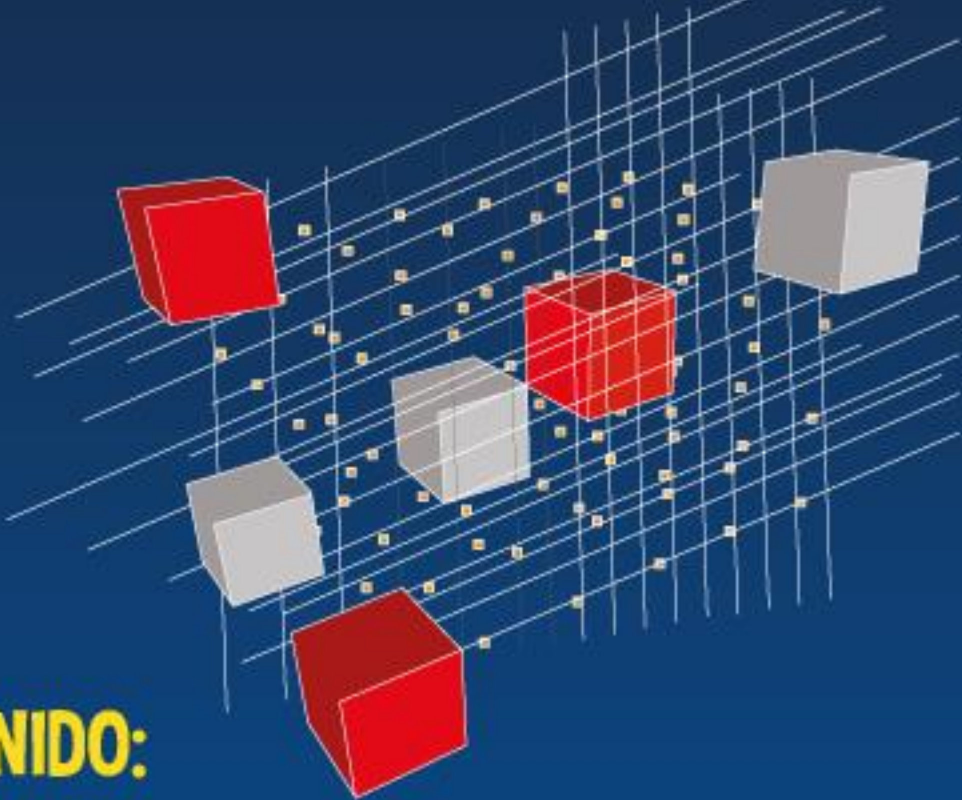
BookMaster
CONECTAMOS CONOCIMIENTOS

Esquema-formulario

ÁLGEBRA



CONTENIDO:

- Ecuaciones lineales
- Principales productos notables
- Ecuación cuadrática
- Polinomios
- Teoria de exponentes
- Sistema de Ecuaciones
- División de Polinomio
- Factorización
- Teoria de Ecuaciones
- Inecuaciones I
- Inecuaciones II
- Valor absoluto
- Relaciones y funciones
- Binomio de Newton
- Logaritmos
- Números complejos

ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones de primer grado

- **Igualdad**: Se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.
- **Identidad**: Es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.
- **Ecuación**: Es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

Primer miembro | Segundo miembro

$$2x - 3 = 3x + 2$$

TÉRMINOS

Ecuación por su solución

- **Ecuaciones compatibles** — Tienen solución
  - Determinada — Solución única
    - $x = \frac{N}{D} \quad D \neq 0$
  - Indeterminadas — Infinitas soluciones
    - $x = \frac{N \Rightarrow 0}{D \Rightarrow 0}$
- **Ecuaciones incompatibles** — No tienen Solución
  - $x = \frac{N \Rightarrow a}{D \Rightarrow 0}$

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

   $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

   $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

   $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$

   $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

5. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

6. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

7. Si: $a + b + c = 0$. Se verifica que:
   - $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
   - $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$

8. ARGAND'D

   $(x^{2n}+x^ny^m+y^{2m})(x^{2n}-x^ny^m+y^{2m}) = x^{4n}+x^{2n}y^{2m}+y^{4m}$

   $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$

9. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$

10. GAUSS

    $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)]$

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Forma

$$ax^2 + bx + c = 0\ ;\ a \neq 0$$

Fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

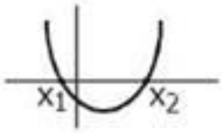
Discriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

Análisis de las raíces

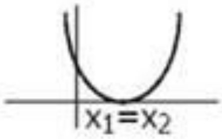
- Si: $D > 0$

  2 raíces $\mathbb{R}$ diferentes



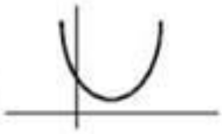
- Si: $D = 0$

  2 raíces $\mathbb{R}$ iguales



- Si: $D < 0$

  2 raíces $\mathbb{C}$ conjugadas



Propiedades de las raíces

Si: $ax^2 + bx + c = 0$

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
- $x_1 - x_2 = ??$

Recordar:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 . x_2$$

Raíces simétricas
(opuestas)

$x; -x \Rightarrow$ suma: 0
$b = 0$

Raíces recíprocas
(inversas)

$x; 1/x \Rightarrow$ producto: 1
$a = c$

Una raíz nula $\boxed{c = 0}$

Dos raíces nulas $\boxed{b = 0\ ;\ c = 0}$

Reconstrucción de una ecuación cuadrática

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Ecuaciones equivalentes: (Raíces iguales)

Si: $ax^2 + bx + c = 0$
$mx^2 + nx + p = 0$ $\Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

POLINOMIOS

- EXPRESIÓN ALGEBRAICA — Racional Entera
  - **Monomio**
    - Definición
    - Términos Semejantes
    - Grado Relativo
    - Grado Absoluto
  - **Polinomio**
    - Definición
    - Grado Absoluto
    - Grado Relativo
    - Clasificación
      - Homogéneo
      - Ordenado
      - Idénticos
      - Completo
      - Idénticamente nulo

REORÍA DE EXPONENTES

Recordar las definiciones

$$a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{\text{"n factores de a"}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad ; \quad a \neq 0$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$$

Recordar los teoremas

$$a^m.a^n = a^{m+n} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn} \; ; \; (a.b)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ; \quad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

SISTEMA DE ECUACIONES

$$E_1 : a_1x + b_1y = c_1$$
$$E_2 : a_2x + b_2y = c_2$$

Por su Solución

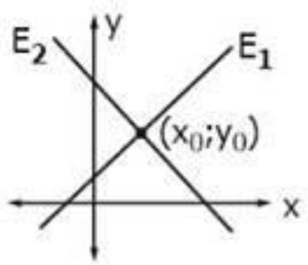
Ecuación Compatible

tienen solución

Determinada

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

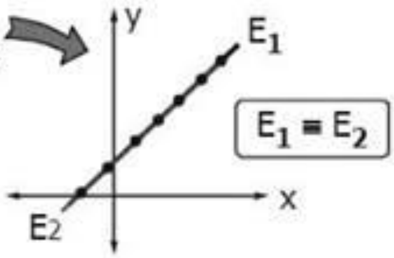
soluciones finitas



Indeterminada

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

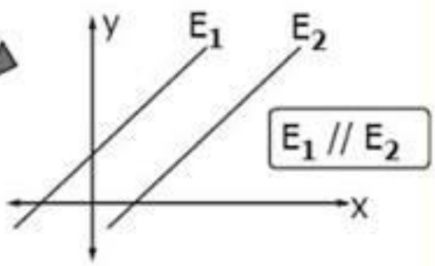
infinitas soluciones



Ecuación Incompatible

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

no tienen solución



DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- Una división es exacta cuando el residuo es cero.
- Algoritmo de la división $D(x) \equiv d(x).\ q(x) + R(x)$
- $P(x)$
  - $P(1)$ = Suma de coeficientes del polinomio.
  - $P(0)$ = Término independiente.
- Si la división es exacta. La división se puede realizar ubicando las potencias en forma ascendente.
- Si un polinomio es divisible entre un producto tendrá que serlo entre cada uno de sus factores.
- Si el dividendo y el dividir son multiplicados por una misma expresión algebraica el cociente no se altera, lo que varía es el residuo que quedará multiplicado por dicha expresión.
- Si la división es exacta. El algoritmo es $D(x) \equiv d(x).\ q(x)$.

FACTORIZACIÓN

Criterios de factorización

- Criterio del factor común y/o agrupación
- Criterio de las identidades
- Criterio del aspa simple
- Criterio del aspa doble
- Criterio del aspa doble especial
- Criterio de los divisores binomios

TEORÍA DE ECUACIONES

* Si r es una raíz de P(x) = 0, entonces P(r) = 0.
* $P_{(x)} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0;\ a_n \neq 0$, también se puede escribir

  $a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n) = 0$

  donde $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ raíces de la ecuación.
* Si: $P(x) = (x-r_1)^m(x-r_2)^n(x-r_3)^p = 0$

  Entonces:

  r_1 es una raíz de multiplicidad m

  r_2 es una raíz de multiplicidad n

  r_3 es una raíz de multiplicidad p
* Teorema de Cardano - Viette

  $r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ "Suma de raíces"

  $r_1.r_2 + r_1.r_3 + ... + r_{n-1}.r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$ "Suma de productos Binarios"

  $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

  $r_1.r_2.r_3.....r_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$ "Producto de raíces"
* Si los coeficientes de la ecuación son racionales entonces si una raíz es $a + \sqrt{b}$, la otra es $a - \sqrt{b}$.
* Si los coeficientes de la ecuación son reales, entonces si una raíz es $\alpha + \beta i$, entonces la otra es $\alpha - \beta i$.
* $P_{(x)} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$ por cada cambio de signo es una raíz positiva.
* $P_{(-x)} = a_n(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + ... + a_0 = 0$ por cada cambio de signo es una raíz negativa, o, menos en una cantidad par.

INECUACIONES I

Inecuación....

- Polinomial ($a \neq 0$)
  - De primer grado: $ax+b \gtrless 0$ → Se aplica transposición
  - De segundo grado: $ax^2+bx+c \gtrless 0$
  - De grado superior: grado mayor o igual a 3

  De segundo grado y de grado superior → Se aplica el criterio de los puntos críticos.

Definiciones:

Sea: $\{a;b;c\} \in \mathbb{R}$

1. "a" es no positivo $\Leftrightarrow a \leq 0$
2. "a" es no negativo $\Leftrightarrow a \geq 0$
3. $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$
4. $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$
5. $a < b \Leftrightarrow b > a$

Importante:

Sea:

$$ax^2 + bx + c > 0 \ ; \ a>0$$

$$\forall \ x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D < 0}$$

$b^2 - 4ac$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

T1: $a^{2n} \geq 0 \ ; \ \forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$

T2: $a > b \Rightarrow a \pm m > b \pm m$

T3: $a > b \wedge m > 0 \Rightarrow am > bm \vee a/m > b/m$

T4: $a > b \wedge m < 0 \Rightarrow am < bm \vee a/m < b/m$

T5: $a < b \Rightarrow 1/a > 1/b$

(a y b tienen el mismo signo)

INECUACIONES II

Inecuación....

- Polinomial ($a \neq 0$)
  - De primer grado: $ax+b \gtrless 0$
  - De segundo grado: $ax^2+bx+c \gtrless 0$
  - De grado superior: grado mayor o igual a 3
- Fraccionaria: $\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0$
- Irracional: $\sqrt[n]{P(x)} \gtrless 0$
- Exponencial: $b^{P(x)} \gtrless b^{Q(x)}$
- Logarítmica: $\log x^2 - 4 < 2$
- Trigonométrica: $Sen^2 x + Cosx > 0,5$

A: Polinomial, Fraccionaria

B: Irracional

C: Exponencial

A

Se aplica el criterio de los puntos críticos.

Importante:

Si: $\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow Q(x) \neq 0$

B

S1: Si: $\sqrt[2n]{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0$

S2: Elevamos a un exponente igual al indice y resolvemos.

Luego el C.S. es: $S1 \cap S2$

C

Si: $b>1 \wedge b^x > b^y \Rightarrow x>y$

Si: $0<b<1 \wedge b^x < b^y \Rightarrow x>y$

VALOR ABSOLUTO

Definición

$$|a| = \begin{cases} a; \text{ si: } & a \geq 0 \\ -a; \text{ si: } & a < 0 \end{cases}$$

Propiedades

- $|a| \geq 0$
- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a||b|$
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$
- $a^2 = |a|^2$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

$\forall\, a; b \in \mathbb{R}$

Ecuaciones con valor absoluto

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$|x| = a \wedge a \geq 0 \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

$|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

Inecuaciones con valor absoluto

$|x| \leq a \Leftrightarrow (a \geq 0) \wedge -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

$|x| \leq |y| \Leftrightarrow (x + y)(x - y) \leq 0$

RELACIONES Y FUNCIONES

Funciones

- **DOMINIO**: $Domf = \{x \in A / \exists y \in B \wedge (x;y) \in f\}$
- **RANGO**: $Ranf = \{y \in B / \exists x \in A \wedge (x;y) \in f\}$

Dos pares ordenados no pueden tener el mismo primer elemento.

Si: $(a;b) \wedge (a;c) \in f$
$\Rightarrow b = c$

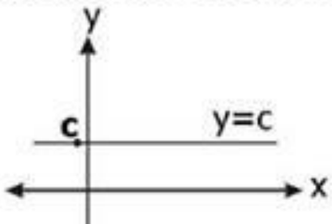
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

discusión de la curva

- Intersección con los ejes coordenados.
  - $x=0$: corte en "y"
  - $y=0$: corte en "x"
- Extensión de la Función: Dominio y Rango

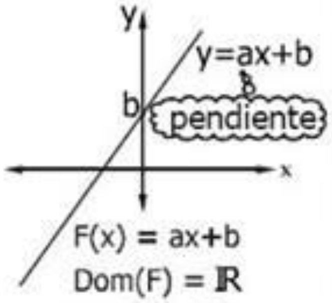
Funciones especiales

1. Función constante



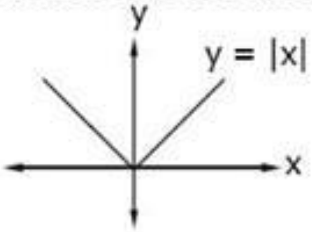
$F(x) = c\ ;\ c \in \mathbb{R}$
$Dom(F) = \mathbb{R}$
$Ran(F) = \{c\}$

2. Función lineal



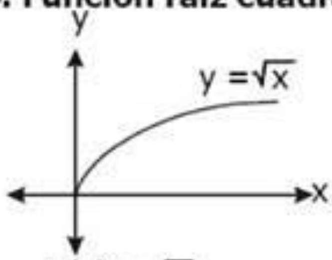
$F(x) = ax+b$
$Dom(F) = \mathbb{R}$
$Ran(F) = \mathbb{R}$

3. Función valor absoluto



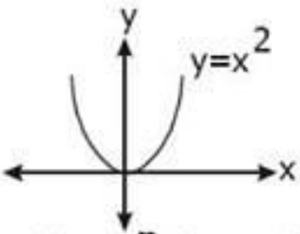
$F(x) = |x|$
$Dom(F) = \mathbb{R}$
$Ran(F) = [0;\infty\rangle$

4. Función raíz cuadrada

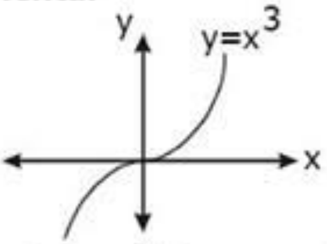


$F(x) = \sqrt{x}$
$Dom(F) = [0;\infty\rangle$
$Ran(F) = [0;\infty\rangle$

5. Función potencia elemental



$F(x) = x^{\mathbf{n}}$ (n=par)
$Dom(F) = \mathbb{R}$
$Ran(F) = [0;\infty\rangle$



$F(x) = x^{\mathbf{n}}$ (n=impar)
$Dom(F) = \mathbb{R}$
$Ran(F) = \mathbb{R}$

BINOMIO DE NEWTON

$$\boxed{(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} c^n_k x^{n-k} a^k}$$

$x;\ a \neq 0$
$n \in Z^+$

En el desarrollo de: $(x+a)^n$
N° de términos $= n+1$

En el desarrollo de: $(x+a)^n$
Σ Coeficientes se obtendrá si: $x=a=1$
$c^n_0 + c^n_1 + c^n_2 + \ldots + c^n_n = 2^n$

En el desarrollo de: $(x+a)^n$
$T_{k+1} = c^n_k\, x^{n-k}\, a^k$
de izquierda a derecha:
$T_{k+1} = c^n_k x^k a^{n-k}$
"K+1" el lugar

En el desarrollo de: $(x+a)^n$
Si "n" par $\quad T_c = T_{\frac{n}{2}} + 1$
Si "n" impar 1er $T_c = T_{\frac{n+1}{2}}$
2do $T_c = T_{\frac{n+1}{2}} + 1$

En el desarrollo de: $(x^p + a^q)^n$
Σ Exponentes$= \dfrac{(p+q)n(n+1)}{2}$

LOGARITMOS

1. Definición

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

2. Antilogaritmo

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a x}$$

3. Consecuencias

$(a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1)$

$$\boxed{\log_a 1 = 0};\ \boxed{\log_a a = 1};$$

$$\boxed{a^{\log_a b} = b};$$

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$$

4. Propiedades

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y};$$

$$\boxed{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c};$$

$$\boxed{\text{colog}_a b = \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b};$$

$$\boxed{\log_a b^c = c \log_a b};$$

$$\boxed{\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b};$$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}};$$

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$$

5. Ecuación exponencial

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$$

6. Ecuación logaritmica

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$$

7. Inecuación exponencial

7.1.

$$a^x > b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x > \log_c b, \text{si: } c>1 \\ \log_c a^x < \log_c b, \text{si: } 0<c<1 \end{cases}$$

7.2.

$$a^x < b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x < \log_c b, \text{si: } c>1 \\ \log_c a^x > \log_c b, \text{si: } 0<c<1 \end{cases}$$

8. Inecuación logaritmica

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \begin{cases} \text{Si } a>1;\ f(x)>g(x)>0 \\ \text{Si } 0<a<1;\ 0<f(x)<g(x) \end{cases}$$

NÚMEROS COMPLEJOS

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$ formado por: NÚMEROS REALES $\mathbb{R}$ y NÚMEROS IMAGINARIOS $\mathbb{I}$

$z = a+bi$

$i = \sqrt{-1}$

DEFINICIONES

Dado el complejo: $z = a+bi$

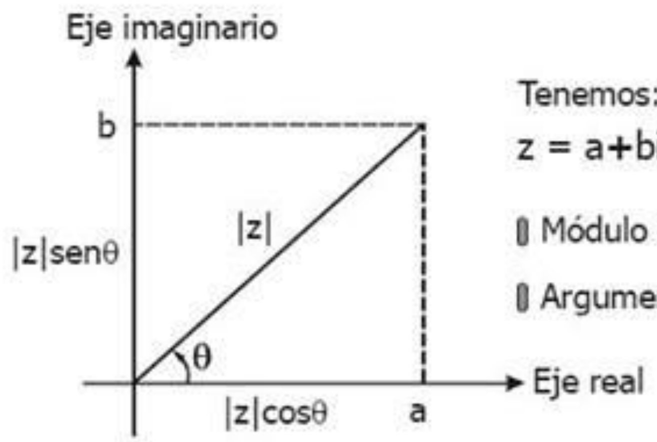
Complejo conjugado: $\bar{z} = a-bi$

Complejo opuesto: $z^* = -a-bi$

POTENCIAS DE "i"

$$\left.\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \\ i^6 = -1 \\ \vdots \end{array}\right\} i^N = i^{4k+r} = i^r$$

Representación gráfica



Tenemos:

$z = a+bi$

- Módulo de "z" ⇨ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- Argumento de "z" ⇨ θ

Forma Trigonométrica de "z": $z = |z|(\mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{Sen}\theta)$

$z = |z|\mathrm{cis}\theta$

Teoremas

T1: $|z| = |\bar{z}| = |z^*|$

T2: $|z|^2 = z.\bar{z}$

T3: $\underbrace{(\mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{Sen}\theta)^n = \mathrm{Cos}(n\theta) + i\mathrm{Sen}(n\theta)}_{\text{de De Moivre}}$

Resultado importantes

- $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$
- $(1+i)^4 = -4$
- $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

NOTITA:

VISITA NUESTRA PÁGINA EN FACEBOOK :

https://web.facebook.com/Preparandote-Para-La-U-1785561948332382/

VISITA NUESTRA PÁGINA WEB:

Preparandoteparalau.blogspot.com

SUSCRÍBETE A NUESTRO CANAL EN YOUTUBE:

https://www.youtube.com/channel/UC7CuvrXmpuG6xSfw3YSymgA