Lista de Exercícios - Funções Elementares

1. Dadas as funções $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = -x + 5$, pede-se:
   a) Os pontos de interseção entre os gráficos de f e g e os eixos coordenados x e y.
   b) O valor de x tal que $f(x) = g(x)$.
   c) Esboce os gráficos destas funções.
2. Em certa cidade, uma corrida de táxi custa R$ 4,80 a bandeirada mais R$ 0,40 por quilômetro rodado. Quanto custa uma corrida de 50 quilômetros?
3. Um reservatório A, inicialmente com 720 litros, perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto um reservatório B, inicialmente com 60 litros, ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. Determine em que instante os dois reservatórios terão o mesmo volume de água.
4. Dois corpos A e B estão em movimento retilínio uniforme e as posições destes corpos (em metros), no instante t em segundos, são dadas pelas funções $S_A = 15 + 20t$ e $S_B = 30 - 5t$, respectivamente. Em que instante de tempo estes corpos devem se encontrar?
5. Dadas as funções quadráticas $f(x) = -3x^2 + 12x$ e $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Pede-se:
   a) Os pontos de interseção entre os gráficos das funções e os eixos x e y.
   b) Os pontos de máximo ou mínimo e os valores máximo ou mínimo que cada função assume.
   c) Esboce os gráficos destas funções.
6. Dentre todos os números reais de soma 8, determine aqueles cujo produto é máximo.
7. Mostre que dentre todos os retângulos com perímetro constante o que possui maior área é o quadrado.
8. Um objeto é atirado para cima da janela situada no alto de um prédio de 80m de altura. Sua velocidade inicial é de 30m/s. A altura h do objeto em relação ao solo, em metros, t segundos após o lançamento, é $h(t) = 80 + 30t - 5t^2$. Obter:
   a) O instante em que o objeto atinge a altura máxima.
   b) A altura máxima que ele atinge.
   c) O instante em que ele atinge o solo.
9. O lucro de uma empresa que vende peças raras é dado pela função $L(x) = x^2 - 10x + 16$, onde x representa a quantidade de peças vendidas em um mês. Determine:
   a) para quais valores de x a empresa tem prejuízo.
   b) para quais valores de x a empresa tem lucro.
   c) o maior prejuízo que a empresa pode ter.
10. Um grupo de biólogos está estudando o desenvolvimento de uma determinada colônia de bactérias e descobriu que sob condições ideais, o número de bactérias pode ser encontrado através da expressão $N(t) = 2000 \cdot 2^{0,5t}$, sendo t em horas. Pede-se:
    a) Qual a população de bactérias 10 horas?
    b) Considerando essas condições, quanto tempo após o início da observação, o número de bactérias será igual a 8192000?
11. Os materiais radioativos possuem uma tendência natural, ao longo do tempo, de desintegrar sua massa radioativa. O tempo necessário para que metade da sua massa radioativa se desintegre é chamado de meia-vida. A quantidade de material radioativo de um determinado elemento é dado por

    $$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

    onde:

    $N(t)$ é a quantidade de material radioativo (em gramas) em um determinado tempo t;
    N_0 é a quantidade inicial de material (em gramas);
    T é o tempo da meia vida (em anos);
    t é tempo decorrido (em anos).

    Considerando que a meia-vida deste elemento é igual a 28 anos, determine o tempo necessário para que o material radioativo se reduza a 25% da sua quantidade inicial.

12. Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Sabendo que a vazão natural do lago permite que 50% de seu volume seja renovados a cada dez dias e que o nível de toxidez no tempo t é dado por

$$T(t) = T_0 \cdot 0,5^{0,1t},$$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial. Sendo $\log 2 = 0,3$, o valor de D é?

13. Se $\log_3 x + \log_9 x = 1$, então o valor de x é?

14. Se $10^x = 20^y$, então o valor de x/y é? Dado: $\log 2 = 0,3$.

15. Próximo da superfície terrestre, a pressão atmosférica P, dada em atm, varia aproximadamente conforme o modelo matemático:

$$P = P_0(0,1)^h,$$

onde $P_0 = 1$atm e h é altura em quilômetros. Qual a altura de uma montanha cujo topo tem pressão atmosférica de $0,3$atm? Dado: $\log 3 = 0,48$.

16. Mostre as seguintes identidades trigonométricas:

   a) $\cos x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$.
   b) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cossec}^2 x$.
   c) $\operatorname{tg} x \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$.
   d) $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

17. Use o item (d) da questão anterior para concluir que $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

18. Determine $\operatorname{tg} x$, sabendo que $\operatorname{tg} 2x = 1$.

19. Use as fórmulas do seno e do cosseno da soma de dois arcos para mostrar que:

   a) $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
   b) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
   c) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.
   d) $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

20. Um corpo preso a uma mola tem sua posição y no tempo t definida pela função $y(t) = 4\cos(\pi t)$. Pede-se:

   a) Determine em que instantes a mola está em seu alongamento máximo e em sua compressão mínima.
   b) Determine as posições do corpo quando $t = 1,5\,\text{s}$ e quando $t = \frac{1}{3}\,\text{s}$.