Esercizi di Informatica Teorica

Linguaggi regolari: espressioni regolari e grammatiche, proprietà decidibili e teorema di Myhill-Nerode

1

Teorema di Myhill-Nerode

richiami

teorema sia L un linguaggio sull'alfabeto Σ ; sia data la seguente relazione di equivalenza su Σ^*:

$$xR_Ly \Leftrightarrow (\forall z\in\Sigma^* \ \ xz\in L \Leftrightarrow yz\in L)$$

R_L ha indice finito $\Leftrightarrow$ L è regolare

osservazioni:

• si ricordi che l'indice di R_L è il numero delle sue classi di equivalenza, cioè il numero di elementi dell'insieme quoziente R_L/Σ^*

• il teorema di Myhill-Nerode fornisce una caratterizzazione dei linguaggi regolari, e può quindi essere usato per provare sia la regolarità che la non regolarità di un linguaggio

2

Teorema di Myhill-Nerode

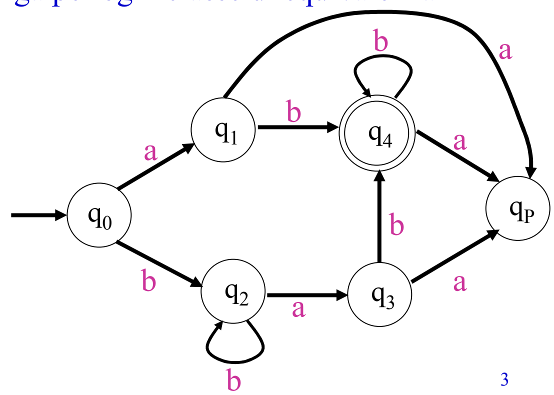
esercizio 1

1.a determinare tutte le classi di equivalenza della relazione R_L per il linguaggio L = a*ba*.

1.b mostrare qualche stringa per ogni classe di equivalenza

esercizio 2

determinare tutte le classi di equivalenza della relazione R_L per il linguaggio L riconosciuto dall'ASF qui a fianco.
qual'è l'indice di R_L?



Teorema di Myhill-Nerode

esercizio 3

determinare le classi di equivalenza della relazione R_L di Myhill-Nerode per il seguente linguaggio regolare: $L = a(bb + c)a^*$

esercizio 4

dimostrare, utilizzando il teorema di Myhill-Nerode, che il linguaggio $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ non è regolare
quali sono le classi di equivalenza della relazione R_L?

esercizio 5

dimostra tramite Myhill-Nerode che il linguaggio delle stringhe palindrome su $\Sigma=\{$**a**,**b**$\}$ non è regolare
(una stringa palindroma coincide con se stessa quando letta al contrario, esempio: **aba**, **baab**, **bbaaabb**, ecc)

Teorema di Myhill-Nerode

<u>esercizio 6</u>

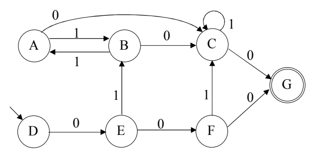
dato il linguaggio $L = ba^*(bb)^*a$, determinare tutte le classi di equivalenza della relazione R_L.

<u>esercizio 7</u>

dimostrare, utilizzando il teorema di Myhill-Nerode, che il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n : n,m \geq 0\}$ non è regolare
quali sono le classi di equivalenza della relazione R_L?

<u>esercizio 8</u>

trova, tramite le classi di equivalenza di Myhill-Nerode, un ASF con il minimo numero di stati per il linguaggio su $\Sigma=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ riconosciuto dall'ASF rappresentato qui sotto



5

Soluzioni

<u>soluzione esercizio 1</u> (classi di equivalenza per $L = a^*ba^*$)

esistono tre distinte classi di equivalenza:

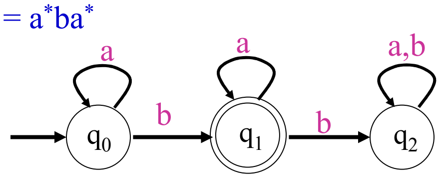
- $C_1=\{a^n : n \geq 0\}$ (<u>nota</u>: comprende anche ε)
- $C_2=\{a^n b a^m : n,m \geq 0\}$
- $C_3=\{w \in \{a,b\}^* : \text{non esiste } z \text{ tale che } wz \in L\}$

6

Soluzioni

<u>osservazione</u>:
le classi di equivalenza di R_L rispetto ad un linguaggio regolare L sono <u>associabili agli stati di un opportuno ASF (minimo)</u> che riconosce L

esempio per $L = a^*ba^*$



- $C_1=\{a^n: n \geq 0\} \leftrightarrow q_0$
- $C_2=\{a^n b a^m: n,m \geq 0\} \leftrightarrow q_1$
- $C_3=\{w \in \{a,b\}^* :$ non esiste z tale che $wz \in L\} \leftrightarrow q_2$

7

Soluzioni

<u>soluzione esercizio 2</u>
consideriamo la relazione di equivalenza $xR_My \Leftrightarrow \underline{\delta}(q_0,x) = \underline{\delta}(q_0,y)$;
sappiamo che (vedi dimostrazione del teorema di Myhill-Nerode)
se $xR_My \Rightarrow xR_Ly$, quindi R_M ha indice maggiore o uguale a quello di R_L (le classi di R_L sono ottenibili per unione di classi di R_M)

le classi di R_M si ottengono facilmente dall'ASF:

- $C_1=\{\varepsilon\} \leftrightarrow q_0$
- $C_2=\{a\} \leftrightarrow q_1$
- $C_3=\{bb^*\} \leftrightarrow q_2$
- $C_4=\{bb^*a\} \leftrightarrow q_3$
- $C_5=\{b^*abb^*\} \leftrightarrow q_4$ (nota che C_5=L)
- $C_6=\{w \in \{a,b\}^* :$ non esiste z tale che $wz \in L\} \leftrightarrow q_P$

8

Soluzioni

- $C_1=\{\varepsilon\} \leftrightarrow q_0$
- $C_2=\{a\} \leftrightarrow q_1$
- $C_3=\{bb^*\} \leftrightarrow q_2$
- $C_4=\{bb^*a\} \leftrightarrow q_3$
- $C_5=\{b^*abb^*\} \leftrightarrow q_4$ (nota che C_5=L)
- $C_6=\{w \in \{a,b\}^* : \text{non esiste } z \text{ tale che } wz \in L\} \leftrightarrow q_P$

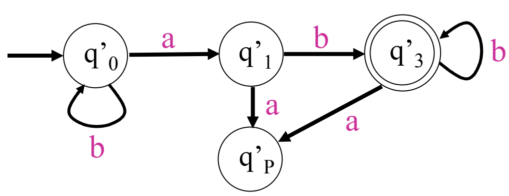
per ottenere le classi di equivalenza di R_L si osserva che le classi C_2 e C_4 devono essere unite, in quanto $aR_L(bb^*a)$; inoltre risulta $\varepsilon R_L(bb^*)$, quindi anche C_1 e C_3 debbono essere unite; le classi di equivalenza di R_L sono dunque le seguenti:

9

Soluzioni

- $C'_1=\{b^*\} \leftrightarrow q'_0$ (unione di C_1 e C_3)
- $C'_2=\{b^*a\} \leftrightarrow q'_1$ (unione di C_2 e C_4)
- $C'_3=\{b^*abb^*\} \leftrightarrow q'_3$ (equivale a C_5)
- $C'_4=\{w \in \{a,b\}^* : \text{non esiste } z \text{ tale che } wz \in L\} \leftrightarrow q'_P$ (equivale a C_6)

si può in effetti costruire un ASF (minimo) con soli 4 stati che riconosce L

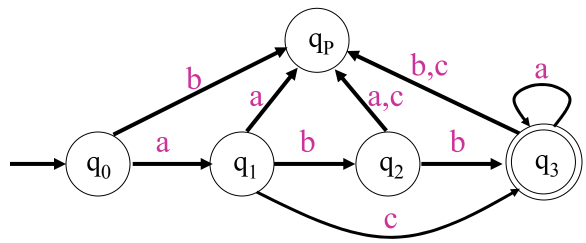


10

Soluzioni

soluzione esercizio 3 (classi di equivalenza per $L = a(bb + c)a^*$)

consideriamo un ASF che riconosce L



le classi di R_M sono:

- $C_1=\{\varepsilon\} \leftrightarrow q_0$
- $C_2=\{a\} \leftrightarrow q_1$
- $C_3=\{ab\} \leftrightarrow q_2$
- $C_4=\{abba^*, aca^*\} \leftrightarrow q_3$
- $C_5=\{w \in \{a,b\}^* :$ non esiste z tale che $wz \in L\} \leftrightarrow q_P$

è facile osservare che non è possibile unire nessuna di queste classi nella relazione R_L (l'AFS ha il minimo numero di stati); quindi le classi di R_M coincidono con quelle di R_L.

11

Soluzioni

soluzione esercizio 4 ($L=\{a^n b^n : n \geq 0\}$ non è regolare)

- la relazione R_L ha una classe di equivalenza $\{a^k\}$ distinta per ogni naturale k; infatti, comunque scelti $k > h$, risulta che la stringa $a^k b^k$ appartiene al linguaggio, mentre non vi appartiene la stringa $a^h b^k$; dunque, R_L ha sicuramente un numero infinito di classi di equivalenza, e pertanto L non è regolare.

- le classi di equivalenza di R_L sono tutte le seguenti:
  - $\{\varepsilon\}$
  - $\{a^k\}\ \forall k > 0$
  - $\{a^k b^h\}\ \forall k, h > 0, k \geq h$
  - $\{w \in \{a,b\}^* :$ non esiste z tale che $wz \in L\}$

12