

Probabilités IV

MINES ParisTech

3 janvier 2022 (#99fdd59)

Question 1 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\Gamma(\alpha, \theta)$ et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- ☐ A : $M_n \rightarrow \frac{\alpha}{\theta}$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ B : $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{\alpha}{\theta}$
- ☐ C : $\sqrt{n}(M_n - \frac{\alpha}{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{\alpha}{\theta^2})$
- ☐ D : $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^1} \frac{\alpha}{\theta}$

Question 2 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi qu'une variable X de fonction de répartition F et $a \in]0, 1[$

- ☐ A : $X_n^a \rightarrow \mathbb{E}(X^a)$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ B : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, a]}(X_i) \rightarrow F(a)$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ C : $\mathbb{P}(X_n \leq a) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ D : $\mathbb{E}(1_{]a, +\infty[}(X)) = 1 - F(a)$

Question 3 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda_n)$ où λ_n est une suite réelle qui converge vers 1.

- ☐ A : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$
- ☐ B : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 1$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ C : $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ D : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{E}(1)$

Question 4 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Cauchy, dont on rappelle la densité : $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- ☐ A : $\frac{1}{\sqrt{n}} (\sum_{i=1}^n X_i - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- ☐ B : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ C : $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$
- ☐ D : Rien de tout cela

Question 5 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et une v.a. X , toutes définies sur le même espace probabilisé, telles que $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}$.

- ☐ A : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$
- ☐ B : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$
- ☐ C : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ p.s.
- ☐ D : Rien de tout cela