

## Feuille d'exercices 1

### Rappels de théorie de la mesure

*Remarque préliminaire :*  $\mathbb{R}$  sera ici toujours équipé de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.** Soit  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Montrer que :

(a) Pour tout  $A, B \in \mathcal{T}$ , on a

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

et, si on suppose de plus que  $\mu(E) < \infty$ ,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(b) Si  $A_n \in \mathcal{T}$  et  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right).$$

**Exercice 2.** On veut montrer que toute fonction étagée est mesurable. Soit  $(E, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que la fonction caractéristique  $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable  $\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$ . Conclure.

**Exercice 3.** (a) Montrer que  $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et calculer sa mesure de Lebesgue.

(b) On considère la fonction  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ . Quelle est son intégrale pour la mesure de Lebesgue ? Que peut-on dire de son intégrale de Riemann ?

**Exercice 4.** Soit  $E$  un ensemble et  $a \in E$ . La *masse de Dirac en a* est l'application définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que  $\delta_a$  est une mesure (on l'appelle aussi la *mesure de Dirac*).

(b) Montrer que pour toute fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on a

$$\int f \delta_a = f(a).$$

(c) On équipe  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  de la mesure  $\mu$  définie par

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(A).$$

Montrer que toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est mesurable et que

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

**Exercice 5.** Soit  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $(E', \mathcal{T}')$  un espace mesurable. On se donne une application  $\varphi : E \rightarrow E'$  mesurable.

- (a) Montrer que la *mesure image*  $\varphi_*\mu$  définie par  $\varphi_*\mu(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$  pour tout  $A \in \mathcal{T}'$  est bien une mesure sur  $(E', \mathcal{T}')$ .
- (b) Montrer que pour toute fonction mesurable  $f : E' \rightarrow \mathbb{R}_+$  on a :

$$\int_{E'} f(x) d\varphi_*\mu(x) = \int_E f \circ \varphi(y) d\mu(y).$$

- (c) Si  $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$  avec  $\mu$  la mesure de Lebesgue et  $\varphi(x) = x^3$ , donner une forme explicite à  $\varphi_*\mu$ . Même question si  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  est maintenant l'espace mesuré de l'exercice 4(c).

**Exercice 6.** Soit  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable. On considère la mesure  $\nu$  définie par

$$\nu(A) := \int \mathbf{1}_A f d\mu.$$

Montrer que  $\nu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{T}, \mu)$ .

**Exercice 7\*.** On considère la relation d'équivalence sur  $[0, 1]$  donnée par  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ . On note  $[x]$  la classe d'équivalence associée à  $x \in [0, 1]$  pour cette relation et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des classes d'équivalence.

- (a) Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de  $[0, 1]$ , c'est-à-dire que  $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow x \sim y$  et

$$\bigcup_{[x] \in \mathcal{C}} [x] = [0, 1].$$

Pour tout  $[x] \in \mathcal{C}$ , on choisit un élément  $p_{[x]} \in [x]$  de façon arbitraire et on considère l'ensemble  $V = \{p_{[x]} : [x] \in \mathcal{C}\}$  (le fait que  $V$  soit un ensemble bien défini requiert l'Axiome du choix). On note  $V + q := \{x + q : x \in V\}$  l'ensemble  $V$  translaté par  $q$ .

- (b) Montrer qu'on a les inclusions d'ensembles

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} V + q \subset [-1, 2].$$

- (c) En utilisant la propriété d'invariance par translation de la mesure de Lebesgue  $\mu$  de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $\mu(A) = \mu(A + x)$  pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , en déduire que  $V \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .