# Esercizi di Informatica Teorica

## NP-completezza



## Riducibilità

richiami

notazione:

dato un problema di decisione P ed il suo predicato associato $\pi$, denotiamo con $Y_P$ l'insieme delle istanze x di P per cui $\pi(x)$ = vero (istanze positive), e con $N_P$ l'insieme delle istanze x di P per cui $\pi(x)$ = falso (istanze negative)

definizioni:

- un problema di decisione A è Karp-riducibile ad un secondo problema di decisione B se esiste un algoritmo R che trasforma ogni istanza x di A in una particolare istanza R(x) di B, in modo tale che $x \in Y_A \Leftrightarrow R(x) \in Y_B$
- se la riduzione R è polinomiale si dice che A è polinomialmente Karp-riducibile a B

# NP-completezza

richiami

definizione: sia C è una classe di complessità; un problema A è C-completo se:

- A appartiene alla classe C
- ogni B $\in$ C è polinomialmente Karp-riducibile ad A

definizione: un problema A è NP-completo se:

- A appartiene alla classe NP
- ogni B $\in$ NP è polinomialmente Karp-riducibile ad A (hardness)

implicazione: se A è un noto problema NP-hard (per esempio SAT) e si dimostra che è polinomialmente Karp-riducibile a B, allora B è NP-hard, e se B è in NP allora è anch'esso NP-completo

3

# SAT: un noto problema NP-completo

problema SAT (SATISFIABILITY)

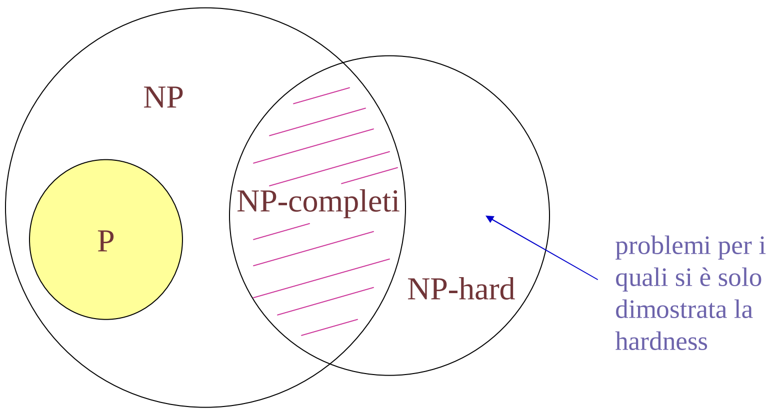
| | |
|---|---|
| istanza | • $X = \{x_1, .., x_n\}$ insieme di variabili booleane<br>• una formula booleana F su X in forma normale congiuntiva |
| quesito | esiste una assegnazione di valori alle variabili booleane in X tale che F è soddisfatta? |

esempio: $F = \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)}_{\text{clausola}} \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$

- se F è soddisfatta dall'assegnazione, ogni sua clausola è soddisfatta dall'assegnazione e viceversa
- ogni variabile diretta $x_i$ ed ogni variabile negata $\neg x_i$ viene chiamata *letterale*

4

# Relazione tra P, NP, NP-completi




se si dimostra che un problema NP-completo è in P, allora si dimostra che P = NP (problema aperto)

5

# Esercizi sulle classi di complessità

esercizio 1

chiamiamo SAT-NORIP il problema SAT con l'ulteriore vincolo che in ogni clausola non ci siano mai ripetizioni di letterali; dimostrare che SAT-NORIP è ancora NP-completo

esempio:

la clausola $(x_1 \vee x_2 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ appartiene a SAT ma non a SAT-NORIP

esercizio 2

il problema 3SAT è il caso particolare di SAT in cui ogni clausola ha esattamente tre letterali; dimostrare che 3SAT è NP-completo

6

# Esercizi sulle classi di complessità

problema CLIQUE

| | |
|---|---|
| istanza | • un grafo G=(V,E) ed<br>• un intero $0 < k \leq \|V\|$ |
| quesito | esiste un sottografo completo di G con k nodi? |

NOTA: un grafo è completo se ogni coppia di nodi è collegata da un arco

esercizio 3 

dimostrare che il problema CLIQUE è NP-completo.

7

# Soluzioni (esercizio 1)

soluzione esercizio 1 (SAT-NORIP)

- il problema SAT-NORIP è in NP in quanto ogni istanza di SAT-NORIP è anche un'istanza di SAT
- per mostrare che il problema è NP-completo è dunque sufficiente mostrare una riduzione da SAT: basta osservare che in ogni clausola si possono eliminare le ripetizioni di letterali senza alterare la sua tavola di verità

  esempio: $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_2) \Leftrightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

8

# Soluzioni (esercizio 2)

soluzione esercizio 2 (3SAT)

- 3SAT è in NP in quanto ogni istanza di 3SAT è anche un'istanza di SAT
- per mostrare che 3SAT è NP-completo mostriamo che SAT è polinomialmente Karp-riducibile a 3SAT; consideriamo una istanza generica <X, F> del problema SAT e costruiamo a partire da essa una istanza <X',F'> del problema 3SAT: poniamo inizialmente X' = X; per ogni clausola C di F distinguiamo tre possibilità:
  - C ha esattamente tre letterali
  - C ha meno di tre letterali
  - C ha più di tre letterali

9

# Soluzioni

- C ha esattamente tre letterali $\Rightarrow$ aggiungiamo C ad F'
- C ha meno di tre letterali $\Rightarrow$ sia C' la clausola ottenuta da C ripetendo un qualunque letterale di C tante volte quanto basta affinché C' abbia tre letterali; quindi aggiungiamo C' ad F'
  Esempio: $C = (x_1 \vee x_2) \Rightarrow C' = (x_1 \vee x_2 \vee x_2)$
- C ha più di tre letterali; in tal caso, se $C = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \dots \vee \alpha_n)$ introduciamo in X' le nuove variabili $\{z_1, \dots, z_{n-3}\}$ ed aggiungiamo ad F il seguente insieme di clausole
  $C' = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \alpha_3 \vee z_2) \wedge \dots \wedge (\neg z_{n-3} \vee \alpha_{n-1} \vee \alpha_n)$
  e verifichiamo che data una assegnazione di valori alle variabili booleane, "C' è soddisfatta $\Leftrightarrow$ C è soddisfatta"

10

## Soluzioni

- se C è vera $\Rightarrow$ esiste un letterale $\alpha_i$ = vero; allora per fare in modo che C' sia vera basta assegnare valore falso ai nuovi letterali di C' che stanno nella stessa clausola di $\alpha_i$; poi si propaga l'assegnamento di valori ai nuovi letterali, facendo in modo che in ogni clausola di F' ce ne sia almeno uno uguale a vero

  esempio: $C' = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \alpha_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5)$

  vero falso vero falso vero

- se C è falsa $\Rightarrow$ ogni $\alpha_i$ = falso.

  per far in modo che la prima clausola di C' sia vera occorrerebbe assegnare $z_1$ = vero; questo implicherebbe $\neg z_1$ = falso, e dunque occorrerebbe assegnare $z_2$ = vero; iterando il ragionamento risulta comunque che $\neg z_{n-3}$ = falso e quindi C' falsa

11

## Soluzioni (esercizio 3)

soluzione esercizio 3 (CLIQUE)

- CLIQUE appartiene ad NP; infatti basta considerare tutti i possibili sottoinsiemi di k nodi in V, e verificare su ciascuno di essi se tutte le coppie di nodi sono collegate con un arco; tale verifica si fa facilmente in tempo $O(k^2)$
- per dimostrare che CLIQUE è NP-hard cerchiamo una riduzione polinomiale dal problema NP-completo 3SAT

12

# Soluzioni

costruiamo una istanza <G, k> di CLIQUE a partire da una istanza <X, F> di 3SAT:

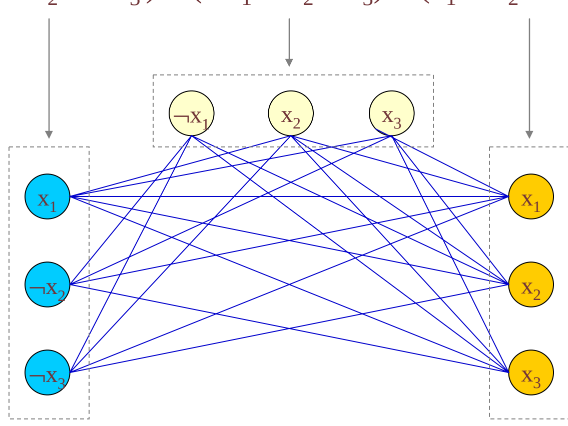
- i nodi di G sono organizzati in k “gruppi”, in cui ogni gruppo corrisponde ad una diversa clausola di F
- ogni gruppo ha un nodo per ogni letterale della clausola a cui è associato
- due nodi di G sono collegati da un arco se e solo se
    i. non appartengono alla stessa clausola e
    ii. non si referiscono a letterali complementari (cioè $x$ e $\neg x$)

13

# Soluzioni

esempio di costruzione: costruiamo G associato alla formula

$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$




14

# Soluzioni

dimostriamo la correttezza della riduzione, cioè facciamo vedere che G ha un sottografo completo con k nodi se e solo se F ha una assegnazione di verità che la soddisfa.

- supponiamo esista un sottografo completo G' di G con k nodi: assegnamo vero a tutti i letterali di F associati ad un nodo di G' e falso ai letterali rimanenti; ogni nodo di G' appartiene ad una clausola distinta (in quanto G' è completo e per costruzione non ci sono archi tra nodi associati a letterali di clausole diverse) , quindi l'assegnamento stabilito soddisfa ciascuna clausola di F; inoltre tale assegnamento è consistente perché non ci sono mai due letterali complementari uniti da un arco
- supponiamo al contrario che esista una assegnazione che soddisfa F: allora esistono k letterali, uno per clausola e mai complementari, con valore vero; per come G è costruito il sottografo indotto da tali nodi è completo

15