automi a pila non deterministici

automi a pila

introduciamo un nuovo modello di calcolo: l'automa a pila (o automa push-down) non deterministico

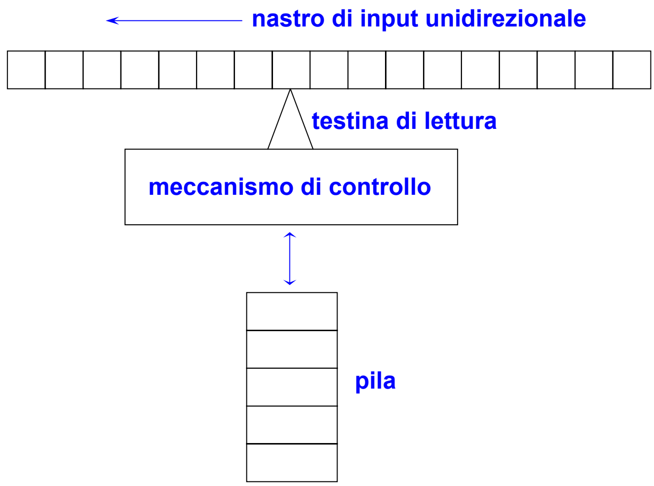
$M=<\Sigma,\Gamma,Z0,Q,q0,F,\delta>$

Σ	alfabeto di input
Γ	alfabeto dei simboli della pila
$Z0 \in \Gamma$	simbolo di pila iniziale
Q	insieme finito di stati
$q0 \in Q$	stato iniziale
$F \subseteq Q$	insieme di stati finali

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$ funzione di transizione:

a partire dallo stato interno attuale, dal carattere letto sul nastro e dal simbolo affiorante sulla pila, sostituisce il simbolo affiorante sulla pila con una stringa di caratteri e si porta in un nuovo stato interno

automi a pila



automi a pila

- esempio: se un automa a pila in uno stato q legge a dal nastro e C affiora sulla pila una possibile transizione è

$$\delta(q,a,C) = \{<q',\varepsilon>,<q'',BA>\}$$

- convenzioni:
  - se metto BA in pila, B è affiorante
  - se metto ε in pila cancello l'elemento affiorante

automi a pila

- esempio: automa a pila M che riconosce wc$\underline{w}$ con w in (0+1)*
- i simboli **B** e **G** servono a ricordare la presenza in w di 0 e 1
- nello stato q0 si memorizza w, nello stato q1 si confronta $\underline{w}$ con ciò che si è memorizzato
- si osservi come in questo caso l'automa abbia un comportamento sostanzailmente deterministico

automa a pila M che riconosce wc$\underline{w}$ con w in (0+1)* lettura di 010c010

$M=\langle\{0,1,c\}, \{R,B,G\}, R, \{q1,q2\}, q1, \varnothing, \delta\rangle$

$\delta(q1,0,R)=\{\langle q1,BR\rangle\}$ $\delta(q1,0,B)=\{\langle q1,BB\rangle\}$

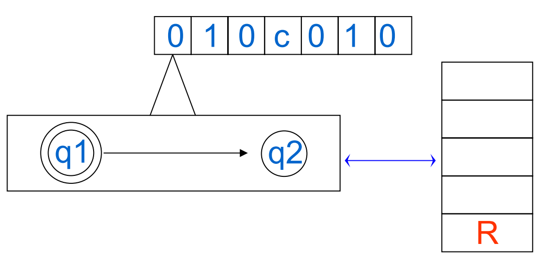
$\delta(q1,0,G)=\{\langle q1,BG\rangle\}$ $\delta(q1,c,R)=\{\langle q2, R\rangle\}$

$\delta(q1,c, B)=\{\langle q2,B\rangle\}$ $\delta(q1,c,G)=\{\langle q2,G\rangle\}$

$\delta(q1,1,R)=\{\langle q1,GR\rangle\}$ $\delta(q1,1,B)=\{\langle q1,GB\rangle\}$

$\delta(q1,1,G)=\{\langle q1,GG\rangle\}$ $\delta(q2,0,B)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

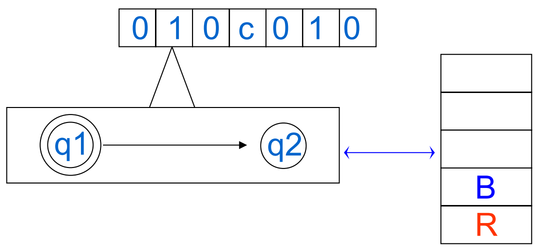
$\delta(q2,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$ $\delta(q2,1,G)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$



automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)*
lettura di 010c010

$M=\langle\{0,1,c\}, \{R,B,G\}, R, \{q1,q2\}, q1, \emptyset, \delta\rangle$

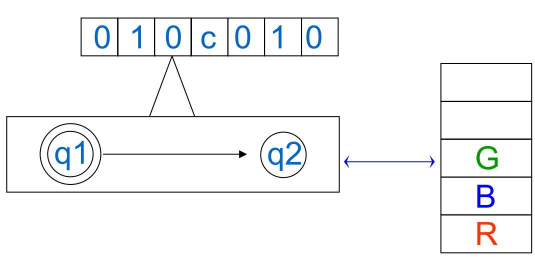
$\delta(q1,0,R)=\{\langle q1,BR\rangle\}$ $\delta(q1,0,B)=\{\langle q1,BB\rangle\}$
$\delta(q1,0,G)=\{\langle q1,BG\rangle\}$ $\delta(q1,c,R)=\{\langle q2, R\rangle\}$
$\delta(q1,c, B)=\{\langle q2,B\rangle\}$ $\delta(q1,c,G)=\{\langle q2,G\rangle\}$
$\delta(q1,1,R)=\{\langle q1,GR\rangle\}$ $\underline{\delta(q1,1,B)=\{\langle q1,GB\rangle\}}$
$\delta(q1,1,G)=\{\langle q1,GG\rangle\}$ $\delta(q2,0,B)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$
$\delta(q2,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$ $\delta(q2,1,G)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$



automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)*
lettura di 010c010

$M=\langle\{0,1,c\}, \{R,B,G\}, R, \{q1,q2\}, q1, \emptyset, \delta\rangle$

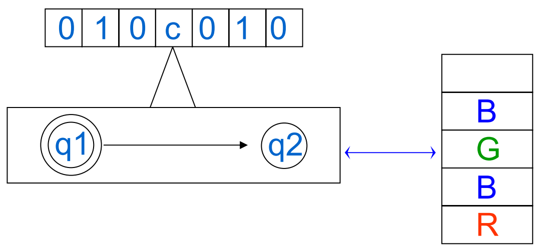
$\delta(q1,0,R)=\{\langle q1,BR\rangle\}$ $\delta(q1,0,B)=\{\langle q1,BB\rangle\}$
$\underline{\delta(q1,0,G)=\{\langle q1,BG\rangle\}}$ $\delta(q1,c,R)=\{\langle q2, R\rangle\}$
$\delta(q1,c, B)=\{\langle q2,B\rangle\}$ $\delta(q1,c,G)=\{\langle q2,G\rangle\}$
$\delta(q1,1,R)=\{\langle q1,GR\rangle\}$ $\delta(q1,1,B)=\{\langle q1,GB\rangle\}$
$\delta(q1,1,G)=\{\langle q1,GG\rangle\}$ $\delta(q2,0,B)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$
$\delta(q2,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$ $\delta(q2,1,G)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$



automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)*
lettura di 010c010

$M=\langle\{0,1,c\}, \{R,B,G\}, R, \{q1,q2\}, q1, \varnothing, \delta\rangle$

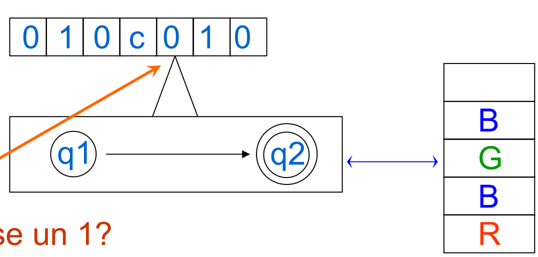
$\delta(q1,0,R)=\{\langle q1,BR\rangle\}$ $\delta(q1,0,B)=\{\langle q1,BB\rangle\}$
$\delta(q1,0,G)=\{\langle q1,BG\rangle\}$ $\delta(q1,c,R)=\{\langle q2, R\rangle\}$
$\underline{\delta(q1,c, B)=\{\langle q2,B\rangle\}}$ $\delta(q1,c,G)=\{\langle q2,G\rangle\}$
$\delta(q1,1,R)=\{\langle q1,GR\rangle\}$ $\delta(q1,1,B)=\{\langle q1,GB\rangle\}$
$\delta(q1,1,G)=\{\langle q1,GG\rangle\}$ $\delta(q2,0,B)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$
$\delta(q2,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$ $\delta(q2,1,G)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$



automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)*
lettura di 010c010

$M=\langle\{0,1,c\}, \{R,B,G\}, R, \{q1,q2\}, q1, \varnothing, \delta\rangle$

$\delta(q1,0,R)=\{\langle q1,BR\rangle\}$ $\delta(q1,0,B)=\{\langle q1,BB\rangle\}$
$\delta(q1,0,G)=\{\langle q1,BG\rangle\}$ $\delta(q1,c,R)=\{\langle q2, R\rangle\}$
$\delta(q1,c, B)=\{\langle q2,B\rangle\}$ $\delta(q1,c,G)=\{\langle q2,G\rangle\}$
$\delta(q1,1,R)=\{\langle q1,GR\rangle\}$ $\delta(q1,1,B)=\{\langle q1,GB\rangle\}$
$\delta(q1,1,G)=\{\langle q1,GG\rangle\}$ $\underline{\delta(q2,0,B)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}}$
$\delta(q2,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$ $\delta(q2,1,G)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

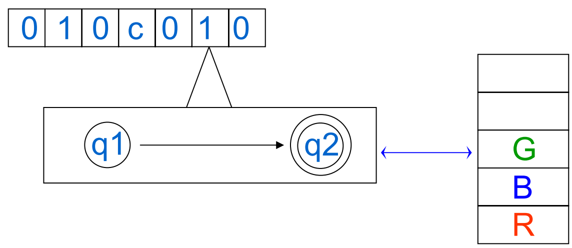


e se ci fosse un 1?

automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)*
lettura di 010c010

M=<{0,1,c}, {R,B,G}, R, {q1,q2}, q1, ∅, δ>

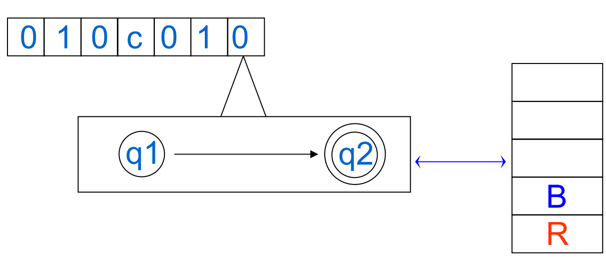
δ(q1,0,R)={<q1,BR>}
δ(q1,0,G)={<q1,BG>}
δ(q1,c, B)={<q2,B>}
δ(q1,1,R)={<q1,GR>}
δ(q1,1,G)={<q1,GG>}
δ(q2,ε,R)={<q2,ε>}
δ(q1,0,B)={<q1,BB>}
δ(q1,c,R)={<q2, R>}
δ(q1,c,G)={<q2,G>}
δ(q1,1,B)={<q1,GB>}
δ(q2,0,B)={<q2,ε>}
δ(q2,1,G)={<q2,ε>}



automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)*
lettura di 010c010

M=<{0,1,c}, {R,B,G}, R, {q1,q2}, q1, ∅, δ>

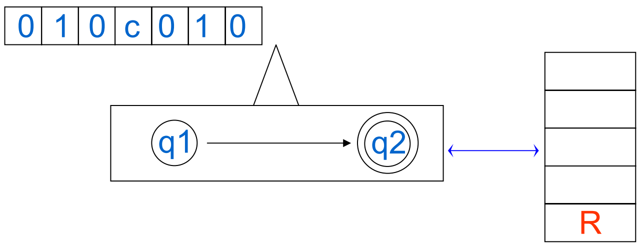
δ(q1,0,R)={<q1,BR>}
δ(q1,0,G)={<q1,BG>}
δ(q1,c, B)={<q2,B>}
δ(q1,1,R)={<q1,GR>}
δ(q1,1,G)={<q1,GG>}
δ(q2,ε,R)={<q2,ε>}
δ(q1,0,B)={<q1,BB>}
δ(q1,c,R)={<q2, R>}
δ(q1,c,G)={<q2,G>}
δ(q1,1,B)={<q1,GB>}
δ(q2,0,B)={<q2,ε>}
δ(q2,1,G)={<q2,ε>}



automa a pila M che riconosce wcw con w in (0+1)* lettura di 010c010

M=<{0,1,c}, {R,B,G}, R, {q1,q2}, q1, ∅, δ>

δ(q1,0,R)={<q1,BR>} δ(q1,0,B)={<q1,BB>}
δ(q1,0,G)={<q1,BG>} δ(q1,c,R)={<q2, R>}
δ(q1,c, B)={<q2,B>} δ(q1,c,G)={<q2,G>}
δ(q1,1,R)={<q1,GR>} δ(q1,1,B)={<q1,GB>}
δ(q1,1,G)={<q1,GG>} δ(q2,0,B)={<q2,ε>}
δ(q2,ε,R)={<q2,ε>} δ(q2,1,G)={<q2,ε>}



automi a pila - computazione

- configurazione di automa a pila: tripla

  <q,x,γ>

  con q∈Q stato interno, x∈Σ* stringa da leggere in input e γ∈Γ* stringa attualmente in pila
- relazione di transizione per automa a pila: relazione binaria sulle configurazioni ├

  <q,x,γ> ├ <q',x',γ'>

  se e solo se

  ((x=ax' ∧ γ=Zη ∧ γ'=ζη ∧ <q',ζ>∈δ(q,a,Z)) ∨

  (x=x' ∧ γ=Zη ∧ γ'=ζη ∧ <q',ζ>∈δ(q,ε,Z)))
- computazione per automa a pila: chiusura transitiva e riflessiva di ├, indicata con ├*

automi a pila - computazione

due definizioni alternative

•accettazione per pila vuota: una stringa è accettata da un automa a pila M se e solo se al termine della scansione della stringa la pila è vuota

$$N(M) = \{x | \langle q0,x,Z0\rangle \vdash^* \langle q,\varepsilon,\varepsilon\rangle\}$$

•accettazione per stato finale: una stringa è accettata da un automa a pila M se e solo se al termine della scansione della stringa M si trova in uno stato finale

$$L(M) = \{x | \langle q0,x,Z0\rangle \vdash^* \langle q,\varepsilon,\gamma\rangle,\ q\in F,\ \gamma\in\Gamma^*\}$$

si può dimostrare che le due definizioni sono equivalenti

automi a pila - computazione

- esempio: automa a pila che riconosce $w\underline{w}$ con w in (0+1)*

$M=\langle\{0,1\},\{R,B,G\},R,\{q1,q2\},q1,\varnothing,\delta\rangle$

$\delta(q1,0,R)=\{\langle q1,BR\rangle\}$

$\delta(q1,1,R)=\{\langle q1,GR\rangle\}$

$\delta(q1,0,B)=\{\langle q1,BB\rangle,\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

$\delta(q1,0,G)=\{\langle q1,BG\rangle\}$

$\delta(q1,1,B)=\{\langle q1,GB\rangle\}$

$\delta(q1,1,G)=\{\langle q1,GG\rangle,\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

$\delta(q2,0,B)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

$\delta(q2,1,G)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

$\delta(q1,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

$\delta(q2,\varepsilon,R)=\{\langle q2,\varepsilon\rangle\}$

comportamento dell’automa a pila che riconosce ww con input 001100

- <q1,001100,R>
  - <q2,001100,ε>
  - <q1, 01100,BR>
    - <q1,1100,BBR>
      - <q1,100,GBBR>
        - <q1,00,GGBBR>
          - <q1,0,BGGBBR>
            - <q1,ε,BBGGBBR>
            - <q2,ε,GGBBR>
        - <q2,00,BBR>
          - <q2,0,BR>
            - <q2,ε,R>
              - <q2,ε,ε>
    - <q2,1100,R>
      - <q2,1100,ε>

automi a pila deterministici

$M=\langle\Sigma,\Gamma,Z0,Q,q0,F,\delta\rangle$ è deterministico se
$\forall\sigma\in\Sigma,\ \forall Z\in\Gamma,\ \forall q\in Q \quad |\delta(q,\sigma,Z)|+|\delta(q,\varepsilon,Z)|\leq 1$

la condizione impone che

1. $|\delta(q,\sigma,Z)|$ non sia suepriore ad 1
2. se e' definita una ε-transizione per un certo stato q e per un certo simbolo di pila Z, non deve essere definita un'altra transizione per q, Z

osservazione: la 2. impone che se M riconosce ε, allora e' non deterministico

osservazione: si può ovviare a questa limitazione chiudendo tutte le strighe con un carattere speciale "$"

automi a pila e linguaggi CF

teorema: se L(G) e' non contestuale esiste un automa a pila M tale che L(G)=N(M)

dimostrazione:

- sia $G=\langle\Sigma,V_N,P,S\rangle$ tale che $\varepsilon\notin L(G)$ e supponiamo G in GNF
- costruiamo $M=\langle\Sigma,\Gamma,Z0,Q,q0,F,\delta\rangle$
  $\Gamma=V_N$, $Z0=S$, $Q=\{q\}$, $q0=q$, $F=\emptyset$
  per ogni $A\rightarrow a\gamma$ con $\gamma\in V_N^*$
  stabiliamo che $\langle q,\gamma\rangle \in \delta(q,a,A)$

dimostriamo che
$\langle q,x,S\rangle \vdash^* \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$ se e solo se $S\Rightarrow^* x\alpha$

dimostrazione (gr. CF$\rightarrow$aut. a pila)

(1) dimostriamo per induzione su i che

se $\langle q,x,S\rangle \vdash_i \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$ allora $S \Rightarrow_i x\alpha$

- i=1 $x\in\Sigma$, se $\langle q,x,S\rangle \vdash_1 \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$ allora, per costruzione, esiste in P una produzione $S\rightarrow x\alpha$
- i>1 $x\in\Sigma^*$, $x=ya$, $a\in\Sigma$
  se $\langle q,x,S\rangle \vdash_i \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$, allora $\exists\beta$ tale che
  $\langle q,ya,S\rangle \vdash_{i-1} \langle q,a,\beta\rangle \vdash_1 \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$
  da cui $\langle q,y,S\rangle \vdash_{i-1} \langle q,\varepsilon,\beta\rangle$, infatti a non può avere effetto su M prima di essere letto
  per ipotesi induttiva $S \Rightarrow_{i-1} y\beta$, inoltre $\langle q,a,\beta\rangle \vdash_1 \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$ implica che in P esista una produzione $A\rightarrow a\eta$ con $\beta=A\gamma$ e $\alpha=\eta\gamma$
  quindi $S \Rightarrow^* y\beta=yA\gamma \Rightarrow ya\eta\gamma=ya\alpha=x\alpha$

dimostrazione (gr. CF$\rightarrow$aut. a pila)

(2) dimostriamo per induzione su i che

se $S\Rightarrow_i x\alpha$ allora $\langle q,x,S\rangle \vdash_i \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$

- i=1 $x\in\Sigma$, se $S \Rightarrow_1 x\alpha$ allora esiste in P una produzione $S\rightarrow x\alpha$ e quindi, per costruzione, $\langle q,x,S\rangle \vdash_1 \langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$
- i>1 $x\in\Sigma^*$, $x=ya$, $a\in\Sigma$
  se $S \Rightarrow_i x\alpha$ allora esiste $A\rightarrow a\eta$ in P tale che
  $S \Rightarrow_{i-1} yA\gamma \Rightarrow ya\eta\gamma$ con $\alpha=\eta\gamma$ (derivazione sinistra)
  per ipotesi induttiva $\langle q,y,S\rangle \vdash_{i-1} \langle q,\varepsilon,A\gamma\rangle$
  da cui $\langle q,ya,S\rangle \vdash_{i-1} \langle q,a,A\gamma\rangle$
  ma poiche' $A\rightarrow a\eta$ allora $\langle q,\eta\rangle\in\delta(q,a,A)$
  $\langle q,ya,S\rangle \vdash_{i-1} \langle q,a,A\gamma\rangle \vdash \langle q,\varepsilon,\eta\gamma\rangle=\langle q,\varepsilon,\alpha\rangle$

dimostrazione (gr. CF→aut. a pila)

(3) rimuoviamo la limitazione che $\varepsilon \notin L(G)$

aggiungiamo un nuovo stato q0 iniziale

definiamo la transizione $\delta(q0,\varepsilon,Z0)=<q0,\varepsilon>$

e la transizione

$\delta(q0,a,Z0)=\{<q,\gamma> \mid <q,\gamma> \in \delta(q,a,Z0)\}$

automi a pila e linguaggi CF

teorema: se un linguaggio è accettato da un automa a pila mediante pila vuota, esiste una grammatica non contestuale che lo genera

dimostrazione:

- dato: M automa a pila
- costruiamo: $G=<\Sigma,V_N,P,S>$ non contestuale
- mostriamo: che L(G)=N(M)
- approccio:

le produzioni di G sono scelte in modo tale che per ogni stringa x, la computazione svolta da M con x in ingresso sia simulata in G da una derivazione sinistra di x

dimostrazione (aut. a pila$\to$gr. CF)

costruzione: da M a G

- V_N = {[q,A,p] | per ogni p,q$\in$Q, per ogni A$\in\Gamma$}$\cup${S}
- S$\to$[q0,Z0,q] per ogni q$\in$Q
- per ogni δ(q,a,A) di M

  per ogni <q1,B1....Bm>$\in\delta$(q,a,A)

  con a$\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, A,B1,....,Bm$\in\Gamma$,

  se m=0 allora [q,A,q1]$\to$a,

  altrimenti

  [q,A,qm+1]$\to$

  a[q1,B1,q2][q2,B2,q3]....[qm,Bm,qm+1]

  per ogni q2,....,qm+1$\in$Q

dimostrazione (aut. a pila$\to$gr. CF)

strategia della dimostrazione

- dimostriamo che

  [q,A,p]$\Rightarrow^*$x se e solo se <q,x,A> $\vdash^*$<p,ε,ε>
- e quindi come caso particolare abbiamo che

  [q0,Z0,p] $\Rightarrow^*$x

  se e solo se

  <q0,x,Z0> $\vdash^*$<p,ε,ε>
- inoltre

  S$\Rightarrow^*$x se e solo se <q0,x,Z0> $\vdash^*$<p,ε,ε>

  (per qualche stato p)

dimostrazione (aut. a pila$\rightarrow$gr. CF)

(1) dimostriamo per induzione su i che

se $<q,x,A> \vdash_i <p,\varepsilon,\varepsilon>$ allora $[q,A,p] \Rightarrow^* x$

$i=1$ se $<q,x,A> \vdash_1 <p,\varepsilon,\varepsilon>$

allora $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

e inoltre $\delta(q,x,A)$ contiene $<p,\varepsilon>$

quindi esiste per costruzione

$[q,A,p] \rightarrow x$; $(x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$

dimostrazione (aut. a pila$\rightarrow$gr. CF)

(1) dimostriamo per induzione su i che

se $<q,x,A> \vdash_i <p,\varepsilon,\varepsilon>$ allora $[q,A,p] \Rightarrow^* x$

$i>1$ posso riscrivere

$<q,x,A> \vdash_i <p,\varepsilon,\varepsilon>$ come

$<q,ay,A> \vdash <q1,y,B1,....,Bn> \vdash_{i-1} <p,\varepsilon,\varepsilon>$

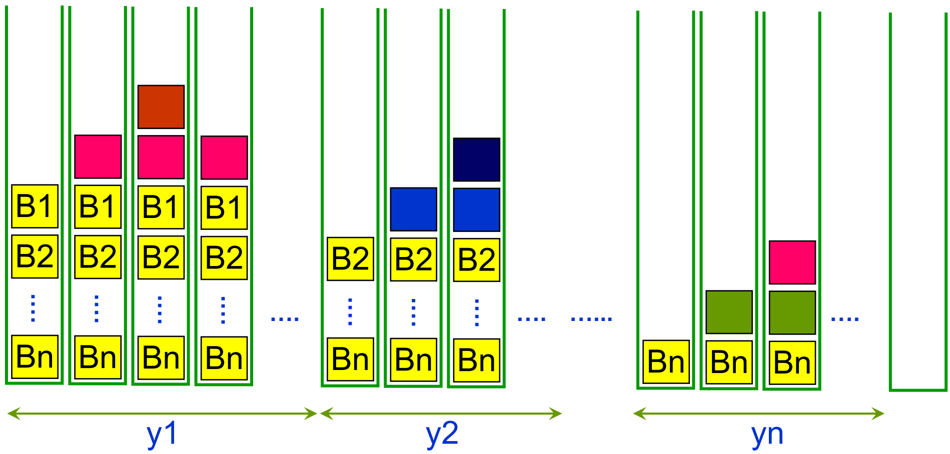
posso riscrivere inoltre y=y1....yn dove ogni yi ($yi \in \Sigma^+$) "rimuove" un Bi dalla pila, magari dopo una lunga sequenza di mosse

y1 è il prefisso di y al termine del quale la pila contiene n-1 simboli;

y1y2 è il prefisso di y al termine del quale la pila contiene n-2 simboli; ecc....

in generale Bj rimane nella pila mentre M legge la sequenza y1....yj-1

evoluzione della pila



dimostrazione (aut. a pila$\rightarrow$gr. CF)

(1) dimostriamo per induzione su i che

se <q,x,A> $\vdash_i$<p,ε,ε> allora [q,A,p]$\Rightarrow^*$x

i>1(continua) allora esistono degli stati q2,..,qn+1=p tali che

<q1,y1,B1> $\vdash^*$ <q2,ε,ε>

<q2,y2,B2> $\vdash^*$ <q3,ε,ε>

....

<qn,yn,Bn> $\vdash^*$ <qn+1,ε,ε>

(tutte computazioni con meno di i passi)

per ipotesi induttiva

[q1,B1,q2] $\Rightarrow^*$ y1

[q2,B1,q3] $\Rightarrow^*$ y2

....

[qn,B1,qn+1] $\Rightarrow^*$ yn

inoltre abbiamo la produzione [q,A,p]$\rightarrow$a[q1,B1,q2][q2,B2,q3]..[qn,Bn,qn+1]

e quindi [q,A,p] $\Rightarrow^*$ay1y2....yn=ay=x

dimostrazione (aut. a pila$\to$gr. CF)

(2) dimostriamo per induzione su i che

se $[q,A,p] \Rightarrow_i x$ allora $\langle q,x,A\rangle \vdash^* \langle p,\varepsilon,\varepsilon\rangle$

i=1

se $[q,A,p] \Rightarrow_1 x$

allora in G esiste $[q,A,p] \to x$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

e quindi $\langle p,\varepsilon\rangle \in \delta(q,x,A)$

e quindi $\langle q,x,A\rangle \vdash \langle p,\varepsilon,\varepsilon\rangle$

dimostrazione (aut. a pila$\to$gr. CF)

(2) dimostriamo per induzione su i che

se $[q,A,p] \Rightarrow_i x$ allora $\langle q,x,A\rangle \vdash^* \langle p,\varepsilon,\varepsilon\rangle$

i>1 posso riscrivere (qn+1=p)

$[q,A,p] \Rightarrow$

$\Rightarrow a[q1,B1,q2][q2,B2,q3]..[qn,Bn,qn+1] \Rightarrow_{i-1}$

$\Rightarrow_{i-1}$ $x = a\ x1\ x2\ ....\ xn$

dove $[qj,Bj,qj+1] \Rightarrow^* xj$ (con meno di i passi)

dall'ipotesi induttiva abbiamo

$\langle qj,xj,Bj\rangle \vdash^* \langle qj+1,\varepsilon,\varepsilon\rangle$ $(1 \le j \le n)$

dimostrazione (aut. a pila$\rightarrow$gr. CF)

(2) dimostriamo per induzione su i che

se $[q,A,p] \Rightarrow_i x$ allora $<q,x,A> \vdash^* <p,\varepsilon,\varepsilon>$

i>1 (continua)

dall'ipotesi induttiva abbiamo $<qj,xj,Bj> \vdash^* <qj+1,\varepsilon,\varepsilon>$ $(1 \leq j \leq n)$

inserendo in pila ("sotto" Bj) Bj+1,....,Bn

$<qj,xj,BjBj+1....Bn> \vdash^* <qj+1,\varepsilon,Bj+1....Bn>$

inoltre dal primo passo di derivazione:

$[q,A,p] \Rightarrow a[q1,B1,q2][q2,B2,q3]..[qn,Bn,qn+1]$

abbiamo $<q,x,A> \vdash <q1,x1x2....xn,B1....Bn>$

quindi $<q,x,A> \vdash^* <p,\varepsilon,\varepsilon>$

automi a pila e linguaggi CF

esempio: dato il seguente automa a pila

$M=<\{0,1\},\{X,Z0\},Z0,\{q0,q1\},q0,\emptyset,\delta>$

$\delta(q0,0,Z0)=\{<q0,XZ0>\}$

$\delta(q0,0,X)=\{<q0,XX>\}$

$\delta(q0,1,X)=\{<q1,\varepsilon>\}$

$\delta(q1,1,X)=\{<q1,\varepsilon>\}$

$\delta(q1,\varepsilon,X)=\{<q1,\varepsilon>\}$

$\delta(q1,\varepsilon,Z0)=\{<q1,\varepsilon>\}$

descrivere la grammatica G che che genera N(M); di che linguaggio si tratta?

VN= {S, [q0,X,q0], [q0,Z0,q0], [q0,Z0,q1], [q0,X,q1], [q1,X,q1], [q1,Z0,q1], [q1,X,q0], [q1,Z0,q0]}

esempio(aut. a pila $\rightarrow$grammatica CF)

esaminiamo solo le produzioni raggiungibili dall'assioma

S→[q0,Z0,q0] S→[q0,Z0,q1]

per il non terminale [q0,Z0,q0] abbiamo che la

δ(q0,0,Z0)={<q0,XZ0>} impone

[q0,Z0,q0] → 0[q0,X,q0][q0,Z0,q0]

[q0,Z0,q0] → 0[q0,X,q1][q1,Z0,q0]

per il non terminale [q0,Z0,q1] abbiamo che la

δ(q0,0,Z0)={<q0,XZ0>} impone

[q0,Z0,q1] → 0[q0,X,q0][q0,Z0,q1]

[q0,Z0,q1] → 0[q0,X,q1][q1,Z0,q1]

esempio(aut. a pila $\rightarrow$grammatica CF)

da δ(q0,0,X)={<q0,XX>} abbiamo

[q0,X,q0] → 0[q0,X,q0][q0,X,q0]

[q0,X,q0] → 0[q0,X,q1][q1,X,q0]

[q0,X,q1] → 0[q0,X,q0][q0,X,q1]

[q0,X,q1] → 0[q0,X,q1][q1,X,q1]

inoltre

[q0,X,q1] → 1	da	δ(q0,1,X)={<q1,ε>}
[q1,Z0,q1] → ε	da	δ(q1,ε,Z0)={<q1,ε>}
[q1,X,q1] → ε	da	δ(q1,ε,X)={<q1,ε>}
[q1,X,q1] → 1	da	δ(q1,1,X)={<q1,e>}

esempio(aut. a pila →grammatica CF)

riassumendo abbiamo

- S → [q0,Z0,q0]   S → [q0,Z0,q1]
- [q0,Z0,q0] → 0[q0,X,q0][q0,Z0,q0]
- [q0,Z0,q0] → 0[q0,X,q1][q1,Z0,q0]
- [q0,Z0,q1] → 0[q0,X,q0][q0,Z0,q1]

  [q0,Z0,q1] → 0[q0,X,q1][q1,Z0,q1]
- [q0,X,q0] → 0[q0,X,q0][q0,X,q0]
- [q0,X,q0] → 0[q0,X,q1][q1,X,q0]
- [q0,X,q1] → 0[q0,X,q0][q0,X,q1]

  [q0,X,q1] → 0[q0,X,q1][q1,X,q1]

  [q0,X,q1] → 1   [q1,Z0,q1] → ε

  [q1,X,q1] → ε   [q1,X,q1] → 1

quindi

S →[q0,Z0,q1]

[q0,Z0,q1] → 0[q0,X,q1][q1,Z0,q1]

[q0,X,q1] → 0[q0,X,q1][q1,X,q1]

[q0,X,q1] → 1   [q1,Z0,q1] → ε

[q1,X,q1] → ε   [q1,X,q1] → 1

esempio(aut. a pila →grammatica CF)

generazione e riconoscimento di 00011

derivazioni sinistre

S	
	[q0,Z0,q1]
0	[q0,X,q1][q1,Z0,q1]
00	[q0,X,q1][q1,X,q1][q1,Z0,q1]
000	[q0,X,q1][q1,X,q1][q1,X,q1][q1,Z0,q1]
0001	[q1,X,q1][q1,X,q1][q1,Z0,q1]
00011	[q1,X,q1][q1,Z0,q1]
00011	[q1,Z0,q1]
00011	

<q0,	00011,	Z0>
<q0,	0011,	XZ0>
<q0,	011,	XXZ0>
<q0,	11,	XXXZ0>
<q1,	1,	XXZ0>
<q1,	ε,	XZ0>
<q1,	ε,	Z0>
<q1,	ε,	ε>

ambiguità

problema fondamentale per i linguaggi di programmazione

una grammatica non contestuale G è ambigua se esiste una stringa x in L(G) derivabile con due diversi alberi di derivazione

esempio: data la grammatica $E \to E+E|E*E|a$

la stringa a+a*a può essere derivata con alberi di derivazione diversi

osservazione: ci sono due metodi per evitare l'ambiguità: parentesi e precedenza

esempio: la grammatica precedente può essere modificata in $E \to (E+E)|(E*E)|a$

esempio: grammatica delle espressioni aritmetiche

$E \to E+T|E-T|T$

$F \to T*F|T/F|F$

$F \to (E)|a$

ambiguità

un linguaggio di tipo 2 e' inerentemente ambiguo se tutte le grammatiche che lo generano sono ambigue

esempio: linguaggio non inerentemente ambiguo

$E \to E+E|E*E|a$

ha una grammatica equivalente non ambigua

$E \to a+E|a*E|a$

esempio: linguaggio inerentemente ambiguo

$\{a^n b^n c^m | n,m \geq 1\} \cup \{a^m b^n c^n | n,m \geq 1\}$

infatti, per qualunque grammatica le stringhe $a^n b^n c^n$ possono essere generate in due modi diversi

confronto tra linguaggi regolari e linguaggi non contestuali

chiusura

	LR	LCF
unione	si	si
concatenazione	si	si
stella	si	si
intersezione	si	no
complementazione	si	no

problemi di decisione

	LR	LCF
w in L?	D	D
$L=\varnothing$?	D	D
$\|L\|=\infty$?	D	D
L1=L2?	D	?
$L1\cap L2=\varnothing$?	D	?

quadro riassuntivo sui linguaggi CF