

Esercizi di Informatica Teorica

Grammatiche formali

1

Sommario

- richiami teorici sulle grammatiche di Chomsky
- esercizi su grammatiche e derivazioni
- esercizi su grammatiche ed espressioni regolari
- esercizi su grammatiche non regolari

2

Grammatiche di Chomsky

richiami

grammatica formale: $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ dove

- $V_T \subseteq \Sigma$ è l'insieme dei *simboli terminali* (alfabeto terminale)
- V_N è l'insieme dei *simboli non terminali* (categorie sintattiche), disgiunto da Σ
- P è l'insieme delle *produzioni* (regole sintattiche), una relazione binaria di cardinalità finita su:

$$(V_T \cup V_N)^* \circ V_N \circ (V_T \cup V_N)^* \times (V_T \cup V_N)^*$$

notazione: $\langle \alpha, \beta \rangle \in P$ si scrive anche $\alpha \rightarrow \beta$

- $S \in V_N$ è l'*assioma*

3

Linguaggi e forme di frase

richiami

il *linguaggio generato* da una grammatica $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ è l'insieme delle stringhe di soli simboli terminali ottenibili applicando una sequenza di produzioni a partire dall'assioma per esempio, la grammatica G definita come segue

$$V_T = \{a, b\}$$

$$V_N = \{S, A\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

$$\begin{array}{ll} \text{produzioni} & \textcircled{1} S \rightarrow A \\ & \textcircled{2} A \rightarrow bAb \\ & \textcircled{3} A \rightarrow a \end{array}$$

genera il linguaggio $L(G) = \{b^n a b^n : n \geq 0\}$

una qualunque stringa ottenuta da S applicando un numero finito di produzioni è detta *forma di frase*

4

Tipi di grammatiche

- grammatica di tipo 0 (non limitate)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V^* \bullet V_N \bullet V^*$, $\beta \in V^*$ dove $V = (V_T \cup V_N)$
- grammatica di tipo 1 (contestuali)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V^* \bullet V_N \bullet V^*$, $\beta \in V^+$ e $|\alpha| \leq |\beta|$
ipotesi: ϵ -produzioni solo sull'assioma e con assioma mai a destra
- grammatiche di tipo 2 (non contestuali)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V_N$, $\beta \in V^+$
- grammatiche di tipo 3 (regolari)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V_N$, $\beta \in (V_T \bullet V_N) \cup V_T$

5

Grammatiche e derivazioni

esercizio 1

si consideri la seguente grammatica G

$V_T = \{a, b\}$

$V_N = \{S, A\}$, dove S è l'assioma

produzioni

① $S \rightarrow a$ ② $S \rightarrow aA$

③ $A \rightarrow a$ ④ $A \rightarrow aA$

⑤ $A \rightarrow b$ ⑥ $A \rightarrow bA$

- 1.a di che tipo è la grammatica?
1.b mostrare una derivazione per “**abba**” ed una per “**baab**”
1.c descrivere il linguaggio generato dalla grammatica?

6

Grammatiche e derivazioni

esercizio 2

si consideri la seguente grammatica G non contestuale

$$V_T = \{a\}$$

$$V_N = \{S, A\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

produzioni:

- ① $S \rightarrow AA$
- ② $A \rightarrow AAA$
- ③ $A \rightarrow a$

2.a mostrare due diverse derivazioni per “aaaaa”

2.b mostrare due diverse derivazioni per “aaaa”

2.c qual'è il linguaggio generato da G?

2.d esiste una grammatica regolare che genera lo stesso linguaggio?

7

Grammatiche e derivazioni

esercizio 3

si consideri la seguente grammatica G

$$V_T = \{a, b, c\}$$

$$V_N = \{S, X\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

produzioni

- ① $S \rightarrow X$
- ② $S \rightarrow \epsilon$
- ③ $X \rightarrow aXa$
- ④ $X \rightarrow bXb$
- ⑤ $X \rightarrow c$

3.a di che tipo è la grammatica?

3.b mostrare alcune stringhe generate dalla grammatica

3.c qual'è il linguaggio generato da G?

8

Grammatiche e derivazioni

esercizio 4

si consideri la seguente grammatica G

$$V_T = \{a, b\}$$

$$V_N = \{S, A, B\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

produzioni

① $S \rightarrow A$	② $S \rightarrow B$
③ $A \rightarrow a$	④ $A \rightarrow aA$
⑤ $A \rightarrow bA$	⑥ $B \rightarrow b$
⑦ $B \rightarrow aB$	⑧ $B \rightarrow bB$

- 4.a di che tipo è la grammatica?
4.b mostrare una derivazione per “**abba**” ed una per “**baab**”
4.c qual'è il linguaggio generato da G ?

9

Grammatiche e derivazioni

esercizio 5

si consideri la seguente grammatica G

$$V_T = \{a, b\}$$

$$V_N = \{S, A\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

produzioni

① $S \rightarrow AA$	② $A \rightarrow AAA$
③ $A \rightarrow a$	④ $A \rightarrow bA$
⑤ $A \rightarrow Ab$	

- 5.a di che tipo è la grammatica?
5.b mostrare alcune derivazioni per “**babbab**”
5.c qual'è il linguaggio generato da G ?

10

Grammatiche e derivazioni

esercizio 6

si consideri la seguente grammatica G

$$V_T = \{a, b\}$$

$V_N = \{S, T, A, B\}$, dove S è l'assioma

produzioni

$$\textcircled{1} S \rightarrow AT$$

$$\textcircled{2} T \rightarrow AT$$

$$\textcircled{3} T \rightarrow ABT$$

$$\textcircled{4} T \rightarrow \varepsilon$$

$$\textcircled{5} AB \rightarrow BA$$

$$\textcircled{6} BA \rightarrow AB$$

$$\textcircled{7} A \rightarrow a$$

$$\textcircled{8} B \rightarrow b$$

6.a di che tipo è la grammatica?

6.b verificare che G genera tutte e sole le stringhe su $\{a, b\}$ tali che il numero di ' a ' è maggiore del numero di ' b '

11

Grammatiche ed espressioni regolari

esercizio 7

sia L il linguaggio descritto dalla seguente espressione regolare: $a(a+b)^*b$

7.a mostrare una grammatica (di qualsiasi tipo) che genera L

7.b esiste una grammatica regolare che genera L ?

esercizio 8

mostrare una grammatica che genera l'insieme di tutte le espressioni regolari su $\{a, b\}$

12

Grammatiche ed espressioni regolari

esercizio 9



qual'è il linguaggio generato dalla seguente grammatica?
quali sono i significati dei vari non terminali?

$V_T = \{a, b, \emptyset, +, \circ, *, (,)\}$

$V_N = \{S, E, T, F, A\}$, dove S è l'assioma

produzioni

- ① $S \rightarrow E$
- ② $E \rightarrow \emptyset \mid T \mid T + T \mid$
- ③ $T \rightarrow F \mid F \circ F$
- ④ $F \rightarrow (E) \mid A \mid F^*$
- ⑤ $A \rightarrow a \mid b$

13

Grammatiche di tipo 2, 1 e 0

esercizio 10



si consideri il linguaggio $L = \{a^n b^{2n} : n > 0\}$

mostrare una grammatica non contestuale che genera L

esercizio 11



mostrare una grammatica non limitata che genera $L = \{1^{2^n} : n \geq 0\}$

14

Grammatiche regolari

esercizio 12

mostrare una grammatica regolare per ciascuna delle seguenti espressioni regolari

12.a $a(b+aa)^*a$

12.b $(ba)^*b(ab)^*$

esercizio 13

13.a mostrare una grammatica che genera il linguaggio dei numeri pari in base 3

13.b esiste una grammatica regolare per tale linguaggio?

15

Soluzioni

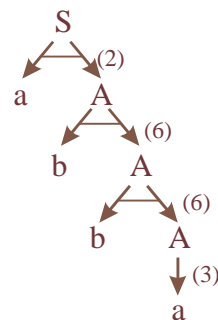
soluzione esercizio 1

1.a la grammatica è regolare (cioè di tipo 3)

1.b derivazione per “**abba**”

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow^2 aA \\ &\Rightarrow^6 abA \\ &\Rightarrow^6 abbA \\ &\Rightarrow^9 abba \end{aligned}$$

la stringa “**baab**” non è generata dalla grammatica



albero di derivazione

1.c il linguaggio delle stringhe su {**a**, **b**} che iniziano per ‘a’

16

Soluzioni

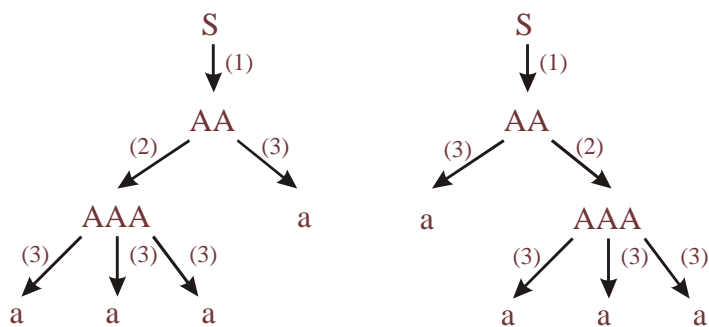
soluzione esercizio 2

2.a non esistono derivazioni per “aaaaa”

2.b derivazioni per “aaaa”

$S \Rightarrow \overset{1}{A}A \Rightarrow \overset{2}{A}AAA \Rightarrow \overset{3}{a}AAA \Rightarrow \overset{3}{aa}A \Rightarrow \overset{3}{aaa}A \Rightarrow \overset{3}{aaaa}$

$S \Rightarrow \overset{1}{A}A \Rightarrow \overset{3}{a}A \Rightarrow \overset{2}{a}AAA \Rightarrow \overset{3}{a}AAa \Rightarrow \overset{3}{aa}Aa \Rightarrow \overset{3}{aaaa}$



17

Soluzioni

2.c l'insieme delle stringhe su $\{a\}$ di lunghezza non nulla e con un numero pari di 'a'

2.d una grammatica regolare che genera lo stesso linguaggio è la seguente:

$V_T = \{a\}$

$V_N = \{S, A, X\}$, dove S è l'assioma

produzioni ① $S \rightarrow aA$

② $A \rightarrow a$

③ $A \rightarrow aX$

④ $X \rightarrow aA$

18

Soluzioni

soluzione esercizio 3

3.a la grammatica è non contestuale

3.b “c”, “aca”, “abcba”, “bcb”, “babaabcbaabab”, ...

esempio: derivazione di “abcba”:

$$S \Rightarrow \textcircled{1} X \Rightarrow \textcircled{2} aXa \Rightarrow \textcircled{3} abXba \Rightarrow \textcircled{4} abcba$$

3.c il linguaggio generato dalla grammatica è quello delle stringhe palindromo su {a, b, c} con una ed una sola ‘c’ al centro, più la stringa vuota

19

Soluzioni

soluzione esercizio 7 (linguaggio $a(a+b)^*b$)

7.a G non contestuale per L

$$V_T = \{a, b\}$$

$$V_N = \{S, X\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

$$\text{produzioni} \quad \textcircled{1} S \rightarrow aXb \\ \textcircled{2} X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

7.b esiste una grammatica regolare per L poiché l'espressione che descrive L è regolare; una grammatica regolare per L è la seguente

$$V_T = \{a, b\}$$

$$V_N = \{S, X\}, \text{ dove } S \text{ è l'assioma}$$

$$\text{produzioni} \quad \textcircled{1} S \rightarrow aX \\ \textcircled{2} X \rightarrow b \\ \textcircled{3} X \rightarrow aX \\ \textcircled{4} X \rightarrow bX$$

20

Soluzioni

soluzione esercizio 8

(espressioni regolari su $\{a, b\}$)

G non contestuale per L

$V_T = \{a, b, \emptyset, +, \circ, *, (,)\}$

$V_N = \{S\}$, dove S è l'assioma

produzioni

① $S \rightarrow (S)$	② $S \rightarrow a \mid b$
③ $S \rightarrow S+S \mid S \circ S$	④ $S \rightarrow S^*$
⑤ $S \rightarrow \emptyset$	

nota: G non tiene conto delle precedenze tra operatori

21

Soluzioni

soluzione esercizio 9

ancora una volta viene generato il linguaggio delle espressioni regolari su $\{a, b\}$ in cui, però, si tiene conto delle precedenze tra operatori

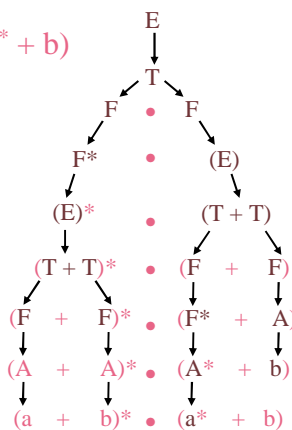
esempio di derivazione: $(a + b)^* \cdot (a^* + b)$

E = espressione

T = termine

F = fattore

A = atomo



22

Soluzioni

soluzione esercizio 10

(CF che genera $L = \{a^n b^{2n} : n > 0\}$)

grammatica non contestuale

$V_T = \{a, b\}$

$V_N = \{S, X\}$, dove S è l'assioma

produzioni

- ① $S \rightarrow X$
- ② $X \rightarrow aXbb \mid abb$

23

Soluzioni

soluzione esercizio 11 (grammatica non limitata che genera $L = \{1^{2^n} : n \geq 0\}$)

• logica costruttiva

si supponga di partire da una forma di frase del tipo
 “LAA...AAR”, in cui il numero di ‘A’ è pari a 2^n ; si vuol ideare
 un meccanismo che consenta di prendere, ad ogni decisione, due
 strade distinte:

- trasformare tutte le ‘A’ in ‘1’ ed eliminare ‘L’ ed ‘R’
- raddoppiare il numero di ‘A’, cioè passare alla forma di
 frase “LAAA...AAAR” dove il numero di A è pari a 2^{n+1}

24

Soluzioni

- grammatica non limitata

$$V_T = \{1\}$$

$V_N = \{S, L, R, A, D, U, X, B\}$, dove S è l'assioma

produzioni

$$\textcircled{1} S \rightarrow LAR$$

$$\textcircled{2} L \rightarrow U$$

$$\textcircled{3} UA \rightarrow 1U$$

$$\textcircled{4} UR \rightarrow \varepsilon$$

trasforma le A in 1

$$\textcircled{5} L \rightarrow XD$$

$$\textcircled{6} DA \rightarrow AAD$$

$$\textcircled{8} AB \rightarrow BA$$

$$\textcircled{7} DR \rightarrow BR$$

$$\textcircled{9} XB \rightarrow L$$

raddoppia le A