Probabilités III

MINES ParisTech

12 décembre 2021 (`#6caedf9`)

Question 1 Soient $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, et $Y \sim \mathcal{B}(1/2)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, et $Z = XY + (1-Y)\lambda$. La densité $f_{Z|Y=1}$ est égale à

☐ A : $\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda z)1_{\mathbb{R}_+^*}$
☐ B : $\lambda\exp(-\lambda z)1_{\mathbb{R}_+^*}$
☐ C : Z n'admet pas de densité
☐ D : $Z = \lambda$ p.s.

Question 2 (réponses multiples) Avec les hypothèses précédentes, on a

☐ A : $\mathbb{E}(Z|Y=1) = \frac{1}{\lambda}$
☐ B : $\mathbb{E}(Z|Y=O) = \lambda$
☐ C : $\mathbb{E}(Z|Y) = \frac{Y}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1-Y)\lambda$
☐ D : $\mathbb{E}(Z|Y) = \frac{Y}{\lambda} + (1-Y)\lambda$

Question 3 Soient X et Y deux variables aléatoires de densité jointe $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}1_{[0,x]}(y)\lambda\exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$. Quelle est la densité de $Y|X=x$?

☐ A : $\exp(-y)$
☐ B : $1_{[0,x]}(y)$
☐ C : $\frac{1}{x}1_{[0,x]}(y)$
☐ D : $\lambda\exp(-\lambda x)$

Question 4 En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Y)$:

☐ A : $1/2$
☐ B : $x/2$
☐ C : $\frac{1}{2\lambda}$
☐ D : λ^2

Question 5 Soit (X,Y) un vecteur gaussien d'espérance (μ_X, μ_Y) et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, où $\rho > 0$. L'espérance conditionnelle de $X|Y$ vaut :

☐ A: μ_Y
☐ B: μ_X
☐ C: $\mu_Y + \rho(Y - \mu_X)$

☐ D: $\mu_X + \rho(Y - \mu_Y)$