Esercizi di Informatica Teorica

Linguaggi non contestuali: proprietà e forme normali

Grammatiche non contestuali

richiami

grammatica non contestuale (CFG o tipo 2):

$$A \rightarrow \beta \quad \text{con } A \in V_N,\ \beta \in (V_T \cup V_N)+$$

osservazione: è possibile estendere una CFG (Context-Free Grammar) con ε-produzioni ed inoltre, per ogni CFG con ε-produzioni esiste una CFG equivalente in cui al più solo l'assioma ha una ε-produzione e l'assioma non compare mai a destra

proprietà di chiusura: i linguaggi non contestuali sono chiusi rispetto all'unione, concatenazione ed iterazione; non sono chiusi rispetto ad intersezione e complementazione

Proprietà di chiusura di linguaggi di tipo 2

richiami

siano G_1 e G_2 due grammatiche non constestuali e siano S_1 e S_2 i rispettivi assiomi; siano inoltre L_1 ed L_2 i linguaggi riconosciuti da G_1 e G_2 : le grammatiche che riconoscono i linguaggi unione, concatenazione ed iterazione di L_1 ed L_2 sono ottenibili da G_1 e G_2 ridefinendo l'assioma S e le sue produzioni nel seguente modo:

- unione: $S \rightarrow S_1 \mid S_2$
- concatenazione: $S \rightarrow S_1 S_2$
- iterazione (di L_1): $S \rightarrow S_1 S \mid \varepsilon$

domanda: sapresti trovare due linguaggi L_1 ed L_2 di tipo 2 la cui intersezione non è un linguaggio di tipo 2

3

Pumping lemma per linguaggi di tipo 2

richiami

pumping lemma: se L è un linguaggio non contestuale allora $\exists\, n > 0$ tale che $\forall z \in L$ con $|z| \geq n$ $\exists$ u,v,w, x, y :

1) $z = uvwxy$
2) $|vwx| \leq n$
3) $|vx| \geq 1$
4) $z_i = uv^iwx^iy \in L \quad \forall i \in \mathbf{N}$ (cioè $i = 0, 1, 2, \ldots$)

osservazioni:

1. n dipende da L (viene fissato una volta per tutte sulla base di L)
2. u, v, w, x, y dipendono da z e da n
3. u, w, y possono anche essere stringhe vuote
4. una delle due stringhe v ed x può anche essere vuota
5. poiché può anche essere i = 0, la stringa $z_0 = uwy$ deve appartenere ad L affinché la proprietà 4 del lemma sia soddisfatta

4

Esercizi sul pumping lemma

esercizio 1

verificare che il pumping lemma vale per i seguenti linguaggi non contestuali:

1.a $L = \{a^h b^k a^k b^h : h, k \geq 0\}$

1.b $L = \{s \in \{a,b,c\}^*: \#c = \#a + \#b\}$

esercizio 2

dimostrare, utilizzando il pumping lemma, che i seguenti linguaggi non sono di tipo 2:

2.a $L = \{a^h b^k a^h b^k : h, k \geq 1\}$

2.b $L = \{s \in \{a,b,c\}^+: \#a = \#b = \#c\}$

esercizio 3

dire se (e perché) i seguenti linguaggi sono non contestuali:

3.a $L = \{ss : s \in \{a,b\}^*\}$

3.b $L = \{ss^R : s \in \{a,b\}^*\}$

5

Esercizi sul pumping lemma

esercizio 4

dire, giustificando la risposta, se il seguente linguaggio è non contestuale: $L = \{a^i b^j c^k : i = 0 \text{ o } j=k\}$

dire inoltre se L è regolare oppure no.

esercizio 5

mostrare un esempio di linguaggio <u>non</u> di tipo 2

per cui valga il pumping lemma per linguaggi di tipo 2

(suggerimento: sfruttare l'idea dell'Esercizio 4)

esercizio 6

dimostrare, usando il pumping lemma per linguaggi non contestuali, che il seguente linguaggio non è di tipo 2:

$L = \{a^k : k \text{ è un numero primo}\}$

6

Grammatiche in forma ridotta

richiami

una grammatica G non contestuale è in forma ridotta se:

- G non contiene ε-produzioni, se non sull'assioma, ed in tal caso l'assioma non compare a destra di nessuna produzione;
- G non contiene simboli inutili, cioè:
  - simboli non fecondi (cioè dai quali non sono generabili stringhe di soli terminali)
  - simboli non generabili dall'assioma
- G non contiene produzioni unitarie (cioè del tipo $A \to B$)

teorema:

ogni grammatica non contestuale si può scrivere in forma ridotta

7

Grammatiche in forma ridotta

richiami

algoritmo per portare una grammatica in forma ridotta:

1. portare eventuali ε-produzioni solo sull'assioma, e se l'assioma compare a destra, introdurre un nuovo assioma ($S' \to S$, $S' \to \varepsilon$) ed una serie di produzioni che si ottengono da quelle esistenti sostituendo ε ad S
2. rimuovere le produzioni che contengono simboli non fecondi
3. rimuovere le produzioni che contengono simboli non generabili dall'assioma
4. per ogni produzione unitaria $A \to B$ applicare una tra le due regole seguenti:
   I. per ogni $B \to \alpha \Rightarrow$ introdurre $A \to \alpha$ ed eliminare $A \to B$ *(dare ad A la stessa produttività di B)*
   II. per ogni $C \to ...A... \Rightarrow$ introdurre $C \to ...B...$ ed eliminare $A \to B$; eliminare $C \to ...A...$ (perché infeconda) se A non ha altre produzioni *(dare a B la stessa raggiungibilità di A)*

8

Esercizi sulla forma ridotta

esercizio 7

portare in forma ridotta la seguente grammatica non contestuale:

$S \rightarrow AB \mid CAB \mid ACE$
$A \rightarrow B \mid BA \mid SAAB$
$B \rightarrow \mathbf{b} \mid CA\mathbf{b} \mid CED$
$C \rightarrow \mathbf{a}C \mid C\mathbf{a}D \mid B\mathbf{a}D$
$D \rightarrow C\mathbf{a} \mid BEC$
$E \rightarrow \mathbf{e} \mid B\mathbf{e}$

esercizio 8

portare in forma ridotta la seguente grammatica non contestuale:

$S \rightarrow \varepsilon$
$S \rightarrow SS$
$S \rightarrow \mathbf{(}S\mathbf{)}$

9

Grammatiche in forma normale di Chomsky

richiami

una grammatica non contestuale è in forma normale di Chomsky (CNF) se tutte le sue produzioni sono della forma $A \rightarrow BC$ o $A \rightarrow a$

teorema: ogni grammatica non contestuale G tale che $\varepsilon \notin L(G)$ può scriversi in forma normale di Chomsky

algoritmo per portare una grammatica in CNF

1. portare la grammatica in forma ridotta
2. sostituire ogni terminale ‘a’ con un non terminale X_a in tutte le produzioni in cui compare ‘a’ ed introdurre la produzione $X_a \rightarrow a$ (la forma ottenuta a questo punto si chiama “quasi CNF”)
3. sostituire ricorsivamente ogni produzione del tipo: $A \rightarrow BC\alpha$ con le seguenti: $A \rightarrow BD$, $D \rightarrow C\alpha$, dove D è un nuovo non terminale

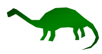
10

Esercizi sulla CNF

esercizio 9 

portare in CNF la seguente grammatica non contestuale:

$S \rightarrow SS \mid \mathbf{(}S\mathbf{)} \mid \mathbf{(\,)}$

esercizio 10 

portare in CNF la seguente grammatica non contestuale:

$S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{aa}$

$A \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid B$

$B \rightarrow \mathbf{b}B\mathbf{b} \mid \mathbf{bb}$

11

Grammatiche in forma normale di Greibach

richiami

una grammatica non contestuale è in forma normale di Greibach (GNF) se tutte le sue produzioni sono della forma $A \rightarrow a\beta$, dove β è una sequenza (eventualmente vuota) di non terminali

teorema: ogni grammatica non contestuale G tale che $\varepsilon \notin L(G)$ può scriversi in forma normale di Greibach

algoritmo per portare una grammatica in GNF

1. portare la grammatica in CNF (o in quasi CNF)
2. fissare un ordinamento dei non terminali: $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$
3. portare tutte le produzioni nella forma: $A_i \rightarrow A_j\alpha$ con $i < j$, oppure $A_i \rightarrow a\gamma$ con 'a' simbolo terminale, usando la seguente procedura:

12

Grammatiche in forma normale di Greibach

per $k = 1,\dots,m$ applicare le due regole seguenti nell'ordine:

- sostituzione:

  $A_k \rightarrow A_j\alpha,\ A_j \rightarrow \beta \Rightarrow A_k \rightarrow \beta\alpha,\ A_j \rightarrow \beta\ \ (\forall j = 1,..,k\text{-}1)$
- eliminazione ricorsione sinistra:

  $A_k \rightarrow A_k\alpha_1 \mid \dots \mid A_k\alpha_n \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_s \Rightarrow$

  $A_k \rightarrow \beta_1 B_k \mid \dots \mid \beta_s B_k \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_s$ e $B_k \rightarrow \alpha_1 B_k \mid \dots \mid \alpha_n B_k \mid \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n$

4) applicare la sostituzione a "ritroso" $(i = m\text{-}1,..,1)$ prima sui non terminali A_i e poi a ritroso sui non terminali B_j (questa fase ci garantisce che tutte le produzioni avranno la parte destra che inizia con un simbolo terminale)

nota pratica: è utile scegliere bene l'ordinamento iniziale dei non terminali per semplificare il calcolo

Esercizi sulla GNF

esercizio 11

portare in GNF la seguente grammatica non contestuale:

$S \rightarrow SS \mid AZ \mid AX$

$X \rightarrow SZ$

$A \rightarrow ($

$Z \rightarrow)$

esercizio 12

portare in GNF la seguente grammatica non contestuale:

$S \rightarrow AC \mid CA$

$A \rightarrow a \mid CAA$

$C \rightarrow b \mid c \mid ACC$

Soluzioni

soluzione esercizio 1.a $L = \{a^h b^k a^k b^h : h, k \geq 0\}$

il pumping lemma è valido per ogni stringa (non vuota) di L; infatti, se k, $h > 0$ basta suddividere la stringa in modo che v sia formata soltanto dall'ultima 'b' del primo gruppo di 'b', w sia vuota, ed x sia formata soltanto dalla prima 'a' del secondo gruppo di 'a'

$$z = \underbrace{aa...aabb...b}_{u}\underbrace{b}_{v}\underbrace{a}_{x}\underbrace{a...aabb...bb}_{y}$$

se $k = 0$ o $h = 0$, allora la stringa z è del tipo a..ab..b oppure b...ba...a, dove il numero di 'a' è uguale al numero di 'b'; in tal caso basta scegliere v ed x come l'ultimo ed il primo simbolo rispettivamente del primo e del secondo gruppo di simboli.

15

Soluzioni

soluzione esercizio 1.b $L = \{s \in \{a,b,c\}^*: \#c = \#a + \#b\}$

anche in questo caso si può applicare il pumping lemma ad ogni stringa (non vuota) z di L; infatti, in z esiste almeno una 'c' che è adiacente o ad una 'a' o ad una 'b'; supponiamo, per fissare le idee, che esista una 'c' adiacente ad una 'a' e che tale 'a' si trovi alla sua destra; allora è sufficiente scegliere v uguale alla sola 'c', w vuota, ed x uguale alla sola 'a' (gli altri casi sono analoghi)

$$z = \underbrace{abc}_{u}\underbrace{c}_{v}\underbrace{a}_{x}\underbrace{abcccca}_{y}$$

16

Soluzioni

soluzione esercizio 2.a $\quad L = \{a^h b^k a^h b^k : h, k \geq 1\}$

supponiamo che valga il pumping lemma; allora è possibile fissare un n tale che per tutte le stringhe z di L di lunghezza maggiore o uguale ad n riesce $z = uvwxy$ ($|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$) e $z_i = uv^iwx^iy \in L \;\; \forall i \in \mathbf{N}$; ma se scegliamo una stringa $z = a^h b^k a^h b^k$ tale che $h, k > n$ si osserva che z ha lunghezza maggiore di n ma non ammette suddivisioni valide; infatti:

v ed x devono essere formate o da sole ‘a’ o da sole ‘b’;

– inoltre, per mantenere il bilanciamento, v ed x devono contenere delle ‘a’ (o delle ‘b’) di gruppi diversi (es. v nel primo gruppo di ‘a’ ed x nel secondo gruppo di ‘a’)

– tuttavia, ciò non è possibile dovendo essere $|vwx| \leq n$ ed essendo $h, k > n$ (cioè la distanza minima tra due gruppi di simboli uguali è superiore ad n)

17

Soluzioni

soluzione esercizio 2.b $\quad L = \{s \in \{a,b,c\}^+ : \#a = \#b = \#c\}$

supponiamo che valga il pumping lemma e che n sia una costante tale che per tutte le stringhe z di L di lunghezza maggiore o uguale ad n riesce $z = uvwxy$ ($|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$) e $z_i = uv^iwx^iy \in L \;\; \forall i \in \mathbf{N}$;

consideriamo allora la seguente stringa z di lunghezza maggiore di n: $z = a^kb^kc^k$ con $k > n$; comunque proviamo a scegliere una suddivisione “valida” per z, poiché deve essere $|vwx| \leq n$, ed essendo $k > n$, non è mai possibile fare in modo che v ed x prendano uno stesso numero di ‘a’, di ‘b’ e di ‘c’ (vedi l’esempio in figura)

$$z = \text{aaa...aa}\underbrace{\text{a}}_{v}\underbrace{\text{bbb...bb}}_{w}\underbrace{\text{bc}}_{x}\text{cc...ccc}$$

$$> n$$

d’altro canto, suddivisioni di altro tipo sbilancerebbero la stringa, cioè pompando non si avrebbe che #a = #b = #c.

18

Soluzioni

soluzione esercizio 3.a $L = \{ss : s \in \{a,b\}^*\}$

L non è un linguaggio non contestuale e si può dimostrare utilizzando il pumping lemma; supponiamo per assurdo che il pumping lemma valga, e sia dunque n una costante tale che per tutte le stringhe z di L di lunghezza maggiore o uguale ad n riesce $z = uvwxy$ ($|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$) e $z_i = uv^iwx^iy \in L \ \ \forall i \in \mathbf{N}$;
consideriamo $z = a^k b^k a^k b^k$ con $k > n$; mostriamo che z, pur avendo lunghezza maggiore di n, non può essere suddivisa opportunamente:
– v ed x non possono prendere solo la prima metà della stringa (cioè il primo gruppo di 'a' e/o di 'b') perché allora $z_0 = uwy$ non sarebbe della forma ss (verificare formalmente!); analogamente v ed x non possono prendere solo la seconda metà della stringa;

19

Soluzioni

– allora v ed x devono essere prese a cavallo del centro della stringa, e poiché deve essere $|vwx| \leq n$, allora risulta $vwx = b^i a^j$, con $i, j > 0$; ma allora, se ancora una volta consideriamo la stringa $z_0 = uwy$, essa avrà la forma: $z_0 = a^k b^t a^r b^k$, che non ha la forma ss;
– da ciò l'assurdo

soluzione esercizio 3.b $L = \{ss^R : s \in \{a,b\}^*\}$ è un linguaggio non contestuale; infatti si tratta dell'insieme delle stringhe palindrome su $\{a,b\}$ di lunghezza pari; tale linguaggio è per esempio generato dalla seguente grammatica non contestuale:

$S \to \varepsilon$ $\qquad S \to X$
$X \to aXa$ $\qquad X \to bXb$
$X \to aa$ $\qquad X \to bb$

20

Soluzioni

soluzione esercizio 7

forma ridotta di:
$S \to AB \mid CAB \mid ACE$
$A \to B \mid BA \mid SAAB$
$B \to b \mid CAb \mid CED$
$C \to aC \mid CaD \mid BaD$
$D \to Ca \mid BEC$
$E \to e \mid Be$

- non ci sono ε-produzioni
- i simboli non fecondi sono: C, D; rimuovendo dunque le produzioni che li contengono la grammatica diventa:

$S \to AB$
$A \to B \mid BA \mid SAAB$
$B \to b$
$E \to e \mid Be$

21

Soluzioni

- i simboli non generabili dall'assioma sono: E; rimuovendo le produzioni che contengono E si ha dunque:

$S \to AB$
$A \to B \mid BA \mid SAAB$
$B \to b$

- l'unica produzione unitaria è $A \to B$ e poiché $B \to b$, possiamo introdurre la produzione $A \to b$ e rimuovere $A \to B$ ottenendo

$S \to AB$
$A \to b \mid BA \mid SAAB$
$B \to b$

nota: per eliminare la produzione unitaria $A \to B$ dalla grammatica avremmo potuto applicare la regola (II) anziché la (I) nel seguente modo:

$S \to AB$	$S \to AB \mid BB$
$A \to B \mid BA \mid SAAB$	$A \to BA \mid SAAB \mid BB \mid SBBB$
$B \to b$	$B \to b$

22

Soluzioni

soluzione esercizio 8

forma ridotta di: $S \rightarrow \varepsilon$
$S \rightarrow SS$
$S \rightarrow (S)$

- l'assioma ha una ε-produzione e compare anche a destra di altre produzioni; dobbiamo quindi introdurre un nuovo assioma S' ed aggiungere le produzioni che si ottengono sostituendo ε ad S in quelle preesistenti:

  $S' \rightarrow \varepsilon \mid S$
  $S \rightarrow SS \mid (S) \mid ()$ (la produzione $S \rightarrow S$ è banale e non va messa)
- rimane da eliminare le produzioni unitarie, in quanto non vi sono simboli inutili; l'unica produzione unitaria è $S' \rightarrow S$, e la grammatica in forma ridotta è la seguente (applico la regola (I)):

  $S' \rightarrow \varepsilon \mid SS \mid (S) \mid ( )$
  $S \rightarrow SS \mid (S) \mid ( )$

Soluzioni

soluzione esercizio 9 portare in CNF $S \rightarrow SS \mid (S) \mid ( )$

- la grammatica è già in forma ridotta
- aggiungiamo due nuovi simboli non terminali A e Z, dove A è associato al simbolo '(' e Z è associato al simbolo ')'; risulta:

  $S \rightarrow SS \mid ASZ \mid AZ$
  $A \rightarrow (\quad Z \rightarrow)$

- spezziamo le produzioni con più di tre simboli a destra:
  $S \rightarrow SS \mid AD \mid AZ$
  $D \rightarrow SZ$
  $A \rightarrow (\quad Z \rightarrow)$

Soluzioni

soluzione esercizio 10

portare in CNF: $S \to aAa \mid aa$
$A \to aAa \mid B$
$B \to bBb \mid bb$

- portiamo la grammatica in forma ridotta

$S \to aAa \mid aa$
$A \to aAa \mid \mathit{bBb} \mid \mathit{bb}$
$B \to bBb \mid bb$

- aggiungiamo un non terminale per ‘a’ ed uno per ‘b’:

$S \to X_a\ A\ X_a \mid X_a\ X_a$
$A \to X_a\ A\ X_a \mid X_b\ B\ X_b \mid X_b\ X_b$
$B \to X_b\ B\ X_b \mid X_b\ X_b$
$X_a \to a$
$X_b \to b$

25

Soluzioni

- spezziamo le produzioni con più di tre simboli a destra:

$S \to \mathit{X_a\ C} \mid X_a\ X_a$
$A \to X_a\ \mathit{C} \mid X_b\ \mathit{D} \mid X_b\ X_b$
$B \to X_b\ \mathit{D} \mid X_b\ X_b$
$X_a \to a$
$X_b \to b$

$\mathit{C \to A\ X_a}$
$\mathit{D \to B\ X_b}$

soluzione esercizio 11

portare in GNF: $S \to SS \mid AZ \mid AX$
$X \to SZ$
$A \to ($
$Z \to)$

- la grammatica è in CNF, quindi è anche in quasi CNF
- scegliamo un ordinamento vantaggioso dei non terminali; si osserva che S “dipende” da A e che X “dipende” da S, quindi scegliamo il seguente ordinamento: $X < S < A < Z$

26

Soluzioni

- mettiamo tutte le produzioni nella forma $C \rightarrow D\alpha$ con $C < D$ oppure nella forma $C \rightarrow a\gamma$, dove 'a' è un simbolo terminale; dobbiamo considerare i non terminali nell'ordine crescente assegnato
  - per X non dobbiamo fare niente, perché $X < S$
  - per S dobbiamo solo eliminare la ricorsione sinistra nella produzione $S \rightarrow SS$; le nuove produzioni per S sono:

    $S \rightarrow AZB \mid AXB \mid AZ \mid AX$

    $B \rightarrow SB \mid S$
  - per A e Z non dobbiamo fare niente

  la grammatica ottenuta fin qui è dunque:

  $S \rightarrow AZB \mid AXB \mid AZ \mid AX$

  $B \rightarrow SB \mid S$

  $X \rightarrow SZ$

  $A \rightarrow ($

  $Z \rightarrow)$

27

Soluzioni

- facciamo ora la sostituzione dei non terminali originali nell'ordine inverso di crescita

  per Z ed A non si deve fare niente

  per S si ha: $S \rightarrow (ZB \mid (XB \mid (Z \mid (X$

  per X si ha: $X \rightarrow (ZBZ \mid (XBZ \mid (ZZ \mid (XZ$

- ora effettuiamo le sostituzioni per B:

  $B \rightarrow (ZBB \mid (XBB \mid (ZB \mid (XB \mid (ZB \mid (XB \mid (Z \mid (X$

  ripetute, quindi si possono togliere

- quindi, la grammatica in GNF è la seguente:

  $S \rightarrow (ZB \mid (XB \mid (Z \mid (X$

  $X \rightarrow (ZBZ \mid (XBZ \mid (ZZ \mid (XZ$

  $B \rightarrow (ZBB \mid (XBB \mid (ZB \mid (XB \mid (Z \mid (X$

  $A \rightarrow ($

  inutile, quindi si può togliere

  $Z \rightarrow)$

28

Soluzioni

soluzione esercizio 12

portare in GNF: $S \to AC \mid CA$
$A \to a \mid CAA$
$C \to b \mid c \mid ACC$

- la grammatica è già in quasi CNF
- scegliamo il seguente ordinamento dei non terminali: $S < A < C$
- effettuiamo le sostituzioni e le eliminazioni della ricorsione sinistra nell'ordine crescente assegnato per i non terminali:
  - per S non si deve fare niente
  - per A non si deve fare niente;
  - per C si ha:

  $C \to b \mid c \mid aCC \mid CAACC$ (sostituzione)

  $C \to bB \mid cB \mid aCCB \mid b \mid c \mid aCC$ (eliminazione risorsione sin.)

  $B \to AACCB \mid AACC$

29

Soluzioni

- sostituiamo a ritroso:

$C \to bB \mid cB \mid aCCB \mid b \mid c \mid aCC$

$A \to a \mid bBAA \mid cBAA \mid aCCBAA \mid bAA \mid cAA \mid aCCAA$

$S \to aC \mid bBAAC \mid cBAAC \mid aCCBAAC \mid bAAC \mid cAAC \mid$
$aCCAAC \mid bBA \mid cBA \mid aCCBA \mid bA \mid cA \mid aCCA$

$B \to aACCB \mid bBAAACCB \mid cBAAACCB \mid aCCBAAACCB \mid$
$bAAACCB \mid cAAACCB \mid aCCAAACCB \mid aACC \mid$
$bBAAACC \mid cBAAACC \mid aCCBAAACC \mid bAAACC \mid$
$cAAACC \mid aCCAAACC$

30