TEORÍA DE ECUACIONES

Es aquella ecuación cuya forma general es:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Esta ecuación es de grado «n» si y solo si: $a_0 \neq 0$, de otro lado $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son coeficientes de la ecuación de grado «n».

Raíz de un polinomio

Sea P(x) es un polinomio no constante, diremos que a es una raíz del polinomio P(x) si y solo si P(a) = 0.

Luego, $P(x) = (x - a)q(x)$

Ejemplo:

- Sea P(x) = x3 – 6x + 5, una de sus raíces es
  $x = 1 \rightarrow P(1) = (1)3 - 6(1) + 5 = 0$
  Luego: $P(x) = (x - 1)q(x)$

Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polimonial de grado «n», con cualquier tipo de coeficientes numéricos, tiene por lo menos una raíz ya sea real o compleja.

Corolario:

Toda ecuación polinomial de grado «n», tiene «n» raíces, contadas con la multiplicidad.
Ejemplos:

- $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$ tiene 2 raíces
- $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ tiene 3 raíces
- $x^4 - 16 = 0 \Rightarrow$ tiene 4 raíces
- $x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0 \Rightarrow$ tiene 5 raíces

Teorema de paridad de raíces

En toda ecuación polinomial de grado «n» y con coeficientes reales, si se tiene una raíz de la forma:

$$x_1 = a + bi \rightarrow x_2 = a - bi;\ a, b \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$$

Corolario:

En toda ecuación polinomial de grado «n» y con coeficientes racionales, si se tiene una raíz de la forma:

$$x_1 = a + \sqrt{b} \rightarrow x_2 = a - \sqrt{b};\ a \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$$

Ejemplo:

- Resuelve: $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
  Factorizando por el teorema del factor, vemos que 2 es una raíz, por Ruffini:

	1	–1	–1	–2
x = 2	↓	2	2	2
	1	1	1	0

  Entonces: $(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$
  Igualando cada factor a cero:
  - $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
  - $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1\ !\ \sqrt{3}i}{2}$

  $\therefore$ C.S. $= \left(2, \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)$

- Resuelve: $x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$
  Factorizando por aspa doble especial

  $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$

  $x^2 \quad -2x \quad +1$
  $x^2 \quad +4x \quad +1$

  Se debe tener: $-6x^2$
  Se tiene: $2x^2$
  Falta: $-8x^2$

  $$\underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{=0}\ \underbrace{(x^2 + 4x + 1)}_{=0} = 0$$

  - $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 1$
  - $x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$

  $\therefore$ C.S. $= \{1, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$

Teorema de Cardano

Relación entre los coeficientes de un polinomio con sus raíces.
Sea la ecuación polinomial de grado «n»

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

de raíces $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ se cumple:

1. Suma de raíces

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

2. Suma de productos binarios

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

3. Suma de productos ternarios

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \ldots + x_{n-2}\, x_{n-1} \cdot x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

4. Suma de productos tomados de k en k

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n + x_2 \cdot x_3 \ldots x_{k-1} \cdot x_n + \ldots = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

5. Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Ecuación bicuadrática

Es una ecuación de cuarto grado de la forma:

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0} \text{ con } abc \neq 0$$

Esta ecuación tiene raíces de la forma:

$$x_1 = \alpha;\ x_2 = -\alpha;\ x_3 = \beta;\ x_4 = -\beta$$

Y se resuelve de forma similar a una ecuación cuadrática.

Ejemplo:

- Resuelve: $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

Factorizando

$$\begin{array}{ll} 9x^2 & -1 \\ x^2 & -4 \end{array}$$

$$\underbrace{(9x^2-4)}_{=0}\ \underbrace{(x^2-4)}_{=0} = 0$$

$9x^2 - 4 = 0;\ 4x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{4}{9};\quad x^2 = \frac{1}{4}$

$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3};\ x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore \text{C.S.} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

Trabajando en clase

Integral

1. Si $x^3 - 5x^2 - 3x - 1 = 0$
   - $x_1 + x_2 + x_3 =$
   - $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$
   - $x_1x_2x_3 =$

2. Si $3x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0$
   Calcula:
   M = Suma de productos binarios
   N = Suma de productos ternarios

3. Si $2x^5 + x^4 - 4x^2 + 3x + 6 = 0$
   Calcula:
   $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5$

PUCP

4. Si la ecuacón : $x^3 + 3x^2 + mx + n = 0$, tienen una raíz igual a $3 - \sqrt{2}$. Calcula la raíz real.

   Resolución

   Por el teorema de Cardano se sabe:

   $$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-(3)}{1} = -3$$

   y por el teorema de paridad de raíces:

   $x_1 = 3 - \sqrt{2} \rightarrow x_2 = 3 + \sqrt{2}$

   entonces:

   $$\underbrace{x_1}_{3-\sqrt{2}} + \underbrace{x_2}_{3+\sqrt{2}} + x_3 = -3$$

   $6 + x_3 = -3$

   $\therefore x_3 = -9$

5. Si la ecuación:
   $x^3 - 5x^2 + ax - b = 0$,
   tiene una raíz igual a $2 + 3i$.
   Calcula la raíz entera.

6. Si la ecuación:
   $x^3 + nx^2 + mx + 7 = 0$,
   tiene una raíz igual a $4 + \sqrt{2}$.
   Calcula la raíz real.

7. Siendo α, β, θ las raíces de la ecuación: $2x^3 + x - 10 = 0$
   Calcula el valor de:

   $$E = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \theta^3}{\alpha^2 + \beta^2 + \theta^2}$$

UNMSM

8. Resuelve:

   $$x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$$

   Resolución

   Factorizando por el teorema del factor, vemos que 1 es una raíz, por Ruffini:

	1	3	2	–6
x = 1	↓	1	4	6
	1	4	6	0

   Entonces:
   $(x-1)(x^2 + 4x + 6) = 0$

   Igualando cada factor a cero:
   - $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$
   - $x^2 + 4x + 6 = 0$

   $$\rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}\,i}{2} = -2 \pm \sqrt{2}\,i$$

   $\therefore \text{C.S.} = \{1, -2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$

9. Resuelve:

   $$x^3 + 2x - 12 = 0$$

10. Resuelve:

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$$

11. Indica la suma de cuadrados de las soluciones de la ecuación:

$$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$$

UNI

12. Resuelve

$$x^8 - 626x^4 + 625 = 0$$

Resolución

$x^8 - 626x^4 + 625 = 0$

$x^4 \quad - 625$

$x^4 \quad - 1$

$(x^4 - 625)(x^4 - 1) = 0$

$(x^2 - 25)(x^2 + 25)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$

Entonces:

$x_{1;2} = \pm 5$; $x_{3;4} = \pm 5i$; $x_{5;6} = \pm i$;

$x_{7;8} = \pm 1$

13. Encuentra el conjunto solución de la ecuación

$$x^8 - 257x^4 + 256 = 0$$

UNI 2013-II

14. Si $x_1 = 2 \wedge x_2 = -1$ son raíces de

$$x^4 - ax^2 + b = 0$$

Calcula $a - b$

UNI 2012-I