Mesure et intégration

Quizz 2 (mesures et mesures extérieures)

1) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace métrique mesurable. L'application μ qui à A associe son diamètre

$$\mu(A) = \mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)\,,\ \ \mu(\emptyset) = 0,$$

est une

mesure $\square$ mesure extérieure $\square$ ni l'un ni l'autre $\square$

2) On considère l'ensemble X des personnes habitant sur terre, muni de la tribu discrète. Préciser si les μ définis ci-dessous sont des mesures, mesures extérieures, ou ni l'un ni l'autre. On définit μ par la valeur qu'elle affecte à une sous-population $A \in \mathcal{P}(X)$ (en affectant toujours 0 à $\emptyset$).

Mesure $\square$ Mesure extérieure $\square$ nombre total d'années vécues par les éléments de A

Mesure $\square$ Mesure extérieure $\square$ âge moyen des individus dans A

Mesure $\square$ Mesure extérieure $\square$ âge maximal parmi les individus dans A

Mesure $\square$ Mesure extérieure $\square$ âge minimal parmi les individus dans A

Mesure $\square$ Mesure extérieure $\square$ nombre de "connections" entre individus de A (on compte 1 pour tout couple (x, y) tel que x et y se sont déjà rencontrés).

3) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace métrique mesurable. Soit $r > 0$. On définit $\mu(\,\cdot\,)$ comme l'application qui à A associe le nombre minimal (éventuellement infini) de boules fermées nécessaires pour recouvrir A. Alors μ est une

mesure $\square$ mesure extérieure $\square$ ni l'un ni l'autre $\square$

4) On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Les assertions suivantes sont elles vraies / fausses ?

Vrai $\square$ Faux $\square$ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A}) = \lambda(\bar{A})$ pour tout intervalle A

Vrai $\square$ Faux $\square$ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A})$ pour tout borélien A

Vrai $\square$ Faux $\square$ $\lambda(A) = \lambda(\bar{A})$ pour tout borélien A

Vrai $\square$ Faux $\square$ $\lambda(\partial A) \leq \lambda(A)$ pour tout borélien A