Topologie

STEP, MINES ParisTech

13 septembre 2021 (`#b3f42f8`)

Question 1 Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et d la distance sur C dérivée de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Dans ce contexte, la distance entre les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ de C vaut

☐ A : 2.
☐ B : π.
☐ C : 2π.

Question 2 Dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\| = |\cdot|$,

☐ A : l'ensemble $[0, 1]$ est fermé.
☐ B : l'ensemble $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fermé.
☐ C : l'ensemble $[0, +\infty[$ est fermé.

Question 3 Dans un espace métrique X, un ensemble A est ouvert si et seulement si

☐ A : le complémentaire A^c de A dans X est fermé.
☐ B : sa frontière ∂A est vide.
☐ C : l'ensemble A n'est pas fermé.

Question 4 Dans le plan euclidien, identifiez les ensembles qui sont des voisinages de l'origine

☐ A: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1 \text{ et } x_2 \geq 1\}$
☐ B: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$
☐ C: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq -1 \text{ et } x_2 \geq -1\}$

Question 5 Dans un espace métrique, si $A \subset B$, alors :

☐ A : $\overline{A} \subset \overline{B}$
☐ B : $\partial A \subset \partial B$
☐ C : $A^\circ \subset B^\circ$

Question 6 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de l'ensemble de niveau $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = a\}$?

Réponse : l'ensemble A est . . . .

Question 7 Si une suite de vecteurs x_k de $\mathbb{R}^n$ vérifie

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq 0.5 \times \|x_{k+1} - x_k\|,$$

est-ce qu'elle converge nécessairement ?

☐ A : oui.
☐ B : non.

Question 8 Dans le plan euclidien, est-ce que les ensembles suivants sont complets ? compacts ?

☐ A : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$
☐ B : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S\left(0, \frac{1}{n}\right)$
☐ C : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S\left(0, n\right)$

Question 9 L'ensemble $\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme euclidienne, la norme d'opérateur $\|A\|$ de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

est égale à

☐ A : 0.
☐ B : 1.
☐ C : $\sqrt{2}$.