Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Kaos v diskretnih dinamičnih sistemih

Predstavitev diplomskega dela

Adrijan Rogan

Mentorica: prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek
Somentor: doc. dr. Luka Boc Thaler

Ljubljana, 2022

Vsebina

Kaj je diskretni dinamični sistem? Kaj je kaos?

Zgled kaosa v eni dimenziji – šotorska preslikava

Dinamični sistem

Definicija. *Dinamični sistem* je par (G, M), kjer je $(G, *)$ monoid, ki deluje na množici M. To pomeni, da obstaja taka preslikava

$$\begin{aligned} T\colon G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto T_g(x), \end{aligned}$$

da velja $T_g \circ T_h = T_{g*h}$ in $T_e = I$ (identična preslikava).

Diskretni dinamični sistem

Vzamemo $(\mathbb{N}_0, +)$ ali $(\mathbb{Z}, +)$.
Klasični zgled je *iteracija preslikave*.

$$T_n = f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-krat}$$

$$T_0 = f^0 = \mathrm{id}$$

Diskretni dinamični sistem

Naj par (M, f) predstavlja diskretni dinamični sistem, ki izhaja iz iteracije preslikave $f : M \to M$.

Tak sistem za vsak začetni člen $x_0 \in M$ definira zaporedje v M.

Predpostavimo, da je M metrični prostor.

Diskretni dinamični sistem

Orbita

Naj je (M, f) diskretni dinamični sistem.

Definicija. Orbita točke $x \in M$ je množica vseh iteracij f za x.

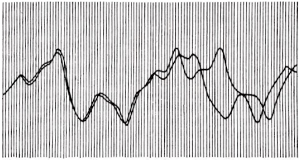
$$\gamma_+(x) = \{ f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

Kaotični diskretni dinamični sistem

Občutljivost na začetne pogoje

Ideja: majhna sprememba lahko spremeni dolgoročno obnašanje sistema

Definicija.
Preslikava f je *občutljiva na začetne pogoje*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $\varepsilon > 0$ in $x, y \in M$, $x \neq y$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $d(x, y) < \varepsilon$ in $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.



How two weather patterns diverge. From nearly the same starting point, Edward Lorenz saw his computer weather produce patterns that grew farther and farther apart until all resemblance disappeared. (From Lorenz's 1961 printouts.)

Kaotični diskretni dinamični sistem

Topološka tranzitivnost

Ideja: dinamični sistem dobro premeša prostor

Definicija. Preslikava f je *topološko tranzitivna*, če za poljubni odprti množici $U, V \subseteq M$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Kaotični diskretni dinamični sistem

Gostost periodičnih točk

Ideja: poljubno blizu vsake točke lahko najdemo periodično točko

Definicija. Naj bo (X, d) metrični prostor. Množica $Y \subseteq X$ je gosta v X, če je vsaka točka iz X stekališče množice Y, točka v Y ali oboje.

Definicija. Naj bo (X, d) metrični prostor in naj bo $Y \subseteq X$. Točka $x \in X$ je stekališče množice Y, če vsaka ε-okolica točke x vsebuje element Y, ki ni enak x.

Kaotični diskretni dinamični sistem

Definicija

Devaney pravi, da je kaotični sistem *nepredvidljiv*, *nedeljiv* in da ima *element stalnosti*.

Definicija. Diskretni dinamični sistem (M, f) je *kaotičen*, če:

1. je f občutljiva na začetne pogoje,
2. je f topološko tranzitivna in
3. je množica periodičnih točk f gosta v M.

Kaotični diskretni dinamični sistem

Presenetljiv izrek

Občutljivost na začetne pogoje – osrednja ideja kaosa?

Izrek. Naj bo (M, f) diskretni dinamični sistem za metrični prostor M, ki ni končen, in zvezno preslikavo f. Če je f topološko tranzitivna in so periodične točke goste v M, je f občutljiva na začetne pogoje.

Šotorska preslikava

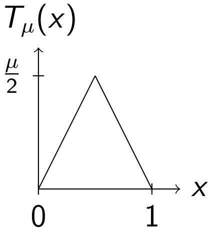
Definicija

Družina šotorskih preslikav v odvisnosti od realnega parametra $\mu > 0$.

$$T_\mu(x) = \mu \cdot \min(x, 1-x) = \begin{cases} \mu x & \text{za } x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1-x) & \text{za } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Šotorska preslikava

Lastnosti



- Fiksna točka $x = 0$
- Fiksna točka $x = \frac{\mu}{\mu+1}$ za $\mu \geq 1$
- Maksimum $T_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{2}$
- Zvezna

Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu \leq 1$

$0 < \mu < 1$

Orbita poljubne točke konvergira k 0

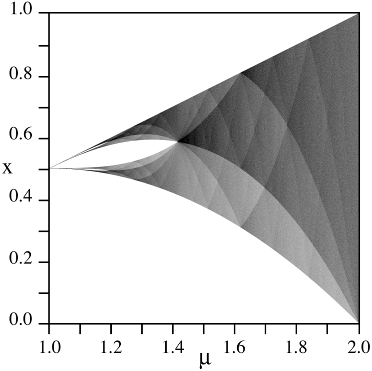
$\mu = 1$

Samo fiksne in predperiodične fiksne točke

Šotorska preslikava

Dinamika za $1 < \mu < 2$

Bifurkacijski diagram – asimptotično vedenje orbite

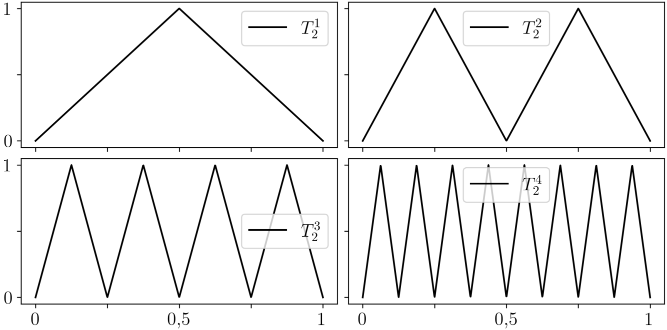


Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu = 2$

Interval $[0, 1]$, surjekcija

Podvajanje šotorov

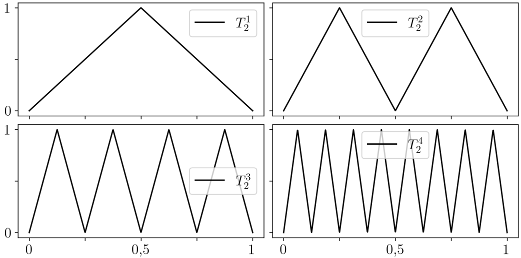


Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu = 2$

Trditev. Preslikava $T_2^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \to [0,1]$ je linearna in bijektivna za vse $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

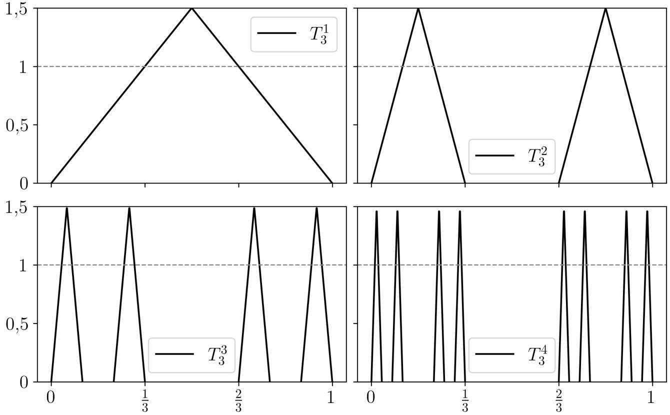
Posledica. Periodične točke T_2 so goste v $[0,1]$. Preslikava T_2 je topološko tranzitivna in občutljiva na začetne pogoje.



Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

Problem: slika intervala $[0, 1]$ ni podmnožica $[0, 1]$

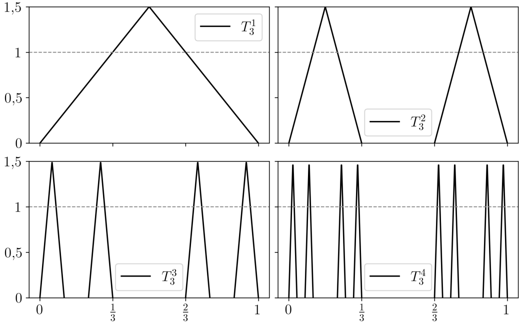


Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

Ideja: omejimo prostor, na katerem je definirana T_μ

$$\Lambda_n = \{\, x \in [0,1] \mid T_\mu^n(x) \in [0,1] \,\}$$

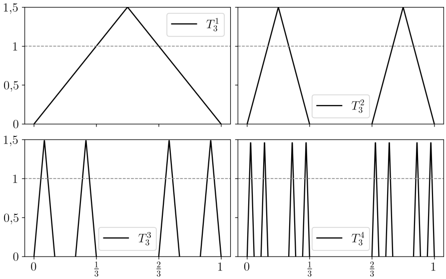


Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

$$\Lambda_n = \{\, x \in [0,1] \mid T_\mu^n(x) \in [0,1] \,\}$$

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n$$

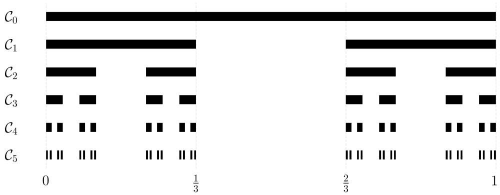


Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

Definicija. Množica $\Gamma \subset \mathbb{R}$ je Cantorjeva množica, če je zaprta in omejena, ne vsebuje intervalov in je vsaka točka iz Γ stekališče od Γ.

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n \quad \leftarrow \text{Cantorjeva množica}$$



Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

Definicija. Simbolni prostor 0 in 1 je množica vseh neskončnih zaporedij 0 in 1,

$$\Sigma_2 = \{\, 0, 1 \,\}^{\mathbb{N}_0} = \{\, (s_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid s_i \in \{\, 0, 1 \,\} \ \forall i \in \mathbb{N}_0 \,\}\,.$$

Na Σ_2 vpeljemo metriko

$$d(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

Definicija. Pomik je preslikava $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$,

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = s_1 s_2 s_3 \dots$$

Izrek. Pomik σ je kaotična preslikava na Σ_2.

Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

Naj bo $I = [0, 1]$ ter označimo $I_0 = [0, \frac{1}{\mu}]$ in $I_1 = [1 - \frac{1}{\mu}, 1]$. Vpeljimo preslikavo $\Psi : \Lambda \to \Sigma_2$,

$$x \mapsto s_0 s_1 s_2 \dots, \text{ kjer } s_n = \begin{cases} 0 & \text{če } T_\mu^n(x) \in I_0 \\ 1 & \text{če } T_\mu^n(x) \in I_1 \end{cases} .$$

Šotorska preslikava

Dinamika za $\mu > 2$

$$\Psi : \Lambda \to \Sigma_2,\ x \mapsto s_0 s_1 s_2 \ldots,\ s_n = \begin{cases} 0 & \text{če } T_\mu^n(x) \in I_0 \\ 1 & \text{če } T_\mu^n(x) \in I_1 \end{cases}$$

Izrek. Preslikava Ψ je topološka konjugacija med (Λ, T_μ) in (Σ_2, σ).

Izrek. Diskretni dinamični sistem (Λ, T_μ) je kaotičen za $\mu > 2$.