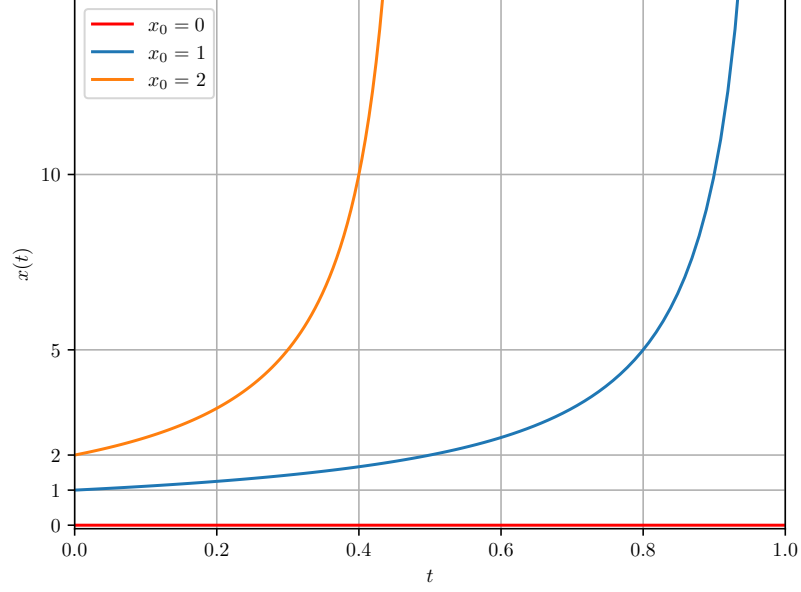


FIGURE 2 – Solutions à  $\dot{x} = x^2$  pour  $t_0 = 0$  et différentes valeurs de  $x_0$

En fait, le théorème suivant montre que les solutions maximales sont définies sur un intervalle ouvert, et cet intervalle n'est borné que si  $t \mapsto x(t)$  diverge en temps fini ou  $t \mapsto (t, x(t))$  tend vers la frontière de l'ensemble de définition  $J \times X$  de  $f$  en temps fini.

#### Théorème – Domaine maximal d'existence

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et  $(t_0, x_0) \in J \times X$ . Toute solution maximale  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans  $S_f(t_0, x_0)$  est définie sur un intervalle ouvert  $]t_m^-, t_m^+[$  avec  $t_m^-, t_m^+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . De plus, si  $t_m^-$  est fini alors

$$\lim_{t \rightarrow t_m^-} d((t, x(t)), \partial(J \times X)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow t_m^-} \|x(t)\| = +\infty$$

et si  $t_m^+$  est fini alors

$$\lim_{t \rightarrow t_m^+} d((t, x(t)), \partial(J \times X)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow t_m^+} \|x(t)\| = +\infty .$$

**Démonstration** La preuve complète est donnée en annexe (p. 45). On commence par observer que si l'intervalle d'existence n'était pas ouvert, la solution pourrait être prolongée au bord grâce au théorème de Peano, ce qui contredirait sa maximalité. Ensuite, la preuve consiste à montrer que si  $t_m^+$  (resp.  $t_m^-$ ) est fini, alors  $(t, x(t))$  finit forcément par sortir définitivement de tout sous-ensemble fermé et borné de  $J \times X$  lorsque  $t$  tend vers  $t_m^+$  (resp.  $t_m^-$ ), et donc soit diverger soit tendre vers la frontière de l'ouvert  $J \times X$ . ■

### Théorème – Critère d'existence globale

Soient  $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. S'il existe  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t) \quad \forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n ,$$

alors toute solution maximale est définie sur  $J$  entier. On dit alors que  $f$  a une *croissance au plus affine*.

**Démonstration** Prouvé dans l'exercice *Autour du Lemme de Grönwall* (p. 27). ■

### Exemple – Solutions globales

- Considérons une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire pour laquelle il existe  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continues telles que

$$f(t, x) = A(t)x + b(t) .$$

D'après le théorème précédent, quelle que soit sa condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ , sa solution maximale est définie sur  $I$  entier. Dans le cas où  $A$  est constant, on en a même une formule explicite (obtenue par la méthode de *variation de la constante*)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds ,$$

où  $e^{A(t-s)}$  est l'exponentielle de matrice définie par

$$e^{A(t-s)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p(t-s)^p}{p!} .$$

Attention, cette formule ne fonctionne que si  $A$  est constant. Notons que si  $A$  est diagonalisable, i.e., il existe  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $A = P^{-1}DP$  avec  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $A$ , alors

$$e^{A(t-s)} = P^{-1}e^{D(t-s)}P$$

donc les solutions avec  $b = 0$  sont des combinaisons linéaires de  $e^{\lambda_i t}$  où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$ . Ceci n'est plus vrai lorsque  $A$  n'est pas diagonalisable. Voir l'étude de stabilité d'un système linéaire (p. 22).

- Un autre cas important d'une croissance au plus affine est lorsque  $f$  est globalement bornée en  $x$ . Par exemple,

$$f(t, x) = c(t) \arctan(x) \quad \text{ou} \quad f(t, x) = \frac{c(t)}{1+x^2}$$

engendrent des problèmes de Cauchy aux solutions globales.

**Exercice – Solutions globales I (●)** Justifier que pour toute condition initiale,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_1 - \sqrt{|t|}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{1+x_1^2}\end{aligned}$$

admet des solutions et les solutions maximales sont définies sur  $\mathbb{R}$ . (Solution p. 30.)

**Exercice – Solutions globales II (●●)** Soient  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $V(x) = x^\top x$  telles que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x) \rangle \leq a(t)V(x) + b(t) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

avec  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues. Montrer que quelque soit la condition initiale  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , les solutions maximales de

$$\dot{x} = f(t, x)$$

sont définies sur  $[t_0, +\infty[$ . On pourra pour cela étudier l'évolution de  $t \mapsto V(x(t))$ . (Solution p. 31.)

## Unicité des solutions maximales

Si des solutions maximales existent toujours, elles ne sont pas toujours uniques.

**Exemple – Non-unicité des solutions** Considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = -\sqrt{|x|} \quad , \quad (t_0, x_0) = (0, 0) .$$

Ce système permet en particulier de modéliser l'écoulement d'un fluide dans un réservoir, selon la loi de *Torricelli* (voir exercice (p. 27)). La fonction  $f : (t, x) \mapsto -\sqrt{|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , donc ce problème de Cauchy admet au moins une solution. Mais on montrera en exercice (p. 27) qu'il existe une infinité de solutions maximales. Plus de détails sont donnés dans le notebook *Equations Différentielles I.ipynb*.

Le théorème suivant, dit de *Cauchy-Lipschitz*, montre que l'unicité des solutions maximales est garantie si  $f$  est de plus continûment différentiable par rapport à la variable  $x$ . On voit que ce n'est pas le cas de  $x \mapsto -\sqrt{|x|}$  en 0. Le théorème et la preuve de l'époque est disponible en ligne dans des notes de cours (Moigno 1844).

## Théorème – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ou de Picard-Lindelöf)

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue telle que sa dérivée partielle  $(t, x) \mapsto \partial_x f(t, x)$  existe et est continue sur  $J \times X$  (i.e.,  $f$  est continûment différentiable par rapport à  $x$ ). Alors pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times X$ , il existe une unique solution maximale  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans  $S_f(t_0, x_0)$ .

**Démonstration** Nous donnons ici le principe de la preuve qui peut être passée en première lecture, mais qu'il est intéressant de comprendre d'un point de vue scientifique. L'essentiel est en fait de montrer que sous l'hypothèse de régularité de  $f$  par rapport à  $x$ , il existe une unique solution locale au problème de Cauchy. De là on peut ensuite déduire qu'elle se prolonge en une unique solution maximale dans  $J \times X$ . La partie cruciale est donc le résultat local suivant qui constitue en fait le théorème initial de Cauchy-Lipschitz (sa généralisation aux solutions globales étant plutôt due à Picard et Lindelöf (p. 15)).

**Théorème de Cauchy-Lipschitz local** Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et continûment différentiable par rapport à  $x$ , et  $(t_0, x_0) \in J \times X$ . Soient  $\tau > 0$  et  $r > 0$  tels que

$$\mathcal{C} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{B}(x_0, r) \subset J \times X .$$

Pour tout  $\tau_m \in [0, \tau]$  tel que  $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$ , il existe une unique fonction  $x \in S_f(t_0, x_0)$  définie sur  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ .

### Démonstration

La preuve consiste à voir les solutions comme des points fixes d'un certain opérateur intégral, obtenu par la représentation intégrale des solutions. Le théorème du point fixe de Banach permet ensuite de montrer l'existence et l'unicité de ce point fixe.

Tout d'abord,  $\mathcal{C}$  étant fermé et borné en dimension finie, par continuité de  $f$ ,  $\max_{\mathcal{C}} \|f\|$  existe bien. Rappelons nous du cours de Topologie que  $E := C([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des fonctions continues de  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un espace de Banach pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ , et définissons

$$F = \{x \in E : x([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]) \subset \overline{B}(x_0, r)\} .$$

On peut montrer que<sup>3</sup>  $F$  est un sous-ensemble fermé de  $E$ .  $F$  est donc complet (toujours pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ ). Pour tout  $x \in F$ , par définition,  $(s, x(s)) \in \mathcal{C} \subset J \times X$  pour tout  $s \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ; on peut donc définir l'opérateur  $\Gamma : F \rightarrow E$  par

$$\Gamma(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m] .$$

Or d'après la représentation intégrale des solutions (p. 6), on sait qu'une fonction  $x \in F$  est solution du problème de Cauchy sur  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$  si et seulement si elle vérifie

$$\Gamma(x) = x$$

---

3. Pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $F$  convergeant vers  $x^*$ , pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|x_n(t) - x^*(t)\| \leq \|x_n - x^*\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc la suite  $(x_n(t))$  d'éléments du fermé  $\overline{B}(x_0, r)$  converge dans  $\mathbb{R}^n$  vers  $x^*(t)$  qui est donc dans  $\overline{B}(x_0, r)$ . Ceci implique  $x^* \in F$ .

c'est-à-dire  $x$  est un point fixe de  $\Gamma$ . Par ailleurs, on peut prouver<sup>4</sup> que pour tout  $x \in S_f(t_0, x_0)$  définie sur  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,  $x$  est dans  $F$  : c'est donc un point fixe  $x^*$  de  $\Gamma$  sur  $F$ . L'idée de la preuve est donc de montrer que  $\Gamma$  (ou une de ses itérées) est contractante pour utiliser le théorème de point fixe sur un espace de Banach et en déduire l'existence et l'unicité de ce point fixe.

D'abord, pour tout  $x \in F$ , pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|\Gamma(x)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \right| \leq \tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$$

de sorte que  $\Gamma(x) \in F$ , i.e.  $\Gamma : F \rightarrow F$ . Ensuite, pour tout  $(x_a, x_b) \in F \times F$ , pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|\Gamma(x_a)(t) - \Gamma(x_b)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x_a(s)) - f(s, x_b(s))\| ds \right|.$$

Soit  $k = \max_{\mathcal{C}} \|\partial_x f\|$  (bien défini car  $\mathcal{C}$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\partial_x f$  est continue par hypothèse). Alors l'application du théorème des accroissements finis nous donne

$$\|\Gamma(x_a)(t) - \Gamma(x_b)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t k \|x_a(s) - x_b(s)\| ds \right| \leq |t - t_0| k \|x_a - x_b\|_{\infty}$$

et donc  $\|\Gamma(x_a) - \Gamma(x_b)\|_{\infty} \leq \tau_m k \|x_a - x_b\|_{\infty}$ . A ce stade, sauf si  $\tau_m k < 1$ ,  $\Gamma$  n'est pas contractante. Cependant, on peut montrer par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|\Gamma^p(x_a)(t) - \Gamma^p(x_b)(t)\|_{\infty} \leq \frac{(|t - t_0| k)^p}{p!} \|x_a - x_b\|_{\infty}$$

en notant  $\Gamma^p = \underbrace{\Gamma \circ \Gamma \circ \dots \circ \Gamma}_{p \text{ fois}}$ . Donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\|\Gamma^p(x_a) - \Gamma^p(x_b)\|_{\infty} \leq$

$\frac{(\tau_m k)^p}{p!} \|x_a - x_b\|_{\infty}$ . Il existe donc  $p$  suffisamment grand tel que  $\Gamma^p$  est contractante. D'après le théorème de point fixe de Banach,  $\Gamma$  admet un unique point fixe  $x^*$  dans  $F$ . ■

### Remarque – Relâchement à $f$ localement Lipschitzienne

La première preuve d'existence et unicité locale de solutions sous l'hypothèse que  $f$  est continûment différentiable par rapport à  $x$  est due à Augustin Louis Cauchy (1820) et repose sur l'utilisation du théorème d'accroissements finis<sup>5</sup>.

4. Il suffit de montrer que  $x([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]) \subset \overline{B}(x_0, r)$ . Supposons le contraire et sans perdre en généralité supposons que  $S := \{t \in [t_0, t_0 + \tau_m] : \|x(t) - x_0\| > r\}$  est non vide. Soit  $t^* = \inf S$ . Nécessairement  $t_0 < t^* < t_0 + \tau_m$ . Donc par la représentation intégrale (p. 6),

$$\|x(t^*) - x_0\| \leq (t^* - t_0) \max_{s \in [t_0, t^*]} \|f(s, x(s))\| < \tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| < r.$$

Par continuité de  $x$ ,  $\|x(t) - x_0\| \leq r$  pour un temps après  $t^*$ , ce qui contredit sa définition.

5. En l'absence d'outils d'analyse fonctionnelle à cette époque, la preuve de Cauchy consistait plutôt à discrétiser en temps l'intégrale de plus en plus finement et montrer la convergence vers une solution.

Mais on remarque dans notre preuve qu'il suffirait qu'il existe  $k > 0$  tel que

$$\|f(t, x_a) - f(t, x_b)\| \leq k\|x_a - x_b\|$$

$$\forall t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \forall (x_a, x_b) \in \overline{B}(x_0, r) \times \overline{B}(x_0, r) ,$$

c'est-à-dire que la fonction  $f$  soit *lipschitzienne* par rapport à  $x$  au voisinage de  $(t_0, x_0)$ . Cette propriété fut introduite par le mathématicien allemand Rudolf Lipschitz quelques années plus tard (1868) pour prouver le même résultat de façon indépendante : d'où le nom de *théorème de Cauchy-Lipschitz*. Notons que cette dernière hypothèse est plus faible que celle de Cauchy car elle impose seulement que  $x \mapsto f(t, x)$  soit lipschitzienne au voisinage de  $(t_0, x_0)$ , au lieu de différentiable. Par exemple,  $x \mapsto |x|$  est lipschitzienne (mais pas différentiable) et  $\dot{x} = |x|$  admet donc une unique solution maximale quelque soit la condition initiale.

### Remarque – Approximations successives

Mise à part quelques formes particulières de  $f$ , il est très rare de savoir résoudre explicitement une équation différentielle. Cependant, la preuve (dans sa forme moderne donnée plus haut) caractérise la solution comme le point fixe de l'opérateur  $\Gamma$ . Or, on sait par la preuve du théorème du point fixe de Banach que ce point fixe est la limite uniforme de la suite des itérées de  $\Gamma$ . En pratique, on peut donc s'approcher arbitrairement proche de la solution sur l'intervalle  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$  (au sens de la norme uniforme), en calculant la suite  $x_{p+1} = \Gamma(x_p)$  définie par

$$x_{p+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_p(s))ds,$$

en notant ici de manière abusive  $x_0$  la fonction constante égale à  $x_0$ . Cette méthode de recherche de point fixe porte le nom d'*approximations successives* et est introduite pour la première fois par le mathématicien français Emile Picard à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle grâce aux progrès de l'analyse fonctionnelle. C'est finalement le mathématicien finlandais Ernst Lindelöf qui donne à la preuve sa forme moderne en utilisant en 1894 la théorie des espaces de Banach. Pour les anglophones, ce théorème s'appelle d'ailleurs le *théorème de Picard-Lindelöf*.

### Exemple – Unicité des solutions maximales

- Une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire pour laquelle il existe  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continues telles que

$$f(t, x) = A(t)x + b(t) ,$$

admet une unique solution maximale quelque-soit sa condition initiale  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , car  $J_f(t, x) = A(t)$  est continue.

- Les équations décrivant l'évolution de la tension dans un circuit RLC ou la cinétique chimique données au début de ce cours admettent une unique solution maximale au voisinage de toute condition initiale  $(t_0, x_0)$ . C'est aussi le cas des équations de la mécanique Newtonnienne ou Lagrangienne si les forces/couples  $F_k(t, q, \dot{q})$  sont continûment différentiable par rapport à la position et la vitesse  $(q, \dot{q})$ .

**Exercice – Unicité de la solution maximale (•)** Justifier que pour toute condition initiale,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_1 - \sqrt{|t|}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{1+x_1^2} \end{aligned}$$

admet une unique solution maximale définie sur  $\mathbb{R}$ . (Solution p. 31.)

## Régularité et stabilité des solutions

Depuis l'apparition de la mécanique Newtonienne au XVII<sup>ème</sup> siècle, l'étude des équations différentielles a toujours été motivée par l'espoir de compréhension et de prédiction du comportement futur ou passé de systèmes physiques. En particulier, une question ayant taraudé et divisé les scientifiques au cours des siècles est celle de la stabilité du système à trois corps (Terre-Lune-Soleil), ou plus généralement du système solaire. Enchanté devant les avancées de la mécanique céleste, Pierre-Simon Laplace écrit en 1814 :

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Cette conviction *déterministe*, c'est-à-dire que les phénomènes physiques passés ou futurs sont entièrement déterminés par leur condition initiale, fut confirmée par le théorème de Cauchy-Lipschitz quelques années plus tard. Ce dernier suggère en effet que l'on peut prévoir l'évolution des systèmes physiques par la seule connaissance de leur condition initiale et de leur modèle physique.

Cependant, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, on se rend vite compte que la réalité est en fait toute autre :

- d'une part, la condition initiale et le modèle ne sont jamais parfaitement connus : quelle est alors la qualité de notre prédiction ?
- d'autre part, ne pouvant généralement pas calculer explicitement la solution, comment anticiper son comportement sur des temps longs, voire son comportement asymptotique ?

## Sensibilité aux conditions initiales et erreurs de modèle

La première question fut soulevée par Henri Poincaré à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle alors qu'il s'attelle à la question de la stabilité du système solaire.

Le théorème suivant nous montre que pour un horizon de temps fini donné, on peut obtenir une solution arbitrairement précise si le système est initialisé suffisamment précisément et si les perturbations (ou erreurs de modèle) sont



suffisamment faibles. En d'autres termes, la solution est *continue* par rapport aux perturbations en temps fini. Ceci est crucial en physique puisque l'on ne peut jamais modéliser tous les phénomènes parfaitement.

### Théorème – Régularité en temps fini

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et continûment différentiable par rapport à  $x$ ,  $(t_0, x_0) \in J \times X$ , et  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'unique solution maximale dans  $S_f(t_0, x_0)$ . Pour tout  $\underline{t}, \bar{t}$  tel que  $t_0 \in [\underline{t}, \bar{t}] \subset I$ , il existe  $\delta_m > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que pour  $\delta \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|\delta| \leq \delta_m$ , l'unique solution maximale  $x_\delta$  dans  $S_f(t_0, x_0 + \delta)$  est définie au moins sur  $[\underline{t}, \bar{t}]$  et vérifie

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq e^{\lambda(t-t_0)} |\delta| \quad \forall t \in [\underline{t}, \bar{t}] .$$

La présence du facteur exponentiel n'est pas cruciale ici, et servira dans la suite. Ce qui est important, c'est que plus l'erreur de condition initiale  $\delta$  est faible, plus l'erreur sur la trajectoire à horizon de temps fini  $\bar{t}$  est faible. On dit alors que la solution du problème de Cauchy est continue par rapport à la condition initiale à horizon de temps fini. Attention, l'hypothèse "continûment différentiable par rapport à  $x$ " est importante encore ici, comme illustré dans l'exercice *Ecoulement dans un réservoir* (p. 27). Elle peut toutefois être relâchée à " $f$  localement lipschitzienne par rapport à  $x$ " comme dans le cas du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Démonstration** Prouvé dans l'exercice *Autour du Lemme de Grönwall* (p. 27). ■

### Exemple – Continuité des solutions par rapport aux perturbations

- Si  $\lambda < 0$ , l'erreur commise sur la condition initiale disparaît au cours du temps dans les solutions : on dit qu'elles "oublient" leur condition initiales et que le système est *contractant*.
- On peut aussi déduire de ce résultat la continuité des solutions par rapport à des paramètres  $p$  intervenant dans la fonction  $f$ . En effet, il suffit de considérer le système étendu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y, p) \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

pour lequel l'incertitude de paramètre se ramène à une incertitude de condition initiale.

- Considérons un système linéaire à paramètre et/ou condition initiale incertains

$$\dot{x} = (a + \delta_a)x \quad , \quad x_0 = c + \delta_c$$

Pour  $\delta_a = 0 = \delta_c$ , la solution est  $x(t) = ce^{at}$ , et sinon

$$x_\delta(t) = (c + \delta_c)e^{(a+\delta_a)t} .$$

On a donc pour tout  $t$ ,

$$\|x(t) - x_\delta(t)\| = \|c - (c + \delta_c)e^{\delta_a t}\|e^{at} \leq (|\delta_c|e^{\delta_a t} + |1 - e^{\delta_a t}||c|) e^{at}$$

et pour tout  $\bar{t} > 0$  et  $|\delta_a| \leq \frac{1}{\bar{t}}$

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|x(t) - x_\delta(t)\| \leq \left( |\delta_c| e^{\delta_a \bar{t}} + |\delta_a| c \bar{t} \right) e^{a \bar{t}}$$

qui peut être rendu aussi faible que voulu si  $\delta_a$  et  $\delta_c$  sont suffisamment petits. On voit bien ici que cette différence est bornée en temps fini, mais pas forcément asymptotiquement en particulier si  $a > 0$ .

- L’outil Fibre<sup>6</sup> permet d’observer en dimension 3 cette continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, en affichant les trajectoires pour un ensemble de conditions initiales dont la taille est contrôlée à la souris: à “Integration Time” fixé, plus on réduit la *boîte* de condition initiales, plus les solutions se rapprochent les unes des autres. Par contre, lorsque l’on augmente le “Integration Time” les solutions s’écartent.

### Remarque – Chaos déterministe et horizon de Lyapunov

Même si la continuité des solutions par rapport aux paramètres/conditions initiales donne à espérer de pouvoir simuler et prédire l’évolution de systèmes physiques, elle est malheureusement parfois insuffisante. Henri Poincaré écrit :

Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l’univers à l’instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n’auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu’approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c’est tout ce qu’il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu’il est régi par des lois ; mais il n’en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible.

En effet, le précédent théorème nous prouve seulement que des perturbations suffisamment petites donnent des solutions arbitrairement proches en temps fini. Mais, en pratique, il est rarement possible de choisir l’amplitude des perturbations (erreurs de capteurs, erreurs numériques etc.) et il se pourrait que l’ordre de grandeur des perturbations produisant des erreurs *acceptables* sur les solutions ne soit pas réalisable. Plus précisément, le théorème suggère qu’à perturbation  $|\delta|$  donnée, l’écart entre les solutions pourrait croître exponentiellement vite. C’est le cas bien sûr des systèmes qui divergent exponentiellement (tels que  $\dot{x} = x$ ), mais aussi de certains systèmes à trajectoires bornées, pour lesquels il existe  $\bar{t} > 0$  tel que

$$\frac{|x(t) - x_\delta(t)|}{|\delta|} \approx e^{\lambda t} \quad \forall t \leq \bar{t}.$$

Dans ce cas,  $\frac{1}{\lambda}$  représente l’ordre de grandeur du temps maximal jusqu’auquel l’erreur sur les solutions reste du même ordre de grandeur que l’erreur initiale :

---

6. <https://portsmouth.github.io/fibre/>

on parle d'*horizon de Lyapunov*. Toute prédiction au delà de cet horizon est illusoire et le système est alors dit *chaotique*.

Il est important d'insister sur le caractère *déterministe* de ce chaos : chaque cause entraîne un effet bien déterminé mais deux causes très proches peuvent avoir des effets très différents.

### Exemple – Systèmes chaotiques

- Henri Poincaré met en évidence le premier un comportement chaotique des solutions du problème à 3 corps. Ses livres sont disponibles en ligne (Poincaré 1892).
- En 1963, Edward Lorenz met en évidence pour la première fois le comportement possiblement chaotique de la météorologie à travers un modèle simplifié à trois dimensions de convection donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3\end{aligned}$$

où  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$  sont des paramètres strictement positifs. Pour  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  et  $\rho = 28$ , ce système présente un attracteur en forme de papillon, où les trajectoires passent de manière *chaotique* d'une aile à l'autre, comme représenté sur la figure (p. 20) ci-dessous. La croissance exponentielle de l'erreur se visualise en simulation : voir pour cela le notebook Equations Différentielles.ipynb.

- En 1989, l'astronome français Jacques Laskar met en évidence numériquement le caractère chaotique des orbites des planètes de notre système solaire, en particulier celle de Mercure, dont les variations d'excentricité pourraient entraîner des collisions ou éjections de planètes dans certains scénarios long-termes. Ces travaux sont confirmés en 1992 par Gerald Jay Sussman et Jack Wisdom, qui démontrent que le système solaire est chaotique avec un horizon de Lyapunov de l'ordre de 4 million d'années (Sussman and Wisdom 1992).
- Plus généralement, les systèmes chaotiques apparaissent dans des domaines très divers, comprenant l'économie, l'électricité, la mécanique, la médecine. Parfois, le comportement chaotique apparaît seulement lorsque le système est soumis à certaines excitations, par exemple une excitation sinusoïdale du pendule ou de l'oscillateur de Van der Pol (Holmes and Rand 1978).

### Propriétés asymptotiques

Dans la section précédente nous avons répondu à la première question qui était la sensibilité des solutions aux erreurs de condition initiale et de modèle. Mais cette étude était en temps fini et nous nous intéressons maintenant à la seconde question qui est le comportement asymptotique des solutions. L'étude théorique asymptotique des solutions prend ses origines dans la thèse de Lyapunov (Lyapunov 1892). Le but est de rechercher des critères sur la fonction  $f$  qui nous permettent de prédire ce comportement : est-ce que les solutions divergent ? est-ce qu'elles tendent vers un point en particulier ? vers un cycle limite ?

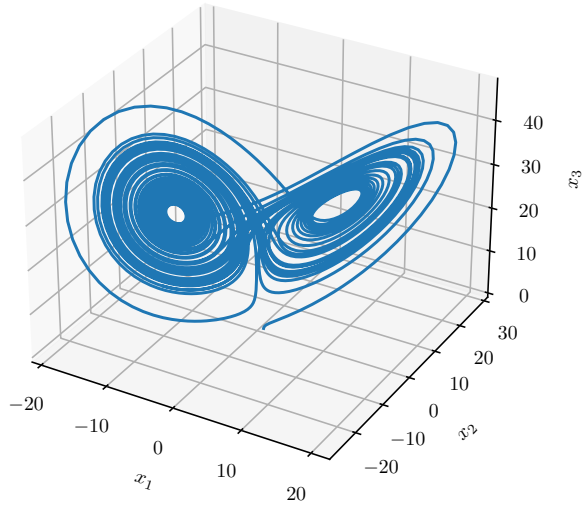


FIGURE 3 – Trajectoire de l'oscillateur de Lorenz

Dans la suite, pour simplifier, nous étudions les équations différentielles dites *autonomes*, c'est-à-dire dont la fonction  $f$  est indépendante du temps. On se donne donc une fonction continue  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et on prend par défaut  $t_0 = 0$ .

#### Définition – Point d'équilibre

On appelle *point d'équilibre* un point  $a \in X$  tel que

$$f(a) = 0 .$$

En d'autres termes, la fonction constante égale à  $a$  est alors solution de  $\dot{x} = f(x)$ .

**Exemple – Pendule** L'évolution d'un pendule de longueur  $\ell$  et de masse  $m$  dans le champ de l'apesanteur  $g$  peut être décrit par une dynamique du type

$$\ddot{\theta} = -\frac{\rho}{m}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell} \sin \theta$$

avec  $\rho \geq 0$  un coefficient de frottement. En prenant  $x = (\theta, \dot{\theta})$ , on obtient le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\rho}{m}x_2 - \frac{g}{\ell} \sin x_1 \end{aligned}$$

Ce système a pour points d'équilibre  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , qui correspondent soit à la position *basse* du pendule  $\theta = 0$  ou la position *haute*  $\theta = \pi$ , toutes deux à vitesse nulle  $\dot{\theta} = 0$ . Si le pendule est initialisé exactement à sa position haute ou basse à vitesse nulle alors il y reste indéfiniment.

### Définition – Attractivité

Un point d'équilibre  $a$  est dit *localement attractif* si toutes les solutions maximales initialisées suffisamment proche de  $a$  sont globales et convergent vers  $a$ , c'est-à-dire s'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x_0$  vérifiant  $|x_0 - a| \leq \eta$ , toute solution maximale  $x \in S_f(x_0)$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  et vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a .$$

De plus,  $a$  est dit *globalement attractif* si toutes les solutions maximales sont globales et convergent vers  $a$ .

Cette notion intuitive ne dit rien sur le comportement des solutions pendant le transitoire, c'est-à-dire avant de converger vers  $a$ . Des solutions initialisées proche de  $a$  pourraient s'en éloigner arbitrairement loin avant de converger, ou mettre un temps arbitrairement long pour revenir dans un voisinage de  $a$ . Pour garantir une certaine uniformité et robustesse de cette attractivité par rapport à la condition initiale, on a recours à une notion plus forte qui est la *stabilité asymptotique*.

### Définition – Stabilité, stabilité asymptotique

Un point d'équilibre  $a$  est dit:

- *stable* si les solutions restent arbitrairement proche de  $a$  quand elles sont initialisées suffisamment proche de  $a$ , c'est-à-dire pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x_0$  vérifiant  $|x_0 - a| \leq \eta$ , toute solution maximale  $x \in S_f(x_0)$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  et vérifie

$$|x(t) - a| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

- *instable* s'il n'est pas stable.
- *localement (resp. globalement) asymptotiquement stable* s'il est à la fois stable en plus d'être localement (resp. globalement) attractif.

### Exemple – Stabilité du pendule

- Lorsqu'un pendule amorti est initialisé arbitrairement proche de sa position haute ou dans sa position haute mais à vitesse arbitrairement faible, il se met à osciller en passant par sa position basse : l'équilibre haut est donc instable, puisqu'on ne peut pas garder les trajectoires dans son voisinage. Par contre, lorsqu'il est initialisé proche de sa position basse, il oscille de façon amortie en tendant vers l'équilibre bas, qui est donc localement asymptotiquement stable. Voir le portrait de phase du pendule amorti (p. 8).
- Dans le cas d'un pendule non amorti par contre, c'est-à-dire avec  $\rho = 0$ , le pendule oscille indéfiniment à énergie constante : la position basse est alors toujours stable mais plus attractive, et donc plus asymptotiquement stable. Voir le portrait de phase du pendule non amorti (p. 8).

### Remarque – Robustesse vis-à-vis des perturbations (pour la culture)

L'avantage de la propriété de *stabilité asymptotique* par rapport à la simple *attractivité* est qu'elle apporte de la robustesse par rapport aux perturbations.

En effet, lorsque qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, on peut montrer qu'en présence d'une perturbation de la dynamique, les solutions restent asymptotiquement arbitrairement proche de ce point d'équilibre si la perturbation est suffisamment petite. Il y a donc une sorte de continuité des solutions par rapport aux perturbations en temps infini (contrairement au résultat général de continuité par rapport aux conditions initiales qui n'est qu'en temps fini). Cette propriété n'est pas garantie lorsque le point d'équilibre n'est qu'attractif et c'est la raison pour laquelle en pratique, on essaye toujours d'assurer la stabilité asymptotique d'un système : on sait alors que même en présence de perturbations (inévitables en physique), le comportement du système sera proche du comportement voulu.

### **Théorème – Stabilité d'un système linéaire stationnaire**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Le point d'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable pour le système

$$\dot{x} = Ax$$

si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes à partie réelle strictement négative. On dit alors que la matrice est de *Hurwitz*, du nom du mathématicien allemand Adolf Hurwitz.

**Démonstration** La notion de *globalement asymptotiquement stable* contient deux propriétés : la stabilité et l'attractivité globale. On montrera en exercice (p. 30) que pour un système linéaire, elles sont équivalentes à l'attractivité (locale), c'est-à-dire que la stabilité et la globalité viennent gratuitement. C'est une propriété propre aux systèmes linéaires. Il suffit donc de trouver un critère caractérisant l'attractivité de 0. On a vu que les solutions s'écrivent

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Si  $A$  est diagonale, on a  $x_i(t) = e^{\lambda_i t}x_{0,i}$ , où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et l'on voit bien que la convergence des solutions vers 0 est équivalente à avoir  $\lambda_i < 0$ . Maintenant, si  $A$  est diagonalisable, i.e., il existe  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  est diagonale, on a  $P^{-1}x(t)P = e^{P^{-1}APt}P^{-1}x_0P$ , et reproduisant le même argument,  $P^{-1}xP$  (et donc  $x$ ) converge vers 0 si et seulement si les entrées diagonales de  $P^{-1}AP$ , qui sont les valeurs propres de  $A$ , sont à partie réelle strictement négative. Ceci dit, toute matrice  $A$  n'est pas diagonalisable. Par contre, il existe toujours  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible telle que

$$P^{-1}AP = D + N$$

où  $D$  est diagonale contenant les valeurs propres de  $A$ ,  $N$  est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $N^k = 0$ , et  $D$  et  $N$  commutent. C'est la forme dite *de Jordan*. Il s'ensuit que

$$P^{-1}e^{At}P = e^{P^{-1}APt} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} N^i t^i$$

converge vers zéro si et seulement si, encore, les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative. ■

Attention ce critère n'est valable que pour  $A$  constant. Le fait que  $A(t)$  soit de Hurwitz pour tout  $t$  n'implique pas que les solutions du système

$$\dot{x} = A(t)x$$

tendent vers 0 ou même restent bornées. Par exemple, la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + 1.5 \cos^2 t & 1 - 1.5 \sin t \cos t \\ -1 - 1.5 \sin t \cos t & -1 + \sin^2 t \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres constantes égales à  $-0.25 \pm 0.25\sqrt{7}j$ . Pourtant,  $\dot{x} = A(t)x$  admet des solutions non bornées pour  $x(0)$  arbitrairement proche de 0.

**Exercice – Critère de stabilité d'un système linéaire plan (•)** Montrer que  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est de Hurwitz si et seulement si  $\text{tr} A < 0$  et  $\det A > 0$ . Attention, ce critère ne marche qu'en dimension 2! (Solution p. 32.)

**Exercice – Oscillateur I (•)** Considérons une masse  $m$  évoluant sur un support horizontal et accrochée à un mur via un ressort de raideur  $k$ . L'évolution de sa position par rapport à sa position d'équilibre est décrite par

$$m\ddot{y} = -\lambda\dot{y} - ky,$$

où  $\lambda$  est un coefficient de frottement.

1. Réduire l'équation différentielle à l'ordre 1 et déterminer les points d'équilibre.
2. Justifier que les solutions maximales sont uniques et globales quelque soit la condition initiale  $(y(0), \dot{y}(0))$ .
3. Etudier la stabilité des points d'équilibre pour  $\lambda > 0$  et  $\lambda = 0$ .

(Solution p. 32.)

### **Théorème – Lien entre stabilité et stabilité du linéarisé tangent**

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continûment différentiable et  $a \in X$  un point d'équilibre.

Si les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J_f(a)$  sont toutes à partie réelle strictement négative (Hurwitz) alors  $a$  est localement asymptotiquement stable.

Si  $J_f(a)$  a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors  $a$  est instable.

**Démonstration** Voir l'annexe *Stabilité locale et linéarisé tangent* (p. 46). ■

Notons cependant que rien ne peut être conclu quant à la stabilité (ou stabilité asymptotique) de  $a$  si les parties réelles de  $J_f(a)$  sont négatives ou nulles : on peut avoir asymptotiquement stable, seulement stable ou instable. Par exemple, 0 est globalement asymptotiquement stable pour

$$\dot{x} = -x^3$$

dont le linéarisé est nul en zéro, alors que  $(0, 0)$  est instable pour

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}$$

qui admet deux valeurs propres nulles.

**Exemple – Retour au pendule** Reprenons l'exemple du pendule amorti (p. 20). On a

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix} \quad , \quad J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas,  $\text{tr}(J_f(0, 0)) < 0$  et  $\det(J_f(0, 0)) > 0$ . Comme prouvé en exercice (p. 32), ceci implique en dimension 2 que  $J_f(0, 0)$  est de Hurwitz. Donc la position basse  $(0, 0)$  est bien un équilibre asymptotiquement stable. Dans le deuxième cas par contre, le produit des valeurs propres  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(J_f(0, 0)) < 0$ . Elles ne peuvent donc pas être complexes conjuguées et sont nécessairement réelles de signes opposés. Il s'ensuit que l'une est strictement positive et la position haute  $(\pi, 0)$  est donc bien instable.

Notons que si  $\rho = 0$ , c'est-à-dire que le pendule n'est pas amorti, les valeurs propres  $J_f(0, 0)$  sont imaginaires pures, et l'on ne peut donc rien conclure quant à la stabilité des points d'équilibre. Une étude plus approfondie est nécessaire.

**Stabilité asymptotique I (•)** Montrer que le point d'équilibre  $(0, 0)$  est localement asymptotiquement stable pour le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(1 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)\end{aligned}$$

L'est-il globalement ? (Solution p. 32.)

Lorsque le linéarisé ne permet pas de conclure sur la stabilité asymptotique locale, ou que l'on veut un résultat global, on a recours à la caractérisation non linéaire suivante.

### **Théorème – Caractérisation par Lyapunov**

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $a$  un point d'équilibre de  $f$  dans  $X$ , et  $W$  un voisinage de  $a$  dans  $X$ . Soit  $V : W \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  continûment différentiable telle que

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in W \setminus \{a\} \quad , \quad V(a) = 0 \quad .$$

- Si  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $x \in W$  alors  $a$  est stable.
- Si  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in W \setminus \{a\}$  alors  $a$  est localement asymptotiquement stable.
- Si  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ ,  $W = \mathbb{R}^n$ , et  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \neq a$  alors  $a$  est globalement asymptotiquement stable.

$V$  est alors appelée *fonction de Lyapunov*. En fait,

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \frac{d}{dt} V(x(t))$$



le long d'une trajectoire  $t \mapsto x(t)$  de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ .  $V$  représente donc une grandeur positive qui décroît ou est conservée le long des trajectoires. Pour des systèmes physiques, elle est souvent reliée à l'énergie.

Le fait que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  sert à montrer que toutes les trajectoires sont bornées et donc définies pour tout  $t$ . Sans cette hypothèse, et même si  $V$  décroît strictement le long de toutes les trajectoires, on pourrait avoir des trajectoires qui explosent en temps fini.

**Démonstration** Supposons d'abord que  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $x \in W$ . On a donc pour toute solution  $t \mapsto x(t)$  initialisée dans  $W$ ,  $V(x(t)) \leq V(x(0))$  tant que  $x(t) \in W$ . Prenons  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $\overline{B}(a, 2\varepsilon) \subset W$ . On veut montrer qu'il existe  $\eta$  tel que toute trajectoire initialisée dans  $B(a, \eta)$  reste dans  $B(a, \varepsilon) \subset W$ . Tout d'abord, il existe  $\varepsilon_V > 0$  tel que

$$\forall x \in \overline{B}(a, 2\varepsilon) : V(x) \leq \varepsilon_V \implies x \in B(a, \varepsilon) .$$

En effet, sinon, il existerait une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\overline{B}(a, 2\varepsilon)$  telle que pour tout  $k > 0$ ,  $V(x_k) \leq \frac{1}{k}$  et  $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$ . L'ensemble  $\overline{B}(a, 2\varepsilon)$  étant fermé et borné donc compact, on peut en extraire une sous-suite convergente vers  $x^*$  qui vérifie nécessairement  $V(x^*) = 0$  par continuité de  $V$  et  $\|x^* - a\| \geq \varepsilon$ , i.e.  $x^* \neq a$ . Ceci est impossible par hypothèse. On a donc l'existence de  $\varepsilon_V$ . Maintenant, par continuité de  $V$  en  $a$  et puisque  $V(a) = 0$ , il existe aussi  $\eta > 0$  tel que

$$x \in B(a, \eta) \implies V(x) \leq \varepsilon_V .$$

Alors si  $x(0) \in B(a, \eta)$ ,  $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \varepsilon_V$  donc  $x(t) \in B(a, \varepsilon) \subset W$  pour tout  $t$  tant qu'elle est définie. Par le théorème du domaine maximal d'existence (p. 10),  $x$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Ceci prouve la stabilité de  $a$ .

Supposons maintenant  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in W \setminus \{a\}$ . Alors par le point précédent  $a$  est stable. Il suffit de montrer l'attractivité locale. Par stabilité, si  $x(0) \in B(a, \eta)$ ,  $x(t) \in B(a, \varepsilon) \subset W$  pour tout  $t$  et  $t \rightarrow V(x(t))$  est donc strictement décroissante. Comme elle est aussi bornée inférieurement par 0, elle converge vers  $\ell \geq 0$ . Supposons  $\ell > 0$ . Alors, par continuité de  $V$ , il existe  $0 < \nu < \varepsilon$  et  $\bar{t} > 0$  tel que pour tout  $t \geq \bar{t}$ ,  $\|x(t) - a\| \geq \nu$ . Soit

$$\gamma = \max_{\nu \leq \max_{\|x(t)-a\| \leq \varepsilon} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle}$$

qui existe par continuité de  $V$  sur un compact. Puisque  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  sur  $W \setminus \{a\}$ ,  $\gamma < 0$ . Alors, pour tout  $t \geq \bar{t}$ ,

$$V(x(t)) = V(x(\bar{t})) + \int_{\bar{t}}^t \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq V(x(\bar{t})) + \gamma(t - \bar{t}) .$$

Mais comme  $\gamma < 0$  cette quantité devient strictement négative au bout d'un certain temps, ce qui est impossible. Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = 0$ . Finalement, reproduisant le même raisonnement que pour l'existence de  $\varepsilon_V$ , on peut garantir que  $\|x - a\|$  est arbitrairement petit en prenant  $V(x)$  suffisamment petit. Donc on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - a\| = 0$ .

Supposons enfin que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  et  $W = \mathbb{R}^n$ . Alors  $V(x(t)) < V(x(0))$  pour tout  $t \in I$  donc  $x(t) \in V^{-1}([0, V(x(0))])$  pour tout  $t$ . Le fait que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  est équivalent au fait que l'image réciproque de tout compact est compact (on dit que  $V$  est propre). Donc  $V^{-1}([0, V(x(0))])$  est compact et par le théorème du domaine maximal d'existence nécessairement (p. 10)  $x(t)$  est défini pour tout  $t \geq 0$ , et reste dans ce compact. Alors on peut reproduire le même raisonnement que plus haut et obtenir la convergence de  $x$  vers  $a$ . ■

**Exemple – Pendule par Lyapunov** Reprenons le pendule (p. 20) mais cette fois-ci, non amorti, c'est-à-dire avec  $\rho = 0$ . Nous n'avons pas pu prouver la stabilité du point d'équilibre  $(0, 0)$  par l'étude de la matrice Jacobienne car ses valeurs propres sont imaginaires pures. Essayons par analyse de Lyapunov. Inspirés par la physique, considérons  $V : ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  définie par

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m \ell^2 x_2^2 + m g \ell (1 - \cos(x_1)) .$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique du pendule, et le deuxième son énergie potentielle.  $V$  est continûment différentiable, à valeurs positives et s'annule seulement en  $x = 0$ . De plus,

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = m \ell^2 x_2 \left( -\frac{g}{\ell} \sin x_1 \right) + m g \ell \sin x_1 x_2 = 0$$

ce qui traduit la conservation de l'énergie en l'absence de frottement. On en déduit donc la stabilité du point d'équilibre  $(0, 0)$ .

On peut se demander s'il existe toujours une fonction de Lyapunov autour d'un point d'équilibre stable/asymptotiquement stable. La réponse est oui, mais c'est une question délicate étudiée en détail dans (Bacciotti and Rosier 2005).

**Exercice – Oscillateur II (•)** Reprendre l'exercice sur le ressort (p. 23) et montrer que l'équilibre  $(0, 0)$  est stable pour  $\lambda = 0$ . (Solution p. 33.)

**Exercice – Stabilité asymptotique II (••)** Montrer que  $(0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable pour

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2 \end{aligned}$$

*Indice : Essayer de trouver une fonction de Lyapunov...  $x_2^2$  donne de la négativité en  $x_2$ ,  $(x_1 + x_2)^2$  de la négativité en  $x_1$ ... voir comment compléter...* (Solution p. 33.)

## Exercices complémentaires

En plus des exercices essentiels, les exercices à maîtriser sont marqués d'une croix (+).

## Ecoulement dans un réservoir (+)

Considérons un réservoir cylindrique de section  $S$  qui se vide par une ouverture de section  $s$  située à sa base. On note  $x$  la hauteur de liquide dans le réservoir. D'après la *loi de Torricelli*<sup>7</sup>, l'équation d'évolution de  $x$  est donnée par

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|} \quad k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}$$

où  $g$  est la pesanteur.

**Question 1** Etant donné un temps initial  $t_0$  et une hauteur initiale  $x_0 \geq 0$ , justifier sans calcul que le problème de Cauchy associé admet des solutions et que les solutions maximales sont globales. Pour quelles valeurs de  $x_0$  pouvons-nous dire qu'elles sont uniques ? (Solution p. 34.)

**Question 2** Pour  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , résoudre le problème de Cauchy associé en se restreignant aux solutions  $x(t) \geq 0$ . (Solution p. 34.)

**Question 3** Comment pourrait s'interpréter physiquement la multitude de solutions trouvées ? (Solution p. 35.)

**Question 4** Les solutions sont-elles continues par rapport aux conditions initiales au sens du théorème de régularité des solutions (p. 17) donné plus haut ? Pourquoi ? (Solution p. 35.)

## Autour du Lemme de Grönwall

**Question 1 (Lemme de Grönwall)** Soient  $t^-, t^+ \in \mathbb{R}$ ,  $u, \alpha, \beta : [t^-, t^+] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  continues, tels que

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds \quad \forall t \in [t^-, t^+] .$$

Montrer qu'alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds \quad \forall t \in [t^-, t^+] .$$

En déduire que si  $\alpha$  est constant,

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \quad \forall t \in [t^-, t^+] .$$

---

7. Sous l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, la loi de Bernoulli dit que

$$p_s + \rho gh_s + \rho \frac{v_s^2}{2} = p_o + \rho gh_o + \rho \frac{v_o^2}{2}$$

où  $s$  fait référence aux quantités à la surface et  $o$  à l'ouverture. On a  $p_s = p_o$  égales à la pression atmosphérique,  $h_s - h_o = x$ ,  $v_s = \frac{s}{S}v_o$  par conservation du débit, et  $\dot{x} = -v_s$ . On obtient donc

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}} \sqrt{2gx} \approx -\frac{s}{S} \sqrt{2gx}$$

en supposant que  $s \ll S$ .

*Indice : poser  $v(t) = \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$  et étudier la dérivée de  $v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right)$ . (Solution p. 35.)*

**Question 2** Utiliser le Lemme de Grönwall pour montrer le théorème d'existence globale de solutions (p. 11). (Solution p. 36.)

**Question 3** Utiliser le Lemme de Grönwall pour montrer le théorème de continuité par rapport aux conditions initiales (p. 17). Expliquer pourquoi le théorème est toujours valable si  $f$  est seulement localement Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $J \times X$ . (Solution p. 36.)

## Cycle limite I (+)

Considérons le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

**Question 1** Montrer que ce système admet un seul point d'équilibre. Etudier sa stabilité. (Solution p. 37.)

**Question 2** Montrer que quelque-soit la condition initiale, le système admet une unique solution maximale  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Soit  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $V(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ . En étudiant le signe de  $\frac{d}{dt}V(x(t))$ , montrer que  $[t_0, +\infty[ \subset I$ . (Solution p. 38.)

**Question 3** Montrer que si  $\|x(t_0)\| \neq 1$  alors  $\|x(t)\| \neq 1$  pour tout  $t \in I$ . (Solution p. 38.)

**Question 4** En déduire le comportement des solutions en fonction de la condition initiale. (Solution p. 38.)

## Cycle limite II (+)

Les équations de Lotka-Volterra, ou “modèle proie-prédateur”, sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent dans un milieu commun. Elles ont été proposées indépendamment par A. J. Lotka en 1925 et V. Volterra en 1926 et s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha - \beta x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(\gamma - \delta x_1)\end{aligned}$$

où  $x_1$  et  $x_2$  désignent le nombre (positif) de proies et de prédateurs respectivement et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des paramètres strictement positifs.

**Question 1** Donner une interprétation physique à chaque terme de la dynamique. Montrer qu'il existe deux points d'équilibre  $(0, 0)$  et  $\bar{x} \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Que peut-on dire de leur stabilité à ce stade ? (Solution p. 39.)

**Question 2** Démontrer que toute solution initialisée dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  reste dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  sur son ensemble de définition. (Solution p. 39.)

**Question 3** On considère la fonction

$$H(x_1, x_2) = \delta x_1 - \gamma \ln x_1 + \beta x_2 - \alpha \ln x_2$$

définie sur  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Calculer la dérivée de  $H$  le long des solutions initialisées dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . En déduire que toute solution maximale initialisée dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . (Solution p. 40.)

**Question 4** La figure ci-dessous représente les courbes de niveau de  $H$ . Où se trouve  $\bar{x}$ ? Qu'en conclut-on sur le comportement des solutions? En déduire que  $\bar{x}$  est stable, au sens de la définition de stabilité.

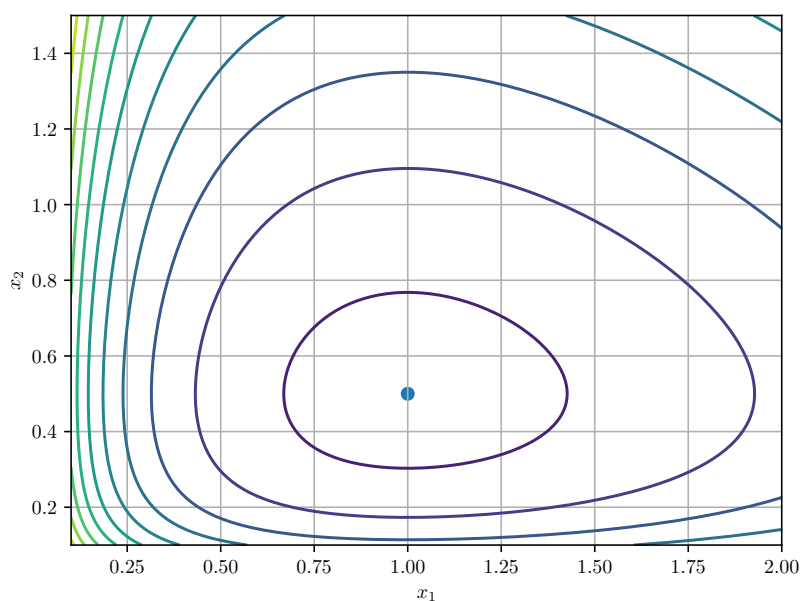


FIGURE 4 – Courbes de niveau de  $H$  dans l'exercice Cycle Limite II

(Solution p. 41.)

Imaginons maintenant que l'on ait moyen de jouer sur la vitesse de reproduction des prédateurs, i.e., le système évolue selon

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha - \beta x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(\gamma - \delta x_1) + u(t)\end{aligned}$$

où l'on peut choisir  $t \mapsto u(t)$  librement. On souhaite stabiliser la population de proie  $x_1$  à une valeur  $x_1^* > 0$ .

**Question 5** Quelles doivent être les valeurs de  $x_2$  et  $u$  à l'équilibre ? (Solution p. 41.)

**Question 6** Justifier que l'on veuille faire suivre à  $x_2$  la référence  $v_r(x_1) = \frac{\alpha}{\beta} + \lambda_1(x_1 - x_1^*)$  avec  $\lambda_1 > 0$ . En utilisant la fonction de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = (x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - v_r(x_1))^2$$

et en supposant que  $x$  est mesuré en temps réel, proposer une loi de contrôle  $t \mapsto u(t)$  qui stabilise asymptotiquement  $(x_1^*, x_2^*)$ , au moins localement. (Solution p. 41.)

## Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Montrer que si 0 est localement attractif pour

$$\dot{x} = Ax$$

alors il l'est globalement et 0 est stable. (Solution p. 42.)

## Contrôle d'un système

Soit le système décrit par

$$\dot{x} = x + u(t)$$

où  $t \mapsto u(t)$  est une entrée à choisir.

**Question 1** Comment se comporte le système si  $u \equiv 0$  ? (Solution p. 43.)

**Question 2** Si on mesure  $t \mapsto x(t)$ , comment choisir  $u$  pour rendre 0 globalement asymptotiquement stable ? (Solution p. 43.)

Plus généralement, considérons un système du type

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= \phi(x) + u(t) \end{aligned}$$

avec  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à choisir.

**Question 3** Si on mesure  $t \mapsto x(t)$ , montrer que l'on peut toujours choisir  $t \mapsto u(t)$  pour rendre 0 globalement asymptotiquement stable. (Solution p. 43.)

## Solutions

### Exercices essentiels

**Solutions globales I** Fixons une condition initiale dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . La fonction  $f : (t, x_1, x_2) \mapsto (\sin x_1 - \sqrt{|t|}x_2, \sqrt{1+x_1^2})$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . Donc d'après le théorème de Peano des solutions existent. D'après le théorème du domaine maximal d'existence, les solutions maximales sont définies sur un intervalle de temps  $I$  ouvert.

Par ailleurs, on peut vérifier que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{1+y^2} \leq 1 + |y|$ , donc

$$|f_1(x)| \leq 1 + \sqrt{|t|}|x_2| \quad , \quad |f_2(x)| \leq 1 + |x_1|$$

et  $f$  est bornée par une fonction affine en  $\|x\|$ . Toutes les solutions maximales sont donc globales, i.e.  $I = \mathbb{R}$ .

**Solutions globales II** Considérons une condition initiale dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et une solution maximale  $t \mapsto x(t)$  définie sur un intervalle  $I$  (qui existe d'après le théorème de Peano car  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ). Alors

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), f(t, x(t)) \rangle \leq a(t)V(x(t)) + b(t) \quad \forall t \in I ,$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} V(x(t)) \right] \leq e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} b(t) \quad \forall t \in I .$$

En intégrant entre  $t_0$  et  $t \geq t_0$ ,

$$e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} V(x(t)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(s) ds \quad \forall t \in I \cap [t_0, +\infty[$$

et donc

$$V(x(t)) \leq e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau) d\tau} b(s) ds \quad \forall t \in I \cap [t_0, +\infty[ .$$

Une autre manière de faire est de montrer que  $V(x(t)) \leq v(t)$  où  $v$  est solution maximale de

$$\dot{v} = a(t)v + b(t)$$

pour la condition initiale  $v(t_0) = V(x(t_0))$ , qui est définie est continue sur  $\mathbb{R}$  car la dynamique de  $v$  est affine.

Or si  $t_m^+ = \sup I$  est fini, d'après le théorème du domaine maximal,  $(t, x(t))$  tend soit vers la frontière du domaine de définition de  $f$ , soit diverge. Comme  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , nécessairement  $\lim_{t \rightarrow t_m^+} \|x(t)\| = +\infty$  et donc  $\lim_{t \rightarrow t_m^+} V(x(t)) = +\infty$ . Or par continuité de  $a, b$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_m^+} V(x(t)) \leq e^{\int_{t_0}^{t_m^+} a(\tau) d\tau} V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_m^+} e^{\int_s^{t_m^+} a(\tau) d\tau} b(s) ds .$$

C'est donc impossible et  $t_m^+ = +\infty$ .

**Unicité de la solution maximale** Nous avons vu dans l'exercice Solutions globales I que les solutions maximales de ce système sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, la fonction  $f : (t, x_1, x_2) \mapsto (\sin x_1 - \sqrt{|t|}x_2, \sqrt{1+x_1^2})$  est continûment différentiable par rapport à  $x$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . Donc pour chaque condition initiale dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , il existe une unique solution maximale.

**Critère de stabilité d'un système linéaire plan** Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres d'une matrice  $A$  de dimension 2. Son polynôme caractéristique est donné par

$$s^2 - \operatorname{tr} A s + \det A = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2.$$

Donc  $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$  et  $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ . Il y a deux cas: soit les valeurs propres sont complexes conjuguées, soit elles sont réelles.

Si  $\lambda_i = \lambda_0 \pm j\omega$ , alors  $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0^2 + \omega^2$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0$ . Donc  $\lambda_0 < 0$  si et seulement si  $\operatorname{tr} A < 0$  (et on a alors toujours  $\det A > 0$ ).

Si les valeurs propres sont réelles, les avoir toutes deux strictement négatives implique que  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ . Réciproquement, si  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , elles sont non nulles et du même signe, et si de plus  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ , ce signe est nécessairement négatif.

Donc dans tous les cas,  $\lambda_i$  à parties réelles strictement négatives équivaut à  $\operatorname{tr} A < 0$  et  $\det A > 0$ .

**Oscillateur I** Prenons  $x = (y, \dot{y})$  qui vérifie

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\lambda}{m}x_2 \end{pmatrix} = Ax$$

avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\lambda}{m} \end{pmatrix}$ . Puisque  $A$  est inversible ( $\det A = \frac{k}{m} \neq 0$ ), le seul point d'équilibre est  $x = (0, 0)$ .

$x \mapsto Ax$  est continûment différentiable donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions maximales sont uniques. De plus, la dynamique est linéaire (donc a fortiori linéairement bornée) donc les solutions maximales sont définies pour tout  $t$ . Elles sont données par  $x(t) = e^{At}x_0$ .

Si  $\lambda > 0$ , on a  $\operatorname{tr} A = -\frac{\lambda}{m} < 0$  et  $\det A = \frac{k}{m} > 0$  donc d'après l'exercice Critère de stabilité en dimension 2 (p. 32),  $A$  est de Hurwitz et il s'ensuit que 0 est globalement asymptotiquement stable. On peut aussi calculer explicitement les valeurs propres et vérifier qu'elles sont à partie réelle strictement négative.

Lorsque  $\lambda = 0$ , les frottements sont absents et les valeurs propres sont  $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Comme le système est linéaire, on peut dire que 0 n'est pas attractif donc pas asymptotiquement stable. Par contre, il faut une étude plus approfondie pour étudier sa stabilité.

**Stabilité asymptotique I** La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3x_2^2 \\ -1 + 3x_1^2 + 2x_1x_2 & -(1 - x_1^2) \end{pmatrix}$$

soit

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est de Hurwitz (valeurs propres  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ) Donc  $(0, 0)$  est bien localement asymptotiquement stable. Cependant, il ne l'est pas globalement car  $(1, 1)$  est



aussi un point d'équilibre : la fonction constante égale à  $(1, 1)$  est solution (et ne tend pas vers 0).

**Oscillateur II** Lorsque  $\lambda = 0$ , les valeurs propres sont  $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$  et nous avons vu que 0 n'est pas asymptotiquement stable. Dans ce cas, l'énergie du système

$$V(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

est conservée le long des trajectoires, c'est-à-dire,

$$\frac{d}{dt}V(x) = kx_1x_2 - kx_1x_2 = 0.$$

D'après le théorème de Lyapunov, puisque  $V$  est à valeurs positives, continûment différentiable et telle que  $V(x) = 0$  est équivalent à  $x = 0$ , la position d'équilibre 0 est donc stable. En fait, la masse oscille autour de sa position d'équilibre à énergie constante et à la pulsation  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Les portraits de phase de ces deux scénarios sont donnés sur la Figure (p. 33) ci-dessous.

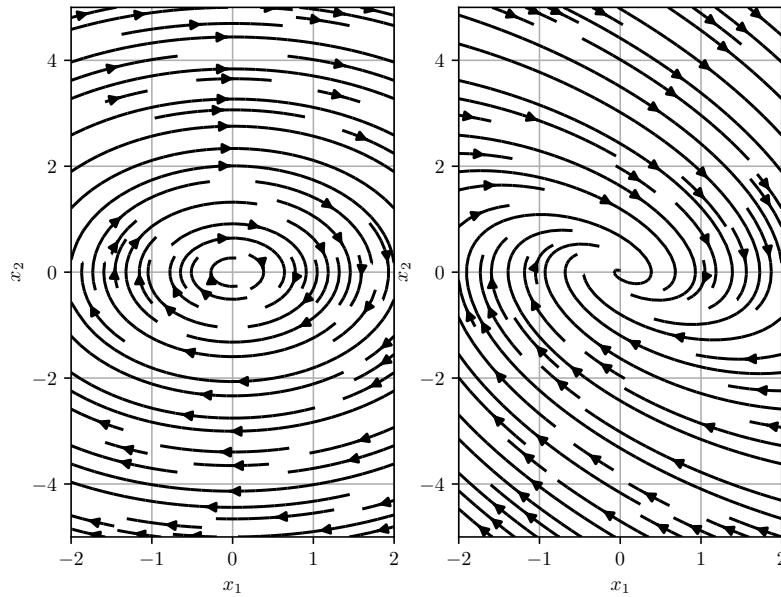


FIGURE 5 – Plan de phase d'un oscillateur amorti à droite et non amorti à gauche

**Stabilité asymptotique II** La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui admet 0 et -1 comme valeurs propres. Nous ne pouvons donc rien conclure sur la stabilité de 0 par le linéarisé.

Considérons plutôt la fonction  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  définie par

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2$$

$V$  est continûment différentiable, positive et ne s'annule qu'en  $x = 0$ . De plus, elle vérifie

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle &= 4x_1^3x_2 - 2x_1^3x_2 - 2x_2^2 + 2(x_1 + x_2)(x_2 - x_1^3 - x_2) \\ &= -2x_2^2 - 2x_1^4 < 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

$V$  est donc une fonction de Lyapunov et on a bien la stabilité asymptotique locale. De plus,  $V$  est propre, i.e.,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ , donc la stabilité asymptotique est globale.

## Ecoulement dans un réservoir

**Question 1**  $f : (t, x) \mapsto -k\sqrt{|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  donc le théorème de Peano nous garantit l'existence de solutions au problème de Cauchy pour toute condition initiale.

De plus,  $\sqrt{|x|} \leq 1 + |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc  $f$  est linéairement bornée et toute solution maximale est globale, donc ici définie sur  $\mathbb{R}$ .

Enfin,  $f$  est continûment différentiable sur  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  donc lorsque  $x_0 \neq 0$ , il existe une unique solution maximale dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Lorsque  $x_0 = 0$  par contre,  $f$  n'est pas différentiable en 0 (ni même lipschitzienne) donc le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

**Question 2** Soit d'abord  $x_0 > 0$ . Tant que  $x(t) > 0$ , on a

$$\dot{x} = -k\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = -k \Leftrightarrow x(t) = \left( \sqrt{x_0} - \frac{k}{2}(t - t_0) \right)^2$$

Donc tant que  $x(t) > 0$ , la solution est unique (comme prévu dans la question précédente) et par continuité, elle atteint 0 en  $t = t_0 + 2\sqrt{x_0}/k$ . A partir de là, vu que  $\dot{x} \leq 0$ , la seule solution possible qui reste positive est la solution constamment égale à 0 : le réservoir est vide et le reste. Donc pour  $(t_0, x_0)$  avec  $x_0 > 0$ , il existe une unique solution maximale positive au problème de Cauchy définie par

$$x(t) = \begin{cases} \left( \sqrt{x_0} - \frac{k}{2}(t - t_0) \right)^2 & \forall t \in ]-\infty, t_0 + 2\sqrt{x_0}/k] \\ 0 & \forall t \in [t_0 + 2\sqrt{x_0}/k, +\infty[ \end{cases}$$

Maintenant si  $x_0 = 0$ . Pour  $t \geq t_0$ , la seule possibilité est de rester à 0. En temps rétrograde, soit  $x$  reste à 0 soit il existe  $t_1 < t_0$  tel que  $x(t_1) > 0$ . Alors la solution correspondante est unique et donnée par la formule ci-dessus en remplaçant  $(t_0, x_0)$  par  $(t_1, x(t_1))$ . Après réécriture, les solutions maximales s'écrivent en fait

$$x(t) = \begin{cases} \frac{k^2}{4}(t - t^-)^2 & \forall t \in ]-\infty, t^-] \\ 0 & \forall t \in [t^-, +\infty[ \end{cases}$$

pour chaque  $t^- \leq t_0$ . Il y a donc une infinité de solutions.

*Remarque:* si l'on s'était intéressé aux solutions négatives, on aurait trouvé une infinité de solutions au problème de Cauchy pour  $x_0 > 0$ . En effet, à partir de  $x_0 = 0$ , on a aussi de manière symétrique, les solutions

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [t_0, t^+ [ \\ -\frac{k^2}{4}(t - t^+)^2 & \forall t \in [t^+, +\infty [ \end{cases}$$

pour tout  $t^+ \geq t_0$ . Ceci ne contredit pas le théorème de Cauchy Lipschitz. En effet, celui-ci ne garantit l'unicité de la solution maximale que dans le domaine où  $f$  est continûment différentiable par rapport à  $x$ , c'est-à-dire ici tant qu'elle est non nulle, plus précisément sur l'intervalle ouvert  $] -\infty, t_0 + 2\sqrt{x_0}/k[$ .

**Question 3** La multiplicité des solutions peut être expliquée par le fait que lorsqu'on voit le réservoir vide à  $t_0$  on ne sait pas depuis quand il est vide.

**Question 4** Lorsque  $x_0 > 0$ , les solutions sont continues par rapport à la condition initiale tant qu'elles restent positives. Par contre, si  $x_0 = 0$ , une solution possible est  $x \equiv 0$  alors que pour tout  $\delta > 0$ , la solution partant de  $x_0 + \delta$  est donnée par  $x_\delta(t) = (\sqrt{x_0 + \delta} - \frac{k}{2}(t - t_0))^2$  pour  $t \leq t_0$ . Donc sur un horizon de temps fixé (rétrograde)  $[t, t_0]$ , la différence  $\|x - x_\delta\|$  ne peut être rendue arbitrairement petite en faisant tendre  $\delta$  vers 0. Le même phénomène apparaît en temps positif lorsque l'on considère les solutions négatives (voir remarque plus haut). En ce sens, on n'a pas la continuité des solutions par rapport à la condition initiale. Cela ne contredit pas le théorème car  $f(x) = -\sqrt{|x|}$  n'est pas  $C^1$ , ni lipschitzienne en 0.

## Autour du Lemme de Grönwall

**Question 1 (Lemme de Grönwall)** Soit  $v$  l'application définie par  $v(t) = \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$  sur  $[t^-, t^+]$ . Elle vérifie

$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t) \quad , \quad u(t) \leq \alpha(t) + v(t) \quad ,$$

et donc puisque  $\beta$  est à valeurs positives,

$$\dot{v}(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + \beta(t)v(t) \quad .$$

Soit maintenant  $w$  l'application définie par  $w(t) = v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right)$ .  $w$  est dérivable sur  $[t^-, t^+]$  et

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (\dot{v}(t) - \beta(t)v(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \\ &\leq \alpha(t)\beta(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \end{aligned}$$

En intégrant des deux côtés entre  $t_0$  et  $t$ , on obtient

$$w(t) - w(t_0) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s \beta(r)dr\right) ds$$

et en remplaçant  $w$  par son expression,

$$v(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_{t_0}^s \beta(r)dr\right) ds ,$$

ce qui donne le résultat. Finalement, si  $\alpha$  est constant alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha + \alpha \left[ -\exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) \right]_{t_0}^t \\ &\leq \alpha - \alpha + \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

**Question 2** Soit  $x : I \subset J \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale au problème de Cauchy. Par le théorème de représentation intégrale des solutions (p. 6),

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds ,$$

et donc, utilisant l'hypothèse de borne au plus affine de  $f$ ,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t |b(s)| + |a(s)|\|x(s)\|ds .$$

Sur tout segment  $[t^-, t^+] \subset I$ , on peut donc appliquer le Lemme de Grönwall, ce qui donne

$$\|x(t)\| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right)$$

avec  $\alpha(t) = \|x_0\| + \int_{t_0}^t |b(s)|$  et  $\beta(t) = |a(t)|$  qui sont continues sur  $J$ . Donc  $x$  ne peut pas exploser pour  $t \in J$ , donc d'après le théorème du domaine maximal d'existence (p. 10), vu que  $f$  est définie sur  $J \times \mathbb{R}^n$ , nécessairement  $I = J$ .

**Question 3** Soient  $(t_0, x_0) \in J \times X$  et  $\delta \in \mathbb{R}^n$  tel que  $(t_0, x_0 + \delta) \in J \times X$ . Soient  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $x_\delta : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  les solutions maximales aux problèmes de Cauchy associés (uniques par le théorème de Cauchy Lipschitz), et  $\underline{t}, \bar{t} > 0$  tel que  $[\underline{t}, \bar{t}] \subset I$ . On sait que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds & \forall t \in I \\ x_\delta(t) &= x_0 + \delta + \int_{t_0}^t f(s, x_\delta(s))ds & \forall t \in I' \end{aligned}$$

ce qui donne

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_\delta(s))|ds \quad \forall t \in I \cap I' .$$

Puisque  $x$  est continue, l'ensemble  $x([\underline{t}, \bar{t}])$  est un sous-ensemble fermé et borné de l'ouvert  $X$ . Donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le "tube"

$$\mathcal{C} = \{(t, x_\delta) \in [\underline{t}, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \mid \|x_\delta - x(t)\| \leq \varepsilon\}$$

est inclus dans  $J \times X$ . On va montrer que  $(t, x_\delta(t))$  est définie et reste dans ce tube sur  $[\underline{t}, \bar{t}]$  si  $\delta$  est suffisamment petit. Soit  $\underline{t}'$  et  $\bar{t}'$  les temps minimaux et maximaux sur  $[\underline{t}, \bar{t}]$  tel que

$$(t, x_\delta(t)) \in \mathcal{C} \quad \forall t \in [\underline{t}', \bar{t}']$$

Puisque  $\mathcal{C}$  est fermé et borné, et  $\partial_x f$  est continue sur  $\mathcal{C}$ ,  $M = \max_{\mathcal{C}} \|\partial_x f\|$  est bien défini. Donc d'après le théorème des accroissements finis appliqué sur le segment  $[(s, x(s)), (s, x_\delta(s))]$  inclus dans  $\mathcal{C}$ ,

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| + \int_{t_0}^t M |x(s) - x_\delta(s)| ds \quad \forall t \in [\underline{t}', \bar{t}'] .$$

Donc par le Lemme de Grönwall,

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| e^{M(t-t_0)} \quad \forall t \in [\underline{t}', \bar{t}'] .$$

Pour  $\delta$  suffisamment petit,  $|\delta| e^{M(t-t_0)} \leq \varepsilon$  sur  $[t_0, \bar{t}]$ . On a alors nécessairement  $\underline{t}' = \underline{t}$  et  $\bar{t}' = \bar{t}$  et le résultat est montré. Notons que la preuve est bien toujours valable pour  $f$  localement Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $J \times X$ , puisqu'il suffit alors de prendre pour  $M$  la constante de Lipschitz de  $f$  par rapport à  $x$  sur  $\mathcal{C}$  qui est fermé et borné (compact).

## Cycle limite I

On étudie le comportement des solutions de  $\dot{x} = f(x)$  pour

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

**Question 1** Chercher les points d'équilibre du système revient à résoudre

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ 0 &= -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Multiplier la première ligne par  $x_2$ , la deuxième par  $x_1$  et soustraire, donne  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , soit  $x_1 = x_2 = 0$ . Il n'y a donc qu'un point d'équilibre  $(0, 0)$ . La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2 \end{pmatrix}$$

soit

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres  $1 \pm i$ . La partie réelle étant positive, le point d'équilibre est instable.

**Question 2**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x) = (x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2))$  est continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système admet une unique solution maximale pour toute condition initiale. De plus,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \\ &= x_1^2 + x_1x_2 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Donc  $\frac{d}{dt}V(x(t))$  est négatif à l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon 1, zéro sur la frontière, et positif à l'intérieur si  $x \neq 0$  et zéro sinon. Il s'ensuit en particulier que  $\|x\|$  décroît lorsque  $\|x\| > 1$ , donc les solutions restent bornées en temps positif. Or, vu que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , on sait du Théorème du domaine maximal d'existence (p. 10) que la seule raison pour laquelle une solution maximale ne serait pas définie pour tout  $t \geq t_0$  serait qu'elle explose en temps fini. C'est impossible ici.

**Question 3** Supposons que  $x_0 := x(t_0)$  vérifie  $\|x_0\| \neq 1$  et qu'il existe  $t_1$  tel que  $\|x(t_1)\| = 1$ . Considérons le problème de Cauchy de condition initiale  $x^* := x(t_1)$  à  $t = t_1$ . Il admet donc une solution qui au temps  $t_0$  vaut  $x_0$ . Mais il existe une autre solution

$$\begin{pmatrix} \cos(t - t_1) & \sin(t - t_1) \\ -\sin(t - t_1) & \cos(t - t_1) \end{pmatrix} x^*$$

qui reste sur le cercle en tout temps et qui vaut aussi  $x^*$  à  $t = t_1$ , ce qui est impossible par le théorème de Cauchy Lipschitz (car  $f$  est continûment différentiable)

**Question 4** Si  $V(x(t_0)) = \|x(t_0)\|^2 = 1$ , alors  $V$  est constant donc les trajectoires initialisées sur le cercle de rayon 1 y restent. Sur le cercle, la dynamique suit celle d'un oscillateur

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

donc les trajectoires "tournent" sur le cercle.

Si  $V(x(t_0)) = x_1(t_0)^2 + x_2(t_0)^2 > 1$  alors  $V$  décroît strictement tant qu'il reste plus grand que 1. Donc les trajectoires initialisées à l'extérieur du cercle s'en approchent mais ne le rencontrent jamais d'après la question précédente.

Si  $0 < V(x(t_0)) = x_1(t_0)^2 + x_2(t_0)^2 < 1$  alors  $V$  croît strictement tant qu'il reste plus petit que 1.

Enfin, la trajectoire initialisée à zéro reste à zéro.

Le portrait de phase est donné ci-dessous (p. 39).

## Cycle limite II

On étudie le comportement des solutions de  $\dot{x} = f(x)$  pour

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1(\alpha - \beta x_2) \\ -x_2(\gamma - \delta x_1) \end{pmatrix}$$

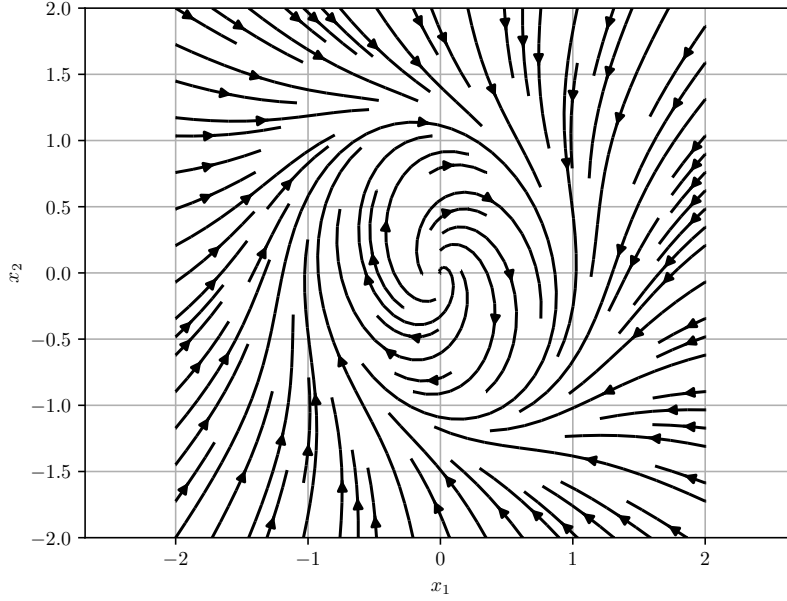


FIGURE 6 – Portrait de phase de l'exercice Cycle Limite I

**Question 1** On résout  $f(x) = 0$ , ce qui donne les points d'équilibre  $(0, 0)$  et  $\bar{x} = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ .

La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta x_2 & -\beta x_1 \\ \delta x_2 & -(\gamma - \delta x_1) \end{pmatrix}$$

En  $(0, 0)$ ,

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres  $\alpha > 0$ , donc  $(0, 0)$  est instable. Par contre, en  $\bar{x}$ ,

$$J_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres imaginaires pures  $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ , donc a priori on ne peut rien dire sur la stabilité du système nonlinéaire.

**Question 2** Soit  $x_0 = (0, x_{2,0}) \in \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  sur l'axe des ordonnées. Puisque  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy associé à la condition initiale  $(t_0, x_0)$  pour un  $t_0$  quelconque, admet une unique solution

$$x(t) = (0, x_2(t))$$

définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $x_2$  solution de

$$\dot{x}_2 = -\gamma x_2 .$$

De même, pour  $x_0 = (x_{1,0}, 0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ , le problème de Cauchy associé pour un  $t_0$  quelconque, admet une unique solution du type

$$x(t) = (x_1(t), 0)$$

définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $x_1$  solution de

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 .$$

Si une solution initialisée dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  croisait l'axe des abscisses ou des ordonnées, il existerait une autre solution au problème de Cauchy associé à  $x_0 = (0, x_{2,0})$  ou  $x_0 = (x_{1,0}, 0)$  qui ne resterait pas sur l'axe en temps négatif, ce qui est impossible. Elle reste donc dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ .

**Question 3**  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  donc d'après le théorème du domaine maximal d'existence, si une solution maximale initialisée dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$ , c'est que nécessairement  $\|x\|$  diverge en temps fini (car la frontière de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est vide)

Maintenant considérons une solution maximale  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  initialisée dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Par la question précédente, elle reste dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  donc  $H(x(t))$  est bien définie pour tout  $t \in I$ , et on a

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \langle \nabla H(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla H(x(t)), f(x(t)) \rangle = 0$$

Donc  $H$  est constante et il est impossible que  $\|x\|$  diverge en temps fini car on aurait  $\lim H(x(t)) = +\infty$ . Donc  $I = \mathbb{R}$ .

*Remarque :* On aurait pu aussi directement se placer sur  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  et considérer les solutions maximales  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  de  $\dot{x} = f(x)$  dans cet ensemble (où  $f$  est bien sûr continue). Si  $x$  n'était pas définie sur  $\mathbb{R}$ , alors nécessairement d'après le théorème du domaine maximal d'existence,  $x$  tendrait vers la frontière de  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  ou divergerait, c'est-à-dire - soit  $x$  exploserait - soit  $x_1$  tendrait vers 0 - soit  $x_2$  tendrait vers 0. (en temps fini) Mais ceci est impossible car alors on aurait dans chacun des cas

$$\lim H(x(t)) = +\infty$$

On prouve alors en même temps que les solutions initialisées dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  (et donc restent dans cet ensemble)

*Bonus :* Ici, en calculant le gradient et la hessienne de  $H$  (voir Calcul Différentiel III), on voit que  $H$  atteint un minimum local (et en fait global) en  $\bar{x}$  (gradient nul et matrice hessienne définie positive, mais on peut aussi le montrer en étudiant la fonction réelle  $u(z) = z - c \ln z$  pour une constante  $c > 0$ ). Donc

$$V(x) = H(x) - H(\bar{x})$$

est une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ , positive, qui ne s'annule localement qu'en  $\bar{x}$ . Vu que  $H$  est conservée le long des trajectoires, on peut déduire du théorème de Lyapunov que  $\bar{x}$  est stable.



**Question 4** L'équilibre  $\bar{x}$  se trouve au milieu des courbes de niveau (car c'est en fait le minimum de  $H$ ). Donc si on se donne  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $\eta_H > 0$  tel que  $H(x) < \eta_H$  implique  $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ . On en déduit que pour toute condition initiale telle que  $H(x_0) < \eta_H$ , la trajectoire reste à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de  $\bar{x}$ . Par ailleurs, l'ensemble des courbes des niveaux de  $H$  inférieures à  $\eta_H$  constituent bien un voisinage de  $\bar{x}$  donc  $\bar{x}$  est stable par définition.

Le portrait de phase est donné ci-dessous (p. 41).

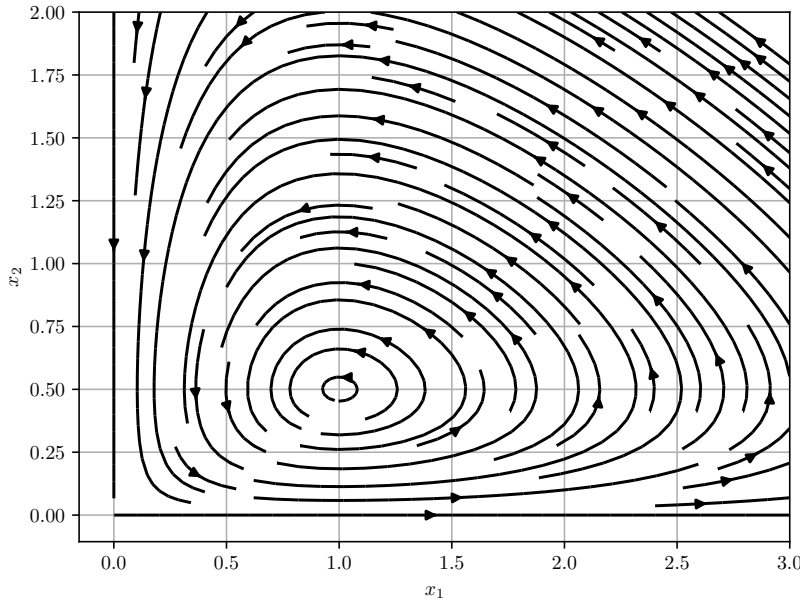


FIGURE 7 – Portrait de phase de l'exercice Cycle Limite II

**Question 5** Pour que  $x_1$  vale  $x_1^*$  à l'équilibre, il faut que  $x_2$  vale  $x_2^* = \frac{\alpha}{\beta}$  et  $u^* = x_2^*(\gamma - \delta x_1^*)$ .

**Question 6** La fonction  $V$  est  $C^1$ , à valeurs positives et s'annule si et seulement si  $x_1 = x_1^*$  et  $x_2 = v(x_1^*) = x_2^*$ . C'est donc une fonction de Lyapunov associée à  $(x_1^*, x_2^*)$ . Calculons sa dérivée le long des trajectoires.

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle &= -x_1 \lambda_1 (x_1 - x_1^*)^2 - x_1 \beta (x_1 - x_1^*) (x_2 - v_r(x_1)) \\ &\quad + (x_2 - v_r(x_1)) (-x_2 (\gamma - \delta x_1) + u + v_r'(x_1) f_1(x)) \end{aligned}$$

L'idée est alors de choisir  $u$  afin d'assurer que  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  au moins dans un voisinage de l'équilibre. On prend donc par exemple

$$u = -\lambda_2 (x_2 - v_r(x_1)) + x_2 (\gamma - \delta x_1) - \lambda_1 f_1(x) + x_1 \beta (x_1 - x_1^*)$$

avec  $\lambda_2 > 0$ . Ceci donne

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = -x_1 \lambda_1 (x_1 - x_1^*)^2 - \lambda_2 (x_2 - v_r(x_1))^2$$

qui est bien strictement négatif pour  $x \neq (x_1^*, x_2^*)$  dans un voisinage où  $x_1 > 0$ . On en déduit que  $(x_1^*, x_2^*)$  est localement asymptotiquement stable. Il ne l'est pas globalement car  $(0, x_2^*)$  est aussi point d'équilibre. Mais ce dernier est instable et une étude plus fine pourrait montrer que le bassin d'attraction inclut  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ .

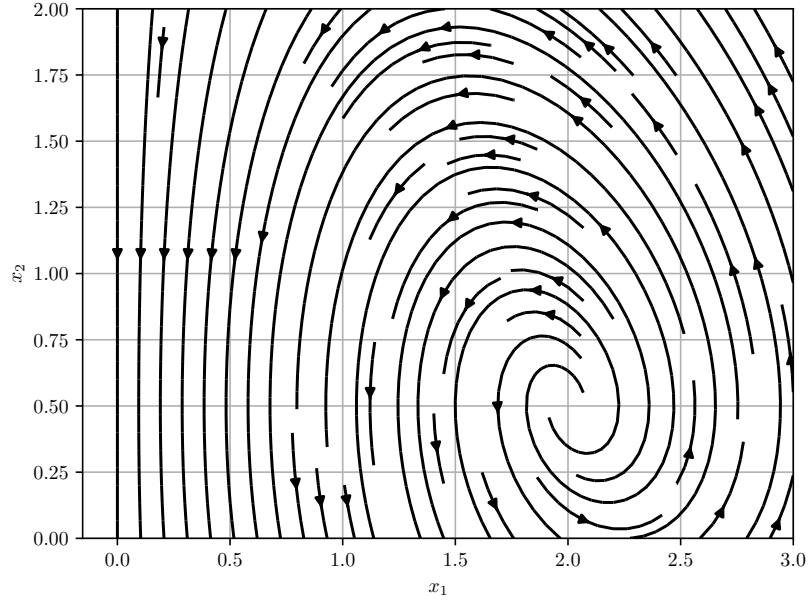


FIGURE 8 – Portrait de phase de l'exercice Cycle Limite II avec l'entrée  $u$  choisie pour  $x_1^* = 2$  avec  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

### Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire

Tout d'abord, montrons que l'attractivité locale de 0 implique l'attractivité globale. Ceci est dû à la propriété d'*homogénéité* des systèmes linéaires: si  $x$  une solution initialisée à  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda x$  est solution initialisée à  $\lambda x_0$  puisque

$$\lambda x(t) = \lambda e^{At} x_0 = e^{At} (\lambda x_0) .$$

Donc soit  $\eta > 0$  tel que toute solution initialisée dans  $B(0, \eta)$  converge vers 0. Soit  $x$  une solution initialisée à  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda x$  avec  $\lambda < \eta/|x_0|$  est solution initialisée dans  $B(0, \eta)$  et converge vers 0. Donc  $x$  converge vers 0.

Maintenant, montrons la stabilité. Soit  $\varepsilon > 0$ . Notons  $(x_i)_{i=1\dots n}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ . Soit alors  $M > 0$  tel que

$$|e^{At} x_i| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

qui existe bien puisque toutes les solutions convergent vers 0 et  $n$  est fini. Soit maintenant  $\eta > 0$ . Pour tout  $x_0 \in B(0, \eta)$  dont la décomposition dans la base

s'écrit

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

on a  $|\alpha_i| \leq \eta$  et donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$|e^{At}x_0| \leq \left| \sum_{i=1}^n e^{At} \alpha_i x_i \right| \leq n\eta M$$

On conclut que pour des conditions initiales suffisamment petites ( $\eta < \frac{\varepsilon}{nM}$ ), les solutions restent inférieures à  $\varepsilon$  en norme. Donc le système est stable.

## Contrôle d'un système

**Question 1** Si  $u \equiv 0$ , les solutions sont  $x(t) = e^t x_0$  donc le point d'équilibre 0 est instable et les solutions divergent.

**Question 2** Si l'on mesure  $x(t)$ , on peut prendre  $u(t) = -kx(t)$ , ce qui donne

$$\dot{x} = -(k-1)x$$

pour lequel 0 est globalement asymptotiquement stable si  $k > 1$ .

**Question 3** Prenons  $u(t) = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) - \dots - k_n x_n(t)$ . Alors le système devient

$$\dot{x} = Ax$$

avec  $A$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & \dots & -k_n \end{pmatrix}$$

qui admet pour polynôme caractéristique

$$s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_2 s + k_1 .$$

Il suffit donc de choisir les coefficients  $k_i$  tels que ce polynôme ait ses racines à partie réelle strictement négative. Ces dernières peuvent d'ailleurs être choisies à souhait.

## Annexes

### Preuve du théorème de Peano-Arzelà (Hors-programme)

Cette preuve repose sur le théorème d'Ascoli :

Soient  $X$  un espace métrique compact,  $Y$  un espace métrique complet, et  $S \subset C(X, Y)$ , où  $C(X, Y)$  est l'ensemble des fonctions continues de  $X$  dans  $Y$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $S$  est *relativement compact* dans  $C(X, Y)$
2.  $S$  est *équicontinu* et pour tout  $x \in X$ ,  $\{f(x) \mid f \in S\}$  est *relativement compact* dans  $Y$ .

On dit qu'un ensemble est *relativement compact* si son adhérence est compacte. En dimension finie, vue que "compact" est équivalent à "fermé-borné" et que l'adhérence est fermée par définition, "relativement compact" est équivalent à "borné". Mais ce n'est pas le cas en dimension infinie (en particulier  $C(X, Y)$ ) où "relativement compact" est alors équivalent au fait de pouvoir extraire des suites convergentes dans l'adhérence de l'ensemble.

Ici, puisque  $X$  est compact et  $Y$  complet, on peut montrer que  $C(X, Y)$  muni de la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  est complet, donc fermé. Il s'ensuit que " $S$  est relativement compact dans  $C(X, Y)$ " implique pouvoir extraire de toute suite de  $S$  une sous-suite convergente dans  $C(X, Y)$  (au sens de  $\|\cdot\|_\infty$ ). C'est ce que nous allons utiliser pour prouver l'existence d'une solution au problème de Cauchy.

Maintenant, le deuxième terme nécessitant des explications est l'*équicontinuité* de  $S$ . Cette notion veut simplement dire que les fonctions dans  $S$  sont toutes continues *au même rythme*, i.e., plus précisément,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta, \quad d_X(x_a, x_b) \leq \delta \implies \forall f \in S, \quad d_Y(f(x_a), f(x_b)) \leq \varepsilon,$$

où  $d_X$  et  $d_Y$  sont les distances sur  $X$  et  $Y$  respectivement.

Revenons maintenant à nos moutons. On suppose donc  $f$  continue sur  $J \times X$  et on veut montrer que  $S_f(t_0, x_0) \neq \emptyset$ . Soient d'abord  $\tau > 0$  et  $r > 0$ , tels que  $\mathcal{C} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{B}(x_0, r) \subset J \times X$ . Soit  $\tau_m \in ]0, \tau]$  tel que  $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$ . On va montrer l'existence d'une solution définie par sa forme intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

sur  $[t_0, t_0 + \tau_m]$  et la preuve sur  $[t_0 - \tau_m, t_0]$  se fait de la même façon.

L'idée est d'approximer de plus en plus finement la forme intégrale et montrer que ce procédé converge. On définit donc pour  $\epsilon \in ]0, 1[$  la fonction

$$\begin{aligned} x_\epsilon(t) &= x_0 & \forall t \in [t_0 - 1, t_0] \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds & \forall t \in [t_0, t_0 + \tau_m] \end{aligned}$$

Ces fonctions sont définies et continues sur  $[t_0 - 1, t_0]$ . Puis sur  $[t_0, t_0 + \epsilon] \cap [t_0, t_0 + \tau_m]$ , on voit que l'intégrale ne dépend que de  $x_\epsilon$  sur  $[t_0 - 1, t_0]$ , donc elle est toujours bien définie et continue. De proche en proche,  $x_\epsilon$  est donc bien définie et continue sur  $[t_0 - 1, t_0 + \tau_m]$ . En fait,  $\epsilon$  représente un petit retard introduit dans l'intégrale pour la rendre explicite. Si l'on arrive à montrer que ces fonctions convergent vers une fonction continue lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, cette limite sera solution de l'équation intégrale sur  $[t_0, t_0 + \tau_m]$  et sera donc solution.

La première étape est de montrer de proche en proche, grâce au retard, que  $x_\epsilon(t) \in \overline{B}(x_0, r)$  pour tout  $t \in [t_0 - 1, t_0 + \tau_m]$  puisque  $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$ . Donc

$$\forall \epsilon \in ]0, 1[, \quad x_\epsilon \in E := C([t_0 - 1, t_0 + \tau_m], \overline{B}(x_0, r)).$$

De plus, pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$  et pour tout  $(t, t') \in [t_0 - 1, t_0 + \tau_m]^2$ ,

$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(t')\| \leq \max_{\mathcal{C}} \|f\| |t - t'|$$

donc la famille  $S := \{x_\epsilon, \epsilon \in ]0, 1[ \}$  est équicontinue. De plus, vu que leur image est bornée dans  $\overline{B}(x_0, r)$  de dimension finie, elle est bien bien relativement compacte. Le théorème d'Ascoli nous dit alors que  $S$  est relativement compacte dans  $E$ . Il existe donc une sous suite  $x_{\epsilon_k}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \epsilon_k = 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{\epsilon_k} = x^* \in E$  au sens de la norme uniforme  $\|\cdot\|$ . Par uniforme continuité de  $f$  sur le compact  $\mathcal{C}$ , on en déduit alors que pour tout  $s \in [t_0, t_0 + \tau_m]$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s, x_{\epsilon_k}(s - \epsilon_k)) = f(s, x^*(s))$  et donc que  $x^*$  est bien solution de l'équation intégrale, ce qui donne le résultat.

### Preuve du théorème du domaine maximal d'existence

Soit  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale dans  $S_f(t_0, x_0)$ . Par définition,  $I$  est un intervalle contenant  $t_0$ . Soient  $t_m^+ = \sup I$  et  $t_m^- = \inf I$ . Supposons  $t_m^+ \in I$  et dénotons  $(t_1, x_1) = (t_m^+, x(t_m^+))$ . Toujours par définition,  $(t_1, x_1) \in J \times X$ , donc par le théorème de Peano (p. 7) il existe  $\tau > 0$  et  $x' : [t_m^+ - \tau, t_m^+ + \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans  $S_f(t_1, x_1)$ . Considérons  $\tilde{I} = I \cup [t_m^+, t_m^+ + \tau]$ , et  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in I \\ x'(t) & \text{si } t > t_m^+ \end{cases}$$

$\tilde{x}$  est bien continue et à valeurs dans  $J \times X$  sur  $\tilde{I}$ . De plus, elle est de classe  $C^1$  sur  $\tilde{I} \setminus \{t_m^+\}$  telle que  $\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(t))$  pour tout  $t \in \tilde{I} \setminus \{t_m^+\}$ . Par continuité de  $\tilde{x}$  en  $t_m^+$  et de  $f$  en  $(t_1, x_1)$ , on en déduit que  $\tilde{x}$  est bien  $C^1$  sur  $\tilde{I}$ . Donc  $\tilde{x} \in S_f(t_0, x_0)$ , ce qui contredit la maximalité de  $x$  car  $I \subsetneq \tilde{I}$ . On conclut donc que  $t_m^+ \notin I$  et de même  $t_m^- \notin I$ . Donc  $I$  est ouvert.

Supposons  $t_m^+$  fini. Montrons qu'alors lorsque  $t$  tend vers  $t_m^+$ , soit  $x(t)$  diverge, soit  $(t, x(t))$  tend vers la frontière de  $J \times X$ . La propriété se montre de manière similaire en  $t_m^-$ . Pour cela, nous allons montrer que lorsque  $t$  se rapproche de  $t_m^+$ ,  $(t, x(t))$  finit par sortir définitivement de tout sous-ensemble  $K$  fermé et borné de  $J \times X$ . Soit donc  $K$  fermé et borné de  $J \times X$ .

Supposons d'abord qu'il existe  $\tau$  tel que  $(t, x(t)) \in K$  pour tout  $t \in [\tau, t_m^+]$ . Puisque  $f$  est continue,  $\|f(t, x)\|$  est borné disons par  $M$  sur  $K$ . Donc pour toute suite  $(t_k)$  d'éléments de  $[\tau, t_m^+]$  tendant vers  $t_m^+$ , par la représentation intégrale des solutions,

$$\|x(t_{k+p}) - x(t_k)\| \leq \int_{t_k}^{t_{k+p}} \|f(s, x(s))\| ds \leq M(t_{k+p} - t_k) .$$

Donc la suite  $(x(t_k))$  est de Cauchy et donc aussi la suite  $(t_k, x(t_k))$  dans  $K$ . Puisque  $K$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  complet, il est complet. Donc  $(t_k, x(t_k))$  converge vers  $(t_m^+, \bar{x}) \in K \subset J \times X$ . Donc  $x$  peut-être prolongée par continuité en une solution sur  $]t_m^-, t_m^+]$ , ce qui est impossible par maximalité. Donc  $(t, x(t))$  sort de manière persistente de  $K$ .

Supposons maintenant que  $(t, x(t))$  entre aussi de manière persistente dans  $K$ , i.e.,

$$\forall t_K \in [t_0, t_m^+[, \exists t \in [t_K, t_m^+[: (t, x(t)) \in K$$

Alors il existe une suite  $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$  telle que

$$t_m^+ - \frac{1}{p} \leq t_p < t_m^+ \quad \text{et} \quad (t_p, x(t_p)) \in K \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

On a donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} t_p = t_m^+$ , et par compacité de  $K$ , on peut extraire de  $(t_p, x(t_p))_{p \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge vers  $(t_m^+, \bar{x}) \in K$ . Pour simplifier les notations, on suppose donc directement  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x(t_p) = \bar{x}$ .

Notons  $\xi = (t_m^+, \bar{x})$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\overline{B}(\xi, 2\varepsilon) \subset J \times X$ . Il existe  $p^*$  tel que pour tout  $p \geq p^*$ ,  $(t_p, x(t_p)) \in \overline{B}(\xi, \varepsilon)$ . Mais puisque  $\overline{B}(\xi, 2\varepsilon)$  est un sous-ensemble fermé et borné de  $J \times X$ , on sait que  $(t, x(t))$  en sort de manière persistente. Donc sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout  $p$ , il existe  $t_p < t'_p < t_{p+1}$  tel que

$$\|(t'_p, x(t'_p)) - \xi\| = 2\varepsilon \quad , \quad (t, x(t)) \in \overline{B}(\xi, 2\varepsilon) \quad \forall t \in [t_p, t'_p] .$$

Soit alors  $M$  le maximum de  $\|f\|$  sur le fermé borné  $\overline{B}(\xi, 2\varepsilon)$ . Par la représentation intégrale, et pour  $p$  suffisamment grand, on a donc

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \|x(t'_p) - x(t_p)\| \leq \int_{t_p}^{t'_p} \|f(s, x(s))\| ds \leq M(t'_p - t_p) \leq M(t_{p+1} - t_p) .$$

Il s'ensuit que pour  $p$  suffisamment grand,  $t_{p+1} - t_p \geq \frac{\varepsilon}{2M}$ , ce qui est impossible puisque  $(t_p)$  tend vers  $t_m^+$ . On peut donc conclure que  $(t, x(t))$  sort de manière définitive de tout fermé borné  $K$  lorsque  $t$  s'approche de  $t_m^+$ .

## Stabilité et linéarisé tangent

Soit  $a$  un point d'équilibre de  $f$ . Définissons

$$\Delta(x) = f(x) - f(a) - J_f(a)(x - a) = f(x) - J_f(a)(x - a) ,$$

puisque  $f(a) = 0$ . Par la définition de la différentiabilité de  $f$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et une fonction  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\lim_{x \rightarrow a} \delta(x) = 0$  et

$$\Delta(x) = \delta(x)\|x - a\| \quad \forall x \in B(a, \varepsilon) .$$

La preuve repose ensuite sur le lemme suivant dû à Lyapunov :

Pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  à valeurs propres à parties réelles strictement négatives, et pour toute matrice symétrique définie positive  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , il existe une (unique) matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que

$$A^\top P + PA = -Q .$$

En effet, la solution est alors donnée par  $P = \int_0^{+\infty} (e^{As})^\top Q e^{As} ds$ .

Supposons donc que  $J_f(a)$  ait ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. Il existe alors  $P = P^\top > 0$  telle que

$$J_f(a)^\top P + PJ_f(a) = -I .$$

Considérons alors  $V(x) = (x - a)^\top P(x - a)$  qui est bien positive, et nulle seulement pour  $x = a$ . Pour tout  $x \in B(a, \epsilon)$ ,

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x), f(x) \rangle &= (x - a)^\top P f(x) + f(x)^\top P(x - a) \\ &= (x - a)^\top (J_f(a)^\top P + P J_f(a)) (x - a) + 2(x - a)^\top P \Delta(x) \\ &\leq -\|x - a\|^2 + 2\|x - a\| \|P\| \|\Delta(x)\| \\ &\leq -\|x - a\|^2 (1 - 2\|P\| \|\delta(x)\|)\end{aligned}$$

Donc  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in B(a, \epsilon')$  avec  $\epsilon' < \epsilon$  suffisamment petit tel que

$$\|\delta(x)\| \leq \frac{1}{2\|P\|} \quad \forall x \in B(a, \epsilon') .$$

D'après le théorème de Lyapunov,  $a$  est donc localement asymptotiquement stable.

## Références

- Bacciotti, A., and L. Rosier. 2005. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. 2nd ed. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, Berlin.
- Filippov, A. F. 1988. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Mathematics and its Applications Kluwer Academic Publishers Group.
- Hale, J. K. 2009. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publication Inc.
- Holmes, P., and D. Rand. 1978. “Bifurcations of the Forced van Der Pol Oscillator.” *Quarterly of Applied Mathematics* 35: 495–509.
- Lyapunov, A. 1892. “The general problem of the stability of motion.” Kharkov Mathematical Society.
- Moigno. 1844. “26ème Leçon.” In *Leçons de Calcul Différentiel et Intégral, Rédigées Principalement d’après Les Méthodes de M. A.-L. Cauchy, et étendues Aux Travaux Les Plus Récents Des Géomètres*, pages 385–96. Bachelier, Imprimeur-Libraire de l’Ecole Polytechnique. <https://books.google.fr/books?id=booAAAAAMAAJ&pg=PA385#v=onepage&q&f=false>.
- Poincaré, H. 1892. *Les Méthodes Nouvelles de La Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire de l’Ecole Polytechnique. <https://iris.univ-lille.fr/handle/1908/3851>.
- Sussman, G. J., and J. Wisdom. 1992. “Chaotic Evolution of the Solar System.” *Science*, 1992.