

# Probabilités III

MINES ParisTech

12 décembre 2021 (#6caedf9)

**Question 1** Soient  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , et  $Y \sim \mathcal{B}(1/2)$  deux variables aléatoires réelles indépendantes, et  $Z = XY + (1 - Y)\lambda$ . La densité  $f_{Z|Y=1}$  est égale à

- ☐ A :  $\frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda z) 1_{\mathbb{R}_+^*}$
- ☐ B :  $\lambda \exp(-\lambda z) 1_{\mathbb{R}_+^*}$
- ☐ C :  $Z$  n'admet pas de densité
- ☐ D :  $Z = \lambda$  p.s.

**Question 2 (réponses multiples)** Avec les hypothèses précédentes, on a

- ☐ A :  $\mathbb{E}(Z|Y = 1) = \frac{1}{\lambda}$
- ☐ B :  $\mathbb{E}(Z|Y = 0) = \lambda$
- ☐ C :  $\mathbb{E}(Z|Y) = \frac{Y}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 - Y)\lambda$
- ☐ D :  $\mathbb{E}(Z|Y) = \frac{Y}{\lambda} + (1 - Y)\lambda$

**Question 3** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de densité jointe  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x} 1_{[0,x]}(y) \lambda \exp(-\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ . Quelle est la densité de  $Y|X = x$  ?

- ☐ A :  $\exp(-y)$
- ☐ B :  $1_{[0,x]}(y)$
- ☐ C :  $\frac{1}{x} 1_{[0,x]}(y)$
- ☐ D :  $\lambda \exp(-\lambda x)$

**Question 4** En déduire la valeur de  $\mathbb{E}(Y)$  :

- ☐ A :  $1/2$
- ☐ B :  $x/2$
- ☐ C :  $\frac{1}{2\lambda}$
- ☐ D :  $\lambda^2$

**Question 5** Soit  $(X, Y)$  un vecteur gaussien d'espérance  $(\mu_X, \mu_Y)$  et de matrice de covariance  $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ , où  $\rho > 0$ . L'espérance conditionnelle de  $X|Y$  vaut :

- ☐ A:  $\mu_Y$
- ☐ B:  $\mu_X$
- ☐ C:  $\mu_Y + \rho(Y - \mu_X)$
- ☐ D:  $\mu_X + \rho(Y - \mu_Y)$