

## III.5 Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

Nous décrivons dans cette section une procédure permettant de définir la notion d'intégrale pour une classe très générale de fonctions.

### III.5.1 Fonctions mesurables

Rappelons qu'une application d'un ensemble mesurable  $(X, \mathcal{A})$  dans  $(X', \mathcal{A}')$  est dite mesurable si l'image réciproque par  $f$  de tout élément de  $\mathcal{A}'$  est dans  $\mathcal{A}$ .

Dans le cas où l'espace d'arrivée est  $\mathbb{R}$ , on le considèrera par défaut muni de la tribu des boréliens, engendrée par les intervalles de type  $] -\infty, b]$  (voir proposition III.2.6, page 60).

Dans le cas où l'espace d'arrivée est  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ , on le considèrera aussi, sans qu'il soit besoin de le préciser, muni de sa tribu borélienne, engendrée par les  $[-\infty, b]$  (voir proposition III.2.7, page 60).

On parlera donc simplement de fonction mesurable de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , en gardant en tête que ces espaces sont munis de leurs tribus boréliennes. Si l'espace de départ est lui-même  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ), on parle de fonction mesurable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , selon la même convention.

Le caractère mesurable de telles fonctions se caractérise de façon élémentaire, comme l'exprime la proposition suivante.

**Proposition III.5.1. (•)** : Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable, et  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est mesurable si et seulement si, pour tout  $b$  réel

$$f^{-1}(]-\infty, b]) \in \mathcal{A}.$$

Pour une fonction à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , la condition est la même, pour les intervalles du type  $[-\infty, b]$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la proposition III.2.11, page 62, qui donne un critère simple de mesurabilité d'une application : si la tribu sur l'espace d'arrivée est engendrée par une certaine famille, il suffit de vérifier que l'image réciproque de chaque élément de cette famille est dans la tribu sur l'espace de départ.  $\square$

**Proposition III.5.2.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, et  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables de  $X$  dans  $[-\infty, +\infty]$ . On a alors

- a) Les fonctions  $\sup f_n$  et  $\inf f_n$  sont mesurables.
- b) Les fonctions  $\limsup f_n$  et  $\liminf f_n$  (voir définition IV.1.23) sont mesurables.

*Démonstration.* Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables. On définit  $f_{\sup} = \sup(f_n)$  et  $f_{\inf} = \inf(f_n)$ . On a, pour tout  $b$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f_{\sup}^{-1}([-\infty, b]) = \bigcup_n f_n^{-1}([-\infty, b]), \quad f_{\inf}^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty, b]),$$

qui sont tous deux mesurables (stabilité par union et intersection de la tribu  $\mathcal{A}$ ).

Soit maintenant  $f_{\limsup}$  définie par

$$f_{\limsup}(x) = \limsup f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} f_k(x).$$

On a

$$f_{\limsup}^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} f_k^{-1}([-\infty, b]),$$

qui est dans  $\mathcal{A}$ . Soit enfin  $f_{\liminf}$  définie par

$$f_{\liminf}(x) = \liminf f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

On a

$$f_{\liminf}^{-1}([-\infty, b]) = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} f_k^{-1}([-\infty, b]),$$

qui termine la preuve.  $\square$

**Proposition III.5.3.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Pour tous  $f, g$  mesurables, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f$  et  $f + g$  sont mesurables.

*Démonstration.* Si  $\lambda = 0$ ,  $(\alpha f)^{-1}([-\infty, c])$  est soit vide, soit  $X$  tout entier. Pour  $\alpha > 0$

$$(\alpha f)^{-1}([-\infty, c]) = \{x, f(x) \leq c/\alpha\},$$

qui est dans  $\mathcal{A}$ . Si  $\alpha < 0$ , on a

$$\begin{aligned} (\alpha f)^{-1}([-\infty, c]) &= \{x, \alpha f(x) \leq c\} = \{f(x) \geq c/\alpha\} = \\ &= \{x, f(x) < c/\alpha\}^c = \left( \bigcup_n \{x, f(x) \leq c/\alpha - 1/2^n\} \right)^c \end{aligned}$$

qui est bien dans  $\mathcal{A}$  par mesurabilité de  $f$ .

Considérons maintenant  $f$  et  $g$  mesurables. Montrons que  $f(x) + g(x) < c$  si et seulement s'il existe un nombre rationnel  $q$  tel que

$$f(x) + q < c \text{ et } g(x) < q.$$

La condition suffisante est immédiate. Pour la condition nécessaire, on choisit un rationnel  $q$  tel que  $g(x) < q < c - f(x)$  (il existe par densité des rationnels dans  $\mathbb{R}$ ). Si l'on note  $(q_n)$  une énumération des rationnels, on a

$$\{x, f(x) + g(x) \leq c\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \{x, f(x) + g(x) < c + 1/2^n\}.$$

Chacun des ensembles ci-dessus est du type

$$\{x, f(x) + g(x) < c'\} = \bigcup_n \{x, f(x) + q_n < c \text{ et } g(x) < q_n\}$$

qui est mesurable comme union dénombrable de parties mesurables. L'ensemble  $\{x, f(x) + g(x) \leq c\}$  est donc mesurable comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables.  $\square$

**Proposition III.5.4.** (•) Soit un espace topologique, et  $\mathcal{B}$  sa tribu des boréliens (engendrée par les ouverts, ou de façon équivalente par les fermés). Toute fonction  $f$  continue de  $(X, \mathcal{B})$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est mesurable.

*Démonstration.* Pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , l'intervalle  $[-\infty, b]$  étant un fermé, son image réciproque par  $f$  est un fermé, il est donc dans  $\mathcal{B}$ .  $\square$

### III.5.2 Intégrale de fonctions étagées

**Définition III.5.5.** (Fonction simple, fonction étagée (•))

Soit  $X$  un ensemble. On appelle fonction *simple* une application de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  qui prend un nombre fini de valeurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Si  $(X, \mathcal{A})$  est un espace mesurable, et que l'application simple  $f$  est mesurable, c'est-à-dire  $f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$  pour tout  $i$ , on parle de fonction *étagée*.

On note  $\mathcal{E}(X)$  ou simplement  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des fonctions étagées sur  $X$ , et  $\mathcal{E}^+$  le sous-ensemble des fonctions étagées à valeurs positives.

**Définition III.5.6.** (Intégrale d'une fonction étagée positive (•))

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, c'est-à-dire un ensemble muni d'une tribu  $\mathcal{A}$  (définition III.2.12).

Soit  $f$  une fonction étagée :

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad (\text{III.5.1})$$

où les  $A_i$  sont mesurables, disjoints, et les  $\alpha_i$  sont des réels positifs. On définit<sup>9</sup> l'intégrale de  $f$  sur  $X$  comme la quantité

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i). \quad (\text{III.5.2})$$

Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on définit de la même manière

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i \cap A).$$

---

9. Si l'on n'impose pas  $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ , l'écriture (III.5.1) de  $f$  n'est pas unique. On peut néanmoins vérifier que la quantité définie par (III.5.2) ne dépend pas de l'écriture choisie. En effet, si l'on considère une autre écriture

$$\sum_{i=1}^{N'} \alpha'_i \mu(A'_i),$$

on a, par additivité de la mesure, et du fait que  $\alpha_i = \alpha'_j$  sur  $A_i \cap A'_j$ ,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N'} \alpha_i \mu(A_i \cap A'_j) = \sum_{j=1}^{N'} \sum_{i=1}^N \alpha'_i \mu(A_i \cap A'_j) = \sum_{j=1}^{N'} \alpha'_j \mu(A'_j).$$

**Remarque III.5.7.** On peut illustrer cette approche dans le contexte des images telles que celles qui sont stockées sur ordinateur. On peut voir une telle image (disons en noir et blanc pour simplifier) comme un tableau à  $N \times N$  nombres dans l'intervalle  $[0, 1]$ , qui correspondent aux niveaux de gris. Ces niveaux de gris sont en général stockés en format 8 bits, ce qui signifie que chaque niveau peut prendre l'une des 256 valeurs de la subdivision uniforme de  $[0, 1]$ . Si l'on cherche à calculer la somme des niveaux de gris sur l'ensemble de l'image, l'approche usuelle (qui correspond à la philosophie de l'intégrale de Riemann) consiste à sommer les valeurs des pixels successifs :

$$S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}.$$

L'approche suivie ici pour définir l'intégrale correspondrait à la démarche suivante, structurée par l'espace d'arrivée (les niveaux de gris), et pas l'espace de départ (les pixels) : pour chaque valeur  $g_k$  de niveau de gris, on considère l'ensemble  $A_k$  des pixels qui réalisent cette valeur. La somme est alors estimée selon la formule

$$S = \sum_{k=0}^{255} g_k \times \text{Card}(A_k).$$

Cette approche repose implicitement sur l'*histogramme* de l'image, qui est la représentation de la distribution des niveaux de gris : en abscisse les 256 niveaux de gris, et en ordonnée les cardinaux des ensembles  $A_k$  correspondants.

**Proposition III.5.8.** (•) Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{E}^+$ , et  $\alpha \geq 0$ . On a

$$\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu, \quad \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu,$$

et

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X \quad \implies \quad \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

**Proposition III.5.9.** (•) Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}^+$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{E}^+$  (fonctions étagées positives). On suppose que  $(f_n)$  est croissante, c'est-à-dire que  $(f_n(x))$  est une suite croissante pour tout  $x$  de  $X$ , et que  $f_n$  converge simplement vers  $f$ , c'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

L'intégrale de  $f$  est alors la limite des intégrales des  $f_n$  :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Démonstration.* On a, d'après la proposition III.5.8,  $\int f_n \leq \int f$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite des intégrales, croissante, converge donc vers une valeur  $\lim \int f_n \leq \int f$ . Montrons que cette inégalité est en fait une égalité. On sait que  $f$  peut s'écrire

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i},$$

où les  $A_i$  sont des éléments disjoints de  $\mathcal{A}$ , et les  $a_i$  des réels strictement positifs. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $i = 1, \dots, N$ , on introduit

$$A_i^n = \{x \in A_i, f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)a_i\} \in \mathcal{A}.$$

Pour tout  $i$ , la suite des  $(A_i^n)$  est croissante d'après la croissance de  $f_n$ , et l'union des  $A_i^n$  est égale à  $A_i$  par convergence simple de  $f_n$  vers  $f$ . On a donc, d'après la proposition III.3.5, page 66,

$$\lim_n \mu(A_i^n) = \mu(A_i).$$

On considère maintenant la fonction  $g_n$  définie par

$$g_n = \sum_{i=1}^N (1 - \varepsilon)a_i 1_{A_i^n}.$$

C'est une fonction étagée, qui vérifie  $g_n \leq f_n \leq f$ , et la suite  $(g_n)$  est croissante. La suite réelle  $(\int g_n)$  converge donc, et l'on a

$$\lim_n \int f_n \geq \lim_n \int g_n = \lim_n \left( \sum_{i=1}^N (1 - \varepsilon)a_i \mu(A_i^n) \right) = (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i) = (1 - \varepsilon) \int f.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien  $\lim_n \int f_n \geq \int f$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

### III.5.3 Intégrale de fonctions mesurables

Cette définition de l'intégrale pour les fonctions étagées peut-être étendue à une fonction  $f$  positive plus générale en considérant le supremum de l'ensemble des valeurs prises par les intégrales des fonctions étagées qui sont inférieures  $f$  en tout point, comme le précise la définition suivante.

**Définition III.5.10.** (Intégrale d'une fonction mesurable positive  $(\bullet)$ )

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, et  $f$  une fonction mesurable de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ . On définit l'intégrale de  $f$  sur  $X$  comme la quantité

$$\int_X f(x) d\mu = \sup_{g \in \mathcal{E}^+, g \leq f} \left( \int_X g(x) d\mu \right) \in [0, +\infty].$$

On définit de la même manière l'intégrale de  $f$  sur toute partie  $A$  mesurable.

**Exercice III.5.1.** Montrer, en utilisant la définition précédente, que l'intégrale de la fonction indicatrice de l'ensemble des rationnels dans  $X = ]0, 1[$  est d'intégrale nulle sur  $X$ .

La définition de l'intégrale assure l'existence d'une suite maximisante dans  $\mathcal{E}^+$ . La proposition suivante, illustrée par la figure III.5.1 dans le cas où  $X$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , assure que cette suite peut être choisie croissante.

**Proposition III.5.11.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, et  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , mesurable et à valeurs positives. Il existe une suite  $h_n$  dans  $\mathcal{E}^+$ , croissante, telle que

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n d\mu.$$

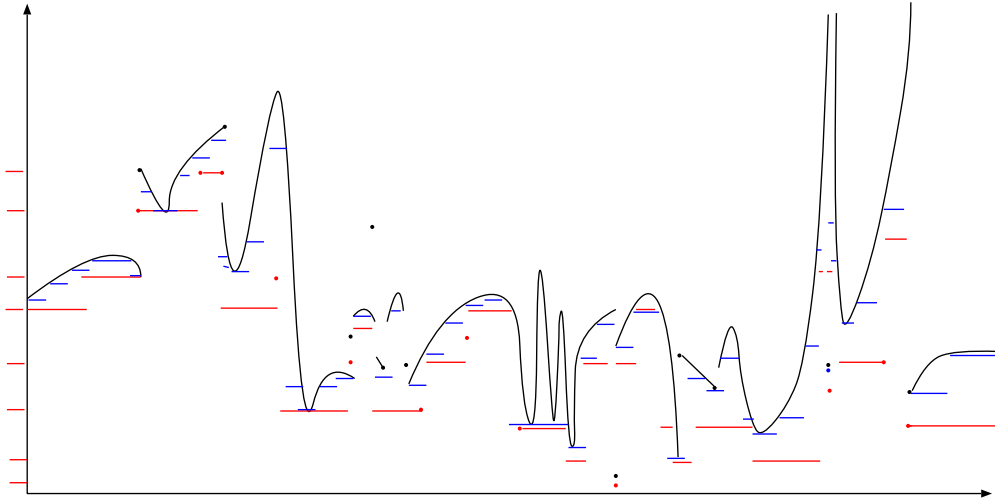


FIGURE III.5.1 – Approximation inférieure d’une fonction  $f$  (en noir) par une suite croissante de fonctions étagées. Deux termes de cette suite sont représentés (la courbe rouge correspond au plus petit des indices).

*Démonstration.* La définition III.5.10 assure l’existence d’une suite maximisante, i.e. d’une suite  $(g_n)$  de fonctions de  $\mathcal{E}^+$  qui sont inférieures à  $f$ , et telle que la suite des intégrales converge vers celle de  $f$ . On définit

$$h_n = \max(g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Chaque  $h_n$  est inférieure à  $f$ , donc  $\int h_n \leq \int f$ , supérieur à  $g_n$ , donc  $\int g_n \leq \int h_n$ , on a donc convergence de  $\int h_n$  vers  $\int f$ , et la suite des  $h_n$  est croissante par construction.  $\square$

L’intégrale définie ci-dessus ne “voit” pas les ensembles négligeables :

**Proposition III.5.12.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  et  $g$  des fonctions mesurables de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ . On suppose que  $f(x) = g(x)$  presque partout. Alors  $\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$ .

*Démonstration.* On introduit  $A \in \mathcal{A}$  sur lequel  $f$  et  $g$  s’identifient, tel que  $\mu(A^c) = 0$ . Toute fonction de  $h \in \mathcal{E}^+$ , inférieure à  $f$ , s’écrit

$$h = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i \cap A} + \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i \cap A^c}.$$

D’après les hypothèses, le premier terme de cette décomposition est une fonction  $\tilde{h}$  de  $\mathcal{E}^+$  inférieure à  $g$ . On a

$$\int h = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap A^c).$$

Le second terme est nul car  $\mu(A_i \cap A^c) \leq \mu(A^c) = 0$  pour tout  $i$ . Le premier terme est l’intégrale de la fonction étagée que nous avons appelée  $\tilde{h} \in \mathcal{E}^+$  ci-dessus, qui est inférieure à  $g$ . Cette quantité est donc inférieure à  $\int g \in [0, +\infty]$ . On a donc montré  $\int f \leq \int g$ . Les rôles

de  $f$  et  $g$  étant interchangeables, on montre de la même manière  $\int g \leq \int f$ , d'où l'identité des valeurs des deux intégrales.  $\square$

La proposition suivante, qui étend la proposition III.5.9 à une fonction mesurable quelconque (non nécessairement étagée), peut être vue comme une version préliminaire du théorème de convergence monotone, fondamental, qui sera énoncé plus loin.

**Proposition III.5.13. (••)** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  une fonction mesurable de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{E}^+$  (fonctions étagées positives). On suppose que  $(f_n)$  est croissante, c'est-à-dire que  $(f_n(x))$  est une suite croissante pour tout  $x$  de  $X$ , et que  $f_n$  converge simplement vers  $f$ , c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x.$$

L'intégrale de  $f$  est alors la limite des intégrales des  $f_n$  :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Démonstration.* On a de façon évidente

$$\int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int_X f d\mu,$$

d'où l'on déduit que la limite de  $\int f_n$  existe, et vérifie  $\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \in [0, +\infty]$ . Établissons maintenant l'inégalité inverse. L'intégrale de  $f$  étant (définition III.5.10) le supremum des intégrales  $\int g$ , pour  $g$  décrivant l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{E}^+$  inférieures à  $f$ , il suffit de montrer que pour toute fonction  $g$  de ce type, on a  $\int g \leq \lim \int f_n$ . Soit  $g$  une telle fonction de  $\mathcal{E}^+$ , inférieure à  $f$ . On considère la fonction  $g_n = \min(g, f_n)$ . La suite  $(g_n)$  est croissante car  $(f_n)$  l'est, et  $g_n$  converge simplement vers  $g$ . On a donc, d'après la proposition III.5.9,

$$\int g d\mu = \lim_n \int g_n.$$

Or on a  $g_n \leq f_n$  pour tout  $n$ , d'où l'on déduit que le limite ci-dessus est majorée par  $\int f_n$ , d'où finalement

$$\int g d\mu \leq \lim_n \int f_n,$$

qui conclut la preuve.  $\square$

**Proposition III.5.14.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ , et  $\alpha \geq 0$ . On a

$$\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu, \quad \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu,$$

et

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X \quad \implies \quad \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

### Intégrabilité des fonctions

**Définition III.5.15.** (Partie positive / négative d'une fonction (•))

Soit  $f$  une fonction d'un ensemble  $X$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . On appelle *partie positive* de  $f$ , et l'on note  $f^+$ , la fonction qui à  $x$  associe  $f^+(x) = \max(f(x), 0) = (f(x) + |f(x)|)/2$ . La partie négative de  $f$ , notée  $f^-$ , est la partie positive de l'opposé de  $f$ , de telle sorte que l'on a

$$f = f^+ - f^-.$$

**Définition III.5.16.** (Intégrabilité (•))

Soit  $f$  une fonction mesurable de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $f$  est intégrable si  $\int f^+$  et  $\int f^-$  sont finies. On définit alors l'intégrale de  $f$  comme

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Si une seule des deux quantités  $\int f^+$  et  $\int f^-$  est finie, on dit que l'intégrale existe, et prend la valeur  $-\infty$  si  $\int f^+$  est finie, et  $+\infty$  dans le cas contraire.

Si l'espace de départ est  $\mathbb{R}^d$ , on dira simplement que  $f$  est intégrable au sens de Lebesgue.

**Proposition III.5.17.** Soit  $f$  une fonction mesurable de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , et  $A \subset \mathcal{A}$ . Si  $f$  est intégrable sur  $X$ , alors  $f$  est intégrable sur  $A$  et  $A^c$ , et l'on a

$$\int_X f = \int_A f + \int_{A^c} f.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la définition de l'intégrale d'une fonction positive (définition III.5.10).  $\square$

**Proposition III.5.18.** Soit  $f$  une fonction mesurable de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $|f|$  l'est, et l'on a

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

*Démonstration.* Si  $f$  est intégrable, alors les intégrales de  $f^+$  et  $f^-$  sont finies, l'intégrale de  $f^+ + f^- = |f|$  est donc finie. Inversement, l'intégrabilité de  $|f| = f^+ + f^-$  assure l'intégrabilité de  $f^+$  et  $f^-$ . On a

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

qui est égal à  $\int |f| d\mu$ .  $\square$

**Proposition III.5.19.** (•) Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables de  $X$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont égales presque partout, alors les fonctions sont indiscernables du point de vue de l'intégration, c'est-à-dire que  $f$  est intégrable si et seulement si  $g$  l'est, et alors  $\int_A f = \int_A g$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Si  $f$  et  $g$  s'identifient presque partout, il en est de même de leurs parties positives et négatives. La propriété est donc conséquence directe de la proposition III.5.12.  $\square$



### III.5.4 Théorèmes fondamentaux

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de convergence monotone, qui constitue l'aboutissement des propositions III.5.9 et III.5.13. Ce théorème s'appuie une propriété d'approximation des fonctions mesurables positives par des fonctions étagée, que nous énonçons sous forme d'un lemme :

**Lemme III.5.20.** (Approximation d'une fonction mesurable par des fonctions étagées (••)) Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, et  $f$  une fonction mesurable de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ . Il existe une suite  $(g_n)$  de fonctions de  $\mathcal{E}^+$ , croissante, avec  $g_n \leq f$  pour tout  $n$ , qui converge simplement vers  $f$ , c'est à dire que

$$f(x) = \lim_n g_n(x) \quad \forall x \in X.$$

*Démonstration.* La démonstration repose sur la construction explicite d'une fonction étagée, qui reproduit de façon abstraite ce que ferait un logiciel de traitement d'image pour échantillonner les niveaux de gris, de façon à limiter l'espace mémoire nécessaire pour stocker l'image. L'idée est simplement de pratiquer cet échantillonnage avec une précision arbitrairement grande (dans le cas d'une image, il s'agirait de faire tendre vers l'infini le nombre de *bits* utilisés pour encoder les niveaux de gris). La petite différence avec ce cadre informatique est qu'ici on ne peut pas supposer que les valeurs de la fonction sont bornées, on doit donc construire une approximation de plus en plus fine, mais qui s'étale aussi sur une plage de valeurs de plus en plus grande. Pour tout entier  $n \geq 1$ , tout  $k = 1, \dots, n2^n$ , on définit dans cet esprit

$$A_{n,k} = \{x, (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\}.$$

Pour tout  $n$ , les  $A_{n,k}$  sont disjoints, et sont mesurables par mesurabilité de  $f$ . On définit maintenant la fonction  $f_n$  en affectant la valeur  $(k-1)/2^n$  pour tout  $x \in A_{n,k}$ , et la valeur  $n$  pour les  $x$  qui ne sont dans aucun des  $A_{n,k}$  (là où la valeur de  $f$  dépasse  $n$ ). Les fonctions  $f_n$  sont étagées, la suite est croissante, et on a convergence simple de  $f_n$  vers  $f$ .  $\square$

**Théorème III.5.21.** (Convergence monotone (••))

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  une fonction mesurable de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions également mesurables et positives. On suppose que

1. la suite  $(f_n(x))$  est croissante pour presque tout  $x$  (voir définition III.3.6),
2.  $f_n$  converge simplement vers  $f$ , presque partout, c'est-à-dire que, pour presque tout  $x$ ,  $f(x) = \lim f_n(x)$ .

L'intégrale de  $f$  est alors la limite des intégrales des  $f_n$  :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

*Démonstration.* On suppose dans un premier temps que les propriétés de monotonie et de convergence ponctuelle sont vérifiées pour tout  $x$  dans  $X$ . La monotonie de l'intégrale (proposition III.5.14) assure que

$$\int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \dots \leq \int f d\mu,$$

On a donc convergence de la suite  $(\int f_n)$  vers un réel inférieur ou égal à  $\int f$ . Montrons maintenant l'inégalité inverse. Pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  peut être approchée inférieurement par une suite  $(g_{n,k})$  (voir lemme III.5.20 ci-dessus). On définit maintenant la fonction  $h_k$  par

$$h_k = \max(g_{1,k}, g_{2,k}, \dots, g_{k,k}),$$

qui sont des fonctions de  $\mathcal{E}^+$  par construction. Comme la suite  $(g_{n,k})_k$  est croissante pour tout  $n$ , la suite  $(h_k)$  est croissante. On a par ailleurs, pour tout  $k$

$$g_{n,k} \leq f_n \quad \forall n = 1, \dots, k,$$

d'où  $h_k \leq f_k$ . On a enfin convergence simple de  $h_k$  vers  $f$ . En effet, pour tout  $x$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ . Par convergence croissante de  $g_{N,k}$  vers  $f_N$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq K$ , on ait  $0 \leq f_N(x) - g_{N,k}(x) < \varepsilon$ , d'où

$$0 \leq f(x) - g_{N,k}(x) < 2\varepsilon.$$

Pour  $k \geq \max(K, N)$ , le terme  $g_{N,k}$  est dans la collection des fonctions dont  $h_k$  est le maximum, on a donc  $h_k(x) > f(x) - 2\varepsilon$ , d'où la convergence de  $h_k(x)$  vers  $f(x)$ . D'après la proposition III.5.13, on a donc

$$\int f = \lim_n \int h_n \leq \lim_n \int f_n,$$

ce qui conclut la première partie de la preuve.

Supposons maintenant que les propriétés de croissance et de convergence simple ne soient vérifiées que presque partout : il existe un ensemble  $A \in \mathcal{A}$ , dont le complémentaire est de mesure nulle, et sur lequel les propriétés sont vérifiées. La suite  $f_n \mathbb{1}_A$  (qui met à 0 toutes les valeurs sur  $A^c$ ) vérifie les hypothèses vis-à-vis de la fonction cible  $f \mathbb{1}_A$ . On a donc, d'après ce qui précède, convergence de la suite des intégrales vers l'intégrale de  $f$ . Or, comme  $f_n \mathbb{1}_A$  s'identifie à  $f_n$  presque partout, de même pour  $f \mathbb{1}_A$  et  $f$ , les intégrales sont les mêmes (d'après la proposition III.5.12), ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Lemme III.5.22.** (Fatou)

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables de  $X$  dans  $[0, \infty]$ . On a

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

*Démonstration.* Pour tout  $n$  on définit  $g_n$  par  $g_n(x) = \liminf f_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$ . D'après la proposition III.5.2, chacune de ces fonctions est mesurable. Or, pour tout  $x$ ,

$$g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$$

donc  $g_n(x)$  converge vers une limite que l'on note  $g(x) \in [0, +\infty]$ . D'après le théorème de convergence monotone III.5.21, on a donc

$$\int g = \lim_n \int g_n.$$

Or  $g = \liminf f_n$  et, comme  $g_n \leq f_n$ , on a  $\lim \int g_n \leq \liminf \int f_n$ , d'où l'on déduit l'inégalité annoncée.  $\square$

**Théorème III.5.23.** (Convergence dominée)

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $g$  une fonction intégrable de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables de  $X$  dans  $[-\infty, +\infty]$ . On suppose

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \quad \text{pour presque tout } x,$$

et que, pour tout  $n$ ,

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

pour presque tout  $x$  dans  $X$ . Alors les fonctions  $f$  et  $f_n$  pour tout  $n$  sont intégrables sur  $X$ , et l'on a

$$\lim \int |f - f_n| d\mu = 0,$$

d'où en particulier  $\lim \int f_n = \int f$ .

*Démonstration.* Il existe un ensemble  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , dont le complémentaire est de mesure nulle<sup>10</sup>, tel que toutes les propriétés soient vérifiées. Pour tout  $x$  dans  $A$ , on a  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , et aussi par passage à la limite  $|f(x)| \leq g(x)$ . On a donc  $\int |f_n| \leq \int g < +\infty$  et  $\int |f| \leq \int g < +\infty$ , qui exprime l'intégrabilité de  $f$  et des  $f_n$ . On a par ailleurs  $|f_n + f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ , qui est donc intégrable. On applique le lemme de Fatou III.5.22 à la suite de fonctions positives  $(2g - |f_n - f|)$  :

$$\int \liminf (2g - |f_n - f|) \leq \liminf \int (2g - |f_n - f|),$$

d'où l'on déduit, par linéarité de l'intégrale (et prenant garde de transformer les  $\liminf$  en  $\limsup$  quand on fait sortir le signe  $-$ ),

$$\limsup \int |f_n - f| \leq \int \limsup |f_n - f|.$$

Or, comme  $f_n$  converge vers  $f$  sur  $A$ , la fonction  $\limsup |f_n - f|$  est identiquement nulle presque partout, d'où la nullité de son intégrale, ce qui exprime la convergence de  $\int |f_n - f|$  vers 0.  $\square$

## III.6 Intégrales multiples

**Définition III.6.1.** (Rectangles)

Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables. On appelle *rectangle* de  $X_1 \times X_2$  un ensemble de la forme  $A_1 \times A_2$ , avec  $A_1 \in \mathcal{A}_1$ ,  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ .

**Proposition III.6.2.** Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables. L'ensemble  $\mathcal{R}$  des rectangles est un  $\pi$ -système (définition III.2.16), c'est à dire qu'il est stable par intersection finie.

---

10. Chacune des propriétés énoncée est vraie sur un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle. On exclut ici la réunion de tous ces ensembles sur lesquels les propriétés sont vérifiées, comme il s'agit d'une réunion dénombrable, cet ensemble reste de mesure nulle.

*Démonstration.* Pour tous rectangles  $A_1 \times A_2$  et  $A'_1 \times A'_2$  de  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , on a

$$(A_1 \times A_2) \cap (A'_1 \times A'_2) = \left( \underbrace{A_1 \cap A'_1}_{\in \mathcal{A}_1} \right) \times \left( \underbrace{A_2 \cap A'_2}_{\in \mathcal{A}_2} \right),$$

qui appartient  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . □

**Définition III.6.3.** (Tribu produit)

Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables. On appelle *tribu-produit* de  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  la tribu de  $X_1 \times X_2$  engendrée par les rectangles. On la note  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Proposition III.6.4.** (Sections)

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux ensembles et  $E \in X_1 \times X_2$ . Pour  $x_1 \in X_1$ , on définit la *section* associée à  $X_1$  par

$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in E\}$$

On définit de la même manière, pour  $x_2 \in X_2$ , la section  $E^{x_2} = \{x_1 \in X_1, (x_1, x_2) \in E\}$ .

**Proposition III.6.5.** Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables. Soit  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Toute section  $E_{x_1}$  est dans  $\mathcal{A}_2$ , et toute section  $E^{x_2}$  est dans  $\mathcal{A}_1$ .

*Démonstration.* Soit  $x_1 \in X_1$ . On définit  $\mathcal{F}$  comme l'ensemble des parties  $E$  de  $X_1 \times X_2$  telles que  $E_{x_1}$  est élément de  $\mathcal{A}_2$ . Pour tout rectangle  $E = A_1 \times A_2$ , avec  $A_i \in \mathcal{A}_i$ , on a soit  $E_{x_1} = \emptyset$  (si  $x_1 \notin A_1$ ), soit  $E_{x_1} = A_2$  (si  $x_1 \in A_1$ ), d'où l'on déduit que  $\mathcal{F}$  contient tous les rectangles  $A_1 \times A_2$ . On a par ailleurs, pour toute partie  $E$  de l'espace produit,

$$(E^c)_{x_1} = (E_{x_1})^c$$

et, pour toute collection  $(E_n)$ ,

$$\left( \bigcup E_n \right)_{x_1} = \bigcup (E_n)_{x_1},$$

d'où l'on déduit que  $\mathcal{F}$  est stable par complémentarité et par union dénombrable. Il s'agit donc d'une tribu, qui contient donc la tribu engendrée par les rectangles, qui est  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Pour tout  $E \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , on a donc  $E_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ . On démontre de la même manière que toute section  $E^{x_2}$  d'un ensemble  $E \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  est dans  $\mathcal{A}_1$ . □

**Notation III.6.6.** (Section d'une application)

Soit  $F$  une fonction définie sur un espace produit  $X_1 \times X_2$ . On note  $F_{x_1}$  la fonction (appelée *section*) définie sur  $X_2$  par

$$F_{x_1}(x_2) = F(x_1, x_2).$$

On définit de la même manière  $x_1 \mapsto F^{x_2}(x_1) = F(x_1, x_2)$ .

**Proposition III.6.7.** Soit  $f$  une application  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  - mesurable à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ , alors pour tout  $x_1 \in X_1$ , la section  $f_{x_1}$  est  $\mathcal{A}_2$  - mesurable, et pour tout  $x_2 \in X_2$ , la section  $f_{x_2}$  est  $\mathcal{A}_1$  - mesurable.

*Démonstration.* Pour tout  $x_1 \in X_1$ , tout  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ , tout borélien  $D$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ , on a

$$(f_{x_1})^{-1}(D) = (f^{-1}(D))_{x_1},$$

Or  $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  d'après l'hypothèse de mesurabilité de  $f$ , et donc  $(f^{-1}(D))_{x_1} \in \mathcal{A}_2$  d'après la proposition III.6.5. On montre de la même manière que, pour tout  $x_2 \in X_2$ , la section  $f_{x_2}$  est  $\mathcal{A}_1$  - mesurable.  $\square$

**Proposition III.6.8.** Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés, tels que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont  $\sigma$  - finies. Pour tout  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , les applications

$$x_1 \mapsto \mu_2(E_{x_1}) \text{ et } x_2 \mapsto \mu_1(E^{x_2})$$

sont respectivement  $\mu_1$  - mesurable et  $\mu_2$  - mesurable.

*Démonstration.* On suppose dans un premier temps que  $\mu_2$  est finie. D'après la proposition III.6.5, pour tout  $x_1 \in X_1$ , tout  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . La section  $E_{x_1}$  est dans  $\mathcal{A}_2$ , la quantité  $\mu_2(E_{x_1})$  est donc bien définie. On introduit l'ensemble  $\mathcal{D}$  des éléments  $E$  de  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  tels que la fonction  $x_1 \mapsto \mu_2(E_{x_1})$  est  $\mu_1$  - mesurable. Nous allons montrer que  $\mathcal{D}$  est une classe monotone qui contient le  $\pi$  - système des rectangles, dont nous déduirons que  $\mathcal{D}$  est la tribu produit toute entière. Pour tout rectangle  $E = A_1 \times A_2$ , cette fonction s'écrit

$$\mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(A_2) \mathbf{1}_{A_1}(x_1),$$

elle est donc  $\mu_1$  - mesurable. En particulier,  $X_1 \times X_2 \in \mathcal{D}$ . Si maintenant  $E$  et  $F$  sont dans  $\mathcal{D}$ , avec  $E \subset F$ , on a

$$\mu_2((F \setminus E)_{x_1}) = \mu_2(F_{x_1}) - \mu_2(E_{x_1}),$$

d'où la mesurabilité de  $x_1 \mapsto \mu_2((F \setminus E)_{x_1})$ . Si maintenant  $(E_n)$  est une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{D}$ , on a

$$\mu_2\left(\left(\bigcup E_n\right)_x\right) = \lim \mu_2((E_n)_{x_1}) = \sup \mu_2((E_n)_{x_1}),$$

qui est mesurable d'après la proposition III.5.2, page 77. L'ensemble  $\mathcal{D}$  est donc une classe monotone, qui contient le  $\pi$  - système  $\mathbf{R}$  des rectangles. Il contient donc la tribu engendrée par  $\mathbf{R}$ , qui est  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  (définition III.6.3). Or  $\mathcal{D}$  a été défini comme l'ensemble des parties  $E$  telles que  $x_1 \mapsto \mu_2(E_{x_1})$  est  $\mu_1$  - mesurable. Cette propriété est donc vraie pour tout  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . On montre symétriquement que  $x_2 \mapsto \mu_1(E^{x_2})$  est  $\mu_2$  - mesurable pour tout  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

Si maintenant  $\mu_2$  est  $\sigma$  - finie, on introduit une partition  $(D_n)$  de  $\mathcal{A}_2$ , constituée de parties de mesure finie (voir proposition III.3.2). Chacune des mesures  $\mu_2^n$  définie par  $\mu_2^n(A) = \mu_2(A \cap D_n)$  est donc finie. D'après ce qui précède, la fonction  $x_1 \mapsto \mu_2^n(E_{x_1})$  est  $\mu_1$  - mesurable, d'où

$$x_1 \mapsto \mu_2(E_{x_1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_2^n(E_{x_1})$$

est mesurable. On démontre de la même manière la propriété symétrique.  $\square$

**Théorème III.6.9.** (Mesure - produit)

Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés. Il existe une unique mesure, appelée *mesure produit* de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , notée  $\mu_1 \otimes \mu_2$ , telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2),$$

pour tous  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Cette mesure vérifie en outre, pour tout  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ,

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(E^{x_2}) d\mu_2(x_2).$$

*Démonstration.* D'après la proposition III.6.8, les fonctions  $x_1 \mapsto \mu_2(E_{x_1})$  et  $x_2 \mapsto \mu_1(E^{x_2})$  sont respectivement  $\mu_1$ -mesurable et  $\mu_2$ -mesurable. On peut ainsi définir deux fonctions de  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  dans  $\mathbb{R}_+$  comme suit

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)_1(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1), \quad (\mu_1 \otimes \mu_2)_2(E) = \int_{X_2} \mu_1(E^{x_2}) d\mu_2(x_2).$$

On vérifie immédiatement que ce sont bien des mesures sur la tribu-produit  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Ces mesures prennent les mêmes valeurs sur les rectangles : pour tous  $A_1 \in \mathcal{A}_1$ ,  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ,

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)_1(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = (\mu_1 \otimes \mu_2)_2(A_1 \times A_2).$$

Elles s'identifient donc sur l'ensemble  $\mathcal{R}$  des rectangles, qui constituent un  $\pi$ -système d'après la proposition III.6.2. D'après la proposition III.3.10, page 67, elles s'identifient donc sur la tribu engendrée par  $\mathcal{R}$ , qui est par définition la tribu-produit  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .  $\square$

**Théorème III.6.10.** (Fubini – Tonelli)

Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures  $\sigma$ -finies sur les espaces mesurés  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2)$ , respectivement. Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -mesurable de  $(X_1, X_2)$  dans  $[0, +\infty]$ . On suppose que  $f$  est intégrable pour la mesure produit  $\mu_1 \otimes \mu_2$ . Alors, pour  $\mu_1$ -presque tout  $x_1$ , la section  $F_{x_1}$  est  $\mu_2$  intégrable sur  $X_2$  et pour  $\mu_2$ -presque tout  $x_2$ , la section  $F^{x_2}$  est  $\mu_1$ -intégrable sur  $X_1$ , et l'on a

$$\int_{X_1 \times X_2} F(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} F_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} F^{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

*Démonstration.* On considère dans un premier temps le cas où  $f$  est la fonction indicatrice d'une partie  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Les sections  $f_{x_1}$  et  $f^{x_2}$  sont alors les fonctions indicatrices de  $E_{x_1}$  et  $E^{x_2}$ , respectivement :

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) = \mathbb{1}_E(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{E_{x_1}}(x_2), \quad f^{x_2}(x_1) = \mathbb{1}_{E^{x_2}}(x_1).$$

elles sont donc respectivement  $\mu_2$ -mesurable et  $\mu_1$ -mesurables d'après la proposition III.6.8, et l'on a

$$\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2(x_2) = \mu_2(E_{x_1}) \quad \text{et} \quad \int_{X_1} f^{x_2} d\mu_1(x_1) = \mu_1(E^{x_2}).$$

On a d'après le théorème III.6.9, qui définit la mesure-produit,

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \\ \int_{X_2} \mu_1(E^{x_2}) d\mu_2(x_2) &= \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f^{x_2} d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée pour les fonctions indicatrices d'éléments de  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . Elle est donc vérifiée, par linéarité et homogénéité de l'intégrale, pour les fonctions étagées. Or toute fonction mesurable sur  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  est limite croissante d'une suite de fonctions étagées (lemme III.5.20, page 85). La proposition III.5.2, page 77, assure la mesurabilité des sections, qui sont elles-mêmes limites croissantes de fonctions étagées. Le théorème III.5.21 de convergence monotone assure la convergence des intégrales, ce qui conclut la preuve.  $\square$

### III.7 Exercices

**Exercice III.7.1.** Soit  $(x_n)$  une suite de réels telle que la série  $\sum x_n$  soit convergente, mais pas absolument convergente. Montrer que, pour tout  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ , il existe une sous-suite extraite  $(x_{\varphi(n)})$  telle que la série  $\sum x_{\varphi(n)}$  converge vers  $\lambda$ .

**Exercice III.7.2.** *Ce petit exercice illustre d'une certaine manière l'impossibilité de définir une mesure finie sur un ensemble infini non dénombrable en affectant un point strictement positif à chaque point.*

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille infinie de réel positifs ou nuls, possédant la propriété suivante :

$$\forall J \subset I, \quad J \text{ dénombrable}, \quad \sum_{i \in J} a_i < +\infty.$$

Montrer que l'ensemble des  $i$  tels que  $a_i > 0$  est nécessairement dénombrable.

**Exercice III.7.3.** Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une collection d'intervalles ouverts  $I_n$  disjoints telle que la réunion des intervalles soit dense dans  $\mathbb{R}$ , et telle que la somme des longueurs soit inférieure à  $\varepsilon$ .

**Exercice III.7.4.** (Tribus sur l'ensemble à  $N$  éléments (••))

- a) Décrire l'ensemble des tribus sur  $X_N = \llbracket 1, N \rrbracket$ .
- b) Préciser le cardinal de chacune de ces tribus.
- c) (•••) Préciser le nombre  $B_N$  total de tribus sur  $N$ , sous la forme d'une relation de récurrence, qui exprime  $B_{N+1}$  en fonction des  $B_n$  jusqu'à  $N$ .

**Exercice III.7.5.** Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable qui engendre la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice III.7.6.** (Tribu image / mesure image)

a) Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesuré,  $X'$  un ensemble, et  $f$  une application de  $X$  dans  $X'$ . On définit

$$\mathcal{A}' = \left\{ A' \subset X', \quad f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \right\}.$$

Montrer que  $\mathcal{A}'$  est une tribu, que l'on appelle tribu – image de  $\mathcal{A}$  par  $f$ .

b) Montrer que  $\mathcal{A}'$  est la *plus grande* tribu que l'on puisse mettre sur  $X$ , qui rende  $f$  mesurable.

c) On considère maintenant  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(X', \mathcal{A}')$  un espace mesurable<sup>11</sup>, et  $f$  une application mesurable de  $X$  vers  $X'$ . On définit l'application

$$\nu : A' \in \mathcal{A}' \mapsto \mu(f^{-1}(A')).$$

Montrer que l'on définit ainsi une mesure sur  $(X', \mathcal{A}')$ , appelée mesure – image de  $\mu$  par  $f$ , ou *poussé en avant* de  $\mu$  par  $f$ , ce que l'on note  $\nu = f_{\#}\mu$ . Montrer que la masse est conservée

---

11. La tribu  $\mathcal{A}'$  peut être la tribu image de  $\mathcal{A}$  par  $f$ , auquel cas  $f$  est automatiquement mesurable, mais pas forcément.

par cette opération de transport, c'est-à-dire que  $\nu(X') = \mu(X)$ .

Si l'on suppose que la mesure  $\mu$  est la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ , quelle est l'interprétation de  $\nu$  ?

c bis) Montrer que l'opération dans l'autre sens n'est pas pertinente. Plus précisément, on considère une application  $f$  mesurable d'un espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$  dans un espace mesuré  $(X', \mathcal{A}', \nu)$ , et l'on définit sur  $\mathcal{A}$  l'application  $\eta$  sur  $\mathcal{A}$  définie par  $\eta(A) = \nu(f(A))$ . Montrer par un ou plusieurs contre-exemples que  $\eta$  n'est pas une mesure en général.

d) On se place maintenant sur  $X = X' = \mathbb{R}$  muni de la tribu borélienne, et de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . Décrire la mesure image  $\nu = f_{\#}\lambda$  dans les cas suivants :

(i)  $f(x) = x + c$ , où  $c \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $f(x) = \alpha x$ , avec  $\alpha \neq 0$ .

(iii)  $f(x) = E(x)$  (partie entière de  $x$ ).

(iv)  $f(x) = 0$ .

(v)  $f(x) = \exp(x)$  (on précisera la mesure des intervalles  $]a, b[$  dans l'espace d'arrivée).

(★) On considère maintenant deux mesures  $\mu$  et  $\nu$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , de même masse totale finie, et l'on note  $\Lambda_{\mu, \nu}$  l'ensemble des fonctions  $f$  mesurables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui transportent  $\mu$  vers  $\nu$  :

$$\Lambda_{\mu, \nu} = \{f, f_{\#}\mu = \nu\}.$$

e) (★) Montrer que, si  $f$  dans  $\Lambda_{\mu, \nu}$ , alors toute fonction  $g$  égale à  $f$   $\mu$ -presque partout est aussi dans  $\Lambda_{\mu, \nu}$ .

g) (★) Montrer au travers d'exemples que  $\Lambda_{\mu, \nu}$  peut-être vide, ou réduit à un singleton (en identifiant les fonctions égales  $\mu$ -presque partout), ou contenir un nombre fini d'éléments, ou contenir une infinité non dénombrable d'éléments.

### Exercice III.7.7. (Peigne de Dirac)

On se place sur la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , et l'on définit la mesure de comptage  $\mu_0$  de la façon suivante : pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , on définit  $\mu_0(A) = \text{Card}(A \cap \mathbb{Z})$  comme le nombre d'entiers relatifs que  $A$  contient. On écrit, en utilisant la notation introduite dans le deuxième des exemples III.3.1 :

$$\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k.$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une mesure sur  $\mathbb{R}$  qui est  $\sigma$ -finie, sans être finie.

Quels sont les ensembles de mesure pleine pour  $\mu_0$  ? (voir définition III.3.7).

Donner un exemple de fonctions égales  $\mu_0$ -presque partout, qui sont pourtant très différentes au sens usuel du terme.

Construire une mesure du même type, en modifiant les coefficients de la somme ci-dessus, qui soit finie.



b) On définit maintenant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k/2^n}.$$

Montrer qu'il s'agit encore d'une mesure infinie, et que l'on n'a ni  $\mu_n \ll \lambda$  (mesure de Lebesgue), ni  $\lambda \ll \mu_n$ .

Montrer que, pour tout intervalle  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n([a, b[) \longrightarrow \lambda([a, b[) = b - a,$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que, malgré la propriété de la question précédente, on n'a pas convergence de  $\mu_n(A)$  vers  $\mu(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{B}$ .

**Exercice III.7.8.** Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $(X, \mathcal{A})$ .

a) Montrer que l'on a, pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ .

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

b) Montrer que l'on a, pour tous  $A, B, C \in \mathcal{A}$ .

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

c) Proposer une formule analogue pour une réunion d'un nombre quelconque (mais fini) d'éléments de  $\mathcal{A}$ .

**Exercice III.7.9.** On se place sur  $\mathbb{R}$  muni de sa tribu borélienne, et l'on définit  $\mu(A)$  comme le cardinal de l'ensemble des nombres rationnels contenus dans  $A$ .

a) Montrer qu'il s'agit d'une mesure sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , qui est  $\sigma$ -finie, et qui donne une mesure infinie ou nulle à tout ouvert de  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $\mu$  n'est pas comparable à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  (on n'a ni  $\mu \ll \lambda$ , ni  $\lambda \ll \mu$ ).

**Exercice III.7.10.** (Un réel sur deux)

*On se propose ici de montrer qu'il n'existe aucun sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  qui contiendrait d'une certaine manière "un réel sur deux" quelle que soit l'échelle à laquelle on le regarde, et qui serait ainsi une sorte d'équivalent continu de l'ensemble des entiers pairs dans  $\mathbb{N}$ .*

On note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

a) Pour  $n \geq 1$ , on définit  $A_n$  comme l'ensemble des réels dont la  $n$ -ème décimale (en écriture propre) est entre 0, 1, 2, 3, ou 4. Montrer que pour tout intervalle  $I$  dont la longueur est un multiple entier de  $10^{-n+1}$ , on a  $\lambda(I \cap A_n) = \lambda(I)/2$ .

Montrer que, pour tout intervalle  $I = ]a, b[$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(I \cap A_n) = \frac{1}{2} \lambda(I).$$

b) Montrer qu'il n'existe aucune partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  mesurable telle que l'on ait

$$\lambda(A \cap ]a, b]) = \frac{b-a}{2} \quad \forall a, b, a < b.$$

**Exercice III.7.11.** (Ensemble de Cantor)

On pose  $K_0 = [0, 1]$ , et l'on définit  $K_1 = K_0 \setminus ]1/3, 2/3[$ , qui est donc la réunion de 2 intervalles fermé. On construit  $K_2$  en retirant de la même manière le tiers central aux deux intervalles qui composent  $K_1$ . On construit ainsi  $K_3, \dots, K_n$ , qui est la réunion de  $2^n$  intervalles de même longueur  $1/3^n$ . On définit l'ensemble de Cantor  $K$  comme l'intersection de  $K_n$ .

a) Montrer que  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , d'intérieur vide.

b) Montrer que  $K$  a la puissance du continu, c'est-à-dire qu'il est infini non dénombrable, plus précisément équipotent à  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que  $K$  est Lebesgue— mesurable, de mesure nulle.

**Exercice III.7.12.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable en tout point. Montrer que la dérivée de  $f$  est mesurable.

**Exercice III.7.13.** (Intégrale dépendant d'un paramètre)

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré (par exemple  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ ), et  $f$  une application de  $X \times I$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

a) On suppose dans un premier temps que  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est mesurable.
- (ii) Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue.
- (iii) Il existe une fonction  $g$  sur  $X$ , intégrable, telle que pour tout  $(x, t) \in X \times I$ ,

$$|f(x, t)| \leq g(x).$$

Montrer que l'application

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

est bien définie et continue sur  $I$ .

b) On renforce les hypothèses sur  $f$  de la façon suivante :

- (i) Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est mesurable, et  $\int |f(x, t)| d\mu < +\infty$ .
- (ii) Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continûment différentiable.
- (iii) Il existe une fonction  $g$  sur  $X$ , intégrable, telle que pour tout  $(x, t) \in X \times I$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Montrer que l'application

$$F : t \in I \mapsto F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

**Exercice III.7.14.** Soient  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables, et  $\gamma$  une mesure sur  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . On note  $\pi_1$  la projection sur  $X_1$ , définie par  $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ . On appelle première marginale de  $\gamma$  la mesure transportée  $\mu_1 = (\pi_1)_\# \gamma$  (voir exercice III.7.6). On définit de même la deuxième marginale  $\mu_2$  sur  $\mathcal{A}_2$ .

a) Pour  $A_i \in \mathcal{A}_i$ , donner l'expression de  $\mu_i(A_i)$ , et montrer que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ont même masse totale. A-t-on en général  $\gamma = \mu_1 \otimes \mu_2$  ?

Si  $\gamma$  est la loi d'une variable aléatoire  $(Y_1, Y_2) \in X_1 \times X_2$ , interpréter  $\mu_1$  et  $\mu_2$

b) Dans le cas où  $X_1 = X_2 = \llbracket 1, N \rrbracket$ , munis de leurs tribus discrètes, montrer que toute mesure  $\gamma$  sur  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  peut se représenter par une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , et préciser comment construire  $\mu_1$  et  $\mu_2$  à partir de  $A$ .

*Introduction au transport optimal*

c) Pour  $\mu_1$  et  $\mu_2$  mesures de même masse finie  $M > 0$  sur  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , respectivement, on définit

$$\Pi_{\mu_1, \mu_2} = \{ \gamma \in \mathcal{M}_M(X_1 \times X_2), (\pi_i)_\# \gamma = \mu_i, i = 1, 2 \},$$

où  $\mathcal{M}_M(X_1 \times X_2)$  est l'espace des mesures sur  $X_1 \times X_2$  de masse  $M$ . Montrer que  $\Pi_{\mu, \nu}$  est non vide. Dans quel cas cet ensemble est-il réduit à un singleton ?

d) On se place dans le cas  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^d$ , muni de la tribu borélienne, et l'on considère  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des mesures sur  $\mathbb{R}^d$  définies par

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}, \mu_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j \delta_{y_j}, \sum \alpha_i = \sum \beta_j = M, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0.$$

Décrire l'ensemble  $\Pi_{\mu_1, \mu_2}$ .

e) On se place dans le cadre de la question précédente, et l'on se donne une collection  $(c_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$  de *coûts*. Pour tout couple  $(i, j)$ , le nombre  $c_{ij}$  correspond à ce que coûte le transport d'une quantité unitaire de matière de  $x_i$  vers  $y_j$ . On pourra prendre  $c_{ij} = \|y_j - x_i\|$  pour fixer les idées.

Montrer que le problème

$$\min_{\gamma \in \Pi_{\mu_1, \mu_2}} \sum_{i,j} \gamma_{ij} c_{ij}$$

admet une solution. Cette solution est-elle unique en général ?

f) (★) Imaginer une situation de la vie réelle (dans un contexte de logistique de transport), où les  $x_i$  correspondraient à des lieux de production, et les  $y_j$  des lieux de vente ou de consommation. Discuter du choix des  $(c_{ij})$  en terme de pertinence.

g) (★) On considère une population de  $n$  employés sur une période donnée, et l'on note  $\mu_i$  le temps de travail de l'employé  $i$  durant cette période. On considère qu'il y a  $m$  tâches à accomplir, associée chacune, pour fixer les idées, à une machine  $j$ , et l'on suppose que le temps de disponibilité de la machine durant la période considérée est égal à  $\nu_j$ . On note  $u_{ij}$  la *productivité* de l'employé  $i$  vis-à-vis de la tâche  $j$ , de telle sorte que  $u_{ij}\mu_i$  est la valeur ajoutée résultant du travail de  $i$  à la tâche  $j$  pendant le temps  $\mu_i$ . On suppose que le temps de travail total est égal au temps total de disponibilité des machines (on ne se préoccupera

pas des questions de répartition effective des tâches durant la période de temps considérée, en supposant par exemple que cette période est très grande). Montrer que chercher à maximiser la valeur ajoutée totale conduit à un problème d'*affectation* du type de celui étudié dans les questions précédentes.