





Nuages de points et modélisation 3D

Recalage et consolidation

François GOULETTE

Contact : francois.goulette@mines-paristech.fr



Centre de Robotique
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Déroulement du cours

- 1/ Perception 3D ; capteurs et étalonnage (FG)
- 2/ Recalage et consolidation (FG)
- 3/ Description locale des courbes et surfaces (FG)
- 4/ Rendu de nuages de points et maillages (TB)
- 5/ Reconstruction de courbes et surfaces (JED)
- 6/ Modélisation et segmentation (FG)
- 7/ Apprent. profond et nuage de points 3D (JED)
- Séminaire de recherche

- Présentation des projets

2

Centre de Robotique
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Nuages de points et modélisation 3D

Vue d'ensemble du cours

Outils

- Géométrie différentielle
- Structuration (k-D trees, etc.)
- Descripteurs 3D
- Segmentation sans modèle

Captureurs & étalonnage

Recalage

Nuage de points

Rendu par points

Reconstruction de surfaces

Modélisation et segmentation

Modèle de surface 3D

Rendu polygonal

Visualisation Exploitation

Centre de Robotique
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Sommaire

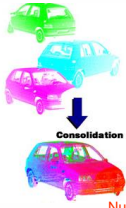
- 1/ Recalage et consolidation
- 2/ Recalage à partir de cibles appariées
- 3/ L'algorithme *Iterative Closest Point (ICP)*
- 4/ Recalage avancé

4

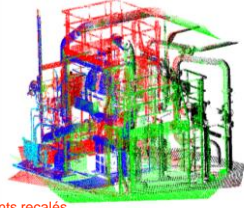
Centre de Robotique
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

1/ Recalage et consolidation de nuages de points

- Plusieurs nuages de points simples
 - Acquis depuis différents lieux d'observation (stations)
- Mise en référentiel commun : **Recalage / consolidation**



Consolidation

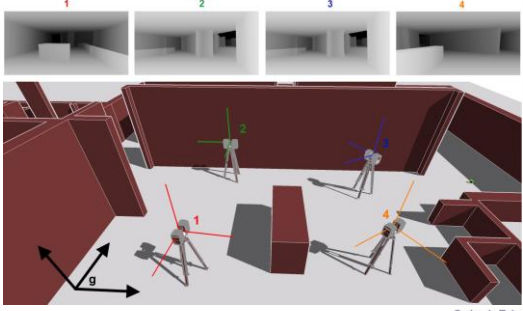


Nuages de points recalés (couleurs : stations d'origine)

5

Centre de Robotique
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Configuration d'un relevé multi-stations

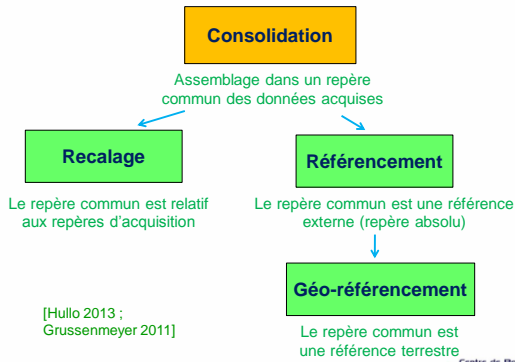


[Hulo 2013]

6

Centre de Robotique
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Notions et taxonomie



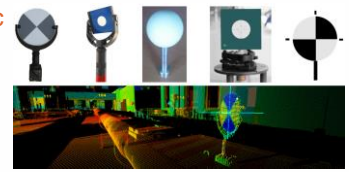
Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

7

Recalage

Recalage avec des cibles

- Utilisation de repères fixes pendant l'acquisition : cibles naturelles ou artificielles



Cibles artificielles observables dans les nuages de points

[Hullo 2013]

Recalage sans cibles

- Utilisation du recouvrement entre nuages de points

Annexe :

- Référencement et géo-référencement

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

8

Sommaire

- 1/ Recalage et consolidation
- 2/ Recalage à partir de cibles appariées
- 3/ L'algorithme *Iterative Closest Point (ICP)*
- 4/ Recalage avancé

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

9

2/ Recalage à partir de cibles appariées

- 2.1 Problème de minimisation
- 2.2 Solution par les matrices et SVD
- 2.3 Analyse de validité
- 2.4 Analyse de précision

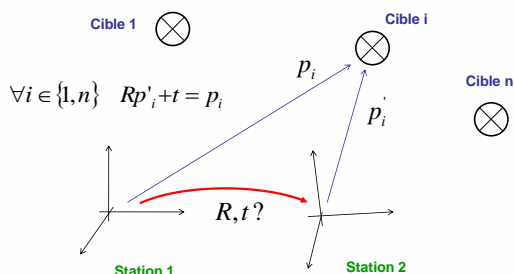
Annexes :

- Solution par les quaternions
- Démonstration covariance pose

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

10

2.1 Problème de minimisation



Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

11

Calcul de la transformation (R,T)

On dispose de n cibles appariées (points p_i , p'_i).
On recherche la transformation (R,T) qui minimise :

$$f : \begin{cases} SE^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (R, t) \mapsto f(R, t) \end{cases} \quad f(R, t) = \sum_{i=1}^n \|p_i - (R(p'_i) + t)\|^2$$

Deux solutions analytiques connues suivant la représentation des rotations :

- Matrices
- Quaternions

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

12

2.2 Résolution par matrices de rotation et SVD

Représentation de la rotation : matrice R

$$R \in SE^3 \rightarrow \begin{cases} R \in M_3(\mathbb{R}) \\ R^T R = I \end{cases}$$

$$f(R, t) = \sum_{i=1}^n \|p_i - (R \times p'_i + t)\|^2$$

13

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Minimum de f

Au minimum de f, s'il existe, on a :

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial R} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

14

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Notations barycentriques

Pour la suite, on note p_m et p'_m les barycentres des jeux de points P et P' :

$$p_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \quad p'_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p'_i$$

Et Q et Q' les jeux de points translatés autour de leurs barycentres respectifs :

$$\forall i \in \{1, n\}, \begin{cases} q_i = p_i - p_m \\ q'_i = p'_i - p'_m \end{cases}$$

15

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Détermination de la translation

On détermine la dérivée de f par rapport à t :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(R, t) = -2 \sum_{i=1}^n [p_i - (R \times p'_i + t)]$$

Elle s'annule pour :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [p_i - (R \times p'_i + t)] &= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i = R \times \sum_{i=1}^n p'_i + n \times t \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i - R \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p'_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = p_m - R p'_m$$

16

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Détermination de la rotation

Au minimum s'il existe, la fonction f peut se ré-écrire avec la valeur de t trouvée :

$$\begin{aligned} f(R, t_{\min}) &= \sum_{i=1}^n \|p_i - (R \times p'_i + p_m - R p'_m)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \|(p_i - p_m) - R \times (p'_i - p'_m)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \|q_i - R q'_i\|^2 \end{aligned}$$

17

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Détermination de la rotation (2)

Le terme au carré peut s'écrire également :

$$\begin{aligned} \forall i, \|q_i - R q'_i\|^2 &= (q_i - R q'_i)^T (q_i - R q'_i) \\ &= q_i^T q_i - q_i^T R q'_i - (R q'_i)^T q_i + (R q'_i)^T R q'_i \\ &= q_i^T q_i - 2 q_i^T R q'_i + q_i^T R^T R q'_i \end{aligned}$$

Or $R^T R = I$, cela peut donc s'écrire :

$$\forall i, \|q_i - R q'_i\|^2 = q_i^T q_i - 2 q_i^T R q'_i + q_i^T q'_i$$

18

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Détermination de la rotation (3)

La fonction à minimiser devient donc :

$$\begin{aligned} f(R, t_{\min}) &= \sum_{i=1}^n (q_i^T q_i - 2q_i^T R q_i + q_i^T q_i) \\ &= \sum_{i=1}^n q_i^T q_i + \sum_{i=1}^n q_i^T q_i - 2 \sum_{i=1}^n q_i^T R q_i \end{aligned}$$

Les deux premiers termes ne dépendent pas de R, la rotation R qui minimise f est donc également celle qui maximise :

$$g(R) = \sum_{i=1}^n q_i^T R q_i$$

19

Détermination de la rotation (4)

La Trace d'un scalaire étant égale à ce scalaire, la fonction g peut s'exprimer sous la forme suivante :



$$g(R) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(q_i^T R q_i)$$

Ceci nous permet d'utiliser une propriété de la Trace :

$$\forall (A, B) \in M_{m,n} \times M_{n,m}, \text{Tr}(A \times B) = \text{Tr}(B \times A)$$

Ce qui donne :

$$g(R) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(R q_i q_i^T)$$

20

Détermination de la rotation (5)

On note H la matrice carrée :

$$H = \sum_{i=1}^n q_i q_i^T$$

La fonction g à maximiser s'écrit alors :

$$g(R) = \text{Tr}(RH)$$

21

Détermination de la rotation (6)

On peut décomposer H en valeurs singulières (théorème spectral) (Singular Value Decomposition, SVD) :



$$\exists (U, V, \Sigma) \in M_3(\mathbb{R})^3 / H = U \Sigma V^T$$

Avec :

U, V matrices orthonormales
Σ matrice diagonale positive

Il faut maximiser g qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned} g(R) &= \text{Tr}(R U \Sigma V^T) \\ &= \text{Tr}(V^T R U \Sigma) \end{aligned}$$

22

Détermination de la rotation (7)

Or :

$$W = V^T R U$$

Est une matrice de rotation ($W^T W = I$).

Propriété de la Trace – théorème de Whaba :

Σ étant une matrice diagonale positive, il existe une matrice de rotation W qui maximise $\text{Tr}(W \Sigma)$.
C'est l'identité : $W = I$

$$W = I \Leftrightarrow V^T R U = I$$

Il existe un maximum à g (et donc un minimum à f). Il est obtenu pour :

$$R = V U^T$$

Puis : $t = p_m - R p_m$

23

Algorithme de résolution par matrices - pseudo-code -

Entrée : Jeux de n points (P, P')

Sortie : matrice de rotation R, vecteur t

• Déterminer les barycentres p_m et p'_m

• Calculer la matrice H $H = \sum_{i=1}^n q_i q_i^T$

• Décomposer H en valeurs singulières

• Calculer R puis t $H = U \Sigma V^T$

$$R = V U^T \quad t = p_m - R p'_m$$

24

2.3 Analyse de validité

Le recalage s'obtient par identification du minimum de la fonction :

$$f : \begin{cases} SE^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (X) \mapsto f(X) \end{cases}$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \|p_i - X(p'_i)\|^2$$

En notant X les paramètres de pose (rotation, translation) et $X(p')$ l'application de la transformation affine correspondante au point p'

25

Propriété : résidu et loi du χ^2

• Hypothèses :

- Les points sont correctement appariés
- Ils sont la réalisation de variables aléatoires centrées réduites d'écart-type σ

• Propriété :

- La valeur de f au minimum, appelée « **résidu** », suit une loi du χ^2 à n_{ddl} degrés de liberté
 - n_{ddl} = nombre de points - nombre de paramètres

[Press et al. 92]

26

Loi du résidu

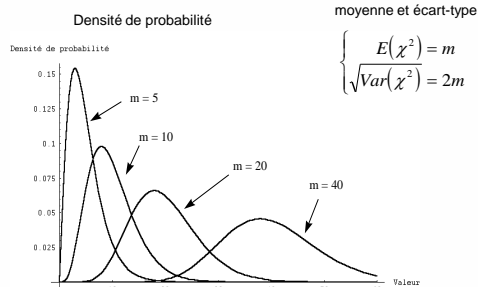
• Nombre de degrés de liberté :

- Nombre de points n
- Nombre de paramètres indépendants : 6

$$\begin{aligned} \text{Res} &= f(X_{\min}) \\ &= \sigma^2 \chi_{n-6}^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n-6} [LG(0,1)]^2 \end{aligned}$$

Centre de Robotique

Loi du χ^2



Loi du résidu et usage

Moyenne et écart-type du résidu

$$\begin{cases} E(\text{Res}) = (n-6)\sigma^2 \\ \sqrt{\text{Var}(\text{Res})} = 2(n-6)\sigma^2 \end{cases}$$

Cette propriété permet de tester la validité du recalage.

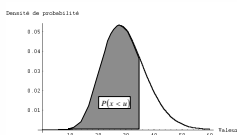
Exemples : - mauvais appariement des points
- erreurs accidentelles de mesure

On fixe un seuil de probabilité acceptable et la fonction de répartition $P(x < u)$ donne le seuil à appliquer au résidu.

Par exemple :

$$\text{Si } \text{Res} > 3(n-6)\sigma^2 \Rightarrow \text{rejet}$$

[Goulette 97]



2.4 Analyse de précision par covariance de la pose

• Hypothèses :

- Les points sont correctement appariés
- Ils sont la réalisation de variables aléatoires centrées réduites d'écart-type σ

• Propriété :

- La covariance des paramètres de pose solution des moindres carrés vaut :

$$\text{Cov}(X_{\min}) = \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X_{\min}) \right)^{-1}$$

[Press et al. 92]

30

Sommaire

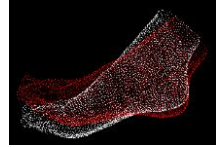
- 1/ Recalage et consolidation
- 2/ Recalage à partir de cibles appariées
- 3/ L'algorithme *Iterative Closest Point* (ICP)
- 4/ Recalage avancé

31

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

3/ L'algorithme « Iterative Closest Point » (ICP)

- Objectif :
 - Détermination de la transformation rigide (R,T)
 - Entre deux nuages de points en recouvrement partiel
- Recalage « fin » et « local » [Besl and McKay 1992]
 - S'affranchit des cibles
 - Grande quantité de données
 - Plus grande précision
 - Besoin d'estimation des paramètres initiaux



32

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Association des points

- Association d'un point d'un nuage, au point le plus proche dans l'autre nuage
 - Seuil de distance maximale autorisée
- Résultat (à chaque itération) :
 - Liste de n points associés entre les deux nuages

On note P et P' les deux sous-ensembles de points appariés :

$$P = \{p_i, 1 \leq i \leq n\} \quad P' = \{p'_i, 1 \leq i \leq n\}$$

33

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Calcul de la transformation (R,T)

On dispose de n points appariés (p_i, p'_i).

On recherche la transformation (R,t) qui minimise :

$$f(R, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\tilde{p}_i - (R\tilde{p}'_i + t)]^2$$

Important : le nombre de points varie à chaque itération.
La fonction des moindres carrés est **normalisée**.

Solution similaire à la minimisation avec les cibles
- mais le jeu de points change à chaque itération -

34

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

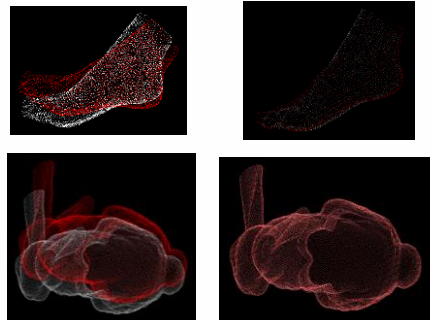
ICP – pseudo-code

- Recalage initial (NP, NP')
- Répéter :
 - Association de données $\rightarrow (P, P')$
 - Calcul de la transformation (R,T)
 - Application de la transformation au nuage NP'
 - Calcul de la distance entre nuages
- Tant que :
 - (distance normalisée entre nuages > seuil)
 - et (nombre d'itérations < nb_max)

35

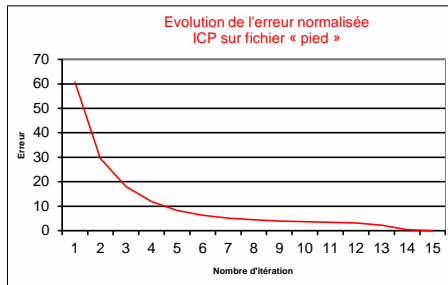
Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Résultats



36

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON



Convergence vers 0 (nuage 1 = nuage 2)

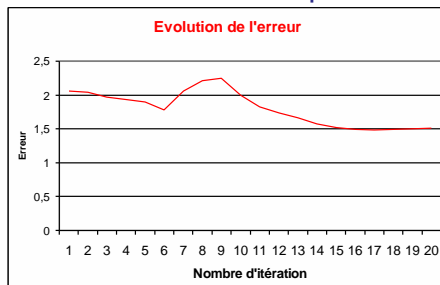
37

Preuve de convergence ...théorique

- Si le nombre de points appariés est constant, on démontre la convergence monotone d'ICP
 - [Besl and McKay 92]
- Problème :
 - L'appariement est délicat
 - Minima locaux
 - Nombre de points variable :
 - l'hypothèse nécessaire est rarement vérifiée...!

38

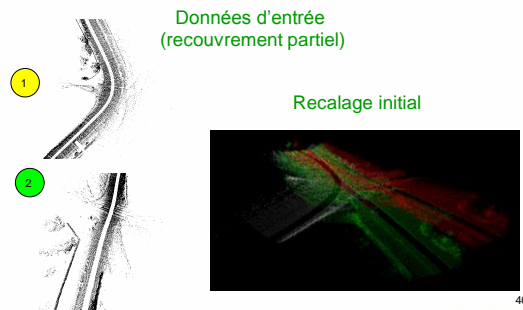
Evolution de l'erreur normalisée ICP sur fichier « pied »



Vous avez dit « preuve de convergence ???!!... »

39

Exemple : Recalage de segments routiers



40

Temps de calcul

- Appariement en $O(n_1 n_2)$.
 - Le reste en $O(n_1 + n_2)$.
- Acceptable pour petits nuages de points
< 1000 points : qqs secondes
- Trop lent pour de gros nuages de points
> 1h pour image Kinect 640x480

Centre de Robotique

Accélération des calculs

- Sous-échantillonnage :
 - Sous-ensemble de points (N "points de contrôle"), pour l'un des nuages ou les deux.
 - $O(N n_2)$ avec $N \ll n_1$
- Recherche approchée : ANN
 - Méthode approchée de recherche du plus proche voisin : Approximate Nearest Neighbor (ANN) avec kd-tree.
 - $O(n_1 \log n_2)$

Centre de Robotique

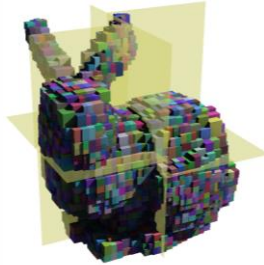
Approximate Nearest Neighbor (ANN)

• Principe

- Pré-calcul d'un kd-tree pour partitionner l'espace
- Recherche dichotomique avec distance seuil

• Librairie C++ ANN

<http://www.cs.umd.edu/~mount/ANN/>



Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

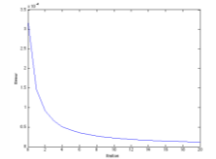
Résultats d'accélération sur images Kinect

• 68000 points image Kinect

- ANN seul : ~ 100s par itération
- ANN + échantillonnage (2000 points) : < 1s

• Stratégie possible :

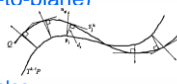
- Terminer sans échantillonnage pour recalage fin.



Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Variantes d'ICP

- De nombreuses variantes :
 - Robustesse ; rapidité ; précision
- Variantes principales [Rusinkiewicz & Levoy 01]
 - Métrique point à plan (point-to-plane)
 - [Chen & Medioni 91]
 - Échantillonnage régulier
 - Aléatoire ; basé sur les normales...
 - Rejet des points sur arêtes
 - Critères d'appariement, pondération...
 - Prise en compte de la couleur



Video reconstruction KinectFusion SIGGRAPH 2011

45

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Sommaire

1/ Recalage et consolidation

2/ Recalage à partir de cibles appariées

3/ L'algorithme *Iterative Closest Point (ICP)*

4/ Recalage avancé

46

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

4/ Recalage avancé

4.1 Recalage global et SLAM

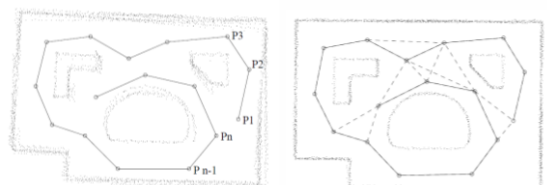
4.2 Recalage sur modèles géométriques

4.3 Autres variantes...

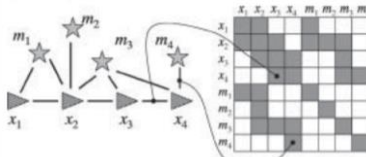
47

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

4.1 Recalage global et SLAM



Graphe de poses



[Thrun et Montemerlo, 2005]

- Nœuds :
 - Stations de prises de vue ; cibles ou amers
- Arcs (binaires) :
 - Recouvrement entre nuages de points / cible vue

49

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Mise en équations

- Relation globale entre nœuds :
 - Fonction d'énergie, distance de Mahalanobis (linéarisation des relations de poses entre nœuds) :

$$W = \sum_{(i,j)} (D_{ij} - \bar{D}_{ij})^T C_{ij}^{-1} (D_{ij} - \bar{D}_{ij})$$

D_{ij} : pose relative (réelle) entre les nœuds i et j

\bar{D}_{ij} : observation

C_{ij} : covariance estimée de l'observation

[Lu and Milios 94]

50

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Mise en équations (2)

- Entre deux nœuds du graphe :
 - Moindres carrés sur les points d'observation appariés vus des deux stations

$$f(D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \|p_{ik} - D_{ij}(p'_{jk})\|^2$$

\bar{D}_{ij} : pose relative qui minimise f

C_{ij} : covariance de la solution

[Lu and Milios 94]

51

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Solution – « offline »

- Hypothèses
 - Valeurs initiales proches de la solution, (approximation linéaire)
 - Appariements entre points d'observation connus
 - Relations entre nœuds connues

→ Solution analytique

[Lu and Milios 94]

52

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Solution – « online »

- Nouvelles stations, nouvelles acquisitions
- Construction itérative
 - carte, appariements, relations entre noeuds

[Lu and Milios 94]

SLAM :
Simultaneous Localisation
and Mapping

Voir aussi : [Lu and Milios 94]
[Gérossier 2012]
[Hullo 2013]
[Borman 2007]
[Thrun and Montemerlo 2006]

53

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

4.2 Recalage et modèles géométriques

- Recaler un nuage de points sur un modèle géométrique
 - Exemples : maillage 3D ; plan CAO 2D
- Recaler deux nuages de points en utilisant des primitives géométriques
 - Exemples : lignes, plans, autres primitives

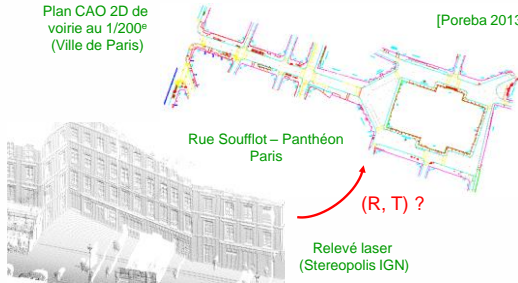
54

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Recalage de relevés laser mobiles sur des plans CAO

Plan CAO 2D de voirie au 1/200^e (Ville de Paris)

[Poreba 2013]



Centre de Robotique

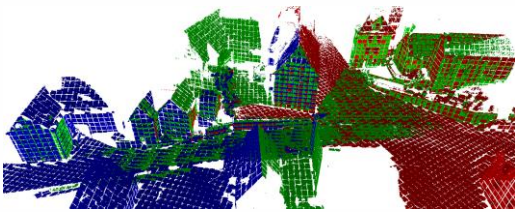
Recalage de relevés laser mobiles sur un relevé laser statique consolidé



[Poreba 2013]

1^{er} passage
2^{ème} passage
3^{ème} passage

Recalage basé sur des plans

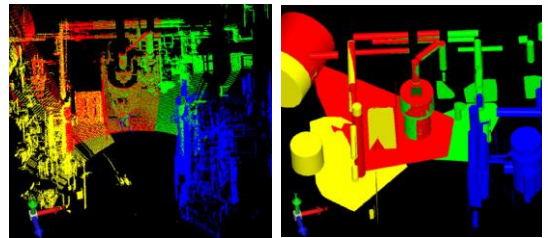


[von Hansen 2006]

57

Centre de Robotique

Recalage basé sur des primitives géométriques



Nuages de points bruts (à gauche) recalés par les primitives extraites (droite)
4 nuages de points représentés par 4 couleurs distinctes

[Rabbani 2007]

58

Centre de Robotique

4.3 Autres variantes...

- Recalage non rigide :
– [Monnier 2013]
- Recalage entre lignes,
– [Poreba 2013, Poreba et Goulette 2015],
[Kamgar-Parsi et Kamgar-Parsi 2004]
- Basé sur d'autres représentations
– NDT

59

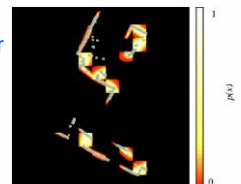
Centre de Robotique

Normal Distribution Transform (NDT)

[Magnusson 2007]

- Accélération des calculs
– Pour de grands nuages de points bruités
- Représentation des données :
– Densités de probabilités définies par morceau sur un espace discrétisé

Densités de probabilité du type NDT
Espace 2D discrétisé en carrés de 1m²
Points gris : points laser
Couleurs : niveaux de probabilité $h(x)$
(fonctions normales $N(q, C)$)



60

Centre de Robotique

NDT : fonction à minimiser

- Basée sur les densités de probabilité, espace probabilisé, fonction $h(x)$

$$f(X) = -\sum_{i=1}^n h(T(X, x_i))$$

X : pose à déterminer

x_i : points à recaler

$T(X, x_i)$ points après rotation - translation

La fonction f est définie pour être petite pour de grandes probabilités

61

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Résolution de NDT

- Le minimum de f est déterminé de façon itérative par l'algorithme de Newton

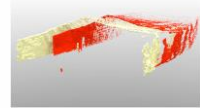
$$H\Delta X = -g$$

g : gradient de f

H : Hessien de f

H et g se calculent sous forme analytique

Recalage de nuages de points dans un tunnel minier [Magnusson 2007]



62

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Comparaison NDT vs ICP

- Points forts :** [Magnusson ICRA 2009]
 - Bien adapté pour de grandes quantités de données du nuage de référence (rapidité)
 - Robustesse aux paramètres initiaux
- Points faibles :**
 - Choix de la taille de discrétisation de l'espace
- Quel fondement physique à la métrique ?**
 - ICP : modèle physique probabiliste

63

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

FIN

Ce qui a été vu aujourd'hui :

- 1/ Recalage et consolidation
- 2/ Recalage à partir de cibles appariées
- 3/ L'algorithme *Iterative Closest Point (ICP)*
- 4/ Recalage avancé

64

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Références (1)

- Iliffe and Lott 2008. Datums and Map projections – for Remote Sensing, GIS and Surveying, 2nd edition. CRC Press Whitlites Publishing, 2008
- Abuhadrous 2005. Thèse ENSMP.
- Horn 87. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions.
- Press et al. 92. Numerical Recipes in C.
- Goulette 97. Thèse ENSMP F. Goulette
- Magnusson 2007.
- Magnusson ICRA 2009.
- von Hansen, W. (2006). Robust automatic marker-free registration of terrestrial scan data. *Proceedings of the Photogrammetric Computer Vision*, 36:105–110.

65

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Références (2)

- Rabbani, T., Dijkman, S. T., Van Den Heuvel, F. et Vosselman, G. (2007). An integrated approach for modelling and global registration of point clouds. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 61(6):355–370.
- Thrun, S. et Montemerlo, M. (2005). The GraphSLAM algorithm with applications to large-scale mapping of urban structures. *International Journal on Robotics Research*, 25(5/6):403–430.
- Dorit Borrmann, Jan Elseberg, Kai Lingemann, Andreas N'uchter, Joachim Hertzberg. Globally consistent 3D mapping with scan matching. *Robotics and Autonomous Systems*, 2007

66

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Annexes

- Référencement et géo-référencement
- Solution de (R,T) par quaternions
- Démonstration – covariance de la pose

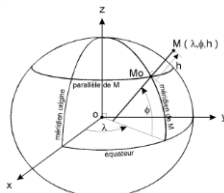
67

A.1 Référencement et géo-référencement

- **Référencement** :
 - Rattachement à une référence extérieure fixe connue (repère fixe)
- **Géo-référencement**
 - La référence extérieure est un repère géodésique ou cartographique
- **Géo-référencement par GPS** :
 - Directement dans le procédé de mesure
 - Exemple : Systèmes Mobiles de Cartographie
 - Indirectement : points d'intérêt (cibles, etc.)

68

Repère géodésique ECEF



Le repère ECEF-Earth Centered Earth Fixed
 Origine : centre de la terre
 Suit la rotation de la terre
 Axe X: vers le méridien de Greenwich (Longitude=0),
 Axe Z: vers le pôle nord,

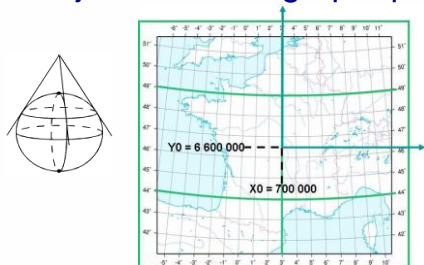
69

Coordonnées géodésiques WGS-84

- Expression dans un référentiel ECEF
- Prise en compte du modèle « géoïde » de la Terre
- Différents systèmes de coordonnées
 - WGS 84 : utilisé pour les GPS
 - Latitude, longitude, hauteur
 - RGF 93 (en France)

70

Projections cartographiques



Projection cartographique conique Lambert 93
 Associée au système de coordonnées RGF 93

71

A.2 Solution analytique par les quaternions

Représentation de la rotation : quaternion unitaire \dot{q}

$$R \in SE^3 \rightarrow \begin{cases} \dot{q} \in \mathfrak{H}^4 \\ \dot{q} = (q_0, q_x, q_y, q_z) \end{cases}$$

Représentation d'une rotation :

$$\dot{q} = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \times (u_x, u_y, u_z) \right)$$

72

Calculs avec les quaternions

Produit scalaire de quaternions :

$$\dot{p} \cdot \dot{q} = p_0 q_0 + p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$$

Représentation en quaternion d'un vecteur de \mathbb{R}^3

$$\dot{q} = (0, q)$$

Rotation par \dot{p} du vecteur de \mathbb{R}^3 q :

$$\dot{p} \cdot \dot{q}$$

Quaternion conjugué (rotation opposée) :

$$\dot{p}^* = (p_0, -p_x, -p_y, -p_z)$$

73

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Solution de [Horn 87]

- La fonction à minimiser f est exprimée avec la représentation en quaternion.
- Détermination de la translation :
 - Idem solution avec les matrices et SVD
- Détermination de la rotation :
 - Trouver le quaternion unitaire qui maximise :

$$g(\dot{r}) = \sum_{i=1}^n \dot{r} \dot{q}_i^* \dot{q}_i$$

\dot{q}_i et \dot{q}_i^* : Quaternions des jeux de points en représentation barycentrique

74

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Solution (2)

On peut montrer que g s'écrit : $g(\dot{r}) = \dot{r}^T N \dot{r}$ [Horn 87]

Avec N (symétrique positive):

$$N = \begin{bmatrix} H_{11} + H_{22} + H_{33} & H_{23} - H_{12} & H_{31} - H_{13} & H_{12} - H_{21} \\ H_{23} - H_{12} & H_{11} - H_{22} - H_{33} & H_{12} + H_{21} & H_{31} + H_{13} \\ H_{31} - H_{13} & H_{12} + H_{21} & -H_{11} + H_{22} - H_{33} & H_{23} + H_{32} \\ H_{12} - H_{21} & H_{31} + H_{13} & H_{23} + H_{32} & -H_{11} + H_{22} + H_{33} \end{bmatrix}$$

Où l'on retrouve la matrice H déjà vue :

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_i^T$$

Le quaternion solution est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de N .

75

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Algorithme de résolution par quaternions - pseudo-code -

Entrée : Jeux de n points (P, P')

Sortie : quaternion r , vecteur t

- Déterminer les barycentres p_m et p'_m
- Calculer les matrices H (3x3) puis N (4x4)
- Décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de N
 - r est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de N
- Calcul de t

76

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

A.3 Démonstration – covariance de la pose

- Cette propriété se démontre de deux façons :
 - Identification des dérivées secondes des paramètres de pose à partir des dérivées secondes de f (Hessien) au minimum
 - Matrice d'Information de Fisher (probabilités)

77

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Covariance et matrice de Fisher

- $I(x)$: matrice de Fisher, matrice d'information relative à la distribution du nuage

$$I(X) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \log p(p_i - X(p_i) | X) \right]$$

- Borne de Cramér-Rao :

$$\text{Cov}(X) \geq [I(X)]^{-1}$$

- Estimateur obtenu :

- par la méthode des moindres carrés avec un bruit gaussien de moyenne nulle

⇒ borne de C.R. atteinte :

$$\text{Cov}(X) = [I(X)]^{-1}$$

78

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul de la covariance de la pose

- Choix de la représentation :

- 3 paramètres seulement pour la rotation ?
- sens physique de la matrice de covariance

- Représentation choisie :

- Rotations représentées par axe u et angle θ : (Rodrigue)

- Coordonnées homogènes : matrice 4x4

$$X = \begin{pmatrix} \Omega \wedge \cdot & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Fonction à minimiser : $f(X) = \sum_{i=1}^n \|p_i - Xp_i'\|^2$

79

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Covariance de la pose (2)

- Transformation linéarisée autour de la solution :

$$X = X_{\min} \delta X$$

- Avec :

$$\delta X = I + \delta x \quad \delta x = \begin{pmatrix} \delta \omega \wedge \cdot & \delta t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On note le vecteur différence de rotation (dimension 3) :

$$\delta \omega = \delta \theta \cdot u$$

- Et le vecteur différence de pose (dimension 6) :

$$x = \begin{pmatrix} \delta \omega \\ \delta t \end{pmatrix}$$

- On cherche : $Cov(x)$

NB : le déterminant de la partie « angulaire » de la matrice de covariance permet d'obtenir la précision (variance) angulaire

80

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON

Covariance de la pose (3)

- Après simplifications : $f(X) = \sum_{i=1}^n \|P_i - P_i' x\|^2$

- Avec :

$$\begin{cases} P_i = p_i - X_0^{-1} p_i \\ P_i' = \begin{bmatrix} -(p_i \wedge \cdot) & I \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Après calcul, on trouve la matrice d'Information de Fisher :

$$I(x) = 2\sigma^2 \sum_{i=1}^n P_i'^T P_i'$$

- D'où la covariance de la pose (matrice 6x6) :

$$Cov(x) = [I(x)]^{-1}$$

[Hervier 2012]

81

Centre de Robotique
UNIVERSITÉ DE LYON