Esercizi di Informatica Teorica

Concetti di base

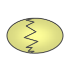
queste esercitazioni sono il frutto del lavoro di molte persone, tra le quali
Luca Cabibbo, Walter Didimo e Giuseppe Di Battista

1

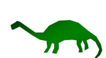
Sommario

- principio di induzione
- cardinalità di insiemi
- pidgeonhole principle
- espressioni regolari

notazione sul livello degli esercizi

 facile

 non difficile

 difficile

 molto difficile

2

Principio di induzione

richiami

sia P(n) una proposizione definita sui naturali
se esiste un naturale n_0 tale che:

- P(n_0) è vera (passo base)
- P(n) vera implica P(n+1) vera $\forall n \geq n_0$ (passo induttivo)

allora P è vera $\forall n \geq n_0$

3

Principio di induzione

esercizio 1

trovare l'errore nella dimostrazione seguente

proposizione:
in un branco di cavalli tutti i cavalli hanno lo stesso colore

dimostrazione induttiva:

- per un branco con 1 solo cavallo la proposizione è ovvia
- supponiamo vero l'enunciato per un qualunque branco con $n \geq 1$ cavalli e sia dato un branco di n+1 cavalli;
  - se togliamo un cavallo dal branco, per l'ipotesi induttiva, rimangono n cavalli con lo stesso colore, diciamo col_1;
  - se togliamo un secondo cavallo dal branco e rimettiamo quello di prima, abbiamo ancora n cavalli dello stesso colore, diciamo col_2.
  - poiché infine nel branco sono sempre rimasti fissi n-1 cavalli allora deve essere col_1=col_2, e quindi gli n+1 cavalli hanno tutti lo stesso colore

4

Principio di induzione

esercizio 2

riformulare il principio nel caso particolare di $n_0 = 0$

esercizio 3

dimostrare (non può essere fatto con il principio di induzione) che per ogni insieme finito A risulta:

$|P(A)| = 2\ |P(A-\{a\})|$, dove a è un elemento di A

esercizio 4

dimostrare (servendosi del risultato dell'esercizio precedente) che per ogni insieme finito A risulta:

$|P(A)| = 2^{|A|}$, dove $P(A)$ è l'insieme delle parti di A

5

Principio di induzione

esercizio 5

dimostrare che, per ogni naturale n, $n^4\text{-}4n^2$ è divisibile per 3

(*suggerimento*: applicare l'induzione due volte, ricordando che se un numero x è divisibile per tre lo è anche x-3 o x+3)

esercizio 6

dimostrare le formule seguenti:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{(n+1)} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

esercizio 7

dimostrare che dati due insiemi finiti e non vuoti A e B esistono esattamente $|B|^{|A|}$ funzioni totali da A a B

(*suggerimento*: procedere per induzione su $|A|$)

6

Cardinalità di insiemi

richiami

due insiemi sono *equinumerosi* se esiste una biiezione tra loro
un insieme *finito* con n elementi è equinumeroso a $\{0, ..., n\text{-}1\}$
un insieme è *numerabile* se è equinumeroso ad **N** (cardinalità $\aleph_0$)
un insieme è *contabile* se è finito oppure numerabile
un insieme è *continuo* se è equinumeroso a **P(N)** (cardinalità $2^{\aleph_0}$)

esercizio 8

mostrare un esempio per ciascuna delle classi sopra elencate

esercizio 9

dimostrare che l'insieme S di tutte le possibili sequenze infinite di naturali da 0 a 9 è non numerabile

7

Pidgeonhole principle

richiami

pidgeonhole principle: dati due insiemi finiti e non vuoti A e B, con $|A| > |B|$, non esistono funzioni totali iniettive da A a B

esercizio 10

sia G un grafo con n vertici; dimostrare che ogni cammino di G di lunghezza $l \geq n$ contiene almeno un ciclo

esercizio 11

dimostrare che in un qualunque insieme di persone P ($|P| \geq 2$) esistono almeno due persone che hanno lo stesso numero di conoscenti in P (si consideri riflessiva e simmetrica la relazione di "conoscenza")

suggerimento: dimostrare per assurdo che la funzione f(x) che assegna ad ogni elemento $x \in P$ il numero dei suoi conoscenti non può essere iniettiva

8

Espressioni regolari

richiami

definizione di espressione regolare e linguaggio associato

dato un alfabeto Σ

$\varnothing$	$L(\varnothing) = \varnothing = \Lambda = \{\}$
a, con $a \in \Sigma \cup \varepsilon$	$L(a) = \{a\}$
$(s + t)$, con s,t espr. regolari	$L(s + t) = L(s) \cup L(t)$
$(s \circ t)$, con s,t espr. regolari	$L(s \circ t) = L(s) \circ L(t)$
s^*, con s espr. regolare	$L(s^*) = L(s)^*$

tutti gli operatori sono associativi

relazioni di precedenza: $^* > \circ > +$

nota: il $\circ$ viene spesso omesso, cioè $(a \circ b)$ si scrive anche (ab)

9

Espressioni regolari

esercizio 12

dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

12.a $L(\varnothing^*) = \varnothing$

12.b $L(baa) \in L(a^*b^*a^*b^*)$

12.c $L(abcd) \in L(\ (a\ (cd)^*\ b)^*\ )$

12.d $L(a^*b^*) \cap L(b^*a^*) = L(a^*+b^*)$

12.e $L((ab)^*) \cap L((cd)^*) = \varnothing$

12.f $L((abb + a)^*a) = L(a(bba + a)^*)$

12.g $L((a+b)^*) = L((a^*b^*)^*)$

esercizio 13

quali linguaggi sono descritti dalle seguenti espressioni regolari?

13.a $1(0+1)^*$

13.b $(0+1)^*\ 1\ (0+1)^*$

10

Espressioni regolari

esercizio 14

scrivere le espressioni regolari corrispondenti ai seguenti linguaggi su $\Sigma = \{0, 1\}$

14.a tutte le sequenze alternate (cioè che non contengono né 00 né 11) di 0 e 1 che iniziano e finiscono per 1 o che iniziano e finiscono per 0

14.b tutte le sequenze con un numero pari di 0

esercizio 15

scrivere l'espressione regolare che descrive il complemento dei seguenti linguaggi su $\Sigma = \{0, 1\}$

15.a $1(0+1)^*$

15.b 0^*+1^*

11

Espressioni regolari

esercizio 16

semplificare le seguenti espressioni regolari su $\Sigma = \{a, b, c\}$

16.a $(a^*b+b^*cb)^*$

16.b $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^*$

esercizio 17

determinare le espressioni regolari per i seguenti linguaggi

17.a i numeri naturali in notazione binaria

17.b i numeri binari su 4 bit

17.c i numeri naturali in base 10

17.d i numeri naturali pari

17.e i numeri pari in base 3

12

Soluzioni

soluzione esercizio 4 $\quad (|P(A)| = 2^{|A|})$

procediamo per induzione sulla cardinalità di A:

- se A è l'insieme vuoto allora $|P(A)| = 1 = 2^0$ (ok)
- supponiamo vera la proposizione per $n \geq 0$, e sia $|A| = n + 1$
  sia a un qualunque elemento di A e sia $B = A - \{a\}$
  per B vale la proposizione ed inoltre $P(A)$ è formato da tutti gli insiemi in $P(B)$ più gli stessi insiemi a ciascuno dei quali viene aggiunto l'elemento a
  Allora: $|P(A)| = 2\,|P(B)| = 2\; 2^{|A|-1} = 2^{|A|}$ (ok)

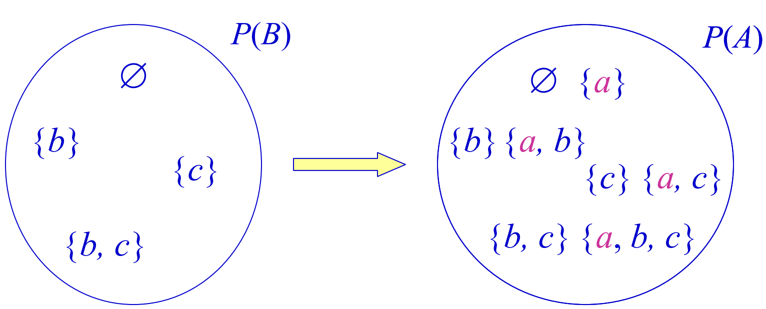
13

Soluzioni

esempio:

sia $A = \{a, b, c\}$; allora $|P(A)| = 2^3 = 8$

$B = \{b, c\}$



14

Soluzioni

soluzione esercizio 5 *(n^4-$4n^2$ è divisibile per 3)*

procediamo per induzione su n:

- se $n = 0$ è ovvio, perché zero è divisibile per 3 (ok)
- supponiamo vera la proposizione per $n \geq 0$; per $n + 1$ risulta:

$$(n+1)^4 - 4(n+1)^2 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 4(n^2 + 2n + 1) =$$
$$= (n^4 - 4n^2) + 6n^2 - 3 + 4n^3 - 4n \equiv_3 4n^3 - 4n \equiv_3 n^3 - n$$

dimostriamo quindi che n^3-n è divisibile per 3

procediamo ancora per induzione su n

- per $n = 0$ è ovvio, perché 0 è divisibile per 3 (ok)
- supponiamo vera la proposizione per $n \geq 0$; risulta

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$
$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$ che è divisibile per 3 (ok)

quindi anche $(n+1)^4 - 4(n+1)^2$ è divisibile per 3 (ok)

15

Soluzioni

soluzione esercizio 9 *(non numerabilità di sequenze di cifre)*

costruiamo l'elemento diagonale di Cantor: supponiamo per assurdo che S sia numerabile; allora possiamo contare tutte le sequenze di S

$$\begin{array}{llllll}
s_0 & a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0i} & \ldots \\
s_1 & a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\
\ldots \\
s_j & a_{j0} & a_{j1} & \ldots & a_{ji} & \ldots \\
\ldots
\end{array}$$

consideriamo la seguente sequenza s:

$s = (a_{00}+1)\,(a_{11}+1)\ \ldots\ (a_{ii}+1)\ldots$, dove + è inteso modulo 10

s è diversa da ciascuna s_k, che è assurdo

16

Soluzioni

soluzione esercizio 10 *(un cammino > n contiene un ciclo)*

sia $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ un cammino di G tale che $m>n$; sia f la funzione totale che associa ad ogni vertice del cammino un vertice di G; per il pidgeonhole principle f non può essere iniettiva; sia dunque k il minimo numero per cui $f(v_i)=f(v_{i+k})$ $(1 \le i < i+k \le m)$; allora $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+k})$ è un ciclo di G

17

Soluzioni

soluzione esercizio 11

per la riflessività della relazione ogni persona è conoscente almeno di se stessa e quindi f è totale

supponiamo per assurdo che f sia iniettiva

- se non esiste $x \in$ P tale che $f(x)=1$ allora si avrebbe f : P$\rightarrow\{2, \ldots, n\}$, che è assurdo per il pidgeonhole principle
- se esiste $x \in$ P tale che $f(x)=1$ allora $\forall y \in$ P-$\{x\}$ risulta
    - $f(y) \ge 2$ per l'ipotesi (assurda) di iniettività di f
    - $f(y) \le n$-1 per la simmetria (nessuno conosce x)

  quindi f ristretta ad P-$\{x\}$, la cui cardinalità è n-1, dovrebbe essere iniettiva e totale sul codominio $\{2, \ldots, n\text{-}1\}$, la cui cardinalità è n-2, il che è ancora una volta assurdo per il pidgeonhole principle

18

Soluzioni

soluzione esercizio 14

14.a $(10)^*1+(01)^*0$

14.b $1^*(01^*01^*)^*$

soluzione esercizio 15

15.a $(0(0+1)^*)^*$

15.b $((1+0)^*0(1+0)^*1(1+0)^*)+((1+0)^*1(1+0)^*0(1+0)^*)$

oppure

$(0+1)^*(01+10)(0+1)^*$

19

Soluzioni

soluzione esercizio 17

17.a i numeri naturali in notazione binaria

$0+1(0+1)^*$

17.b i numeri binari su 4 bit

$(0+1)\,(0+1)\,(0+1)\,(0+1)$

17.c i numeri naturali in base 10

$0+(1+2+3+4+5+6+7+8+9)(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)^*$

17.d i numeri naturali pari

$(0+2+4+6+8)+(1+2+..+9)(0+1+..+9)^*(0+2+4+6+8)$

17.e i numeri pari in base 3

si noti che i numeri pari in base tre sono tutte e sole quelle sequenze di cifre in $\{0,1,2\}$ con un numero pari di 1

$(2(0+2)^*)\,(1(0+2)^*1(0+2)^*)^*\ +$

$(2(0+2)^*)^*\,(1(0+2)^*1(0+2)^*)+0$

20