Chapitre IV

Fondamentaux et compléments

Contents

IV.1 Fondamentaux

IV.1.1 Éléments de théorie des ensembles

Notations IV.1.1. (○) Soit X un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X, c'est à dire l'ensemble des sous-ensembles constitués d'éléments de X.

Soit A une partie de X. On note A^c le complémentaire de A dans X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de X qui ne sont pas dans A.

Soient A et B deux parties d'un ensemble X. On dit que A est inclus dans B, et l'on écrit $A \subset B$, si tout élément de A est aussi élément de B :

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

On a [1] $\emptyset \subset B$ pour toute partie B.

1. Cette assertion est à la fois évidente et troublante, du fait que l'ensemble vide est inclus dans toute partie de n'importe quel ensemble. Ce fait rend possible d'énoncer des propriétés comme : tout élément de l'ensemble vide est un *porte-clé*, ce qui signifie précisément que l'assertion

Soient A et B deux parties d'un ensemble X. On note $A \cap B$ l'*intersection* de A et B, c'est à dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in X\,,\ x \in A \text{ et } \ x \in B\}\ .$$

On note $A \cup B$ l'*union* de A et B, c'est à dire l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B :

$$A \cup B = \{x \in X\,,\ x \in A \text{ ou } \ x \in B\}\ .$$

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties disjointes de X, non vides, dont l'union est égale à X, on dit qu'elle réalise une *partition* de X.

On note $A \setminus B$ la *différence ensembliste* de A et B, c'est à dire l'ensemble des éléments qui sont dans A, mais pas dans B :

$$A \setminus B = \{x \in X\,,\ x \in A\,,\ X \notin B\} = A \cap B^c.$$

Soient X et Y deux ensembles. On appelle *produit cartésien* de X et Y, et l'on note $X \times Y$, l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$.

Soient X et Y deux ensembles, on note Y^X l'ensemble des applications de X vers Y. On peut représenter chaque application par une partie de $X \times Y$ qui, pour tout x, contient un unique couple du type (x, y) (l'élément y est l'image de x par l'application considérée). L'ensemble des couples $(x, f(y))$ est appelé *graphe* de l'application f.

On peut identifier une partie A d'un ensemble X à sa *fonction indicatrice*[2] $\mathbb{1}_A$, qui à chaque élément x de X associe la valeur 1 ou 0, selon que x soit dans A ou pas. Chaque partie pouvant ainsi être identifiée à une application de X dans $\{0, 1\}$, on note parfois 2^X l'ensemble des parties de X.

Définition IV.1.2. (Autour de la notion d'application ($\circ$))
Soient X et Y deux ensembles, et f une application de X dans Y. Pour tout $y \in Y$, on appelle image réciproque de y, et l'on note[3] $f^{-1}(\{y\})$ (ou $f^{-1}(y)$) l'ensemble des antécédents de y :

$$f^{-1}(y) = \{x\,,\ y = f(x)\}\,.$$

On définit de la même manière l'image réciproque d'un ensemble $B \subset Y$ par

$$f^{-1}(B) = \{x\,,\ f(x) \in B\}\,.$$

On dit que f est *injective* si deux éléments de x ne peuvent avoir la même image, c'est-à-dire si l'image réciproque de tout $y \in Y$ contient au plus un élément.

" $\forall x \in A$, x est un porte-clé"
est vraie pour $A = \emptyset$. De façon générale, toute propriété portant sur les éléments d'un ensemble est systématiquement vérifiée par l'ensemble vide.

2. Le terme de fonction *caractéristique* est parfois utilisé, mais nous l'évitons ici car il prend un autre sens dans le contexte des probabilités. On prendra néammoins garde au fait que le terme de fonction indicatrice prend lui aussi un autre sens en *analyse convexe*, et donc en optimisation, désignant une fonction associée à un ensemble qui prend la valeur 0 dans l'ensemble, et $+\infty$ à l'extérieur.

3. On prendra garde à la confusion possible avec l'application inverse d'une bijection, notée également f^{-1}. Pour distinguer l'application considérée ici de cet inverse défini (quand c'est possible) de Y dans X, on utilise en général la notation ensembliste $f^{-1}(\{y\})$, qui rappelle que l'on considère ici une application qui à un ensemble (une partie de Y) associe un ensemble (une partie de X), qui peut être vide, ou non réduite à un singleton.

On dit que f est *surjective* si tout élément de l'espace d'arrivée Y a eu moins un antécédent, c'est-à-dire si l'image réciproque de tout $y \in Y$ contient au moins un élément.

On dit que f est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si l'image réciproque de tout élément de l'ensemble d'arrivée contient exactement un élément.

IV.1.2 Structures fondamentales

Définition IV.1.3. (Relation d'équivalence, classes d'équivalence (○))
Soit X un ensemble. Une relation d'équivalence est la donnée d'une partie R de $X \times X$, dénotée par le symbole $\mathcal{R}$ selon la convention

$$(x, x') \in R \Longleftrightarrow x \,\mathcal{R}\, x',$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *(réflexivité)* Pour tout $x \in X$, $x \,\mathcal{R}\, x$.
(ii) *(symétrie)* Pour tous x, $y \in X$, $x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow y \,\mathcal{R}\, x$.
(iii) *(transitivité)* Pour tous x, y, $z \in X$,

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z \Longrightarrow x \,\mathcal{R}\, z.$$

Pour tout $x \in X$, on appelle classe d'équivalence l'ensemble

$$\overline{x} = \{y \in X\ ,\ y \,\mathcal{R}\, x\} \in \mathcal{P}(X).$$

L'ensemble $\overline{X}$ constitué de ces classes est appelé espace quotient, ce que l'on note $\overline{X} = X/\,\mathcal{R}$.

L'application qui à $x \in X$ associe sa classe $\overline{x}$ est par construction une surjection, appelée *surjection canonique.*

Remarque IV.1.4. La notion de classes d'équivalence semble se limiter à formaliser différemment la notion de *partition* d'un ensemble. De fait, à toute partition d'un ensemble, i.e. $X = \bigcup X_i$ (union disjointe), on peut associer canoniquement la relation d'équivalence $x \,\mathcal{R}\, y$ si x et y appartiennent au même X_i. Cette notion est beaucoup plus féconde que cette version ensembliste dès que X est muni d'une structure, et que la relation d'équivalence respecte cette structure (dans un sens qui dépend de la structure en question). L'espace $\overline{X}$ des classes d'équivalence hérite alors de la structure de l'espace initial, c'est un espace de même type (groupe, espace vectoriel, espace métrique, ...), qui est "plus petit" puisqu'il existe une surjection de X vers $\overline{X}$ (la surjection canonique). L'exemple le plus simple est $\mathbb{Z}$ quotienté par la relation : $x \,\mathcal{R}\, y$ si et seulement si $x - y$ est pair. On a deux classes d'équivalences, notés $\bar{0}$ et $\bar{1}$. On peut définir sur l'espace quotient une addition $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ (on peut vérifier que ça ne dépend pas du représentant choisi : la somme de deux entiers de même parité est paire, impaire si les parités sont différentes), de telle sorte que l'espace quotient, noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est aussi un groupe additif. Dans un contexte de fonctions mesurables (voir le chapitre dédié à ces questions), il sera extrêmement fécond d'introduire la relation d'équivalence $f \,\mathcal{R}\, g$ si l'ensemble des points en lesquels f et g diffèrent est négligeable. L'espace quotient contient des classes de fonctions, et il hérite des structures de l'espace initial (en particulier la structure d'espace vectoriel).

Définition IV.1.5. (Relation d'ordre, majorant (∘))
Soit X un ensemble. Une relation d'ordre sur X est la donnée d'une partie $\mathcal{O}$ de $X \times X$, dénotée par le symbole $\leq$ selon la convention

$$(x, x') \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow x \leq x',$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *(réflexivité)* pour tout $x \in X$, $x \leq x$,
(ii) *(antisymétrie)* si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
(iii) *(transitivité)* pour tous x, y, $z \in X$,

$$x \leq y \text{ et } y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$$

On écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. On dit que l'ordre est *total* si, pour tout $x \neq y$, on a $x < y$ ou $y < x$. On dit qu'il est *partiel* dans le cas contraire. Lorsque l'ordre est partiel, deux éléments peuvent ne pas être comparables.

On dit que M est un *majorant* de $A \subset M$ si $x \leq M$ pour tout $x \in A$. Si $A \subset M$ admet un plus petit majorant, on l'appelle *borne supérieure* de A. On définit de la même manière un *minorant* d'un ensemble, et une *borne inférieure*.

Exercice IV.1.1. a) Montrer que la relation d'inclusion sur l'ensemble des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre. À partir de quel cardinal de X l'ordre n'est-il que partiel ?

b) Proposer une relation d'ordre sur l'ensemble des partitions d'un ensemble.

c) Décrire les éléments maximaux et minimaux des relations d'ordre évoquées ci-dessus.

Remarque IV.1.6. Les relations d'équivalence et d'ordre peuvent être encodées par des *graphes*. Pour la relation d'équivalence, on peut considérer l'ensemble $E \subset X \times X$ des points en relation comme décrivant les arêtes d'un graphe. Cet ensemble est symétrique, de telle sorte que l'on peut identifier $(x, y) \in E$ et $(y, x) \in E$, E contient toutes les boucles (x, x) (réflexivité), et les composantes connexes du graphes sont des *cliques* (i.e. le sous-graphe correspondant est complet : il contient toutes les arêtes possibles entre les sommets).

Pour une relation d'ordre, l'ensemble $E \subset X \times X$ d'arêtes n'est pas symétrique (ou plutôt il ne l'est que dans le cas d'un graphe éclaté qui ne contient que des boucles, qui représente une relation d'ordre partiel d'un type extrême, où deux éléments distincts ne sont jamais comparables), on parle de graphe *orienté*. Il contient aussi toutes les boucles (réflexivité), vérifie la propriété de transitivité $(x, y) \in E$ et $(y, z) \in E$ implique $(x, z) \in E$, et ne contient *aucun cycle*, i.e. il n'est pas possible, partant d'un point, de se déplacer en suivant les flèches pour se retrouver au point de départ. On dit que le graphe est *acyclique*.

IV.1.3 Cardinalité

Définition IV.1.7. (Équipotence)
On dit que deux ensembles X et Y sont *équipotents* s'il existe une bijection de X dans Y.

On écrira alors $X \simeq Y$ ou[4] $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$.

Notation IV.1.8. S'il existe une injection de X dans Y, on écrit $X \lesssim Y$, ou $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$. Si de plus il n'existe pas de bijection entre les deux ensembles, on écrira $X < Y$ ou $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$.

Théorème IV.1.9. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On a

$$\text{Card}(X) < \text{Card}(\mathcal{P}(X)).$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une surjection φ de X dans $\mathcal{P}(X)$. On introduit

$$A = \{x \in X\,,\ x \notin \varphi(x)\}\ .$$

Comme φ est surjective, il doit exister x tel que $\varphi(x) = A$. Si $x \in A$, alors $x \in \varphi(x)$ d'où $x \notin A$. Si $x \notin A = \varphi(x)$, alors $x \in A$. On a donc contradiction dans les deux cas, ce qui exclut l'existence d'une telle application φ. □

Définition IV.1.10. (Ensemble dénombrable)
On dit que l'ensemble X est dénombrable si X est fini[5], ou si $X \simeq \mathbb{N}$, i.e. s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble infini dénombrable est donc énumérable : si l'on note φ la bijection de $\mathbb{N}$ vers X, et $x_n = \varphi(n)$, l'ensemble X est exactement la collection des x_n, et l'on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement (x_n), la suite associée.

Proposition IV.1.11. Une union dénombrable d'ensembles infinis dénombrables est dénombrable.

Démonstration. Nous établissons la propriété dans le cas où l'union et les ensembles sont infinis. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles infinis dénombrables. On peut énumérer les éléments de chaque X_n : $X_n = \left\{x_n^k\,,\ k \in \mathbb{N}\right\}$. On peut énumérer les éléments de la réunion de la façon suivante :

$$x_0^0\,,\ x_0^1\,,\ x_1^0\,,\ x_0^2\,,\ x_1^1\,,\ x_2^0\,,\ x_0^3\,,\ \ldots$$

comme illustré par la figure IV.1.1. Dans le cas où certains des ensembles sont finis, ou si la réunion est finie, ou si les ensembles partagent certains de leurs éléments, la construction précédente permet d'établir une bijection entre la réunion et une partie de $\mathbb{N}$, cette réunion est donc finie ou infinie dénombrable. □

Proposition IV.1.12. Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

4. On prendra garde à cette notation $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$ qui exprime simplement l'existence d'une bijection entre deux ensembles. Dans le cas d'ensembles finis, cela correspond bien à l'identité des cardinaux, mais pour des ensembles infinis, il faut lire comme un tout cette identité, qui implique des "quantités" ($\text{Card}(X)$ et $\text{Card}(Y)$) qui n'ont pas été définies.

5. Certains auteurs considèrent que l'attribut dénombrable est restreint aux ensemble infinis. Nous faisons ici le choix de considérer qu'un ensemble fini est dénombrable, ce qui permet de simplifier l'énoncé d'un grand nombre de propriétés. Ce choix impose de préciser *infini dénombrable* pour un ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$.

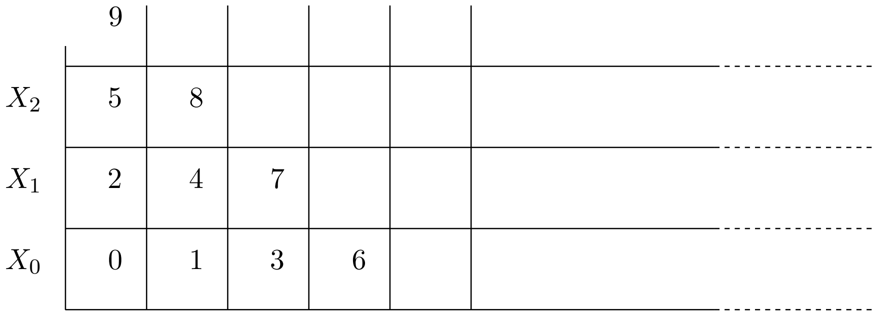

FIGURE IV.1.1 – Énumération d'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables

Démonstration. On considère N ensembles dénombrables X_1, ..., X_N, pour lesquels on se donne une énumération, et l'on note $P_k \subset X_1 \times \ldots X_N$ les éléments du produits qui ne font intervenir que les k premiers termes de chacun des X_i dans l'énumération choisie. Son cardinal est le nombre de mots de N lettres que l'on peut constituer à partir d'un alphabet de cardinal k, qui est k^N, il est donc fini. Le produit des X_i est inclus dans la réunion des P_k, il est donc dénombrable comme union dénombrables d'ensembles finis (proposition IV.1.11). □

Exercice IV.1.2. (••) On considère l'ensemble $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de 0 ou 1.

1) Montrer que X n'est pas dénombrable.

2) Montrer que le sous-ensemble X_0 des suites constantes au delà d'un certain rang est dénombrable.

3) Montrer que l'ensemble X_{per} des suites périodiques au delà d'un certain rang est dénombrable.

4) On définit l'application φ_N qui à tout $x \in X$ associe la valeur moyenne des N premiers termes. Montrer que, pour tout $x \in X_{per}$ (et donc a fortiori tout $x \in X_0$), la quantité $\varphi_N(x)$ admet une limite quand N tend vers $+\infty$. Montrer que cette propriété n'est pas vraie pour tous les éléments de X.

5) L'ensemble des éléments de X pour lesquels $\varphi_N(x)$ converge lorsque N tend vers $+\infty$ est-il dénombrable ?

IV.1.4 L'ensemble des réels : construction et structures afférentes

Il existe de multiples manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels munis de ses structures principales. La plupart des ouvrages privilégient une approche axiomatique et abstraite, nous décrivons ici une démarche plus ancrée sur la pratique quotidienne des nombres réels et leur utilisation effective, en nous en tenant ici à ce qui est strictement utile pour les sections qui précèdent.

La construction proposée peut sembler périlleuse : on utilisera ci-dessous des propriétés métriques de cet ensemble, en particulier la complétude, pour définir certaines opérations comme la multiplication. Or la notion même de distance, qui est une application à image dans $\mathbb{R}$, nécessite que la droite des réels soit bien définie. On pourra cependant vérifier que la notion de métrique et de convergence d'une suite ne nécessite qu'une structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ (qui est définie dès la proposition IV.1.17), la notion de valeur absolue (définie d'emblée), et l'addition entre deux réels (définition IV.1.20), qui ne nécessite pas de structure métrique.

Au-delà de ces questions de cohérence de la construction, les paragraphes qui suivent contiennent des développement assez fastidieux visant à définir des opérations du type de celles pratiquées par les écoliers dès leur plus jeune âge, en particulier l'addition (ou la soustraction) entre nombres. Nous avons ici une petite difficulté supplémentaire liée au fait que ces opérations posées commencent *par la droite*, c'est à dire du côté où un nombre réel non décimal est infini, ce qui nécessite une adaptation de la procédure.

Nous supposons construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni des deux lois $'+'$ et $'\times'$ qui en font un anneau, muni de la relation d'ordre total usuel. Et nous définissons l'ensemble $\mathbb{R}$ à l'aide de la représentation décimale décrite ci-dessous.

Définition IV.1.13. (Ensemble des réels)
On définit l'ensemble $\mathbb{R}$ comme $\{+,-\} \times \mathbb{N} \times [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^\star}$, c'est-à-dire de l'ensemble des

$$\pm a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$$

avec $a_0 \in \mathbb{N}$, et les a_k (appelées *décimales*) sont des entiers entre 0 et 9. On appelle *nombre réel* l'un de ces objets. On appelle nombre *décimal* un nombre dont l'écriture décimale est finie, c'est à dire que a_n est identiquement nul au-delà d'un certain rang, et l'on note $\mathbb{D}$ l'ensemble de ces nombres. On exclut *a priori* les nombres dont l'écriture finit par une infinité de 9 consécutifs, mais on prendra la liberté d'autoriser ponctuellement cette pathologie d'écriture [6], qui concerne les nombres décimaux. Tout nombre décimal peut en effet s'écrire

$$\pm\, a_0, a_1 \dots a_r 000 \dots \text{ avec } a_r \geq 1, \text{ ou } \pm\, a_0, a_1 \dots (a_r - 1) 999 \dots,$$

On appellera *propre* l'écriture d'un décimal sans l'infinité de 9.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $-a$ le nombre obtenu en remplaçant changeant le signe de a, qu'on appelle l'*opposé* de a, et $|a|$ (valeur absolue de a) le nombre obtenu en remplaçant le signe par '$+'$. On dira qu'un réel est strictement positif si son signe est '$+'$ et que ses décimales ne sont pas toutes nulles, et strictement négatif si son opposé est strictement négatif. 'Positif' signifie strictement positif ou nul, de même pour 'négatif'. Le nombre $0 = +0.0000\dots$ peut s'écrire aussi $0 = -0.0000\dots$, c'est le seul nombre à la fois positif et négatif.

Définition IV.1.14. (Troncature entière, partie entière)
On appelle *troncature entière* de $a = \pm a_0, a_1 \dots$ l'entier relatif $\pm a_0 \in \mathbb{Z}$, et *partie entière* de a l'entier $+a_0$ si a est positif, et $-a_0 - 1$ si a_0 est strictement négatif.

Remarque IV.1.15. La représentation décimale traditionnelle des réels décrite ci-dessus privilégie la notion de troncature, $\mathbb{R}$ est ainsi représenté en miroir, symétriquement par rapport à l'origine 0, qui se voit jouer de fait un rôle singulier. Nous verrons que ce choix est très adapté à la multiplication, mais moins à l'addition (définir l'addition entre nombres de signes différents demande un peu de soin). Signalons que l'on pourrait imaginer une autre convention, plus respectueuse de l'addition, invariante par translation, en représentant un nombre

6. Il est prudent de garder cette possibilité, du fait que ces objets sont susceptibles d'apparaître spontanément, comme lorsque l'on définira des sommes du type $0.111\cdots + 0.888\dots$.

par un entier relatif (la partie entière), plus un nombre du type $0, a_0 a_1 \dots$, de telle sorte que par exemple $-1,23$ s'écrirait $(-2) + 0.77$. Selon cette écriture, noter qu'il devient non trivial de construire l'opposé d'un nombre (alors que c'est immédiat avec la représentation-miroir que nous privilégions). Nous utiliserons ponctuellement cette vision des choses lors de la construction de l'addition entre deux nombres de signes distincts.

Théorème IV.1.16. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est infini dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable.

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{D}$ contenant $\mathbb{N}$, il est au moins infini dénombrable. Il s'écrit par ailleurs comme union des $\mathbb{D}_n$, qui sont les nombres décimaux dont les décimales sont nulles au-delà du rang n. Chacun de ces ensembles étant dénombrable (en multipliant par 10^n on retrouve les entiers), $\mathbb{D}$ est dénombrable comme réunion d'ensembles dénombrables (proposition IV.1.11).

Montrons maintenant, en suivant une démarche proche de la démonstration du théorème IV.1.9, que l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. Supposons qu'il le soit, on peut alors énumérer ses éléments

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, \mathbf{a_1^1}\, a_1^2\, a_1^3 \dots \\ r_2 &= 0, a_2^1\, \mathbf{a_2^2}\, a_2^3 \dots \\ r_3 &= 0, a_3^1\, a_3^2\, \mathbf{a_3^3} \dots \\ \vdots &= 0, \vdots \end{aligned}$$

On construit alors un nombre par le procédé d'*extraction diagonale de Cantor* (décimales indiquées en gras ci-dessus), chaque décimale de ce nombre étant définie selon le principe suivant : si la n-ième décimale de r_n est différente de 1, on la fixe à 1, si elle est égale à 1, on la fixe à 2 (par exemple). On construit ainsi un nombre réel en écriture propre qui par construction ne peut pas figurer dabns la liste ci-dessus, qui est pourtant une énumération exhaustive de $[0, 1[$. On en déduit par contradiction que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. □

Proposition IV.1.17. (Relation d'ordre total)
L'ensemble $\mathbb{R}$ admet une relation d'ordre total $\leq$.

Démonstration. Soient $a = a_0, a_1 \dots$ et $a = b_0, b_1 \dots$ deux éléments de $\mathbb{R}$ positifs et proprement écrits. S'il sont différents, il existe un plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq b_k$. Si $a_k < b_k$, on dit que $a < b$, et $b < a$ dans le cas contraire. On dit que tout négatif est inférieur à tout positif, et que, pour deux nombres a et b négatif, on a $a < b$ si et seulement si $-b < -a$. Cette relation d'ordre permet de définir la notion d'intervalles de type $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[\dots$ □

Proposition IV.1.18. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (voir définition IV.1.5).

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée. On suppose dans un premier temps que A contient au moins un nombre strictement positif. Il existe

$$m_0 = \max_{a \in A} \{P_0(a)\} \geq 0,$$

où P_k associe à un réel sa k-ième décimale (ou sa troncature entière pour $k = 0$). On introduit $A_0 = \{a \in A\,,\ P_0(a) = m_0\}$, et l'on pose

$$m_1 = \max_{a \in A_0} \{P_1(a)\} \in [\![0, 9]\!].$$

On construit ainsi par récurrence le nombre $M = m_0, m_1 m_2 \dots$ qui est une borne supérieure de A par construction. Si A ne contient que des nombres négatifs, on procède de façon analogue en remplaçant le max par un min. □

Définition IV.1.19. (Supremum - infimum - maximum - minimum)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\sup(A)$ sa borne supérieure (on dit qu'elle vaut $+\infty$ si A n'est pas majoré). Si elle appartient à A, on l'appelle le plus grand élément de A, ou maximum de A, qu'on écrit $\max(A)$.

Si A est majoré, $M = \sup A$ si et seulement si M majore A et s'il existe une suite x_n d'éléments de A qui tend vers M. On appellera x_n *une suite maximisante.*

On définit symétriquement les notions d'infimum, de plus petit élément, et de suite minimisante.

Définition IV.1.20. (Addition sur les réels en écriture décimale)
On définit l'addition sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : soient $a = a_0, a_1 \dots$ et $b = b_0, b_1 \dots$ deux éléments de $\mathbb{R}$ positifs et proprement écrits. Pour alléger les notations, nous proposons de présenter la construction de la somme $c = c_0, c_1 \dots$... comme un algorithme informatique, c'est à dire en gardant la notation c_k pour désigner une quantité dont la valeur est susceptible de changer au fil de la construction. On pose dans un premier temps $c_k = a_k + b_k$, et l'on définit $\alpha = (\alpha_k)$ comme une suite identiquement nulle au départ. Si $c_k \geq 10$, on remplace sa valeur par $c_k - 10$ et l'on pose $\alpha_{k-1} = 1$. Noter que dans ce cas la nouvelle valeur de c_k est inférieure ou égale à 8 (car $a_k + b_k$ est inférieur ou égal à 18). Si c se termine par une infinité de 9 consécutifs (à partir d'un rang k), alors d'après la remarque précédente la zone en question est vierge de toute retenue, on nettoie l'écriture en mettant à 0 tous les 9, et l'on rajoute 1 à c_{k-1}, qui est donc au maximal égal à 9, et sans menace de retenue puisque α_{k-1} est nécessairement égal à 0 d'après ce qui précède. On obtient donc un $c = (c_k)$ qui est soit décimal, soit non décimal et non stationnaire à 9. L'étape finale consiste à prendre en compte les retenues dans la somme finale. On considère pour cela les suites (nécessairement finies) de 9 consécutifs. Considérons une de ses suites de longueur maximale[7] $c_k c_{k+1} \dots c_\ell = 99 \dots 9$, encadrée donc par des décimales non égales à neuf. Toujours selon le même argument que la somme de deux naturels ≤ 9 est ≤ 18, on a nécessairement

$$\alpha_{k-1} = \alpha_k = \dots = \alpha_{\ell-1} = 0.$$

Si $\alpha_\ell = 0$, on laisse la suite de 9 inchangée, et si $\alpha_\ell = 1$, on remplace tous les 9 par des 0, et l'on rajoute 1 à c_{k-1} (qui est ≤ 8 par hypothèse). En dehors de ces paquets de 0 l'ajout de α_k à c_k peut se faire directement. On obtient ainsi un nombre réel en écriture décimale, que l'on définit comme la somme de a et b.

Il s'agit maintenant de définir la somme entre un nombre positif et un nombre négatif. On commence par considérer un nombre de l'intervalle $]0, 1[$, $a = -0, a_1 a_2 \dots$ (écriture propre),

7. C'est-à-dire qu'elle n'est pas contenue dans une suite de 9 strictement plus longue.

auquel on ajoute $+1$. Si a est décimal, $a = -0, a_1 a_2 \dots a_p$, la somme est définie comme

$$1 + a = 0, c_1 c_2 \dots c_p \,,\ c_i = 9 - a_i \text{ pour } i = 1, \dots, p-1 \,,\ c_p = 10 - a_p.$$

Si le nombre est non décimal, on définit simplement la différence par $b_i = 9 - b_i$ pour tout i. On considère maintenant un réel $a > 0$ et un entier $b < 0$. On utilise la décomposition formelle (formelle car on n'a pas encore défini l'addition entre a et b)

$$a + b = a_0 + 0, a_1 a_2 \dots - b_0 = a_0 - b_0 + 0, a_1 a_2 \dots.$$

Si l'entier $a_0 - b_0$ est positif ou nul, on se ramène à la somme de deux réels positifs déjà définie. Si cet entier est strictement négatif, on définit la somme comme

$$a + b = -c_0, c_1 \dots \text{ avec } c_0 = |a_0 - b_0| - 1 \text{ et } 0, c_1 c_2 \dots = 1 - 0, a_1 a_2 \dots$$

(cette dernière somme a déjà été définie précédemment). Pour finir, on considère maintenant $a > 0$ et $b < 0$ non entier. On écrit

$$a + b = a_0 + 0, a_1 a_2 \dots - b_0 - 1 + (1 - 0, b_1 \dots) = a_0 - b_0 - 1 + 0, a_1 a_2 \dots + (1 - 0, b_1 b_2 \dots).$$

Le terme entre parenthèses a été défini précédemment comme un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On sait effectuer sa somme avec $0, a_1 a_2 \dots$ (tous deux positifs). Si cette somme est dans l'intervalle $]0, 1[$, on se retrouve dans la situation précédente. Sinon, on l'écrit $1 + 0, d_1 d_2 \dots$, et l'on est une nouvelle fois ramené à donner un sens à la somme d'un entier $a_0 - b_0 - 1 + 1 = a_0 - b_0$ avec un nombre du type $0, d_1 d_2 \dots$, cas qui a déjà été traité.

Proposition IV.1.21. Soit (x_n) une suite de réels majorée et croissante. Alors (x_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, qui est la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite.

Démonstration. L'ensemble X des termes de la suite est majoré, il admet donc une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$, telle que $x_n \leq \ell$ pour tout n. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un terme de la suite supérieur à $\ell - \varepsilon$. la suite étant croissante, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell]$, d'où la convergence de x_n vers ℓ. □

Pour toute suite (x_n) de réels, le supremum des x_k pour k plus grand que n est soit identiquement égal à $+\infty$ (si la suite n'est pas majorée), soit décroissant en n. Dans le second cas cette quantité converge donc vers $-\infty$ ou une limite réelle. De même l'infimum des x_k pour k plus grand que n est identiquement $-\infty$, ou réel croissant, et converge dans ce cas vers $+\infty$ ou une limite réelle. Ces conséquences directes de la proposition précédente permettent de définir les notions de lim sup et lim inf.

Définition IV.1.22. (Limite inférieure, limite supérieure (••))
Soit x_n une suite réele, on définit

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{k\geq n} x_k\right) \in [-\infty, +\infty] \,,\ \liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{k\geq n} x_k\right) \in [-\infty, +\infty] \,,$$

Exercice IV.1.3. (Limites supérieure et inférieure (•))
a) Donner les lim sup et lim inf de la suite (x_n) dans les cas suivants

$$x_n = \frac{1}{n} \,,\ x_n = n \,,\ x_n = (-1)^n \,,\ x_n = (-1)^n \,,\ x_n = \sin(n).$$

b) Que peut-on dire d'une suite dont la lim inf et la lim sup ont la même valeur finie ?

Exercice IV.1.4. (•) Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles. Montrer que

$$\sup_n (x_n + y_n) \leq \sup(x_n) + \sup(y_n).$$

Donner un exemple pour lequel il y a en fait égalité, et un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Définition IV.1.23. (Convergence d'une suite de réels (•))
On dit qu'une suite (a_n) de réels tend vers 0 si sa valeur absolue peut être rendue arbitrairement petite au-delà d'un certain rang, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

On dit qu'une suite (a_n) de réels tend vers une limite a si $|a_n - a|$ tend vers 0.

Le fait d'avoir défini une relation d'ordre total et une addition sur $\mathbb{R}$ permet de donner un sens à la définition générale d'une métrique, selon la définition I.2.1, page 7. Cette définition peut être appliquée à $\mathbb{R}$ lui-même, pour définir la distance canonique basée sur la valeur absolue de la différence entre deux nombres.

Proposition IV.1.24. (Métrique sur $\mathbb{R}$)
L'application $(x, y) \in \mathbb{R} \longmapsto d(x, y) = |x - y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La séparation est immédiate, ainsi que la symétrie. Soient maintenant 3 réels x, y, et z. Si $x - y$ et $y - z$ sont de même signe, on a

$$|x - y| + |y - z| = |x - z|\,,$$

et s'il sont de signes opposés, on a

$$|x - z| = |x - y + (y - z)| \leq \max(|x - y|\,, |y - z|) \leq |x - y| + |y - z|\,.$$

dans les deux cas, l'inégalité triangulaire est vérifiée. □

Proposition IV.1.25. L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est complet (voir définition I.4.3, page 16).

Démonstration. On considère une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (défini par IV.1.13), notée[8] (a^n).
La petite difficulté pour montrer que la suite converge est que, pour $n \in \mathbb{N}$, il est possible que a^n_k oscille entre deux valeurs successives, puisque deux nombres qui ne s'identifient que sur les $k - 1$ premières décimales peuvent être arbitrairement proches. Plus précisément, si l'on fixe $r \in \mathbb{N}$, alors $|a - b| < 10^{-r}$ impose l'alternative suivante :

1. les décimales de a et b s'identifient jusqu'au rang $r - 1$, et diffèrent d'une unité au r-ème rang ;
2. ces décimales diffèrent d'une unité dès un certain rang $\ell < r$, par exemple $b_\ell = a_\ell + 1$, et dans ce cas $a_i = 9$ et $b_i = 0$ pour $\ell + 1 \leq i \leq r$.

8. On prendra garde à la notation a^n, où n ne représente pas une puissance mais un indice : $a^n \in \mathbb{R}$ désigne simplement le $n-$ième terme de la suite. Chaque terme a^n est lui-même défini par une infinité de chiffres, les a^n_k pour $k = 0, 1, \ldots$

Considérons maintenant une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ en écriture décimale, $(a^n) = (a^n_k)$ (l'indice k représente comme précédemment les décimales, et n l'indice du terme de la suite). Si toutes les décimales se stabilisent au delà d'un certain rang, c'est qu'il existe $\ell = (\ell_k)$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \exists N_k\,,\ \forall n \geq N_k\,,\ a^n_k = \ell_k,$$

on a alors convergence de a^n vers ℓ. Si ce n'est pas le cas, notons k_0 le plus petit des indices k tels que a^n_k ne se stabilise jamais. Comme a^p et a^q deviennent arbitrairement proches, d'après l'alternative énoncée ci-dessus, la décimale a^n_k oscille nécessairement entre deux valeurs distantes de 1, disons ℓ_k et $\ell_k + 1$, les indices précédents se stabilisant. D'après la remarque faite en préambule de cette démonstration, pour tout $r \in \mathbb{N}$ grand, tous les termes de la suite pour $n \geq r$ prennent nécessairement l'une ou l'autre des formes

$$\ell_0, \ell_1 \dots \ell_{k-1}\ell_k 999999 \dots 99\underbrace{9}_{r} \dots \quad \text{ou} \quad \ell_0, \ell_1 \dots \ell_{k-1}(\ell_k + 1)0000000 \dots 00\underbrace{0}_{r} \dots,$$

qui implique la convergence vers le décimal $\ell_0, \ell_1 \dots \ell_{k-1}(\ell_k + 1)000 \dots$ (la première forme correspond à l'écriture impropre de ce même décimal). □

Définition IV.1.26. (Produit de deux réels)
On définit le produit de deux réels par passage à la limite à partir du produit entre deux décimaux, qui lui-même découle du produit entre deux entiers. La démarche repose sur les trois étapes décrites suivantes :

1. (Produit par une puissance de 10)
   En premier lieu, nous définissons le produit entre un réel et une puissance de 10. Pour tout réel $a = a_0, a_1 a_2 \dots$, tout entier naturel n, on définit $10^n \times a$ comme le réel obtenu en décalant vers la droite la virgule de n pas. On définit $10^{-n} \times a$ comme le nombre obtenu en décalant la virgule de n pas vers la gauche.
2. (Produit entre deux décimaux)
   Soient $a = a_0, a_1 \dots a_n$ et $b = b_0, b_1 \dots b_m$ deux nombres décimaux. On définit le produit $a \times b$ comme
   $$a \times b = (\underbrace{10^n \times a}_{\in \mathbb{N}}) \times (\underbrace{10^m \times b}_{\in \mathbb{N}}) \times 10^{-m-n}.$$
3. (Produit entre deux réels)
   Soient $a = +a_0, a_1 a_2 \dots$ et $b = +b_0, b_1 b_2 \dots$ deux nombres réels. Pour tous $n \geq 0$, $m \geq n$, on note $a_{n,m}$ le nombre décimal obtenu en ne conservant que les décimales entre n et m. Le nombre a est ainsi limite de la suite $(a_{0,n})$ quand n tend vers $+\infty$, de même pour b. Montrons que la suite de décimaux $(a_{0,n} \times b_{0,n})$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On a, pour tous p, q avec $p < q$,
   $$\begin{aligned} a_{0,q} \times b_{0,q} - a_{0,p} \times b_{0,p} &= (a_{0,p} + a_{p+1,q}) \times (b_{0,p} + b_{p+1,q}) - a_{0,p} \times b_{0,p} \\ &= a_{p+1,q} \times b_{0,p} + a_{0,p} \times b_{p+1,q} + a_{p+1,q} \times b_{p+1,q}, \end{aligned}$$
   qui est majoré en valeur absolue par $|b| \times 10^{-p} + |a| \times 10^{-p} + 10^{-2p}$, qui tend vers 0 quand p et q tendent vers $+\infty$. La suite $(a_{0,n} \times b_{0,n})$, de Cauchy, converge donc vers une limite. Le produit $a \times b$ est défini comme cette limite.

Définition IV.1.27. (Droite numérique achevée)
On appelle droite numérique achevée, et l'on note $\mathbb{R}$, l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ auquel on rajoute deux points noté $+\infty$ et $-\infty$.

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est étendue à $\overline{\mathbb{R}}$ par $-\infty < +\infty$ et, pour tout réel a, $-\infty < a < +\infty$.

IV.1.5 Inégalités fondamentales

Proposition IV.1.28. (Inégalité arithmético-géométrique)
Soient x_1, ..., x_n des réels positifs ou nuls, et $(\alpha_n) \in]0, +\infty[^n$ une famille de poids. On a

$$(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})^{1/\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

avec $\alpha = \sum \alpha_i$.

Démonstration. Par concavité de la fonction logarithme, on a

$$\frac{1}{\alpha} \sum \alpha_n \log x_n \leq \log \left(\frac{1}{\alpha} \sum \alpha_n x_n \right),$$

d'où l'inégalité en prenant l'exponentielle. □

Proposition IV.1.29. (Inégalité de Young)
Soient a et b deux réels positifs où nuls, et p, q deux réels > 0 conjugués, i.e. tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique (proposition IV.1.28), avec $\alpha_1 = 1/p$, $\alpha_2 = 1/q$, $x_1 = a^p$, et $x_2 = b^q$. □

Proposition IV.1.30. (Inégalité de Hölder)
Soient p et q deux réels positifs conjugués, i.e. tels que $1/p + 1/q = 1$, et $\theta = (\theta_i) \in [0, +\infty[^d$. Pour tous $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{i=1}^{d} |\theta_i x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Démonstration. Remarquons en premier lieu que cette inégalité est $1-$homogène vis à vis de x et y : si elle est valable pour x et y, elle est aussi valable pour λx et μy, quels que soient les réels λ et μ. Il suffit donc de la démontrer dans le cas particulier où $\sum \theta_i |x_i|^p = \sum \theta_i |y_i|^p = 1$, c'est-à-dire de montrer que, pour x et y ainsi normalisés, on a

$$\sum_{i=1}^{d} |\theta_i x_i y_i| \leq 1.$$

Cette inégalité résulte directement de l'inégalité de Young (proposition IV.1.29) :

$$\sum_{i=1}^{d} |\theta_i x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{d} \theta_i \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d} \theta_i |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui conclut la preuve. □

Proposition IV.1.31. (Inégalité de Minkovski)
Soit $p \in [1 + \infty]$, et $\theta = (\theta_i) \in [0, +\infty[^d$. Pour tous $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Démonstration. L'inégalité est immédiate pour le cas $p = +\infty$. Pour $p \in [1, +\infty[$, on écrit

$$\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{d} \theta_i (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} \theta_i |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder (proposition IV.1.30) à chacun des deux termes de la somme avec les indices p et $p/(p-1)$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i + y_i|^p \quad \leq & \quad \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i + y_i|^p \right)^{(p-1)/p} \\ & + \quad \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |y_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i |x_i + y_i|^p \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

On divise les deux membres de cette inégalité par $\left(\sum \theta_i |x_i + y_i|^p\right)^{1-1/p}$ (si cette quantité est nulle, l'inégalité à démontrer est trivialement vérifiée), pour obtenir l'inégalité annoncée. □

IV.2 Pour aller plus loin (●●●●)

IV.2.1 Théorie des ensembles, cardinalité

Axiome IV.2.1. (Axiome du choix (● ● ●))
Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Il existe une application qui à chaque ensemble X_i associe un élement x_i de cet ensemble.

Théorème IV.2.2. (Cantor-Bernstein (●●●●))
Si $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$, on a $X \simeq Y$. En d'autres termes, s'il existe une injection de X dans Y, et une injection de Y dans X, alors il existe une bijection entre X et Y.

IV.2.2 Complété d'un espace métrique (●●●●)

Définition IV.2.3. Soit (X, d) un espace métrique. On appelle complété de cet espace la donnée d'un espace métrique complet $(\bar{X}, \bar{d})$ muni d'une isométrie

$$T \ : \ (X, d) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{d})$$

dont l'image est dense dans $\bar{X}$.

Théorème IV.2.4. (Complété d'un espace métrique)
Tout espace métrique admet un complété, qui est unique à isométrie près.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique. On munit l'espace des suites dans X de la relation d'équivalence

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \, , \ x' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \, , \ x \ \mathcal{R} \ x' \Longleftrightarrow d(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$$

On note C l'ensemble des suites de Cauchy dans X, et $\overline{X} = C/\ \mathcal{R}$ l'espace quotient. Pour $\overline{x}$, $\overline{x}'$ dans $\overline{X}$, $(x_n) \in \overline{x}$, $(x'_n) \in \overline{x}'$, la quantité $d(x_n, x'_n)$ converge vers une limite qui ne dépend pas des représentant choisis. En effet, on a

$$d(x_p, x'_p) - d(x_q, x'_q) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, x'_q) + d(x'_q, x'_p) - d(x_q, x'_q) = d(x_p, x_q) + d(x'_q, x'_p)$$

qui tend vers 0 quand p, q tendent vers $+\infty$. On montre de la même manière que son opposé $d(x_q, x'_q) - d(x_p, x'_p)$ est majoré par une quantité qui tend vers 0. La valeur absolue de $d(x_p, x'_p) - d(x_q, x'_q)$ tend donc vers 0 quand p et q tendent vers $+\infty$. La suite $d(x_n, x'_n)$ est donc de Cauchy, donc converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On montre immédiatement que cette limite ne dépend pas du représentant choisi du fait de l'adjacence des suites d'une même classe. On note $\bar{d}(\overline{x}, \overline{x}')$ cette limite.

On montre tout aussi immédiatement que $\bar{d}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est une distance sur $\overline{X}$.

On note T l'application qui à une suite constante dans X (donc de Cauchy) associe sa classe dans $\overline{X}$. Cette application est par construction une isométrie de X vers $\overline{X}$. Montrons que son image est dense dans $\overline{X}$. Soit $\overline{x}$ une classe de $\overline{X}$, et (x_n) l'un de ses représentants. On note $\overline{x_n}$ la classe de la suite constante égale à x_n. On a

$$\bar{d}(\overline{x_n}, \overline{x}) = \lim_q \bar{d}(x_n, x_q),$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini du fait du caractère de Cauchy de (x_n).

Montrons maintenant que $\overline{X}$ muni de $\bar{d}$ est un espace métrique complet. On considère une suite $(\overline{x}^n)$ de Cauchy dans $\overline{X}$. Pour tout n, comme on l'a vu précédemment, la classe $\overline{x}^n$ peut être approchée par la classe d'une suite constante écrite $\overline{u_n}$, avec $u_n \in X$, à $1/n$ près. On considère maintenant la suite $u = (u_n)$. Cette suite est de Cauchy par construction. En effet, on a

$$d(u_p, u_q) = \bar{d}(\overline{u_p}, \overline{u_q}) \leq \bar{d}(\overline{u_p}, \overline{x}^p) + \bar{d}(\overline{x}^p, \overline{x}^q) + \bar{d}(\overline{x}^q, \overline{u_q}) \leq \frac{1}{p} + \bar{d}(\overline{x}^p, \overline{x}^q) + \frac{1}{q}.$$

On note $\overline{u}$ sa classe. On a

$$\bar{d}(\overline{x}^n, \overline{u}) \leq \bar{d}(\overline{x}^n, \overline{u_n}) + \bar{d}(\overline{u_n}, \overline{u}),$$

qui tend vers 0 par construction. □

IV.2.3 Topologie générale (●●●●)

Définition IV.2.5. (Topologie, ouverts, fermés)
Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X la donnée d'une famille $\mathcal{T}$ de parties de X, qu'on appelle les *ouverts*, telle que

(i) l'ensemble vide et X appartiennent à $\mathcal{T}$,
(ii) toute union d'ouverts est un ouvert,
(iii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On appelle fermé le complémentaire d'un ouvert.

On appelle le couple $(X, \mathcal{T})$ un *espace topologique*.

Définition IV.2.6. (Finesse)
Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologie sur X. On dit que $\mathcal{T}'$ est *plus fine* que $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, i.e. si tout ouvert de $\mathcal{T}$ est ouvert de $\mathcal{T}'$.

Définition IV.2.7. (Topologies discrète et grossière)
Tout ensemble X peut être muni de la topologie *discrète*, pour laquelle tout singleton, et donc toute partie, est un ouvert. Toute partie est donc à la fois ouverte et fermée pour la topologie discrète. C'est la plus fine des topologies dont on puisse équiper X. À l'opposé, pour la topologie *grossière*, seuls $\emptyset$ et X sont des ouverts.

Définition IV.2.8. (Voisinage)
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $x \in X$. On appelle voisinage de x toute partie de X qui contient un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinage de X.

Définition IV.2.9. Une application d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ dans un espace topologique $(X', \mathcal{T}')$ est dite *continue* si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

Proposition IV.2.10. L'application identité de $(X, \mathcal{T}')$ dans $(X.\mathcal{T})$ est continue si et seulement si $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$.

Définition IV.2.11. (Topologie induite)
Soit X un espace topologique et $A \subset X$. L'ensemble des intersections d'ouverts de X avec A munit A d'une topologie, appelée *topologie induite.*

Définition IV.2.12. (Connexité)
Soit X un espace topologique. On dit que X est *connexe* si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$. On dit que $A \subset X$ est connexe si A muni de la topologie induite est connexe.

Proposition IV.2.13. L'espace X est connexe s'il n'admet aucun partition [9] en deux ouverts.

9. On rappelle que les membres d'une partition doivent être non vides.

Proposition IV.2.14. Une union de parties connexes d'intersection non vide est connexe.

Démonstration. Soit C l'union d'une famille $(C_i)_{i\in I}$ de connexe, et $x \in \cap C_i$. Considérons une partition de C pour la topologie induite :

$$C = (U_1 \cup U_2) \cap C,$$

où U_1 et U_2 sont des ouverts de X. Le point x est nécessairement dans l'un des deux ouverts, par exemple $x \in U_1$. Pour tout C_i, l'union disjointe des ouverts U_1 et U_2 recouvre C_i. Comme C_i est connexe, l'intersection d'un des deux ensembles avec C_i est nécessairement vide, comme ça ne peut pas être U_1 qui contient $x \in C_i$, c'est U_2. On a donc $U_2 \cap C_i = \emptyset$ pour tout i. Ainsi C n'admet aucune partition en deux ouverts, C est donc connexe. $\square$

Définition IV.2.15. (Composantes connexes)
Soit X un espace topologique. Pour tout $x \in X$ on note C_x la plus grande partie connexe contenant x, définie comme l'union des connexes contenant x (qui est bien connexe d'après la proposition précédente). Pour $x \neq y$, on a $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$, toujours d'après la proposition précédente. On peut donc la relation d'équivalence suivante : $x \mathcal{R} y$ si $C_x = C_y$. Les classe d'équivalence de cette relation sont appelée *composantes connexes* de X.