II.2 Théorème des fonctions implicites

Le résultat principal de cette section est le théorème dit *des fonctions implicites*, très utiles dans de multiples contextes, que l'on peut interpréter comme suit. On considère une équation portant sur $y \in \mathbb{R}^m$, qui dépend de paramètres $x_1, \ldots, x_n$, et que l'on écrit

$$f(x,y) = 0.$$

Cette équation est à valeurs vectorielles. Pour se placer dans un contexte où l'équation, pour un jeu de paramètres x fixé, peut permettre de déterminer y, on s'intéresse au cas où il y a autant d'équations que d'inconnues, c'est à dire que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. L'inconnue y est donc définie de façon *implicite* par rapport aux paramètres $x_1, \ldots, x_n$. On se place au voisinage d'une solution de cette équation : pour un jeu de paramètres x_0 donné, on suppose connue une solution y_0 de l'équation. Si l'on fait varier les paramètres de l'équation, on peut s'attendre que ce la solution en y varie elle-même de façon régulière. Le théorème ci-dessous donne des conditions suffisantes pour que l'on puisse en effet exprimer y en fonction de x, de façon régulière, au voisinage d'un couple paramètres - solution (x_0, y_0) donné. La condition principale permettant cette explicitation de la dépendance apparaît clairement dans l'exemple-jouet suivant :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto ax + by + c.$$

On peut exprimer y fonction de x si et seulement si $b \neq 0$, où b quantifie la manière dont f varie vis-à-vis de y. Dans le cas le plus général ($y \in \mathbb{R}^m$, f à valeurs dans $\mathbb{R}^m$), cette dépendance sera encodée par la différentielle de f par rapport à y (qui est bien représentée dans la base canonique par une matrice carrée). L'hypothèse principale porte sur le caractère *inversible* de cette différentielle.

Théorème II.2.1. Soit f une fonction définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On suppose f continûment différentiable sur W, et l'on suppose que la différentielle partielle de f par rapport à y, notée $\partial_y f(x,y)$, est inversible en tout point [8] de W. On considère un point $(x_0, y_0) \in W$ qui annule f :

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

On peut alors exprimer y comme fonction de x au voisinage de (x_0, y_0). Plus précisément : il existe des voisinages ouverts $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathbb{R}^m$ de x_0 et y_0, respectivement, et une fonction Ψ de U dans V, tels que

$$(x,y) \in U \times V\,,\ f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \Psi(x).$$

La fonction Ψ est différentiable sur U, et sa différentielle s'exprime

$$d\Psi(x) = -\left(\partial_y f(x,y)\right)^{-1} \circ \partial_x f(x,y)\,, \quad \text{avec} \quad y = \Psi(x).$$

Démonstration. La démarche, de nature constructive, est basée sur un processus itératif construit selon les principes suivants. On considère x proche de x_0 (dans un sens précisé

8. Comme précisé dans la remarque II.2.2 ci-après, il suffit de vérifier que la différentielle soit inversible en (x_0, y_0) pour qu'elle le soit dans un voisinage de ce point.

plus loin), et l'on cherche y tel que $f(x,y)=0$. Le processus itératif découle des considérations suivantes : on suppose que l'on dispose d'une première approximation y_k du y recherché, et on cherche un y_{k+1} qui en soit une meilleure approximation. On a

$$f(x,y_{k+1}) = f(x,y_k+(y_{k+1}-y_k)) \approx f(x,y_k)+\partial_y f(x,y_k)\cdot(y_{k+1}-y_k).$$

On souhaite annuler cette quantité, ce qui suggère de définir y_{k+1} comme

$$y_{k+1} = y_k - (\partial_y f(x,y_k))^{-1}\cdot f(x,y_k).$$

Il s'agit de la méthode dite de *Newton* pour trouver le zéro d'une fonction. Nous allons considérer ici une version modifiée de cette méthode, en remplaçant la différentielle partielle en y par sa valeur au point (x_0,y_0). Partant de y_0 (en fait, on peut partir d'une valeur initiale différente de y_0, mais nous le fixons comme point de départ pour simplifier), on construit donc la suite (y_k) par récurrence, selon la formule

$$y_{k+1} = y_k - Q^{-1}\cdot f(x,y_k)\,,\quad \text{avec}\quad Q=\partial_y f(x_0,y_0).$$

N.B. : On prendra garde au fait que, pour (x,y) donné, $\partial_y f(x,y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Cette application dépend du point $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ où elle est prise, mais sans que la différentielle soit prise par rapport à la variable x. Cette différentielle partielle est définie par le développement limité suivant, où l'on ne perturbe que la variable y : pour $h\in\mathbb{R}^m$,

$$f(x,y+h) = f(x,y)+\partial_y f(x,y)\cdot h + o(h).$$

Il s'agit donc d'un champ *d'applications linéaires, auquel on peut associer un champ de matrices carrées $m\times m$ (leurs représentations dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$), qui vit sur un espace de dimension $n\times m$. L'application Q est simplement la valeur particulière de ce champ au point (x_0,y_0).*

Cette récurrence peut s'écrire $y_{k+1}=\Phi_x(y_k)$, où la fonction Φ_x est définie par

$$y\longmapsto \Phi_x(y) = y - Q^{-1}\cdot f(x,y),$$

pour tout y tel que $(x,y)\in W$. Noter que y est point fixe de Φ_x si et seulement si $f(x,y)=0$. Nous allons montrer que cette fonction admet bien un unique point fixe sur un voisinage de y_0. Cette fonction est différentiable sur son domaine de définition, de différentielle

$$d\Phi_x(y) = I - Q^{-1}\circ\partial_y f(x,y).$$

En écrivant $I=Q^{-1}Q$ on obtient

$$\|d\Phi_x(y)\| = \left\|Q^{-1}\left(\partial_y f(x_0,y_0)-\partial_y f(x,y)\right)\right\| \le \left\|Q^{-1}\right\|\,\|\,\partial_y f(x_0,y_0)-\partial_y f(x,y)\|$$

Fixons $\kappa=1/2$. La différentielle étant continue, il existe un $r>0$ tel que, pour tout point $x\in\overline{B}(x_0,r)$, tout $y\in\overline{B}(y_0,r)$ (on prend r suffisamment petit pour que $\overline{B}(x_0,r)\times\overline{B}(y_0,r)\subset W$),

$$\|\,\partial_y f(x_0,y_0)-\partial_y f(x,y)\| \le \kappa\left\|Q^{-1}\right\|^{-1},$$

de telle sorte que

$$\forall x\in\overline{B}(x_0,r)\,,\ y\in\overline{B}(y_0,r)\,,\ \|d\Phi_x(y)\|\le\kappa.$$

On a donc, pour tous y, y' dans $\overline{B}(0,r)$,

$$\|\Phi_x(y) - \Phi_x(y')\| \le \kappa \|y - y'\|$$

d'après le théorème des accroissements finis, avec $\kappa = 1/2$. L'application Φ_x est donc contractante sur $\overline{B}(y_0, r)$. Montrons qu'elle laisse stable une boule autour de y_0. Comme l'application

$$x \longmapsto \Phi_x(y_0) = y_0 - Q^{-1} \cdot f(x, y_0)$$

est continue en x_0, il existe un $r' < r$ tel que, pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r')$, on ait

$$\|\Phi_x(y_0) - \Phi_{x_0}(y_0)\| \le (1-\kappa)r,$$

avec $\Phi_{x_0}(y_0) = y_0$ car $f(x_0, y_0) = 0$. On a alors, pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r')$, tout $y \in \overline{B}(y_0, r)$,

$$\|\Phi_x(y) - y_0\| \le \underbrace{\|\Phi_x(y) - \Phi_x(y_0)\|}_{\le \kappa \|y - y_0\|} + \underbrace{\|\Phi_x(y_0) - y_0\|}_{\le (1-\kappa) r} \le \kappa r + (1-\kappa) r = r.$$

Pout tout $x \in \overline{B}(x_0, r')$, l'application Φ_x est donc bien définie de $\overline{B}(0,r)$ dans lui-même, et cette ensemble est complet comme fermé dans le complet $\mathbb{R}^m$. Elle par ailleurs contractante comme montré précédemment. D'après le théorème I.7.2, elle admet donc un unique point fixe sur $\overline{B}(0,r)$, c'est-à-dire qu'il existe un unique $y \in \overline{B}(0,r)$ tel que $f(x,y) = 0$. On note Ψ l'application qui à x associe cette unique solution en y de $f(x,y) = 0$.

Montrons maintenant la continuité de Ψ, et précisons le choix des voisinages U et V. Soient x_1 et x_2 deux points de $\overline{B}(x_0, r')$, et $y_1 = \Psi(x_1)$, $y_2 = \Psi(x_1)$. On a

$$\|y_2 - y_1\| = \|\Phi_{x_2}(y_2) - \Phi_{x_1}(y_1)\| \le \|\Phi_{x_2}(y_2) - \Phi_{x_2}(y_1)\| + \|\Phi_{x_2}(y_1) - \Phi_{x_1}(y_1)\|.$$

Comme Φ_{x_2} est κ-contractante sur $\overline{B}(y_0, r)$, on a $\|\Phi_{x_2}(y_2) - \Phi_{x_2}(y_1)\| \le \kappa \|y_2 - y_1\|$, d'où

$$\|y_2 - y_1\| \le \frac{1}{1-\kappa} \|\Phi_{x_2}(y_1) - \Phi_{x_1}(y_1)\| = \frac{1}{1-\kappa} \left\| Q^{-1} \cdot (f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1)) \right\|$$

$$\le \frac{1}{1-\kappa} \left\| Q^{-1} \right\| \max_{\overline{B}(x_0, r') \times \overline{B}(y_0, r)} \|\partial_x f\| \|x_2 - x_1\|$$

d'après le théorème des accroissements finis II.1.18 (f étant continûment différentiable sur le compact $\overline{B}(x_0, r') \times \overline{B}(y_0, r)$, sa différentielle partielle par rapport à x est bornée). Cette quantité tend en particulier vers 0 quand x_2 tend vers x_1. L'application Ψ est donc continue sur $\overline{B}(x_0, r')$ à valeurs dans $\overline{B}(y_0, r)$. Soit V voisinage ouvert de y_0 inclus dans $\overline{B}(y_0, r)$. Comme Ψ est continue, il existe un voisinage ouvert de x_0, $U \subset \overline{B}(x_0, r')$, tel que $\Psi(U) \subset V$.

Il reste à montrer que Ψ est différentiable sur U. Soit $x \in U$, $y = \Psi(x) \in V$. On considère une variation h de x telle que $x + h \in U$. Il existe un unique g tel que $y + g \in V$ vérifie

$$f(x+h, y+g) = 0.$$

D'après ce qui précède il existe $C > 0$ tel que $\|g\| \le C \|h\|$. La différentiabilité de f en (x,y) s'exprime

$$\underbrace{f(x+h, y+g)}_{=0} = \underbrace{f(x,y)}_{=0} + \partial_x f(x,y) \cdot h + \partial_y f(x,y) \cdot g + o(h,g).$$

On a donc

$$g = -\left((\partial_y f(x,y))^{-1} \circ \partial_x f(x,y) \right) \cdot h + o(h),$$

(le $o(h,g)$ s'est bien transformé en $o(h)$ du fait que la norme de h domine celle de g, comme indiqué précédemment). L'application $x \mapsto \Psi(x)$ est donc différentiable sur U, de différentielle

$$d\Psi = (\partial_y f)^{-1} \circ \partial_x f,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque II.2.2. Pour vérifier l'applicabilité du théorème précédent en un point (x_0, y_0) qui annule f, et au voisinage duquel f est définie, il suffit de vérifier que la différentielle de f par rapport à y est inversible en (x_0, y_0). En effet, si c'est le cas, l'application $(x,y) \mapsto \partial_y f(x,y)$ étant continue, et le déterminant étant une fonction continue, la différentielle reste inversible sur un ouvert de (x_0, y_0), qui peut jouer le rôle du W dans les hypothèses du théorème précédent. On dira que le théorème des fonctions implicites s'applique *en* (x_0, y_0), ou *au voisinage de* (x_0, y_0).

Remarque II.2.3. Ce théorème, qui peut sembler assez abstrait et technique, peut être invoqué d'une manière *négative* pour qualifier la pertinence d'un modèle. Replaçons-nous dans le cadre de l'introduction, en interprétant $f(x,y)$ comme un *modèle* portant sur y, sous la forme d'un système d'équations dépendant de paramètres x_1, ..., x_n. Le modèle a vocation à, pour un jeu de paramètres (qui peuvent être des températures, des pressions, des flux d'information, des prix, ...), déterminer la collection des inconnues y_1,..., y_m. Dans le cadre d'une utilisation de ce modèle dans la vie réelle, les paramètres ne sont en général connus qu'approximativement (erreurs de mesure, variabilité en temps de paramètres supposés statiques, ...). Si la solution y ne dépend *pas* de façon régulière des paramètres, cela signifie qu'une erreur petite sur les paramètres peut induire une variation très importante de la solution. On dira que le problème n'est pas *stable* [9]. Du fait de la non-différentiabilité de la correspondance paramètres $\mapsto$ solution (même si le problème est bien posé au sens où la solution est définie de façon unique), il n'existera pas de constante c telle qu'une erreur relative ε sur les paramètres induise une erreur contrôlée par $c\varepsilon$. Un tel modèle est essentiellement *inutilisable* en situation réelle, ou tout du moins très délicat à exploiter.

Remarque II.2.4. (Sensibilité vis à vis des paramètres)
Dans la continuité de la remarque précédente, mais de façon plus positive, lorsque l'on est bien dans le cadre du théorème des fonctions implicites, la différentielle de Ψ précise la dépendance de la solution vis-à-vis des paramètres. On écrira en général simplement $\Psi(x) = y(x)$, de telle sorte que la matrice jacobienne de Ψ contient les dérivées partielles $\partial y_i / \partial x_j$ (où y est maintenant considéré comme fonction de x), c'est-à-dire l'expression de la dépendance de la i-ième composante de y vis-à-vis du paramètre x_j (on parlera de *sensibilité*). Les paramètres les plus significatifs pour une composante y_i correspondent aux fortes valeurs de la dérivée, il sera important de bien en maitriser la valeur, alors que les paramètres pour lesquels $\partial y_i / \partial x_j$ est petit pour tous les i peuvent être a priori estimés avec une précision médiocre, sans que cela n'influe de façon préjudiciable sur la solution.

9. On parle parfois de stabilité au sens de Hadamard, même si cette appellation fait plutôt référence à une dépendance *continue* de la solution par rapport aux données.

Remarque II.2.5. (Identification de paramètres)
Il est courant de s'intéresser au *problème inverse*, qui peut se formuler comme suit. On fait confiance au modèle $f(x, y) = 0$, on dispose de mesures pour la solution y, et l'on cherche à *estimer les paramètres* correspondant à la solution mesurée. On est donc amené à considérer le problème dans l'autre sens, c'est-à- dire que l'on cherche à estimer x à partir de la connaissance de y. On ne peut espérer retrouver exactement les paramètres que si leur nombre est égal à celui des inconnues $n = m$. On notera que, pour ce nouveau problème, les paramètres les plus difficiles à identifier précisément sont ceux qui ont peu d'influence sur la solution, qui étaient considérés pour le problème direct comme peu significatifs, dont la connaissance précise n'était pas nécessaire. C'est précisément leur peu d'influence sur la solution qui rend difficile leur estimation à partir de la connaissance de cette solution [10].

Exercice II.2.1. (Dépendance d'une racine simple d'un polynôme réel vis-à-vis des coefficients)
A toute collection de coefficients $c = (c_0, c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ on associe le polynôme

$$P_c(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_N X^N.$$

On se donne $\tilde{c}$ et $\tilde{z}$ tels que $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ est racine *simple* du polynôme $P_{\tilde{c}}$. Montrer qu'il existe une fonction différentiable Ψ des coefficients, définie dans un voisinage U de $\tilde{c}$, telle que $\tilde{z} = \Psi(\tilde{c})$ et telle que, pour tout $c \in U$, $z = \Psi(c)$ est racine du polynôme P_c.

Exprimer la différentielle de Ψ.

Définition II.2.6. Soit f une application d'un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ dans un ouvert $V = f(U)$ dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f est un C^1 – difféomorphisme de U vers V si f est bijective, et si f et sa réciproque f^{-1} sont continûment différentiables.

Proposition II.2.7. On se place dans les hypothèses de la définition précédente. La différentielle de f est inversible en tout point de U, et son inverse est la différentielle de l'application réciproque f^{-1} : pour tout $x \in U$, $y = f(x) \in V$,

$$df^{-1}(y) = (df(x))^{-1}.$$

Démonstration. On a, pour tout $y \in V$,

$$f \circ f^{-1}(y) = y.$$

La règle de différentiation en chaîne implique donc (avec $x = f^{-1}(y)$)

$$df(x) \circ df^{-1}(y) = \mathrm{Id},$$

qui conclut la preuve. □

Théorème II.2.8. (Inversion locale)
Soit f une application continûment différentiable d'un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose

10. Nous nous en tenons dans cette remarque à une vision un peu simpliste des choses, comme s'il était possible de séparer à la fois les paramètres et les composantes de la solution (ça n'est possible que si la différentielle est diagonale). En tout généralité, les études de sensibilité évoquées dans ces remarques passent par une étude plus complète de la matrice dans sa globalité, qui passe en particulier par une analyse spectrale.

que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in W$. Alors f est un C^1 – difféomorphisme local : pour tout $x_0 \in W$, il existe un voisinage ouvert $U \subset W$ de x_0 et un voisinage ouvert V de $y_0 = f(x_0)$ tel que $f_{|U}$ soit un C^1 – difféomorphisme de U vers V.

Démonstration. On considère l'application (noter que l'on écrit (y,x) du fait qu'il va s'agir, contrairement à l'usage, d'exprimer x *en fonction de* y) :

$$g \ : (y,x) \in \mathbb{R}^n \times W \longmapsto g(y,x) = f(x) - y.$$

Cette application est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times W$, de différentielle partielle par rapport à x

$$\partial_x g(y,x) = df(x).$$

Cette différentielle est inversible sur W par hypothèse. Soit $x_0 \in W$, et $y_0 = f(x_0)$, d'où $g(y_0, x_0) = 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de y_0, un voisinage $\tilde{U}$ de x_0, et Ψ une application continûment différentiable de V dans $\tilde{U}$, tels que

$$(y,x) \in V \times \tilde{U} \ , \ g(y,x) = 0, \ \text{ i.e. } \ y = f(x) \Longleftrightarrow x = \Psi(y).$$

L'application Ψ est donc la réciproque de f. Il reste à préciser les voisinages ouverts de x_0 et y_0 qui sont en bijection. Il faut prendre garde une petite difficulté : Ψ n'est pas nécessairement surjective de V vers $\tilde{U}$, on doit donc prendre l'intersection avec $\Psi(V)$. On définit donc $U = \tilde{U} \cap \Psi(V)$. Comme, pour tout $y \in V$, l'équation $y = f(x)$ n'a qu'une solution en $x \in \tilde{U}$, cet ensemble s'écrit aussi $U = \tilde{U} \cap f^{-1}(V)$. Il s'agit bien d'un ouvert par continuité de f, et il est en bijection avec V par construction. On a donc montré que f est bijective entre U et V, d'inverse $f^{-1} = \Psi$ continûment différentiable. $\square$

II.3 Exercices

Exercice II.3.1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2).$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est continûment différentiable sur

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x_1 \neq x_2\right\},$$

et préciser sa différentielle et son gradient sur chaque composante de cet ensemble.

c) Montrer que f n'est pas différentiable sur $\{(x,x) \, , \ x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice II.3.2. (••) Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n\times n})$ une matrice carrée.

a) Montrer que la fonction

$$f \ : \ x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax \,|\, x\rangle - \langle b \,|\, x\rangle \in \mathbb{R} \, , \ b \in \mathbb{R}^n,$$

est différentiable, et préciser son gradient.

b) Quelle forme prend ce gradient si A est symétrique ?

c) Quels sont les points stationnaires de f ?

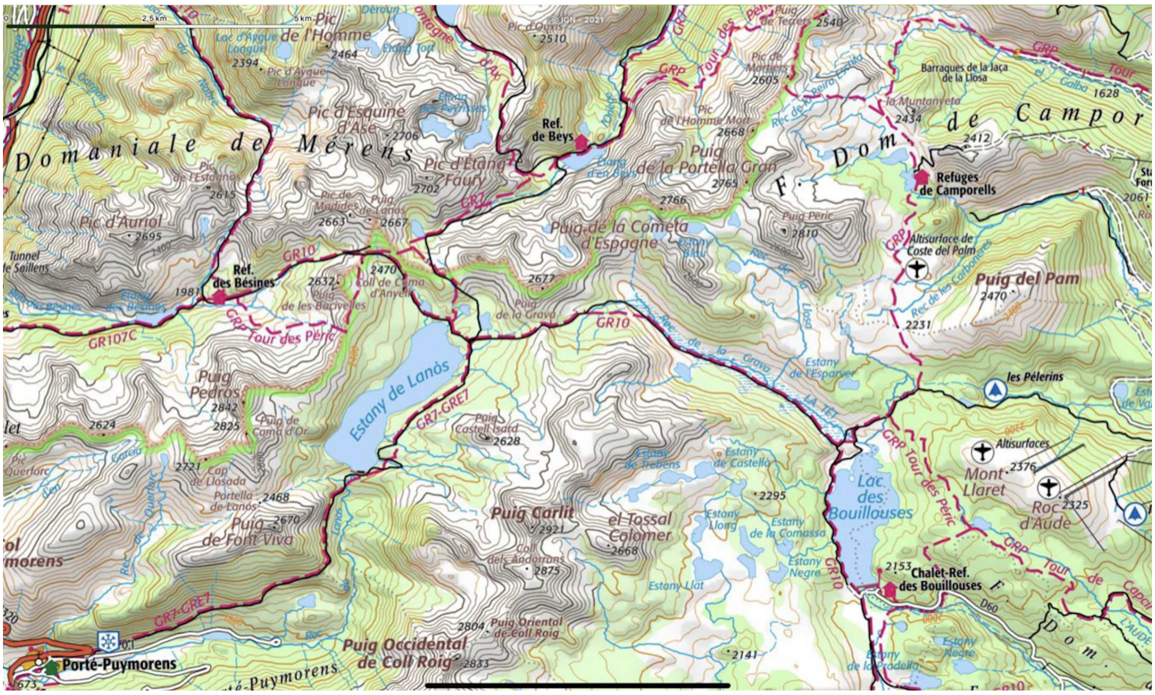

FIGURE II.3.1 – Isovaleurs de l'altitude sur une zone des Pyrénées

Exercice II.3.3. (Vecteur gaussien)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, que l'on suppose *symétrique définie positive*, c'est-à-dire que $A^T = A$, et $\langle Ax \,|\, x\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$. On s'intéresse à la fonction qui représente (à constante de normalisation près) la loi d'un vecteur gaussien centré en a dans $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle A\cdot(x-a) \,|\, x-a\rangle\right).$$

a) Montrer que f est différentiable, et donner l'expression de son gradient.

b) Quels sont les points stationnaires de f ?

Exercice II.3.4. (••) On se place sur $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne. Pour un ensemble donné du plan $A \subset \mathbb{R}^2$, on considère la fonction définie par $f(x) = d(x, A)$ (distance du point x à l'ensemble A).

a) Préciser les zones de différentiabilité de f lorsque A est (i) un singleton, (ii) une paire de points distincts, (ii)un cercle, (iii) un disque, (iv) un rectangle, (v) une forme “quelconque”...

b)($\star$) On associe à chaque grande ville de France (pour fixer les idées on pourra imaginer les 20 plus grandes villes par exemple) un point (son barycentre), et l'on appelle A l'ensemble de ces points. Que peut on dire des points de non différentiabilité de la fonction f définie ci-dessus ?

Exercice II.3.5. La figure II.3.1 représente les isovaleurs de la fonction altitude pour une certaine zone géographique, que l'on peut considérer comme une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

a) Localiser des points critiques de cette fonction f (c'est à dire le point en lesquels le gradient s'annule), et décrire la forme de la fonction f au voisinage de ces points. Proposer des fonctions polynomiales qui vous paraissent de nature à reproduire la forme de la fonction au voisinage du point critique, dans les différents cas.

b) ($\star$) Comment caractériser les zones correspondant aux lacs ?

c) ($\star$) Comment peut-on caractériser le bassin d'attraction d'un lac, c'est à dire l'ensemble des x tels qu'une goutte d'eau tombée en x va alimenter le lac en question ?

d) ($\star$) Le nombre de lacs peut il augmenter ou diminuer en fonction de la pluviométrie ?

Exercice II.3.6. (Taux de déformation (••))
On considère un champ de vitesse (on pourra penser à la vitesse instantanée d'un fluide)

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)).$$

On suppose u différentiable en un point x d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que l'on peut écrire le champ de vitesse au point $x + h$ voisin de x de la façon suivante

$$u(x + h) = u(x) + \omega \wedge h + D \cdot h + o(h), \tag{II.3.1}$$

où ω est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

b) Justifier l'appellation *matrice des taux de déformation* utilisée pour désigner la matrice D.

c)($\star$) On dit qu'un écoulement est incompressible si $\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0$ (i.e. si ce qu'on appelle la *divergence* de u est nulle). Montrer que si l'écoulement est incompressible sur U, alors la somme des valeurs propres de la matrice D associée à tout point de U est égale à 0, et interprétez physiquement cette propriété.

d) Donner un exemple de champ de vitesses u non trivial défini sur $\mathbb{R}$ tel qu'en tout point, la décomposition (II.3.1) soit telle que $D = 0$. (On pourra pour simplifier chercher un champ qui soit invariant par translation dans la direction verticale, de façon à se ramener à un champ bidimensionnel).

e) Donner un exemple de champ de vitesses u non trivial défini sur $\mathbb{R}$ tel qu'en tout point, la décomposition (II.3.1) soit telle que $\omega = 0$ (champ irrotationnel).

f) ($\star$) Que peut-on dire, au vu de ce qui précède, d'un champ qui dérive d'un potentiel, c'est-à-dire un champ qui s'écrit $u = -\nabla\Phi$, où Φ est une fonction scalaire suffisamment régulière pour que u soit différentiable ?

Exercice II.3.7. (Potentiel d'interaction (• • •))
On considère la fonction $D(\,\cdot\,)$ qui à $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (attention, q_1 et q_2 désignent ici des points de $\mathbb{R}^3$) associe la distance entre les points q_1 et q_2 de $\mathbb{R}^3$:

$$D(q) = D(q_1, q_2) = \|q_2 - q_1\|\,.$$

a) Montrer que $D(\,\cdot\,)$ est différentiable sur l'ouvert

$$U = \left\{\; q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^6\,,\;\; q_1 \neq q_2 \right\},$$

et exprimer son gradient (on pourra exprimer les gradients partiels ∇_{q_1} et ∇_{q_2}) en fonction du vecteur unitaire $e_{12} = (q_2 - q_1)/\|q_2 - q_1\|$.

b) On introduit un potentiel d'interaction sur le système de deux particules localisées en q_1 et q_2 sous la forme $V = V(q) = V(q_1, q_2) = \varphi(D(q_1, q_2))$, où φ est une fonction continûment dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que V est différentiable sur U, et écrire son gradient.

c) Préciser les gradients partiels $\nabla_{q_1}V$ et $\nabla_{q_2}V$ si l'on prend pour φ le potentiel d'interaction gravitationnelle défini par $\varphi(D) = -1/D$.

d) On se replace dans le cas général d'un potentiel φ quelconque, et l'on considère maintenant un système de N particules dans $\mathbb{R}^3$. On définit un potentiel d'interaction global de la façon suivante

$$V(q) = V(q_1, q_2, \ldots, q_N) = \sum_{1\le i<j\le N} \varphi(D(q_i, q_j)).$$

On s'intéresse au système résultant du principe fondamental de la dynamique, sous l'hypothèse de forces dérivant d'un potentiel (on prend des masses unitaires), c'est-à- dire

$$\frac{d^2 q}{dt} = -\nabla V(q). \tag{II.3.2}$$

Écrire l'équation qui résulte de ce principe pour chacune des particules, qui s'écrit de façon abstraite

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\nabla_{q_i} V(q).$$

e)($\star$) On se place dans le cadre des notations de la question précédente. On suppose que l'on connait une solution $t \in [0, T[\mapsto q(t) \in U$ de l'équation d'évolution (II.3.2). Montrer que l'on a conservation de l'énergie totale, c'est à dire que la quantité

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \left\| \frac{dq_i}{dt}(t) \right\|^2 + V(q(t))$$

est constante sur $[0, T[$.
Dans le cas du potentiel gravitationnel $\varphi(D) = -1/D$, peut-on en déduire que les vitesses sont majorées sur $[0, T[$? Même question pour le cas du potentiel coulombien entre charges identiques $\varphi(D) = 1/D$.

Exercice II.3.8. Soit f une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y)\,,\ f(x, y) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, et que l'ensemble des (x_0, y_0) au voisinage desquels on peut appliquer le théorème des fonctions implicites est un ouvert du fermé F (pour la topologie induite, dont les ouverts sont les intersections d'ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avec F).

Exercice II.3.9. Identifier dans les cas suivantes l'ensemble F des solutions de $f(x, y) = 0$, ainsi que l'ensemble des points (x, y) au voisinage desquels on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Préciser, pour les points en lesquels les hypothèses ne sont pas vérifiée, si intervertir les rôles de x et y permet de les vérifier.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$.

b) $f(x,y) = y - x^2$.

c) $f(x,y) = (y - x^3)y$.

Exercice II.3.10. (Dépendance d'une racine simple d'un polynôme complexe vis-à-vis des coefficients (version complexe de l'exercice II.2.1))
À toute collection de coefficients $c = (c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ on associe le polynôme

$$P_c(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_N X^N.$$

On se donne $\tilde{c}$ et $\tilde{z}$ tels que $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ est racine *simple* du polynôme $P_{\tilde{c}}$. Montrer qu'il existe une fonction différentiable Ψ des coefficients, définie dans un voisinage U de $\tilde{c}$, telle que $\tilde{z} = \Psi(\tilde{c})$ et telle que, pour tout $c \in U$, $z = \Psi(c)$ est racine du polynôme P_c.

Exercice II.3.11. On se propose d'étudier un modèle simplifié de bilan radiatif de la terre, basé sur l'écriture d'un équilibre entre l'énergie solaire reçue par la terre et l'énergie ré-émise par rayonnement, supposé suivre la loi de Stefan-Boltzman. On note F le flux de rayonnement solaire reçu en moyenne par unité de surface sur terre, $F_0 \approx 341$ Wm^{-2}. On considère qu'une fraction $A \in [0,1]$ de cette énergie est immédiatement réfléchie, où A_0, appelé *albedo*, est autour de 0.3. L'énergie émise en moyenne par unité de surface par la terre s'écrit σT^4, où T est la température moyenne (exprimée en Kelvin), et $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}. On considère qu'une fraction de cette énergie n'est pas rayonnée vers l'espace, du fait de l'effet de serre. On note $S \in [0,1]$ la fraction d'énergie qui n'est pas évacuée vers l'espace. Ce paramètre est estimé à $S = 0.4$. En supposant que l'on est à l'équilibre, on écrit le bilan entre les énergies reçue et émises :

$$\sigma T^4(1 - S) = (1 - A)F.$$

a) Estimer la température moyenne T_0 à la surface de la terre associée aux valeurs de référence S_0, A_0 et F_0 selon ce modèle, et estimer la valeur qu'aurait cette température s'il n'y avait pas d'effet de serre (en supposant que le modèle reste valide[11]).

b) Montrer[12] que, au voisinage du point d'équilibre considéré, on peut exprimer la température comme une fonction continûment différentiable des paramètres S, A, et F.

Exprimer la différentielle de cette fonction, et en déduire le coefficient de proportionnalité entre une variation de S autour de la valeur S_0 et la variation en degrés de la température. Quelle variation de S induit une augmentation de la température de 2 °C ?

Si l'on mesure une petite variation de température de δT autour de T_0, que peut-on dire (toujours dans l'hypothèse où l'on accorde une foi absolue au modèle) des variations δS, δA, et δF qui ont pu induire cette variation de température ?

c) On estime que le CO_2 est responsable de 60 % de l'effet de serre dû aux Gaz à Effets de Serre (GES), eux-même responsables de 30 % de l'effet de serre global. Si l'on admet que

11. Vue la baisse de température importante induite par cette suppression virtuelle de l'effet de serre, une grande part le l'eau liquide (peu réfléchissante) à la surface du globe se transformerait en glace (fort pouvoir réfléchissant), ce qui entrainerait une augmentation significative de l'albedo A, qui réduirait encore la température d'équilibre.

12. Même si cela n'est pas à strictement parler nécessaire ici, on s'efforcera de *jouer le jeu* en utilisant le théorème des fonctions implicites.

l'effet de serre dû au CO_2 est proportionnel à sa concentration dans l'atmosphère, estimer l'augmentation du taux de CO_2 qui conduirait, selon ce modèle à une augmentation de la température de 2 °C.

d) On considère que l'albedo dépend lui même de la température : une augmentation de la température est susceptible d'induire une fonte des glaces, qui diminue la part de surface fortement réfléchissante, d'où une diminution de l'albedo. On écrit donc, pour encoder ce phénomène,

$$A = A_0 - \beta(T - T_0),$$

avec $\beta > 0$ (exprimé en K^{-1}). On considérera par ailleurs le terme F de flux radiatif fixé à sa valeur de référence F_0. Faire l'étude de ce nouveau modèle au voisinage du point d'équilibre de référence (S_0, T_0).

e) $(\star)$ L'effet de serre, qui dépend par exemple de la masse nuageuse présente en moyenne dans l'atmosphère, dépend lui-même de la température. Explorer la manière dont cette dépendance est susceptible d'affecter les considérations précédentes (on pourra écrire S comme la somme d'un terme dépendant du CO_2, et d'autres termes susceptibles de dépendre directement de la température).