Calcul Intégral III

STEP, MINES ParisTech

23 juillet 2021 (`#0495d87`)

Question 1 Déterminer l'aire des pavés suivants du plan étendu :

Ensemble de $[-\infty, +\infty]^2$	Aire (mesure de Lebesgue)
$[0, 1] \times \left]-1, 1\right[$	....
$\mathbb{R}^2$	....
$\{+\infty\} \times [-\infty, +\infty]$	....

Question 2 (réponse multiple)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ la diagonale principale de $\mathbb{R}^2$. Alors

- ☐ A: pour tout $r > 0$, $D \cap [-r, r]^2$ est négligeable,
- ☐ B: l'ensemble D est négligeable,
- ☐ C: l'aire de l'ensemble D est nulle.

Question 3 (réponse multiple) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx \right] dy$$

est bien définie, alors

- ☐ A: l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$ est nécessairement définie pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- ☐ B: l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy$ est bien définie,
- ☐ C: l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy \right] dx$ est bien définie,
- ☐ D: si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy \right] dx$ est également bien définie, alors les deux intégrales sont égales,

Question 4 (réponse multiple) Soient $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ deux fonctions intégrables. Alors,

- ☐ A: la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y)$ est mesurable,

☐ B: la fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y)$ est intégrable,
☐ C: on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\,dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy\right).$$

Question 5 (réponse multiple) Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y-x)\,dxdy$$

☐ A: est définie si f est mesurable et positive,
☐ B: est égale à $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy$ si f est intégrable.