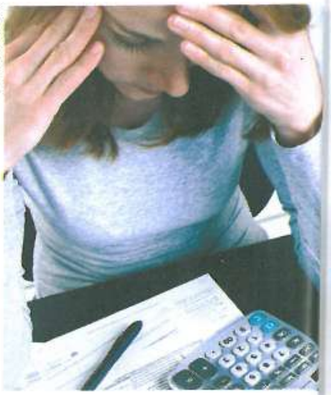
Propiedades algebraicas de los números reales

Para que todos los procedimientos matemáticos usados sean válidos, cada paso debe tener un sustento que lo respalde. En este caso, el sustento corresponde a las propiedades algebraicas de los números reales, las cuales te permitirán justificar tus afirmaciones y conclusiones.


Shutterstock

Aplicación de propiedades en los cálculos mentales.

Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$

El sistema de los números reales está formado por el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y las operaciones de adición (+) y multiplicación (·). Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

Propiedad	Adición	Multiplicación
Asociativa	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$
Existencia y unicidad del elemento neutro	$\exists\, 0 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$ 0 es el elemento neutro aditivo.	$\exists\, 1 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ 1 es el elemento neutro multiplicativo.
Existencia y unicidad del elemento inverso	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$, tal que: $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $-a$ es el inverso aditivo, también llamado opuesto.	$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, tal que: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo.
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

TEN EN CUENTA

La propiedad de la existencia y unicidad del elemento inverso permite definir la sustracción y la división:

- Sustracción: $a + (-b) = a - b$
- División: $a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$

Estas son otras propiedades del sistema de los números reales.

Propiedad cancelativa:

- Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.
- Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

Propiedad de la multiplicación por cero:

- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0 \vee b = 0$.

CÓMO HACER

Demuestra la siguiente propiedad: Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

- Simbolizamos: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

  Hipótesis: $a + c = b + c$ Tesis: $a = b$

- Para la demostración, utilizamos los axiomas o propiedades convenientes:

$(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$ ◀ Igualdad de la adición.

$a + [c + (-c)] = b + [c + (-c)]$ ◀ Axioma de la asociatividad.

$a + 0 = b + 0$ ◀ Axioma del elemento inverso aditivo.

$a = b$ ◀ Axioma del elemento neutro aditivo.

Con este procedimiento quedó demostrada la veracidad de la tesis.

EN CONTEXTO

CÓMO HACER

Manuel trabaja en una tienda de abarrotes. Él anotó en una hoja el pedido que hizo un cliente (ver margen). De una manera rápida, ¿cómo puede calcular mentalmente el resultado? ¿Cuánto debe cobrar?

- Manuel separa mentalmente la parte entera de la parte decimal, aplica la propiedad asociativa para agrupar convenientemente y resuelve:

$$5{,}60 + 1{,}70 + 3{,}80 + 7{,}30 + 4{,}20$$

$$(5 + 1 + 3 + 7 + 4) + (0{,}60 + 0{,}70 + 0{,}80 + 0{,}30 + 0{,}20)$$

$$(10 + 10) \quad + \quad (0{,}60 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1) \; = 20 + 2{,}60 \; = 22{,}60$$

Manuel debe cobrar S/ 22,60.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Economía para todos (pág. 39).

EN CONTEXTO

CÓMO HACER

Inés dicta clases particulares y cobra S/ 18 la hora. El martes dictó 6 horas; el jueves, 3 horas; el viernes, 4 horas, y el sábado, 7 horas. Si cada día gastó S/ 2,40 en pasajes, ¿cuánto dinero le quedó?

- Planteamos una operación combinada:

$18 \cdot (6 + 3 + 4 + 7) - 4 \cdot 2{,}40$ ◀ Dinero que le quedó.

- Resolvemos aplicando propiedades:

$18 \cdot (6 + 4 + 3 + 7) - 4 \cdot 2{,}40$ ◀ P. conmutativa

$18 \cdot (10 + 10) - 4 \cdot 2{,}40$ ◀ P. asociativa

$18 \cdot 10 + 18 \cdot 10 - 4 \cdot 2{,}40$ ◀ P. distributiva

$180 + 180 - 9{,}60 = 360 - 9{,}60 = 350{,}40$

Le quedaron S/ 350,40.

Propiedades con números racionales fraccionarios


Shutterstock

Fiesta del Corpus Christi, región Cusco.

$\frac{4}{8}$ de $120 = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$

$\frac{2}{6}$ de $120 = \frac{1}{3} \cdot 120 = 40$

CÓMO HACER

Un grupo de 120 estudiantes danzará en la fiesta del Corpus Christi, en el Cusco. De ellos, la octava parte bailará *capaq colla*; la sexta parte, *capaq chunçho*; las tres octavas partes, majeño; una sexta parte, dansaq, y el resto bailará una danza puneña. Entre los que bailarán majeño y danza puneña, ¿cuántos más son unos que otros?

- Calculamos cuántos bailarán danza puneña: $120 - 120\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right)$

  Aplicamos propiedades y resolvemos:

  $120 - 120\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 120 - 120\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{6}\right) = 120 - 60 - 40 = 20$

- Calculamos cuántos bailarán majeño: $\frac{3}{8}$ de $120 = \frac{3}{8} \cdot 120 = 45$

La diferencia $(45 - 20)$ es 25. Entonces, 25 estudiantes más bailarán majeño que danza puneña.