Option Américano-Asiatique

Adrien SERVIERE

Pierre-Antoine CHEMINOT

Maxence JOSEPH

23 Novembre 2022

Introduction

- Considérons une option Américano-Asiatique portant sur un actif $(S_t)_{t\in[0,T]}$ et sur sa valeur moyenne $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$.
- Le prix de l'option à l'échénace est $(A_T - S_T)_+$.
- Le détenteur de l'option a le droit d'exercer cette option à tout moment pour une valeur de $\phi(S_t, A_t) = (A_t - S_t)_+$.

Introduction

- La valeur $V = V(t, S, A)$ de l'option suit l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \min\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{t}(S-A)\frac{\partial V}{\partial A} + rV, V - \varphi(S, A)\right) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } S, A \geq 0, t \in [0, T] \\ \\ V(T, S, A) = \varphi(S, A) \quad \text{pour } S, A \geq 0 \end{cases}$$

Sommaire

1. Réécriture de l'équation
2. Schéma aux différences finies explicite
3. Schéma aux différences finies implicite

Plan

1. Réécriture de l'équation
2. Schéma aux différences finies explicite
3. Schéma aux différences finies implicite

Réécriture de l'équation

- On fait le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} t \to T - t \\ x = -\frac{A}{S} \end{cases}$$

et on cherche une solution particulière sous la forme :

$$V(t, S, A) = Sf(T - t, x)$$

- Le calcul des différentes dérivées intervenant dans l'équation donne :

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} = S\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial A} = -\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial S} = f - x\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{x^2}{S}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{cases}$$

Réécriture de l'équation

- En injectant dans l'équation, on trouve finalement :

$$\begin{cases} \min\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(rx + \frac{1+x}{T-t}\right)\frac{\partial f}{\partial x}, f - g\right) = 0 \quad \forall x \leq 0, t \in [0, T] \\ \\ f(0,x) = g(x) = (-1-x)_+ \qquad \forall x \leq 0 \end{cases}$$

- La valeur recherchée est :

$$V(0, S_0, S_0) = S_0 f(T, x = -1)$$

Plan

1. Réécriture de l'équation
2. Schéma aux différences finies explicite
3. Schéma aux différences finies implicite

Discrétisation

- L'équation discrétisée est :

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2 \frac{\left(f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_i^j\right)}{h^2} + \left(rx_i + \frac{1+x_i}{T-t_j}\right)\frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{h} = 0$$

- On choisit comme conditions aux bords :

$$\begin{cases} \text{Condition de Neumann à droite : } \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_{max}) = 0 \\ \\ \text{Condition de Dirichlet à gauche : } f(t, x_{min}) = k(t, x_{min}) \end{cases}$$

avec k de la forme $k(t,x) = a(t)x + b(t)$. En réinjectant cette expression dans l'équation, on trouve $a(t) = \frac{-1}{T}e^{-rt}(T-t)$ et $b(t) = \frac{1}{Tr}(1 - e^{-rt}) - 1$.

Forme Matricielle

- On écrite le problème sous la forme

$$U^{j+1} = (Id - kA_j)^{-1} U^j$$

avec A_j qui s'écrit sous la forme $A_j = A_1 + \frac{1}{h} A_{2j}$

$$A_1 = \frac{-\sigma^2}{2h^2} \begin{pmatrix} -2x_0^2 & x_0^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1^2 & -2x_1^2 & x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{N-2}^2 & -2x_{N-1}^2 & x_{N-2}^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2x_{N-1}^2 & -2x_{N-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$A_{2j} = \begin{pmatrix} -rx_0 - \frac{1+x_0}{T-t_j} & rx_0 + \frac{1+x_0}{T-t_j} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & -rx_1 - \frac{1+x_1}{T-t_j} & rx_1 + \frac{1+x_1}{T-t_j} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -rx_{N-2} - \frac{1+x_{N-2}}{T-t_j} & rx_{N-2} + \frac{1+x_{N-2}}{T-t_j} & \\ 0 & \cdots & 0 & rx_{N-1} + \frac{1+x_{N-1}}{T-t_j} & -rx_{N-1} - \frac{1+x_{N-1}}{T-t_j} & \end{pmatrix}$$

Schéma Euler Explicite (EE) non stable

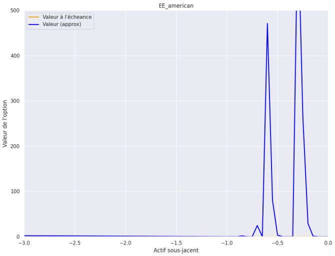

Figure – Le schéma EE n'est stable ni pour l'option américano-asiatique (à gauche), ni pour l'option asiatique (à droite).

Plan

1. Réécriture de l'équation
2. Schéma aux différences finies explicite
3. Schéma aux différences finies implicite

Discrétisation

- Afin d'assurer la stabilité, on choisit un décentrage gauche ou droit suivant les positions des noeuds :

$\longrightarrow$ Si $b(x_i) = \frac{1+x_i}{T-t_j} + rx_i \geq 0$, alors :

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2 \frac{\left(f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_i^{j+1}\right)}{h^2} + \left(rx_i + \frac{1+x_i}{T-t_j}\right)\frac{f_i^{j+1} - f_{i-1}^{j+1}}{h} = 0$$

$\longrightarrow$ Si $b(x_i) = \frac{1+x_i}{T-t_j} + rx_i < 0$, alors :

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2 \frac{\left(f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_i^{j+1}\right)}{h^2} + \left(rx_i + \frac{1+x_i}{T-t_j}\right)\frac{f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}}{h} = 0$$

- Les conditions aux limites restent identiques au cas explicite.

Forme Matricielle

- Sous forme matricielle, le problème devient :

$$\left\{\begin{array}{l} U^{j+1} = min((Id + kA_j)^{-1}U^j, g(x)) \\ U^0 = g(x) \end{array}\right.$$

- La matrice A_1 reste inchangée, alors que la matrice A_{2j} devient :

$$A_{2j} = \begin{pmatrix} -rx_0 - \frac{1+x_0}{T-t_j} & rx_0 + \frac{1+x_0}{T-t_j} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & -rx_1 - \frac{1+x_1}{T-t_j} & rx_1 + \frac{1+x_1}{T-t_j} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & rx_{N-2} + \frac{1+x_{N-2}}{T-t_j} & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & -rx_{N-1} - \frac{1+x_{N-1}}{T-t_j} & rx_{N-1} + \frac{1+x_{N-1}}{T-t_j} & \end{pmatrix}$$

Schéma Euler Implicite (EI) pour l'option asiatique

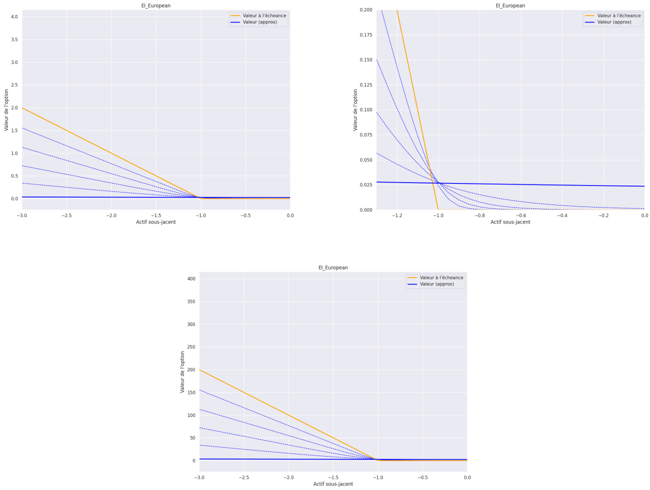

Figure – EI pour la valorisation de l'option asiatique.

Schéma Euler Implicite (EI) pour l'option américano-asiatique

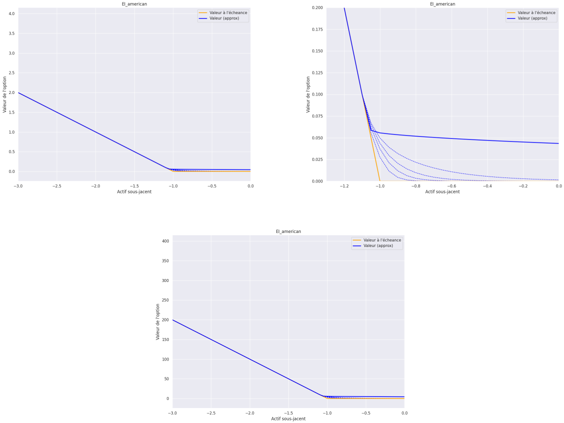

Figure – Le splitting pour la valorisation de l'option américano-asiatique.

Schéma Euler Implicite par l'algorithme de Howard pour l'option américano-asiatique

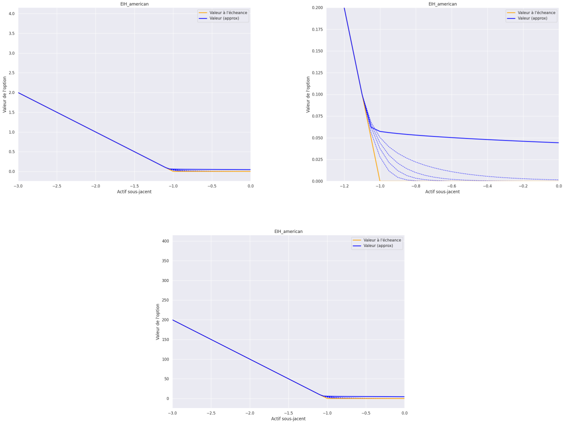

Figure – Howard pour la valorisation de l'option américano-asiatique.

Conclusion

$$r = 0.1 \quad \sigma = 0.2 \quad K = 100 \quad S_0 = 100 \quad T = 1$$

- Méthode Explicite instable

$$V(0, S_0) = 5.743$$

- Méthode Implicite stable

$\longrightarrow$ a permis de déterminer une expression du prix de l'option en t=0

  - Splitting :

$$V(0, S_0) = 5.568$$

  - Howard :

$$V(0, S_0) = 5.734$$

- Dynamique de $(S_t)_{t\in[0,T]}$ non connue, donc impossibilité de déterminer le prix de l'option à tout instant $(V(t,x) = Sf(T-t,x))$

Annexes : Détermination de k(t,x)

- À gauche, on a une condition du type Dirichlet qui s'écrit $f(t, x_{min}) = k(t, x_{min})$ où k est une fonction de la forme $k(t,x) = a(t)x + b(t)$ telle que $k(0,x) = -1 - x$ et

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \left(rx + \frac{1+x}{T-t}\right)\frac{\partial k}{\partial x} = 0$$

- Pour trouver la forme exacte de la fonction k, on commence à remplacer k par $ax + b$ dans l'EDP. On obtient :

$$xa'(t) + b'(t) + \left(rx + \frac{1+x}{T-t}\right)a(t) = 0$$

On dérive ensuite par rapport à x. On a donc :

$$a'(t) + \left(r + \frac{1}{T-t}\right)a(t) = 0 \Leftrightarrow a(t) = \frac{-(T-t)}{T}e^{-rt}$$

Annexes : Détermination de k(t,x)

- Pour trouver b, on injecte le résultat de a dans l'EDO satisfaite par a et b de sorte à avoir :

$$x\left[\frac{-(T-t)}{T}e^{-rt}\right]' + b'(t) + \left(rx + \frac{1+x}{T-t}\right)\frac{-(T-t)}{T}e^{-rt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b'(t) = \frac{1}{T}e^{-rt}$$

$$\Leftrightarrow \quad b(t) = -1 + \frac{1}{Tr}(1-e^{-rt}) \text{ car } b(0) = -1.$$

- Donc finalement $k(t,x) = -x\frac{T-t}{T}e^{-rt} - 1 + \frac{1}{Tr}(1-e^{-rt})$