Chapitre I

Topologie

I.1 Motivations, vue d'ensemble

Les sections qui suivent portent pour l'essentiel sur des questions de topologie dite métrique, c'est-à-dire sur la manière dont une *distance* structure un ensemble. Cette notion est très intuitive, du fait que la distance euclidienne de l'espace physique $\mathbb{R}^3$, ou tout du moins l'ordre de grandeur de la distance entre deux objets, est directement accessible aux sens. Il est néanmoins intéressant, y compris pour appréhender le monde réel, d'aborder cette notion d'un point de vue général, abstrait. En effet, la modélisation d'un très grand nombre de phénomènes réels repose sur la définition d'une métrique adaptée. Ce rôle central joué par la métrique s'est encore accru ces dernières années avec l'explosion de la science des données. Donnons ci-dessous quelques exemples de situations dans lesquelles une part essentielle de la démarche réside dans la définition d'une distance adaptée, en nous limitant aux 3 grandes classes de contextes qui nous paraissent essentielles.

1) En premier lieu une distance a vocation à structurer un espace donné, et sa définition dépend du regard que l'on souhaite porter sur cet espace, et des facteurs que l'on souhaite prendre en compte. Ainsi, pour deux points d'une zone géographique représentée sur un plan, la distance euclidienne canonique correspond à la distance "à vol d'oiseau" du langage commun. Mais si l'on s'intéresse à une notion de proximité respectueuse de la difficulté effective de se rendre d'un point à un autre, il peut être pertinent de privilégier par exemple le temps qu'il faut pour se rendre du point x au point y, selon une modalité donnée, en prenant en compte les contraintes associées à la topographie du terrain. Un exemple archétypal de cette approche est la célèbre *distance de Manhattan*, appelée aussi *distance du chauffeur de taxi*, adaptée à une zone géographique dans laquelle les axes de circulation sont structurés en réseau orthogonal. À l'échelle d'un pays comme la France, il peut être fécond de définir la distance entre deux points comme le temps minimal qu'il faut pour aller d'un point à un autre en utilisant les transports en communs (complétés par de la marche à pied au départ et à l'arrivée). L'espace métrique associé (ce terme est défini plus loin, il s'agit simplement de la carte munie de la distance que l'on vient de définir) est difficile à représenter graphiquement, mais il est une représentation plus fidèle et féconde du territoire si l'on s'intéresse à la manière dont le réseau de transport structure l'espace. On pourra considérer par exemple le "disque" (dont la forme peut être très éloignée de l'image que l'on se fait d'un disque) centré en la

position d'une entreprise et de rayon une demie-heure, qui couvrira la zone dans laquelle habiteront les salariés qui souhaitent garder leur temps de déplacement journalier en dessous de cette durée. On pourra aussi considérer la distance associée au temps de parcours sur route, et s'intéresser par exemple à la part du territoire constituée des points situés à moins d'une demie-heure d'un hôpital ou d'une maternité. Ce type d'approche conduit assez naturellement à des problèmes délicats d'optimisation, comme par exemple : comment positionner de façon optimale des centres de soin dans un territoire de façon à minimiser la distance (= temps) maximale pour se rendre dans l'un de ces centres ? Ces problèmes complexes et la forme de leurs solutions dépendent étroitement de la distance choisie.

2) Une distance a également vocation à quantifier une différence, un écart, entre deux entités de même nature. Prenons l'exemple d'une collection d'images. Une image (disons carrée, et en noir et blanc) d'une résolution donnée peut être vue comme une matrice $N \times N$ de valeurs de l'intervalle $[0, 1]$ (niveaux de gris). La proximité entre deux images (par exemple parmi des images représentant des formes géométriques, ou des objets de la vie courante) peut être estimée assez efficacement par un enfant de 3 ans, mais il est extrêmement délicat de définir une métrique adaptée à cette situation, et la réponse peut dépendre du type d'images que l'on considère. On pourra se convaincre rapidement qu'identifier des images à des vecteurs de $[0, 1]^{N^2}$, et utiliser la distance euclidienne standard sur $\mathbb{R}^{N^2}$, est très loin d'être pertinent. Dans un contexte différent, on peut penser à une population d'individus à laquelle on associe un vecteur de caractéristiques (poids, âge, taille, taux de diverses substances dans le sang, ...). Structurer la population en catégories pertinentes passe par la définition d'une distance : peut-on associer à tout couple de personnes (représentées ici par leurs vecteurs de paramètres) un nombre qui quantifie leur éloignement ? Là encore une réponse pertinente à cette question peut être assez éloignée de la distance euclidienne. Un écart de 2 ans entre individus peut ainsi être considéré comme plus significatif s'il s'agit de nouveaux-nés que s'il s'agit d'adultes en plein force de l'âge. Il peut être aussi pertinent de prendre en compte des couplages forts entre composantes, ce que la distance euclidienne ne permet pas. Á titre d'exemple, une différence de poids de 5 kg est plus significative pour des nouveaux-nés que pour des quinquagénaires. Ces questions sont également cruciales dans le contexte de l'apprentissage statistique supervisé : l'apprentissage passe par une étape de minimisation d'une fonctionnelle de coût (appelée fonction *loss*), basée sur la définition d'une distance entre ce qui est produit par la fonction prédictive et la sortie provenant des données labellisées de la base d'apprentissage, et l'efficacité de l'approche repose en grande partie sur le choix de la distance.

3) L'expression des lois de la physique (systèmes de particules, mécanique des fluides, du solide, électromagnétisme, mécanique quantique), ou la modélisation de phénomènes réels (en biologie, dynamique des populations, économie, ...) conduit à des équations différentielles ordinaires (EDO) ou à des équations aux dérivées partielles (EDP), qui font intervenir dans le premier cas (EDO) des fonctions d'un intervalle en temps dans $\mathbb{R}^d$, dans le second cas (EDP) des fonctions à la fois du temps et d'une variable d'espace dans $\mathbb{R}^d$. L'analyse théorique de ces équations nécessite une structuration de l'espace dans lequel vivent leurs solutions. Il s'agit d'espaces de dimension infinie[1] sur lesquels il s'agit de définir une distance. On choisit en général une distance qui respecte la structure linéaire, construite à partir de ce que l'on

1. On ne peut par exemple pas décrire l'ensemble des fonctions continues d'un intervalle en temps $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$ comme combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions particulières. C'est encore pire, si l'on ose dire, dans le cas des EDP, où l'on est amené à considérer, par exemple pour représenter un champ scalaire dynamique comme une température, des applications de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

appellera une *norme*. L'étude de tels espaces, qui constitue ce que l'on appelle l'*Analyse Fonctionnelle*, repose sur les notions qui sont introduites dans les sections qui suivent (espace vectoriel normé, ouverts et fermés, suites, complétude, compacité).

Dans un contexte plus directement lié aux sciences de l'ingénieur, la résolution numérique des problèmes de type EDO ou EDP mentionnés ci-dessus passe par des approximations : on effectue ce que l'on appelle une *discrétisation* du temps, en subdivisant l'intervalle continu en petits tronçons, qui vont permettre de transformer le problème de départ, qui est en dimension infinie, en un problème en dimension finie. Une approche analogue est faite en espace dans le cas des EDP [2]. Étudier ces méthodes d'approximation (ce qu'on appelle l'*Analyse Numérique*) consiste à montrer que les solutions approchées *convergent* vers la solution exacte de l'équation. Cette dernière vivant dans un espace de dimension infinie, sur lequel toutes les normes ne sont pas équivalentes, le choix de la norme conditionne encore de façon essentielle la nature du résultat de convergence.

I.2 Notion de distance, espaces métriques

I.2.1 Définitions, exemples

Définition I.2.1. (Distance, espace métrique (•))
Soit X un ensemble. On appelle distance (ou métrique) sur X une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *(Séparation)* Pour tous x, y dans X, on a $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
(ii) *(Symétrie)* $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous x, y dans X.
(iii) *(Inégalité triangulaire)* Pour tous x, y, z dans X, on a

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Le couple (X, d) est appelé espace métrique.

Exercice I.2.1. (•) On considère l'ensemble fini $[\![1, N]\!]$, pour N entier ≥ 1. À une distance sur X on peut associer une matrice carrée $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, avec $d_{ij} = d(i, j)$. Décrire l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ qui correspondent à une métrique sur X. Quelles sont les propriétés de cet ensemble ?

Certains espaces métriques possèdent une structure d'espace vectoriel sous-jacente, on privilégie dans ce cas les métriques basées sur la notion de *norme*, qui mesure la longueur des vecteurs en respectant la structure linéaire.

---

2. Il s'agit là d'un domaine extrêmement vaste, qui dépasse largement le cadre de ce cours. Citons simplement les trois grandes méthodes de discrétisation en espace : différences finies, éléments finis (très utilisés par exemple en mécanique du solide), et volumes finis (très adaptés à la discrétisation de lois de conservation dites hyperboliques, utilisés par exemple pour modéliser les écoulements compressibles). Selon des procédures diverses, chacune de ces méthodes est basée sur un espace de dimension finie dont les élements (fonctions particulières, par exemple affines par morceaux pour certaines méthodes d'éléments finis), ont vocation à *approcher* les solutions des systèmes de départ.

Définition I.2.2. (Norme, espace vectoriel normé (•))
Soit E un espace vectoriel. On appelle norme une application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $u \longmapsto \|u\|$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *(Séparation)* Pour tout u dans E, on a $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
(ii) *(Homogénéité)* Pour tout $u \in E$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$.
(iii) *(Inégalité triangulaire)* Pour tous u, v dans E, on a

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé *espace vectoriel normé.* Cette norme équipe E d'une distance canonique $d(u, v) = \|v - u\|$, qui en fait un espace métrique particulier.
On dit qu'une partie A de E est *bornée* si $\|x\|$ est majoré sur A, c'est-à-dire s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\|x\| \leq C$ pour tout x dans A.

Exercice I.2.2. (•) Soit E un e.v.n. Montrer que, pour tous x, y dans E, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

Proposition I.2.3. (Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^d$ (•))
L'ensemble des réels muni de la valeur absolue est un e.v.n. Pour tout d entier ≥ 1, tout $p \in [1, +\infty]$, les expressions

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{si} \quad p \in [1, +\infty[\,, \;\; \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \,,$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^d$, qu'on appelle norme p, ou norme ℓ^p. Le cas $p = 2$ correspond à la norme dite *euclidienne*, associée au produit scalaire canonique

$$\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \, y_i,$$

de telle sorte que $\|x\|_2 = \langle x \,|\, x \rangle^{1/2}$.

Démonstration. On sait déjà que $|x - y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ (proposition IV.1.24), on a donc la séparation et l'inégalité triangulaire. Et on a par ailleurs $|\lambda x| = |\lambda| \, |x|$ pour tous x et λ réels par définition de la valeur absolue et du produit entre réels.
En dimension supérieure, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont immédiates. L'inégalité triangulaire pour $p = +\infty$ découle de celle de la valeur absolue :

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq d} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq d} |y_i| \,.$$

Pour $p \in [1, +\infty[$ est une conséquence directe de l'inégalité dite de *Minkovski* (voir proposition IV.1.24, page 88). □

Définition I.2.4. (Diamètre (•))
Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subset X$. On appelle diamètre de A le nombre (potentiellement égal à $+\infty$)

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \in [0, +\infty].$$

Exercice I.2.3. Proposer une métrique sur $X =]-1,1[$ qui en fasse un espace de diamètre infini.

Définition I.2.5. (Distance à un ensemble)
Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$ non vide, et $x \in X$. On définit la distance de x à A par

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$

On dit que cette distance est *atteinte* s'il existe $z \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,z)$.

Définition I.2.6. (Boules ouvertes, boules fermée, sphères (•))
Soit (X,d) un espace métrique, on appelle boule ouverte de centre x et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble

$$B(x,r) = \{y \in X\ ,\ d(x,y) < r\}\ .$$

La boule fermée, notée $\overline{B}(x,r)$, est obtenue en remplaçant l'inégalité stricte par l'inégalité large $d(x,y) \leq r$. La sphère de centre x et de rayon r est l'ensemble des points situés à distance r de x :

$$S(x,r) = \{y \in X\ ,\ d(x,y) = r\}\ .$$

Exercice I.2.4. (•) Donner l'allure de la sphère unité (sphère de centre l'origine et de rayon 1) de $\mathbb{R}^2$ pour les différentes normes p (on distinguera les cas $p = 1$, $p \in]1,2[$, $p = 2$, $p \in]2,+\infty[$, et $p = +\infty$).

Définition I.2.7. (Ensemble discret)
Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie de X. On dit que l'ensemble A est *discret* si pour tout point de A il existe une boule de centre x qui ne contient pas d'autre élément de A, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A\ ,\ \exists \varepsilon > 0\ ,\ B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}\ .$$

Remarque I.2.8. On prendra garde au fait que, dans la définition ci-dessus, le ε dépend x, de telle sorte que l'ensemble $\{1/n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est discret.

Exercice I.2.5. (Distance de Hamming)
On considère l'ensemble $H_N = \{0,1\}^N$ des $N-$uplets de 0 ou de 1 (ensemble des mots de N bits).

1) On définit $d(x,y)$ comme le nombre de positions où les bits de x et y diffèrent, i.e.

$$x = (x_0 \ldots, x_{N-1})\ ,\ y = (y_0 \ldots, y_{N-1})\ ,\ d(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - y_n|\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi une distance (appelée distance de *Hamming*), qui fait de H_N un espace *discret*. Quel est le diamètre de H_N ?

2) Soit $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Donner le cardinal de la sphère de centre x et de rayon $r \geq 0$, en fonction de r.

I.2.2 Topologie d'un espace métrique

Définition I.2.9. (Ouverts et fermés d'un espace métrique (•))
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $U \subset X$ est ouvert s'il est vide[3] ou si, pour tout x dans U, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. On dit qu'une partie de X est fermée si son complémentaire est ouvert.

Proposition I.2.10. (••) Soit (X, d) un espace métrique.

L'ensemble vide et X sont à la fois fermés et ouverts.

Toute union d'ouverts est un ouvert, et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection de fermés est fermée, et toute union finie de fermés est fermée.

Démonstration. L'ensemble vide est un ouvert par définition, et X est lui-même ouvert car toutes les boules sont dans X. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, et U leur union. Tout $x \in U$ est dans l'un des U_i, il existe donc une boule $B(x, r) \subset U_i \subset \bigcup U_j$. Soient maintenant U_1, U_2, …, U_N des ouverts de X. Pour x dans l'intersection, pour tout i il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Si l'on prend $r = \min(r_i)$ (qui est bien strictement positif car la famille est finie), alors $B(x, r)$ est dans l'intersection des U_i. Les propriétés sur les fermés se déduisent des propriétés sur les ouverts par complémentarité. Par exemple, pour toute collection (F_i) d'ouverts, si l'on note $U_i = F_i^c$ le complémentaire de F_i (qui est un ouvert par définition), on a

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} U_i^c = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c .$$

Une union finie de fermés se ramène de la même manière à une intersection finie d'ouverts. □

Remarque I.2.11. Les propriétés de la proposition précédente permettent de définir ce que l'on appelle une topologie (voir section IV.2.3, page 89), dans un cadre général (sans recourir à la notion de métrique). Elles sont utilisées comme définition d'une famille d'ouverts, qui définit une topologie générale sur un ensemble. Dans le présent contexte des espaces métriques, la proposition précédente permet donc de s'assurer que la définition I.2.9 construit bien une topologie au sens général.

Remarque I.2.12. On prendra garde au fait qu'une partie de X peut -être à la fois ouverte et fermée. C'est le cas de $\emptyset$ et de X, mais il peut y en avoir d'autres. Considérer par exemple $X =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. La partie $A =]-\infty, -1]$ est *ouverte*, car pour $\varepsilon < 2$ on a $B(-1, \varepsilon) =]-1-\varepsilon, -1] \subset A$. Son complémentaire $[1, +\infty[$ est aussi *à la fois ouvert et fermé*. On dit que X est *connexe* si les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.

Exercice I.2.6. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Montrer qu'une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte.

3. Cette précision n'est pas à strictement parler nécessaire, car l'ensemble vide vérifie automatiquement toute condition du type : "Pour tout x dans A, …".

Du fait qu'une union d'ouverts est un ouvert, et qu'une intersection de fermés est fermée, on peut définir les notions de plus grand ouvert contenu dans un ensemble (intérieur), et de plus petit fermé qui contienne un ensemble (adhérence).

Définition I.2.13. (Intérieur, adhérence, frontière (•))
Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X.

On appelle *adhérence* de A, et l'on note $\bar{A}$, le plus petit fermé contenant A, i.e. l'intersection de tous les fermés qui contiennent A.

On appelle *intérieur* de A, et l'on note $\mathring{A}$, le grand ouvert contenu dans A, i.e. l'union de tous les ouverts que A contient.

On appelle *frontière* de A l'ensemble $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \mathring{A}^c$.

On appelle *voisinage* d'un point x toute partie de X qui contient un ouvert contenant x.

On appelle *base de voisinages* de x un ensemble $\mathcal{B}(x)$ de parties de X telle que, pour tout $x \in X$, tout voisinage V de x, il existe un élément de $\mathcal{B}(x)$ inclus dans V.

Exercice I.2.7. (•) a) Montrer qu'un ouvert est un ensemble qui s'identifie à son intérieur, et qu'un fermé est un ensemble qui s'identifie à son adhérence.

b) Comment caractériser un ensemble qui s'identifie à sa frontière ?

Exercice I.2.8. (•) On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne. Préciser $\bar{A}$, $\mathring{A}$ et ∂A dans les cas suivants :

$$a)\ A = \{x_1, \ldots, x_N\}\ ,\ b)\ A = B(0,1)\,,\ c)\ A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\right\}\ ,$$

$$d)\ A = \{(1/n, 0)\,,\ n = 1, 2, \ldots\}\ ,\ e)\ A = \{(t, \sin(1/t))\,,\ t \in]0, +\infty[\}\,.$$

Remarque I.2.14. L'appellation la plus conforme à l'intuition commune est celle de frontière. Si l'on considère par exemple la zone occupée par un pays, la frontière topologique correspond bien à la frontière administrative, constituée de lignes marquant la séparation avec un pays voisin, à laquelle se rajoutent les bords naturels du pays (côtes). Dans ce cadre, conformément à l'intuition, la frontière est *petite* par rapport à l'objet lui même, on serait tenté de dire qu'elle ne "pèse rien"[4]. On prendra cependant garde au fait que, si l'on sort du cadre de domaines réguliers comme des pays sur une carte, certains ensembles ont une frontière beaucoup plus "grosse" qu'eux mêmes. On se reportera par exemple à l'exercice I.2.9, qui établit que l'ensemble des rationnels, qui est négligeable, admet pour frontière l'ensemble des réels[5].
Le terme *ouvert* évoque le fait qu'un objet ne contienne aucun point de sa frontière, il est en quelque sorte directement exposé au monde extérieur, par opposition à un fermé qui contient sa frontière, et se trouve en quelque sorte délimité.

4. Mathématiquement (voir chapitre sur la théorie de la mesure et de l'intégration), on pourra établir qu'un domaine régulier est de mesure strictement positive, alors que sa frontière est de mesure nulle. Pour revenir au contexte géographique, ces considérations expriment de façon abstraite le fait que, si l'on prend au hasard un point en Europe, il y a peu de chance qu'il se trouve sur la frontière entre deux pays : on dira qu'il s'agit *presque sûrement* d'un point intérieur à l'un des pays.

5. Un pays construit de la sorte risquerait de consacrer l'essentiel de son budget à entretenir ses douaniers et ses gardes-côtes.

Remarque I.2.15. Il peut sembler étonnant que ces notions puissent être pertinentes dans une démarche de modélisation du réel, puisque ce qui distingue par exemple un ouvert de son adhérence consiste en des points qui sont infiniment proches (en deçà de toute longueur mesurable en pratique) de l'objet lui-même. Elles sont pourtant d'une importance considérable. On pourra penser par exemple à la modélisation d'un matériau déformable qui occupe une certaine zone de l'espace physique. On choisira de représenter cette zone par un ouvert [6], souvent noté Ω (on parle de *domaine*). Ainsi, chaque point x de Ω est entouré d'une petite zone située à l'intérieur de l'objet modélisé, ce qui permet d'écrire l'équilibre des forces en x à partir des propriétés constitutives du matériau. On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles qui a du sens en tout point de (l'ouvert) Ω. La frontière correspond à l'interface avec le monde extérieur (l'air libre, ou un autre matériau). Sur cette frontière l'équation constitutive du matériau n'est pas valide, mais on prescrira l'équilibre de l'interface qui impliquera les lois constitutives de part et d'autre, et on parlera de *condition aux limites* si l'extérieur est un milieu simple (comme du vide), ou de *conditions d'interface* s'il s'agit d'une zone de contact entre deux matériaux.

Définition I.2.16. (Point d'accumulation (•))
Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. On dit que $x \in X$ est point d'accumulation de A si toute boule ouverte centrée en x contient au moins un point de A différent de x.

Exercice I.2.9. (•) Montrer que $\mathbb{Q}$, comme partie de l'espace métrique $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle), est d'intérieur vide, d'adhérence et de frontière $\mathbb{R}$.

Définition I.2.17. (Densité (•))
Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. On dit que A est *dense* dans X si tout point de X est point d'accumulation de A.

Nous terminons cette section par quelques propriétés de $\mathbb{R}$, et de sa version *achevée* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

Proposition I.2.18. L'ensemble $D \subset \mathbb{R}$ des nombres décimaux et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition I.2.19. Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les réunions dénombrables d'intervalles ouverts.

Démonstration. Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert. On considère la relation d'équivalence suivante sur U : pour x et y dans U, on dit que $x \mathcal{R} y$ si $[x, y] \subset U$. On peut vérifier que les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont des intervalles ouverts, dont l'union est égale à U. Or, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, chacun de ces intervalles contient un rationnel, la famille de ces intervalles est donc dénombrable. $\square$

La droite réelle achevée (••)

6. Ce choix est d'une certaine manière arbitraire, ou simplement justifié par ce qui suit. La question de savoir s'il est licite ou pas de considérer qu'un objet physique contienne sa frontière ou pas ne nous paraît pas avoir de sens.

Dans certains contextes, en particulier en théorie de l'intégration, il est pertinent de compléter $\mathbb{R}$ par des valeurs "aux bouts" :

Définition I.2.20. (Droite réelle achevée)
On appelle *droite réelle achevée*, et l'on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, muni de la relation d'ordre canonique sur $\mathbb{R}$ complétée par

$$-\infty < a < +\infty$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Proposition I.2.21. On peut munir $\overline{\mathbb{R}}$ d'une métrique

$$d(x,y) = |\arctan(y) - \arctan(x)| .$$

Cette métrique induit une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ telle que tout ouvert est soit un ouvert de $\mathbb{R}$ soit du type $U \cup]a, +\infty]$, ou $U \cup [-\infty, b[$.

Démonstration. Le fait que $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ soit une distance se vérifie sans difficulté. On reprend maintenant l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition I.2.19. Cette approche permet de décomposer tout ouvert U en une réunion dénombrables d'intervalles ouverts[7], la seule différence ici étant que l'un de ces intervalles peut être du type $]a, +\infty]$ ou $[-\infty, b[$. Cette décomposition assure la propriété annoncée.

Soit maintenant U un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. Si U ne contient ni $+\infty$ ni $-\infty$, alors c'est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$. S'il contient par exemple $+\infty$, alors il contient une boule $B(+\infty, \eta)$, avec $\eta > 0$. □

Exercice I.2.10. (•) Quel est le diamètre de $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la métrique définie ci-dessus ?

Exercice I.2.11. (•) Donner un autre exemple de métrique sur $\overline{\mathbb{R}}$ conduisant à la même topologie.

I.3 Suites

Définition I.3.1. (Suite convergente (•))
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si la distance de x_n à ℓ peut être rendue arbitrairement petite pour n assez grand, plus précisément :

$$\forall \varepsilon\,,\ \exists N\,,\ \forall n \geq N\,,\ d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Proposition I.3.2. (Unicité de la limite (•))
Une suite convergente ne peut converger que vers une seule limite.

Démonstration. Soient ℓ et ℓ' deux limites de la suite (x_n). Pour tout ε, il existe N et N' tels que, pour tout $n \geq \max(N, N')$, $d(x_n, \ell) < \varepsilon$ et $d(x_n, \ell') < \varepsilon$. On a donc, en prenant $n = \max(N, N')$,

$$0 \leq d(\ell, \ell') \leq d(\ell, x_n) + d(x_n, \ell') < 2\varepsilon.$$

7. On appelle ces ouverts les *composantes connexes* de U.

On a donc $d(\ell,\ell')=0$, d'où $\ell=\ell'$. □

Définition I.3.3. (Valeur d'adhérence (•))
Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. On dit que x est valeur d'adhérence pour la suite s'il existe une suite extraite qui converge vers x, i.e. s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x.

Proposition I.3.4. (••) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace métrique X. Le point x est valeur d'adhérence pour la suite si et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble

$$\{n\in\mathbb{N}\,,\ x_n\in B(x,\varepsilon)\}$$

est infini.

Démonstration. Si x est valeur d'adhérence, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers x. L'ensemble

$$\left\{n\in\mathbb{N}\,,\ x_{\varphi(n)}\in B(x,\varepsilon)\right\}$$

est infini par définition de la convergence d'une suite.
Réciproquement, on prend $\varepsilon=1$. Comme l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\,,\ x_n\in B(x,1)\}$ est infini, il est non vide, et on peut considérer k_1 son plus petit élément. On continue ensuite avec $\varepsilon=1/2$, auquel on associe k_2 le plus petit élément de $\{n\in\mathbb{N}\,,\ x_n\in B(x,1/2)\}$ strictement supérieur à k_1. On construit ainsi une suite extraite (x_{k_n}) telle que $d(x_{k_n},x)<1/2^n$, donc qui converge vers x. □

Proposition I.3.5. (Caractérisations séquentielles)
Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie de X. On a les équivalences :

1. Un point $x\in X$ est dans l'adhérence de A si et seulement si x est limite d'une suite de points (non nécessairement distincts, il peut s'agir de la suite constante égale à x) de A.
2. Un point $x\in X$ est dans l'intérieur de A si et seulement si toute suite convergeant vers x est dans A au delà d'un certain rang.
3. A est fermé si et seulement si, pour toute suite de points de A qui converge dans X, la limite est dans A.

Démonstration. 1. Soit x dans l'adhérence de A. Si x est dans A, il est limite de la suite constante égale à x. Si $x\notin A$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la boule $B(x,1/n)$ rencontre nécessairement A en un point x_n. Si tel n'était pas le cas, alors $\bar{A}\setminus B(x,1/n)=\bar{A}\cap B(x,1/n)^c$ serait un fermé qui contient A, strictement plus petit que $\bar{A}$, ce qui est absurde. La suite (x_n) de points de A ainsi construite converge vers x par construction. Soit maintenant $x\notin\bar{A}$, il est dans son complémentaire, qui est un ouvert d'intersection vide avec A, il existe donc une boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ qui ne contient aucun élément de A. Le point x ne peut donc être limite d'une suite de points de A.
Les points 2 et 3 sont laissés en exercice. □

I.4 Complétude

La notion de complétude abordée dans cette section joue un rôle essentiel en analyse, pour montrer en particulier des résultats d'existence à toutes sortes de problèmes. Dans des espaces dits *complets*, au sens précisé ci-dessous, on dispose d'un critère de convergence d'une suite qui *n'utilise pas la limite elle-même* (contrairement à la définition I.3.1), mais seulement les termes de la suite.

Définition I.4.1. (Suite de Cauchy)
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que la suite (x_n) de points de X est de Cauchy si la quantité $d(x_p, x_q)$ peut être rendue arbitrairement petite pour p et q assez grands, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N\,,\ \forall p\,,\ q \geq N\,,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Proposition I.4.2. Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Si une suite (x_n) converge vers une limite x, $d(x_n, x)$ peut être rendu arbitrairement petit pour n assez grand. Il en est donc de même pour

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q),$$

d'où le caractère de Cauchy de la suite. □

Exercice I.4.1. (•) Soit X un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que la suite est nécessairement constante au delà d'un certain rang.

Exercice I.4.2. (•) Soit X un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy. On note X_N l'ensemble des termes de la suite au delà du rang N :

$$X_N = \{x_n\,,\ n \geq N\}\,.$$

Montrer que la suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si le diamètre de X_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Définition I.4.3. (Espace métrique complet (•))
On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X converge vers un élément de X.

Proposition I.4.4. (•) Soit (X, d) un espace métrique complet. Une partie A de X est complète si et seulement si elle est fermée.

Démonstration. La démonstration est laissée en exercice. □

Proposition I.4.5. (••) Soit $d \geq 1$ un entier. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ (voir proposition I.2.3 page 8), est complet.

Démonstration. La voie à suivre pour montrer la complétude de $\mathbb{R}$ dépend de la manière dont on a construit l'ensemble des réels. On se reportera à la proposition IV.1.25 pour une démonstration dans le cadre d'une construction basée sur l'écriture décimale (section IV.1.4). Si l'on considère maintenant une suite de Cauchy $(x^n) = (x_k^n)_{1\leq k\leq d}$ dans $\mathbb{R}^d$, la suite associée à l'une quelconque des composantes est aussi de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge vers une valeur x_k^∞. On en déduit la convergence de (x^n) vers $(x^\infty) = (x_k^\infty)_{1\leq k\leq d}$. □

Exercice I.4.3. (•) Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, muni de la distance canonique $d(x, y) = |y - x|$, n'est pas complet.

Exercice I.4.4. (•)
a) Donner un exemple de suite réelle telle que $|x_{n+1} - x_n|$ tend vers 0, mais qui ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

b) Proposer une procédure pour construire une telle suite, qui soit telle que l'ensemble de ses termes soit de plus *dense* dans $\mathbb{R}$.

I.5 Compacité

La notion de compacité est essentielle en analyse, elle est en particulier à l'origine de l'essentiel des résultats d'existence de solution à des problèmes de tous types. Nous avons privilégié la définition la plus générale, qui pourrait s'appliquer à des espaces non métriques, car elle est basée sur la notion de recouvrement par des ouverts, notion très féconde également au cœur de la définition de la mesure extérieure de Lebesgue qui sera introduite dans la partie sur la théorie de la mesure. Dans le cas d'un espace métrique, la compacité peut se caractériser à l'aide de suites : un ensemble est compact si, de toute suite, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans l'ensemble. Le lecteur désireux d'aller au plus simple pourra considérer que cette caractérisation est la définition première, en gardant à l'esprit qu'il en existe une formulation équivalente (et plus générale, puisqu'elle s'applique à des espaces topologique non métriques) basée sur le recouvrement par des ouverts. L'équivalence entre les deux formulations fait l'objet du théorème I.5.2 ci-après, dit de Bolzano-Weierstrass, dont on pourra admettre le résultat.

Définition I.5.1. (Espace métrique compact (•))
Soit (X, d) un espace métrique, et K une partie de X (qui peut être X lui-même). On dit que K est *compact* s'il vérifie la propriété de *Borel–Lebesgue* : de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{i\in I} U_i\,,\ U_i \text{ ouvert } \ \forall i \in I \Longrightarrow \exists J \subset I\,,\ J \text{ fini, tel que } K \subset \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Exercice I.5.1. (Compacts de $\mathbb{R}$ (•))
a) Montrer que ni $\mathbb{R}$ (muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |y - x|$) ni $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ ne sont compacts.

b) Montrer que l'ensemble des termes d'une suite strictement décroissante vers 0 n'est pas compact. Montrer que si l'on rajoute à cet ensemble la limite 0, alors l'ensemble est compact.

c) Montrer que tout ensemble fini d'un espace métrique est compact.

Dans le cas des espaces métriques, on peut caractériser la compacité de façon séquentielle.

Théorème I.5.2. (Bolzano – Weierstrass(••))
Soit (X, d) un espace métrique, et $K \subset X$. L'ensemble K est compact (définition I.5.1) si et seulement si de toute suite de point de K on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K.

Démonstration. (• • •) On suppose K compact au sens de la définition I.5.1. On considère une suite (x_n) d'éléments de K. Si cette suite n'admet aucune valeur d'adhérence, c'est-à-dire que l'on ne peut en extraire aucune sous-suite convergente, alors (d'après la proposition I.3.4) pour tout $x \in K$ il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite, plus précisément un nombre fini d'indices n tels que x_n est dans cette boule. La réunion de ces boules ouvertes recouvre K par construction, on peut donc en extraire un recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{i \in J} B(x_i, r_j)\,,\ J \text{ fini.}$$

Le nombre total d'indices concernés est donc fini, car inférieur à la somme (finie) des cardinaux des indices affectés à chaque boule, ce qui est absurde.

Réciproquement, on suppose maintenant K séquentiellement compact, et l'on considère un recouvrement de K par des ouverts

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

La démonstration se fait en trois étapes.

1) On montre dans un premier temps l'existence d'un $\rho > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_i$. Si tel n'est pas le cas, pour tout n, il existe $x_n \in K$ tel que $B(x_n, 1/n)$ n'est dans aucun des U_i. On peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in K$ par compacité séquentielle de K. La limite x est dans un ouvert U_{i_0}. Il existe ε tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Par convergence de $x_{\varphi(n)}$ vers x, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon/2$. On choisit maintenant n tel que $1/\varphi(n) < \varepsilon/2$. La boule $B(x_{\varphi(n)}, \varepsilon/2)$ est alors incluse dans U_{i_0}, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

2) Montrons maintenant que K peut être recouvert par une collection finie de boules de rayon ρ. On raisonne une nouvelle fois par l'absurde. Si la propriété n'est pas vraie, on prend $x_1 \in X$ arbitraire. Comme $B(x_1, \rho)$ ne recouvre pas K, il existe $x_2 \in K \setminus B(x_1, \rho)$. Comme $B(x_1, \rho) \cup B(x_2, \rho)$ ne recouvre toujours pas K, il existe $x_3 \in K \setminus (B(x_1, \rho) \cup B(x_2, \rho))$. On construit ainsi par récurrence une suite (x_n) telle que tous les termes sont distants deux à deux d'au moins $\rho > 0$, on ne peut donc pas en extraire une sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité séquentielle.

3) D'après le 2, il existe une collection finie de points x_1, …, x_N telles que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B(x_n, \rho).$$

Comme chacune de ces boules $B(x_n, \rho)$ est dans l'un des ouverts U_{i_n}, on a bien un sous-recouvrement fini de K par les ouverts U_{i_n}, $n = 1, \dots N$. □

Remarque I.5.3. Cette caractérisation est essentielle, et permet de montrer l'existence de solutions à des problèmes de tous types. En optimisation par exemple, quand l'on cherche à minimiser une fonction sur un espace métrique, on cherche couramment à montrer qu'une suite minimisante reste dans un compact, donc que l'on peut en extraire une sous-suite qui converge vers une certain limite. Dans certaines situations on peut alors montrer que cette limite minimise la fonctionnelle.

Proposition I.5.4. Tout compact K d'un espace métrique X est fermé.

Démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle du caractère fermé (proposition I.3.5) : si K est fermé, pour toute suite d'éléments de K qui converge dans X, la limite est dans K. On considère donc une telle suite. Si K est compact, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans K, et la limite de la suite de départ s'identifie à la limite cette suite extraite. La limite est donc dans K, d'où le caractère fermé de K. $\square$

Exercice I.5.2. Montrer que l'intersection de deux compacts est compacte.

Exercice I.5.3. Montrer que tout fermé inclus dans un compact d'un espace métrique est compact.

Théorème I.5.5. (Heine – Borel ou Borel – Lebesgue)
Les compacts de $\mathbb{R}^d$ (pour toute norme $\|\cdot\|_p$, avec $1 \leq p \leq +\infty$) sont les fermés bornés.

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Si K n'est pas borné, on peut construire une suite d'éléments de K dont la norme tend vers $+\infty$. Il est de façon évidente impossible d'extraire d'une telle suite une sous-suite convergence, K est donc nécessairement borné. La proposition I.5.4 ci-dessus assure par ailleurs que K est fermé.

Réciproquement, il s'agit de montrer que tout fermé borné de $\mathbb{R}^d$ est compact. On considère d'abord le cas $d = 1$. Soit K un fermé bornée de $\mathbb{R}$, et (x_n) une suite d'éléments de K. On suppose pour simplifier les notations que K est inclus dans l'intervalle $[0, 1]$. Au moins l'un des deux intervalles $[0, 1/2]$ et $]1/2, 1]$ contient une infinité de termes. On considère un tel sous-intervalle, et l'on choisit un terme de la suite, x_{n_1}, qui en fait partie. On subdivise en deux ce sous-intervalle, pour obtenir deux sous-intervalles de longueur $1/4$ dont l'un au moins contient une infinité de termes. On en prend un point x_{n_2}, avec $n_2 > n_1$. On construit ainsi par récurrence une suite extraite (x_{n_k}), qui vérifie pour $p < q$,

$$\left|x_{n_q} - x_{n_p}\right| \leq \frac{1}{2^p},$$

elle est donc de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$ (voir proposition IV.1.25). Comme K est fermé, la limite est dans K (voir proposition I.3.5). On a donc pu extraire une sous suite qui converge dans K, ce qui assure sa compacité.

Dans le cas $d > 1$, on peut mettre en œuvre une approche analogue, en décomposant à chaque étape un cube de côté $1/2^k$ en 2^d cubes de côté $1/2^{k+1}$. $\square$

Remarque I.5.6. Le dictionnaire de l'Académie Française décrit comme compact un "objet dont les constituants sont serrés les uns contre les autres, pour former un substrat condensé"[8]. La définition mathématique dépasse largement cette acception commune, comme le suggère

8. Le terme est souvent utilisé à propos de *foules compactes*.

l'exercice I.5.1, en particulier du fait qu'un ensemble fini de points est compact. Pour s'en faire une idée intuitive, il est plus aisé d'identifier les propriétés qui font qu'un ensemble n'est pas compact. En premier lieu, comme l'indique la proposition I.5.4, la non compacité peut venir d'un défaut de fermeture : on peut extraire une sous-suite convergente, mais la limite n'est pas dans l'ensemble. Cela peut être corrigé en rajoutant les limites possibles de suites de l'ensemble, en considérant simplement l'adhérence de l'ensemble de départ (un tel ensemble dont l'adhérence est compacte est appelé *relativement compact*). Il y a des causes plus essentielles de non compacité. En premier lieu le caractère non borné de l'ensemble. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturel dans $\mathbb{R}$ est bien fermé, mais de façon évidente non compact, car non borné (on peut recouvrir $\mathbb{N}$ par des boules de rayon petit, dont il est évidemment impossible d'extraire un recouvrement fini). La dernière cause de non-compacité est plus profonde et moins facile à appréhender, elle porte sur le cœur de l'objet lui-même, ou plutôt de la nature de l'espace sous-jacent auquel il appartient. Dans un espace vectoriel normé *de dimension infinie*, on peut vérifier par exemple que la boule unité fermée, qui est bien fermée et bornée, n'est *pas compacte*. Considérons à titre d'exemple l'espace des polynômes [9] muni de la norme définie comme le maximum des valeurs absolues des coefficients. La boule unité fermée de cet espace vectoriel normé de dimension est un fermé borné. Or la suite (X^n) est telle que la distance entre deux termes est égal à 1, on ne peut donc en extraire aucune sous suite convergente.

Exercice I.5.4. (•) Montrer que l'espace des polynômes muni de la norme ∞ sur les coefficients (évoqué à la fin de la remarque précédentes) n'est *pas complet*.

I.6 Applications entre espaces métriques

Définition I.6.1. (Application continue entre espaces métriques)
Une application f de (X,d) dans (X',d') est dite continue en x si $d'(f(x),f(y))$ peut être rendu arbitrairement petit pour tout y suffisamment proche de x, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall y \in X\ ,\ d(x,y) < \eta \Longrightarrow d\,(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

On peut exprimer ce qui précède de façon séquentielle : pour toute suite (x_n) de X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ des images converge vers $f(x)$.
On dit que F est continue sur X si elle est continue en tout point de X.

Cette définition est équivalente à une autre, plus abstraite, qui présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à des espaces topologiques généraux (sans métrique). L'équivalence, dans le cas métrique, entre les deux, fait l'objet de la propositiox suivante.

Proposition I.6.2. (Continuité d'une application, caractérisation générale (• • •))
Une application f de (X,d) dans (X',d') est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de X' est un ouvert de X. De la même manière, une application f de (X,d) dans (X',d') est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout fermé de X' est un fermé de X.

9. On peut assimiler cet espace à l'espace F des suite finies (a_n) (qui s'annulent au-delà d'un certain rang), muni de la norme ℓ^∞ qui correspond au maximum des valeur absolue des termes.

Démonstration. Soit f une application de (X, d) dans (X', d'), continue au sens de la définition I.6.1 ci-dessus. On considère un ouvert U' de X'. Si $f^{-1}(U')$ est vide, il est ouvert. S'il n'est pas vide, pour tout x dans cette image réciproque, $f(x) = x' \in U'$ par définition de l'image réciproque. Comme U' est ouvert, il contient une boule $B(x', \varepsilon)$. Par continuité de f en x, il existe η tel que, pour tout y à distance de x inférieure à η, la distance de $f(y)$ à x' est inférieure à ε, ce qui signifie exactement $f(B(x, \eta)) \subset B(x', \varepsilon) \subset U'$. On a donc $B(x, \eta) \subset f^{-1}(U')$, d'où $f^{-1}(U')$ ouvert.
Montrons la réciproque. Soit f une application telle que l'image réciproque de tout ouvert de l'espace d'arrivée est un ouvert de l'espace de départ. Soit $x \in X$, et $\varepsilon > 0$. L'image réciproque de $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert, donc son image réciproque est un ouvert contenant x. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, c'est-à-dire $f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \eta)$.

Pour la caractérisation par les images réciproques de fermés, on utilise le fait que tout fermé F' de X' s'écrit $F = U'^c$, où U' est ouvert. On a donc

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(U^c) = \left(f^{-1}(U)\right)^c,$$

qui est fermé si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert. □

Proposition I.6.3. (Image d'un compact par une application continue (•))
Soit f une application f de (X, d) dans (X', d'). Si f est continue, alors l'image d'un compact de X est compacte dans X'.

Démonstration. Soit K un compact de X. Une suite de $f(K)$ s'écrit $(f(x_n))$, avec $x_n \in K$ pour tout n. Comme K est compact, cette suite admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $x \in K$, et la continuité de f assure que $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x) \in f(K)$, d'où la compacité de $f(K)$. □

Proposition I.6.4. (•) Soit f une fonction définie d'un compact K de (X, d) à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur K. Alors f est bornée, et atteint ses bornes sur K.

Démonstration. L'image du compact K par f étant un compact de $\mathbb{R}$ d'après la proposition I.6.3, il est borné (proposition I.5.5), la fonction f est donc majorée et minorée sur K. Notons M sa borne supérieure. Par définition il existe (x_n) dans K telle que

$$f(x_n) \to M = \sup_K f.$$

La suite maximisante (x_n) n'est pas nécessairement convergente, mais comme K est compact, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. On a, par continuité de l'application, $f(x) = \lim f(x_{\varphi(n)}) = M$, la borne supérieure est donc atteinte. On montre de la même manière que la borne inférieure est atteinte. □

Corollaire I.6.5. (•) Soit f une fonction continue d'un fermé borné $K \subset \mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée, et atteint ses bornes.

Exercice I.6.1. (•)
a) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est bornée sur tout ensemble borné de $\mathbb{R}^d$.

b) Montrer qu'une fonction définie d'un borné B de $\mathbb{R}^d$, continue, peut ne pas être bornée sur B.

I.7 Théorème de point fixe de Banach

Définition I.7.1. (Application contractante(•))
On dit qu'une application T de (X, d) dans lui-même est dite *contractante* s'il existe $\kappa \in [0, 1[$ tel que

$$d(T(x), T(y)) \leq \kappa\, d(x, y) \quad \forall x\,,\ y \in X.$$

Théorème I.7.2. (Théorème de point fixe de Banach (••))
Soit (X, d) un espace métrique complet et T une application de (X, d) dans lui-même, contractante. Elle admet alors un *point fixe* unique, c'est-à-dire qu'il existe un unique x dans X tel que $T(x) = x$.

Démonstration. L'unicité est immédiate : si x et y sont points fixes, on a

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \kappa d(x, y).$$

Comme $0 < \kappa < 1$, ça n'est possible que si $x = y$.
Pour l'existence, on considère un élément x_0 arbitraire de X, et l'on construit la suite des itérés par T :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0) = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}(x_0).$$

On a

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \kappa d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \kappa^n d(x_1, x_0).$$

On a donc, pour tous $p < q$,

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leq \kappa^p + \cdots + \kappa^{q-1} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 car la série $\sum \kappa^n$ est convergente. La suite (x_n) est donc de Cauchy, et converge vers un certain $x \in X$ car X est complet. Comme $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), x_n)$ tend vers 0, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$, $d(T(x), x) = 0$, d'où $T(x) = x$. □

I.8 Compléments sur les espaces vectoriels normés

Cette section est consacrée à une étude plus poussée des espaces vectoriels normés de dimension finie, qui se ramène à l'étude des espaces $\mathbb{R}^n$, pour n entier supérieur ou égal à 1. On rappelle la définition des normes usuelles sur $\mathbb{R}^d$ (introduites dans la proposition I.2.3, page 8) :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{pour} \quad p \in [1, +\infty[\,,$$

ainsi que

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|\,.$$

Exercice I.8.1. ($\star$) La direction d'une école d'ingénieurs prestigieuse décide facétieusement de changer sa procédure de calcul des moyennes, en la remplaçant par (on désigne par x_1, ..., x_n les notes d'un élève)

$$m_p = \frac{1}{d^{1/n}} \|x\|_p \,,$$

pour un certain $p \in]1, +\infty]$.

a) Justifiez le fait qu'il s'agit bien d'une moyenne, et expliquer pourquoi l'on peut s'attendre à ce que les élèves se réjouissent de cette nouvelle.

b) Ils réalisent ensuite que la procédure s'accompagnait d'une opération appliquée à l'ensemble des notes, procédure monotone (qui ne modifie pas l'ordre), de façon à ce que le nombre d'élèves ayant la moyenne est le même que celui obtenu si l'on prend la moyenne classique (pour $p = 1$). Imaginer une procédure permettant de réaliser ce décalage de médiane sans modification du classement.
Expliquer pourquoi certains peuvent se sentir lésés, d'autres au contraire avantagés, en précisant les profils de ces deux types d'élèves.

Exercice I.8.2. ($\bullet$) Proposer d'autres normes sur $\mathbb{R}^n$, en argumentant l'intérêt que l'on pourrait avoir à définir des normes qui sortent de la gamme de prêt-à-porter décrite ci-dessus.

Théorème I.8.1. (Équivalence des normes en dimension finie)
Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, c'est à dire que, pour toutes [10] normes $\|\cdot\|_\alpha$ et $\|\cdot\|_\beta$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe deux constantes $M > m > 0$ telles que

$$m \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq M \|x\|_\alpha \,.$$

Démonstration. On montre dans un premier temps que toute application linéaire de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ (où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$) est continue, et plus précisément que $\|F(x)\| \leq C \|x\|_\infty$. On écrit pour cela la décomposition d'un élément x de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique, et l'on estime la norme de $F(x)$:

$$\left\| F\left(\sum_{i=1}^d x_i\, e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^d x_i F\left(e_i\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \, \|F(e_i)\| \leq M \max |x_i| = M \|x\|_\infty \,,$$

où $M = \sum \|F(e_i)\|$. On a donc continuité de F car $F(x+h) = F(x) + F(h)$, et $\|F(h)\|$ peut être contrôlé par $\|h\|_\infty$ d'après ce qui précède.
On considère maintenant l'application identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, en munissant l'espace de départ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et l'espace d'arrivée d'une norme quelconque $\|\cdot\|$. D'après ce qui précède il existe une constante M telle que $\|x\| \leq M \|x\|_\infty$.
On considère maintenant la fonction qui à x dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ associe $\|x\|$. Cette application est continue car (voir exercice I.2.2)

$$\left| \|x+h\| - \|h\| \right| \leq \|h\| \leq M \|h\|_\infty \,.$$

Comme l'image d'un compact par une application continue est compacte (proposition I.6.3, page 20), et que la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ est compacte (proposition I.5.5), cette fonction atteint ses bornes sur S, en particulier son infimum $m \geq 0$. Il existe donc un x_0, de norme ∞

10. Malgré la notation, on peut envisager des normes qui diffèrent des normes p définies précédemment.

égale à 1, tel que $\|x_0\| = m$. Comme x_0 est non nul, on a $m > 0$, et ainsi, pour tout x non nul,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq m > 0 \Longrightarrow m \|x\|_\infty \leq \|x\| .$$

On a donc montré

$$m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty ,$$

c'est-à-dire que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes. Toutes les normes sont donc équivalentes à une même norme $\|\cdot\|_\infty$, elles sont donc équivalentes entre elles. □

Proposition I.8.2. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de norme $\|\cdot\|_\alpha$ et $\|\cdot\|_\beta$, respectivement. Alors toute application F linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est continue, et il existe une contante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Fx\|_\beta \leq C \|x\| \check{\ } \alpha.$$

Démonstration. Cette propriété a été montré au début de la preuve de la proposition précédente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Elle est donc vraie pour toute autre norme sur l'espace de départ d'après l'équivalence des normes qui vient d'être établie. □

Le choix d'une norme[11] sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ induit canoniquement une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$.

Proposition I.8.3. (Norme d'opérateur)
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (ou simplement $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si $m = n$) l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On note[12] Fx l'image par F d'un élément x de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application

$$F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longmapsto \|F\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Fx\|_p$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Fx\|_p \leq \|F\|_p \|x\|_p .$$

On dit que cette norme d'opérateur est *subordonnée* à la norme p. Les normes ainsi définies sont compatibles avec le produit de composition, au sens suivant : pour tous $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$, $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

$$\|F \circ G\|_p \leq \|F\|_p \|G\|_p .$$

Dans le cas où l'on considère la norme euclidienne (cas $p = 2$), on omettra parfois l'indice, pour noter simplement $\|F\|$.

Démonstration. La propriété de séparation est immédiate, $\|F\|_p$ ne pouvant être nulle que si F est identiquement nulle. L'homogénéité résulte elle aussi directement de l'homogénéité de la norme p pour les vecteurs. Pour l'inégalité, on remarque que $\|F\|_p$ est le sup sur la sphère unité de $\|Fx\|_p$. Or on a, pour tous F_1, F_2 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, tout x de norme unitaire,

$$\sup_{\|x\|_p = 1} \left(\|F_1 x + F_2 x\|_p \right) \leq \sup_{\|x\|_p = 1} \left(\|F_1 x\|_p + \|F_2 x\|_p \right) \leq \sup_{\|x\|_p = 1} \|F_1 x\|_p + \sup_{\|x\|_p = 1} \|F_2 x\|_p .$$

11. Il peut s'agir de normes différentes, même si nous privilégierons ici le cas de normes de même type.

12. Cette notation Fx plutôt que $F(x)$ (qui peut aussi être utilisée) rappelle que l'on peut représenter F par une matrice, et donc l'image d'un élément de $\mathbb{R}^n$ par un produit matrice-vecteur.

D'après la définition-même, on a $\|Fx\|_p / \|x\|_p \leq \|F\|_p$ pour tout x non nul, dont on déduit immédiatement $\|Fx\|_p \leq \|x\|_p \leq \|F\|_p$.
Pour la composée d'applications, on écrit

$$\|F \circ G\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|F(G(x))\|_p}{\|x\|_p} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|F\|_p \|G(x)\|_p}{\|x\|_p} = \|F\|_p \|G\|_p \,,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque I.8.4. Nous avons défini les normes d'opérateurs en munissant les espaces de départ et d'arrivée d'une même norme, mais on peut bien sûr étendre cette approche au cas où l'on choisit des normes différentes, en notant alors $\|F\|_{p,q}$ la norme subordonnée (p pour l'espace de départ, q pour l'espace d'arrivée).

Exercice I.8.3. Montrer que toutes les normes d'opérateurs que l'on peut définir selon les principes décrits ci-dessus à partir de normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont équivalentes entre elles.

I.9 Exercices

Exercice I.9.1. (Suite décroissante d'ensembles (•))
a) Donner un exemple de suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ décroissante d'ouverts de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que $U_{i+1} \subset U_i$ pour tout i, qui soit telle que l'intersection des U_i est vide.

b) Donner un exemple de suite $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ décroissante de fermés de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que $F_{i+1} \subset F_i$ pour tout i, qui soit telle que l'intersection des F_i est vide.

Exercice I.9.2. (Distances ultramétriques (• • •))
On considère l'ensemble $H_N = \{0,1\}^N$ des $N-$uplets de 0 ou de 1 (ensemble des mots de N-bits).

Pour $x = (x_1 \ldots, x_N)$ et $y = (y_1 \ldots, y_N) \neq x$, on note k le plus petit indice tel que les bits de x et y différent, i.e.

$$k = \min \{k\,,\ x_k \neq y_k\}\ ,$$

et l'on définit $\delta(x,y) = 2^{-k}$. On pose $\delta(x,x) = 0$.

1) Montrer que $\delta(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est une distance sur H_N, et que cette distance est *ultramétrique*, c'est à dire qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire renforcée

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)).$$

2) Montrer que tout point d'une boule est centre de cette boule (on se gardera d'essayer de faire un dessin...).

3) Quel est le diamètre de H_N pour cette distance ?

4) a) Décrire la sphère de centre $0 = (0,0,\ldots,0)$ et de rayon $r \in [0,1]$, selon la valeur de r, et plus généralement la sphère de centre $x = (x_1 \ldots, x_N)$ et de rayon $r \in [0,1]$.

b) Soient $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Donner le cardinal de la boule fermée de rayon x et de rayon r, en fonction de r.

5) Étendre l'approche précédente à l'ensemble $H_\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de 0 ou 1.

6) Donner des exemples de contextes dans lesquels une distance ultramétrique apparaît naturellement.

Exercice I.9.3. (••) Soit (X,d) un espace métrique, et $A \subset X$. Montrer que l'intérieur de A est égal au complémentaire de l'adhérence du complémentaire de A.

Exercice I.9.4. (•) Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie de X. La distance d'un point x à l'ensemble est notée $d(x,A)$ (voir définition I.2.5 de la distance à un ensemble). Montrer

$$\bar{A} = \{x \in X\ ,\ d(x,A) = 0\}\ ,\ \mathring{A} = \{x \in X\ ,\ d(x,A^c) > 0\}\ ,$$

$$\partial A = \{x \in X\ ,\ d(x,A) = d(x,A^c) = 0\}\,.$$

Exercice I.9.5. (••) On se place sur $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne.

a) Donner un exemple de partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que la distance de x est atteinte pour certains points, et pas pour d'autres.

b) Donner un exemple de partie A, et d'un point $x \in \mathbb{R}^2$, tels que la distance de x à A est atteinte en plusieurs points.

c) (Cellules de Voronoï)
On considère la situation où A est une collection finie de points : $A = \{x_i\}_{1 \le i \le N}$. On appelle A_i l'ensemble des points qui sont strictement plus près de x_i que des autres x_j, autrement dit les points x tels que la distance de x à A est atteinte en x_i, et en x_i seulement. Décrire les A_i, appelées cellules de *Voronoi* dans les cas suivants

(*i*) Les x_i sont tous situés sur le premier axe de coordonnées.

(*ii*) Les x_i sont équidistribués sur le cercle unité.

Dans le cas général de points distribués de façon quelconque, faire un dessin de ces cellules de Voronoï.

Exercice I.9.6. (Suite décroissante de compacts (•))
Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de compacts d'un espace métrique X. Montrer que l'intersection des K_n est non vide.

Exercice I.9.7. (••)
a) Soit K un compact d'un espace métrique (X,d). Montrer que, pour tout x, la distance de x à K (définition I.2.5, page 9) est atteinte.

b) Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^d$. Montrer que la distance de tout x à F est atteinte.

Exercice I.9.8. (Distance de Hausdorff (• • •))
Soit (X,d) un espace métrique. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties *compactes* de X. Pour

tous K_1, K_2 dans $\mathcal{K}$, on définit la quantité

$$d_H(K_1, K_2) = \max\left(\sup_{x_1 \in K_1} d(x_1, K_2), \sup_{x_2 \in K_2} d(x_2, K_1)\right).$$

a) Montrer que les sup dans l'expression ci-dessus sont en fait des max, et que $d_H(\cdot\,,\,\cdot)$ définit une distance sur $\mathcal{K}$.

b) Explorer la possibilité de définir une telle quantité afférentes à deux ensembles si l'on ne se restreint pas à des compacts.

c) Donner l'expression de la distance d'un compact K à sa frontière ∂K pour les formes géométriques suivantes de $\mathbb{R}^2$ (muni de la distance euclidienne standard) : cercle, segment, disque, carré, rectangle, triangle, ellipse.

d) Expliquer comment cette notion peut être utilisée pour *métriser* l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et vérifier que la distance ainsi construite diffère de celle issue la norme de la convergence uniforme définie par $d_\infty(f,g) = \max_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

e)($\bullet\bullet\bullet$) Montrer que l'espace métrique ($\mathcal{K}$, d_H) est complet.

Exercice I.9.9. ($\bullet\bullet$) Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie non vide de X. La distance d'un point x de X à A est définie (voir définition I.2.5) comme l'infimum des distances de x à a, pour a parcourant A.

a) Montrer que l'application $d(\cdot\,, A)$ de X dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe $d(x,A)$ est 1 – *lipschitzienne*, c'est à dire que

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y),$$

et en déduire qu'elle est continue.

b) ($\star$) On se place sur la France munie de la métrique euclidienne vol d'oiseau, et l'on prend pour A la réunion de toutes les zones urbaines. Décrire les propriétés de la fonction $d(\cdot\,, A)$, et proposer une procédure de construction de villes nouvelles (donc d'accroissement de A qui permettraient de réduire le max de $d(\cdot\,, A)$).

Exercice I.9.10. ($\bullet$) Pourquoi a-t-on exclu le cas $p \in [0,1[$ dans la définition des normes p ? Qu'advient-il de la quantité

$$\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p$$

quand, pour un $x \in \mathbb{R}^d$ donné, on fait tendre p vers 0 ?

Quel peut être l'intérêt de considérer de telles expressions pour p petit ?

Exercice I.9.11. ($\bullet\bullet$)Préciser les valeurs des constantes d'équivalences optimales entre la norme ∞ et les différentes normes p, pour $p \in [1, +\infty[$.

Qu'advient il de ces constantes lorsque la dimension d de l'espace tend vers $+\infty$?

Exercice I.9.12. ($\bullet\bullet$) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si l'on a

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

alors l'image réciproque par f de tout compact est un compact.

b) Montrer réciproquement que si l'image réciproque par f de tout compact est un compact, alors on a l'alternative : $f(x)$ converge vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$, ou $f(x)$ converge vers $-\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

c) Soit f une fonction continue qui vérifie la propriété du a) (on dit que f est *coercive*) Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}^n$, et qu'elle atteint son minimum.

Exercice I.9.13. (●●) Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ pour tous $x \neq y$, mais qui n'est pas contractante.

Exercice I.9.14. (●●) Soit (X, d) un espace métrique complet et T une application de (X, d) dans lui-même. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$T^p = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{p \text{ fois}}$$

soit contractante. Montrer que T admet un unique point fixe.

Exercice I.9.15. (●)

a) Quelle est la norme (subordonnée à la norme euclidienne) d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même représentée dans la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^n$ par une matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$?

b) Quelle est la norme d'une application représentée dans la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^n$ par une matrice A symétrique ?