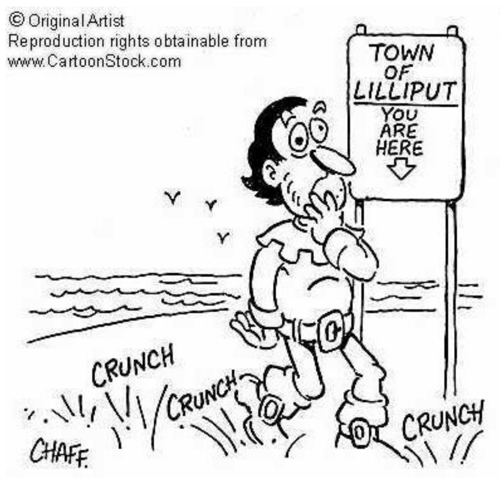
riducibilità



l'idea di riduzione

- il metodo effettivamente utilizzato per dimostrare l'indecidibilità di problemi
- una tecnica per convertire un problema A in un altro problema B, in modo tale che una soluzione di B possa essere usata per risolvere A
- molti esempi possibili, sia dalla vita quotidiana, sia dall'esperienza informatica

l'idea di riduzione

- in primo luogo faremo uso dell'idea di riduzione in modo informale, dimostrando l'indecidibilità di alcuni problemi
- poi daremo ed useremo una definizione formale di riduzione

$HALT_{TM}$ è indecidibile

- è il vero e proprio problema della fermata
- linguaggio $HALT_{TM}$ = {<M,w> | M è una MT e M si ferma quando ha in input la stringa w}
- sappiamo che A_{TM} è indecidibile
- usiamo l'indecidibilità di A_{TM} per dimostrare quella di $HALT_{TM}$

il problema A_{TM} (pro memoria)

- linguaggio A_{TM} = {<M,w> | M è una MT che accetta la stringa w}

$HALT_{TM}$ è indecidibile

- teorema: $HALT_{TM}$ è indecidibile
- idea di dimostrazione:
  - per assurdo: assumiamo che $HALT_{TM}$ sia decidibile e mostriamo che se è vero allora anche A_{TM} è decidibile
  - l'idea chiave è quella di mostrare che A_{TM} è riducibile a $HALT_{TM}$
  - in altri termini, mostriamo che se sappiamo risolvere $HALT_{TM}$ allora sappiamo risolvere anche A_{TM}

$HALT_{TM}$ è indecidibile

- dimostrazione:
  - supponiamo esista una MT R che decide $HALT_{TM}$
  - usando R costruiamo una MT S che decide A_{TM} come segue
  - eseguiamo R sull'input <M,w>
  - se R rifiuta allora S rifiuta
  - se R accetta, allora simuliamo M fino a quando si ferma
  - se M accetta, allora S accetta, altrimenti S rifiuta

$HALT_{TM}$ è indecidibile

- dimostrazione:
  - se R decide $HALT_{TM}$ allora S decide A_{TM}
  - ma A_{TM} è indecidibile
  - abbiamo un assurdo

E_{TM} è indecidibile

- E_{TM} = {<M> | M è una MT e L(M)=∅}
- teorema: E_{TM} è indecidibile
- idea di dimostrazione:
  - per assurdo: assumiamo che E_{TM} sia decidibile e mostriamo che se è vero allora A_{TM} è decidibile
  - l'idea chiave è quella di mostrare che A_{TM} è riducibile a E_{TM}
  - in altri termini, mostriamo che se sappiamo risolvere E_{TM} allora sappiamo risolvere anche A_{TM}

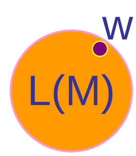
E_{TM} è indecidibile lemma preliminare

- lemma: siano M una MT e w una stringa (tale che non necessariamente $w \in L(M)$); è sempre possibile costruire una MT M_1 che riconosca la sola stringa w se e solo se $w \in L(M)$
- dimostrazione:
  - costruiamo M_1 come segue
  - confrontiamo la stringa x in ingresso con w
  - se $x \neq w$ allora rifiuta
  - se x=w allora esegui M su w e accetta se M accetta

E_{TM} è indecidibile lemma preliminare

- $L(M_1)=L(M)\cap\{w\}$
- caso $L(M)\cap\{w\}=\emptyset$; M_1 non riconosce nessuna stringa

- caso $L(M)\cap\{w\}=\{w\}$; riconosce solo w



E_{TM} è indecidibile

- teorema: E_{TM} è indecidibile
- dimostrazione:
  - supponiamo esista una MT R che decide E_{TM}
  - usando R costruiamo una MT S che decide A_{TM}
  - ricordiamo che $A_{TM}=\{\langle M,w\rangle \mid M$ è una MT che accetta la stringa $w\}$
  - costruiamo M_1 come nel lemma precedente
  - M_1 riconosce la sola stringa w se e solo se $w\in L(M)$
  - usiamo M_1 per costruire S

E_{TM} è indecidibile

- dimostrazione:
  - eseguiamo R su M_1
  - se R accetta rifiutiamo, se R rifiuta accettiamo
  - se R decide E_{TM} allora S decide A_{TM}
  - ma A_{TM} è indecidibile, quindi abbiamo un assurdo

EQ_{TM} è indecidibile

- $EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1$ e M_2 sono MT e $L(M_1)=L(M_2)\}$
  - è il problema dell'equivalenza tra due MT
- teorema: EQ_{TM} è indecidibile
- dimostrazione:
  - per assurdo: assumiamo che EQ_{TM} sia decidibile e mostriamo che se è vero allora E_{TM} è decidibile

EQ_{TM} è indecidibile

- dimostrazione:
  - se EQ_{TM} è decidibile possiamo usare la MT che lo decide per decidere E_{TM}, semplicemente invocandola per confrontare un linguaggio e il linguaggio vuoto

formalizzazione dell'idea di riduzione

calcolabilità di funzioni

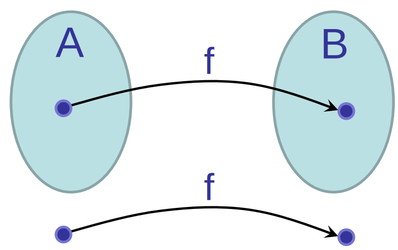
- calcolo di funzioni parziali di stringa:
  una funzione parziale $f:\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ è calcolabile se esiste una MT tale che:
  $q_0x \mid\!\!-\!\!-^* xq_Ff(x) \Leftrightarrow$ f è definita su $x \in \Sigma^*$
  (per tutti gli x su cui f non è definita, la MT o termina in uno stato non finale o non termina)

formalizzazione dell'idea di riduzione

- abbiamo usato riduzioni tra problemi per varie dimostrazioni di indecidibilità
- ora formalizziamo il concetto di riduzione
- una riduzione di un problema A in un problema B è una funzione f calcolabile che trasforma ogni istanza x di A in una istanza $f(x)=y_x$ di B, in modo tale che trovare una soluzione per il problema B con istanza y_x equivale a trovare una soluzione per il problema A con istanza x; se tale riduzione (funzione) esiste si scrive anche $A \leq B$

formalizzazione dell’idea di riduzione

- un linguaggio A è riducibile a un linguaggio B ($A \leq B$) se esiste una funzione calcolabile $f:\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, tale che per ogni w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$
- la funzione f è la riduzione da A a B



riduzioni e decidibilità

- teorema: se $A \leq B$ e B è decidibile $\Rightarrow$ A è decidibile
- dimostrazione:
  - sia M la MT che decide B ed f la riduzione da A a B; costruiamo una MT N che decide A come segue
  - dato un input w, N prima calcola f(w) e poi esegue M su f(w)
  - se $w \in A$ allora $f(w) \in B$, infatti f è una riduzione da A a B; quindi M accetta f(w) se e solo se $w \in A$

riduzioni e decidibilità

- corollario: se A≤B e A è indecidibile ⇒ B è indecidibile

riduzioni e decidibilità

- tecnica per dimostrare che un problema P è decidibile: cerco un problema Q decidibile tale che P≤Q
- tecnica per dimostrare che un problema P è indecidibile: cerco un problema Q indecidibile tale che Q≤P

uso di riduzioni per dimostrare la decidibilità di problemi

uso di una riduzione per dimostrare che un problema è decidibile

- si considerino i due seguenti problemi:
  - problema PATH: dato un grafo orientato H e due suoi vertici x ed y, esiste un cammino diretto da x ad y?
  - problema A_{CFG}: date una grammatica G non contestuale ed una stringa $w \in \Sigma^*$, w appartiene ad L(G)?

uso di una riduzione per dimostrare che un problema è decidibile

- problemi e linguaggi:
  - il linguaggio PATH è quello delle stringhe che rappresentano un grafo e due vertici tali che tra i due vertici ci sia un cammino
  - il linguaggio A_{CFG} è quello delle stringhe che rappresentano una grammatica non contestuale e una stringa tali che la stringa appartiene al linguaggio generato dalla grammatica

riduzioni e decidibilità (pro memoria)

- tecnica per dimostrare che un problema P è decidibile: cerco un problema Q decidibile tale che $P \leq Q$

uso di una riduzione per dimostrare che un problema è decidibile

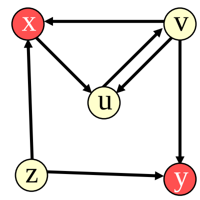
- sapendo che il problema A_{CFG} è decidibile, dimostrare la decidibilità del problema PATH
- Soluzione:
  - cerchiamo una f calcolabile, tale che $PATH \rightarrow_f A_{CFG}$
  - un' istanza di PATH è una tripla <H,x,y>
  - un' istanza di A_{CFG} è una coppia <G,w>

un esempio di riduzione

- definiamo una funzione f che a partire da una istanza <H,x,y> di PATH produce una istanza <G,w> di A_{CFG}
  - $G = <V_T, V_N, S, P>$:
  - V_T ha un simbolo z per ogni vertice z di H
  - V_N ha un simbolo Z per ogni vertice z di H più l'assioma S
  - P è formato dalle seguenti produzioni:
    - $S \rightarrow zZ$ e $Z \rightarrow z$ per ogni vertice z di H
    - $U \rightarrow Z$ per ogni arco (u,z) di H
  - w è la stringa "xy"
- f (<H,x,y>) = <G,w> è calcolabile, poiché è una semplice "traslitterazione" (traduzione meccanica in numero finito di passi)

un esempio di riduzione

- esempio di applicazione di f: sia <H,x,y> la seguente istanza



- costruiamo l'istanza f(<H,x,y>) = <G,w>
  V_T={u,v,z,x,y}, V_N={U,V,Z,X,Y,S}, S assioma
  produzioni: $S \rightarrow uU \mid vV \mid zZ \mid xX \mid yY$
  $U \rightarrow u \quad V \rightarrow v \quad Z \rightarrow z \quad X \rightarrow x \quad Y \rightarrow y$
  $U \rightarrow V \quad V \rightarrow U|X|Y \quad Z \rightarrow X|Y \quad X \rightarrow U$
  stringa w = xy

un esempio di riduzione

- dobbiamo dimostrare che esiste un cammino da x ad y in H $\Leftrightarrow$ w=xy appartiene ad L(G)
  - supponiamo che esista un cammino da x ad y in H, indicato con: $x,v_1,v_2,\ldots,v_n,y$; allora, per costruzione, esistono in G le seguenti produzioni:
    $S \rightarrow xX$, $X \rightarrow V_1$, $V_1 \rightarrow V_2$, ... ,$V_n \rightarrow Y$, $Y \rightarrow y$
    quindi, la stringa w=xy è generata da G, cioè $w \in L(G)$
  - supponiamo viceversa che $w=xy \in L(G)$; una derivazione per w è necessariamente del tipo: $S \vdash xX \vdash xV_1 \vdash xV_2 \vdash, \ldots, \vdash xV_n \vdash xY \vdash xy$, e dunque esistono in H gli archi (x,v_1), (v_1,v_2),..,(v_n,y), che definiscono il cammino $x,v_1,v_2,\ldots,v_n,y$

il problema PATH ed il problema IMPLICATION

- si considerino i due seguenti problemi:
  - problema PATH: dato un grafo orientato H e due suoi vertici x ed y, esiste un cammino diretto da x ad y?
  - problema IMPLICATION: dati un insieme di proposizioni $S=\{P_1,P_2, ...,P_n\}$ ed un insieme di implicazioni logiche su S, $I=\{P_i \Rightarrow P_j : i,j \in \{1,....,n\}\}$; date due proposizioni P_h e P_k di S, esiste una sequenza di implicazioni logiche del tipo:

    $P_h \Rightarrow P_{i1} \Rightarrow P_{i2} \Rightarrow .... \Rightarrow P_{ir} \Rightarrow P_k$?

il problema PATH ed il problema IMPLICATION

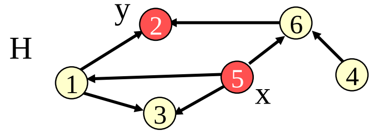
- riduciamo il problema IMPLICATION al problema PATH, il quale è noto essere decidibile
- un’ istanza del problema PATH è una tripla $\langle H,x,y \rangle$
- un’ istanza del problema IMPLICATION è una quadrupla $\langle S,I,P_h,P_k \rangle$

il problema PATH ed il problema IMPLICATION

- definiamo la funzione f(<S,I,P_h,P_k>)=<H,x,y>
  - H ha un vertice r per ogni proposizione P_r di S
  - H ha un arco (i, j) per ogni implicazione $P_i \Rightarrow P_j$ di I
  - x = h
  - y = k

il problema PATH ed il problema IMPLICATION

- esempio di costruzione tramite f
  - S = {P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6}
  - I = {$P_1 \Rightarrow P_2$, $P_5 \Rightarrow P_3$, $P_1 \Rightarrow P_3$, $P_6 \Rightarrow P_2$, $P_5 \Rightarrow P_1$, $P_4 \Rightarrow P_6$, $P_5 \Rightarrow P_6$}
  - $P_h = P_5$
  - $P_k = P_2$



il problema PATH ed il problema IMPLICATION

- dimostriamo la correttezza della riduzione
  - dobbiamo provare che esiste una sequenza di implicazioni da Ph a Pk $\Leftrightarrow$ esiste un cammino diretto da x ad y in G

il problema PATH ed il problema IMPLICATION

- supponiamo che esista una sequenza di implicazioni del tipo:
  $P_h \Rightarrow P_{i1} \Rightarrow P_{i2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{ir} \Rightarrow P_k$
  allora in H esistono gli archi (h, i_1), (i_1, i_2), ... (i_r, k), e poiché x = h ed y = k, allora tali archi definiscono un cammino da x ad y in H

il problema PATH ed il problema IMPLICATION

- viceversa, supponiamo esista un cammino x, i_1, i_2, ..., i_r, y in H; questo implica che esistono gli archi (x, i_1), (i_1, i_2), ... (i_r, y) in H; poiché ad ogni arco di G corrisponde una implicazione in I, e poiché x=h ed y=k, allora valgono le seguenti implicazioni:
  $P_h \Rightarrow P_{i1} \Rightarrow P_{i2} \Rightarrow \dots \Rightarrow P_{ir} \Rightarrow P_k$

uso di riduzioni per dimostrare l'indecidibilità di problemi

rivisitazione di alcune dimostrazioni di indecidibilità usando il concetto di riduzione

- prima riprendiamo alcune dimostrazioni di indecidibilità di linguaggi e le riformuliamo in termini di riduzioni
- poi dimostriamo l'indecidibilità di altri linguaggi usando il concetto di riduzione in modo più articolato

riduzioni e decidibilità (pro memoria)

- tecnica per dimostrare che un problema P è indecidibile: cerco un problema Q indecidibile tale che $Q \leq P$

$HALT_{TM}$ è indecidibile

- teorema: $HALT_{TM}$ è indecidibile
- dimostrazione: costruiamo una riduzione f da A_{TM} a $HALT_{TM}$ come segue
  - data una coppia <M,w>, f deve calcolare una coppia <M',w'> tale che

    $<M,w> \in A_{TM}$ se e solo se $<M',w'> \in HALT_{TM}$

$HALT_{TM}$ è indecidibile

- dimostrazione:
  - la MT che calcola f ha come input la coppia <M,w> e costruisce la macchina M' tale che se M accetta M' accetta, se M rifiuta M' entra in un loop
  - f restituisce come output la coppia <M',w>

EQ_{TM} è indecidibile

- teorema: EQ_{TM} è indecidibile
- dimostrazione: costruiamo una riduzione f da E_{TM} a EQ_{TM} come segue
  - data una M, f calcola una coppia <M,M_1> tale che M_1 è la macchina che rifiuta qualunque input

$INCLUSION_{TM}$ è indecidibile

- $INCLUSION_{TM}$: $\{<M_1,M_2> \mid M_1$ e M_2 sono MT e $L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$
- teorema: $INCLUSION_{TM}$ è indecidibile
- dimostrazione:
  - dimostriamo che A_{TM} è riducibile a $INCLUSION_{TM}$
  - analizziamo le istanze dei due problemi:
    - un' istanza di A_{TM} è costituita da una MT M e da una stringa w
    - un' istanza di $INCLUSION_{TM}$ è costituita da due MT, M_1 ed M_2

$INCLUSION_{TM}$ è indecidibile

- definiamo la funzione f(<M,w>)=<M_1,M_2>:
  - M_1 è una MT che riconosce solo w (è costruita come un ASF)
  - M_2 = M
- la funzione f è ovviamente calcolabile
- dimostriamo che decidere se $L(M_1)\subseteq L(M)$ equivale a decidere se M si ferma quando calcola w
- per la costruzione fatta, decidere se $L(M_1)\subseteq L(M)$ equivale a decidere se $w\in L(M)$ (perché $L(M_1)=\{w\}$); d'altronde, decidere se $w\in L(M)$ equivale a decidere se M si ferma accettando w oppure no

riduzioni da PCP

il problema PCP

- Problema delle Corrispondenze di Post:

  è dato un insieme finito C = $\{(u_1,v_1)$, (u_2,v_2), ..., $(u_n,v_n)\}$ di coppie di stringhe sull'alfabeto Σ; esiste una sequenza i_1, i_2, ..., i_k di indici in {1,...,n}, anche ripetuti, tale che: $u_{i1}\ u_{i2}\ u_{i3}\ ....\ u_{ik} = v_{i1}\ v_{i2}\ v_{i3}\ ...\ v_{ik}$?
  nota: la sequenza può essere di lunghezza k qualunque

PCP

un' istanza di PCP è data da un insieme finito di tipologie di tessere, su ciascuna delle quali sono riportate due stringhe, una in alto e una in basso

a	b	ca	abc
ab	ca	a	c

il problema consiste nel verificare se è possibile costruire una lista di tessere (le ripetizioni sono ammesse) tali che la stringa letta in alto coincide con quella letta in basso

a	b	ca	a	abc
ab	ca	a	ab	c

PCP

per alcune istanze di PCP, non c’è nessuna soluzione

abc	ca	acc	abc
ab	a	cca	c

il problema PCP

- teorema: PCP è indecidibile

DISJOINTNESS$_{CFG}$ è indecidibile

- DISJOINTNESS$_{CFG}$: $\{<G_1,G_2> \mid G_1$ e G_2 sono grammatiche CF e $L(G_1) \cap L(G_2)=\emptyset\}$
- teorema: DISJOINTNESS$_{CFG}$ è indecidibile
- dimostrazione: cerchiamo una riduzione: PCP$\rightarrow_f$ DISJOINTNESS$_{CFG}$
- istanze dei due problemi:
  - istanza di PCP: $C = \{(u_1, v_1),(u_2, v_2),\dots,(u_n, v_n)\}$ su Σ
  - istanza di DISJOINTNESS$_{CFG}$: due CFG, G_1 e G_2

DISJOINTNESS$_{CFG}$ è indecidibile

- introduciamo n simboli ausiliari: $a_1, a_2, \dots, a_n$
- G_1 è la CFG su $\Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ definita dalle produzioni: $S_1 \rightarrow u_i a_i$, $S_1 \rightarrow u_i S_1 a_i$ $(i = 1,\dots, n)$
- G_2 è la CFG su $\Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ definita dalle produzioni: $S_2 \rightarrow v_i a_i$, $S_2 \rightarrow v_i S_2 a_i$ $(i = 1,\dots, n)$

DISJOINTNESS$_{CFG}$ è indecidibile

- dimostriamo che decidere se esiste una sequenza di indici i_1 , i_2 , ..., i_k tale che u_{i1} u_{i2} u_{i3} .... u_{ik} = v_{i1} v_{i2} v_{i3} ... v_{ik} equivale a decidere se $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing$ secondo la costruzione fatta
- si osserva che
  $L(G_1)=\{u_{i1}\ u_{i2}\ u_{i3} \ldots u_{im}\ a_{im} \ldots a_{i3}\ a_{i2}\ a_{i1}\ \ \forall m \in \mathbf{N}$ ed ij $\in \{1, \ldots, n\}\ \}$
  $L(G_2)=\{v_{i1}\ v_{i2}\ v_{i3} \ldots v_{im}\ a_{im} \ldots a_{i3}\ a_{i2}\ a_{i1}\ \ \forall m \in \mathbf{N}$ ed ij $\in \{1, \ldots, n\}\ \}$
- ne segue che $w \in L(G_1) \cap L(G_2) \Leftrightarrow w = u_{i1}\ u_{i2}\ u_{i3} \ldots u_{im}\ a_{im} \ldots a_{i3}\ a_{i2}\ a_{i1} = v_{i1}\ v_{i2}\ v_{i3} \ldots v_{im}\ a_{im} \ldots a_{i3}\ a_{i2}\ a_{i1} \Leftrightarrow u_{i1}\ u_{i2}\ u_{i3} \ldots u_{im} = v_{i1}\ v_{i2}\ v_{i3} \ldots v_{im}$

DISJOINTNESS$_{CFG}$ è indecidibile

- quindi, L(G1)$\cap$L(G2)=$\varnothing$ $\Leftrightarrow$ non esiste una sequenza di indici
  i1 , i2 , ..., ik tale che ui1 ui2 ui3 .... uik = vi1 vi2 vi3 ... vik;
- dunque, sulla particolare istanza costruita per il problema DISJOINTNESS, rispondere al problema PCP equivale a rispondere al problema DISJOINTNESS (o a <u>DISJOINTNESS</u> ?)

AMBIGUITY_{CFG} è indecidibile

- AMBIGUITY_{CFG}: {<G> | G è una grammatica CF ambigua}
- teorema: AMBIGUITY_{CFG} è indecidibile
- dimostrazione: cerchiamo una riduzione: $\text{PCP} \rightarrow_f \text{AMBIGUITY}_{CFG}$
- analizziamo le istanze dei due problemi:
  - istanza di PCP: $C = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_n, v)\}$ su Σ
  - istanza di AMBIGUITY_{CFG}: una CFG G

AMBIGUITY_{CFG} è indecidibile

- definiamo la funzione f(C) = G nel seguente modo:
  - introduciamo n simboli ausiliari: $a_1, a_2, ..., a_n$
  - G è la CFG su $\Sigma \cup \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ definita così:

    $S \rightarrow S_1 | S_2$,

    $S_1 \rightarrow u_i a_i$, $S_1 \rightarrow u_i S_1 a_i$ (i = 1,..., n)

    $S_2 \rightarrow v_i a_i$, $S_2 \rightarrow v_i S_2 a_i$ (i = 1,..., n)

  osserviamo che $L(G) = \{u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} .... u_{i_m} a_{i_m} .... a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$, $v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} .... v_{i_m} a_{i_m} .... a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ $\forall m \in \mathbf{N}$ ed $i_j \in \{1, ..., n\}\}$

- dimostriamo che decidere se esiste una sequenza di indici $i_1, i_2, ..., i_k$ tale che $u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} .... u_{i_k} = v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} ... v_{i_k}$ equivale a decidere se G è ambigua

$AMBIGUITY_{CFG}$ è indecidibile

G è ambigua $\Leftrightarrow$ esiste una stringa w di L(G) ottenibile con due derivazioni distinte; d'altronde, data una stringa $u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ di L(G), esiste una sola derivazione che la genera a partire da S_1 ; tale derivazione è la seguente:

$S_1 \mid\!\!— u_{i_1} S_1 a_{i_1} \mid\!\!— u_{i_1}u_{i_2} S_1 a_{i_2} a_{i_1} \mid\!\!— \ldots \mid\!\!— u_{i_1}u_{i_2} \ldots u_{i_{m-1}} S_1 a_{i_{m-1}} \ldots a_{i_2} a_{i_1} \mid\!\!— u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$

analogamente, data una stringa $v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ di L(G), esiste una sola derivazione che la genera a partire da S_2 ; quindi, esistono due derivazioni distinte per una stringa di L(G) $w = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ $\Leftrightarrow$ una derivazione è ottenuta a partire da S_1 e l'altra a partire da S_2 $\Leftrightarrow$ $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_m} = u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} = v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m}$

riduzioni e riconoscibilità

riduzioni e Turing-riconoscibilità

- teorema: se A≤B e B è Turing-riconoscibile ⇒ A è Turing-riconoscibile
- dimostrazione:
  - analoga alla dimostrazione data per la decidibilità

riduzioni e Turing-riconoscibilità

- corollario: se A≤B e A non è Turing-riconoscibile ⇒ B non è Turing-riconoscibile

riduzioni e Turing-riconoscibilità

- tecnica per dimostrare che un problema P è Turing-riconoscibile: cerco un problema Q Turing-riconoscibile tale che P≤Q
- tecnica per dimostrare che un problema P non è Turing-riconoscibile: cerco un problema Q che non è Turing-riconoscibile tale che Q≤P

riduzioni e Turing-riconoscibilità

- strumenti a disposizione:
  - sappiamo che $\underline{A}_{TM}$ non è Turing-riconoscibile
  - per come è stata definita la riduzione, A≤B ha lo stesso significato di $\underline{A}\leq\underline{B}$

EQ_{TM} non è né Turing-riconoscibile né co-Turing-riconoscibile

- teorema: EQ_{TM} non è né Turing-riconoscibile né co-Turing-riconoscibile
- dimostrazione:
  - $A_{TM} \leq \underline{EQ}_{TM}$
    - costruiamo le macchine M_1: rifiuta sempre e M_2: esegue M su w, se M accetta M_2 accetta
  - $A_{TM} \leq \underline{\underline{EQ}}_{TM} = EQ_{TM}$
    - costruiamo le macchine M_1: accetta sempre e M_2: esegue M su w, se M accetta M_2 accetta