Esercizi di Informatica Teorica

Linguaggi non contestuali: automi a pila

1

Automa a pila

richiami

un automa a pila non deterministico è una settupla:

A = $< \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta >$ dove

- Σ è l'alfabeto (finito) di input
- Γ è l'alfabeto (finito) dei simboli della pila
- $Z_0 \in \Gamma$ è il simbolo di pila iniziale
- Q è un insieme (finito e non vuoto) di stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathbf{P}(Q \times \Gamma^*)$ è la funzione di transizione;

la transizione $\delta(q, \mathbf{a}, A) \rightarrow \{<q', \gamma>\}$ indica che dallo stato q, leggendo il carattere '**a**' (che può essere ε) dalla stringa di input e avendo il simbolo 'A' come elemento affiorante dalla pila, si passa allo stato q´ e si sostituisce A con la stringa di simboli γ nella pila 2

Configurazioni e transizioni

richiami

un automa a pila è *deterministico* se per ogni stato q, simbolo di input '**a**' e simbolo di pila 'A', riesce: $|\delta(q, \mathbf{a}, A)| + |\delta(q, \varepsilon, A)| \leq 1$

una *configurazione (istantanea)* è una tripla $<q, x, \gamma>$, dove

- q è lo stato corrente
- x è la stringa di input ancora da leggere
- γ è la stringa ancora presente in pila (il primo simbolo di γ è quello affiorante dalla pila)

c'è una *transizione* tra configurazioni: $<q, x, \gamma> \vdash <q', x', \gamma'> \Leftrightarrow$

- $x = \mathbf{a}x'$, $\gamma = A\alpha$, $\gamma' = \beta\alpha$, $<q', \beta> \in \delta(q, \mathbf{a}, A)$ oppure
- $x = x'$, $\gamma = A\alpha$, $\gamma' = \beta\alpha$, $<q', \beta> \in \delta(q, \varepsilon, A)$

la *computazione* è la chiusura transitiva e riflessiva $\vdash^*$ di $\vdash$

3

Linguaggio riconosciuto

richiami

due definizioni alternative di *accettazione*:

- accettazione per pila vuota: una stringa x è accettata da un automa a pila $\Leftrightarrow$ al termine della computazione su x la pila è vuota
- accettazione per stato finale: una stringa x è accettata da un automa a pila $\Leftrightarrow$ al termine della computazione su x l'automa è su uno stato finale

linguaggio riconosciuto da un automa a pila: insieme delle stringhe accettate dall'automa

teorema:

i linguaggi riconosciuti dagli automi a pila che accettano per pila vuota sono tutti e soli i linguaggi riconosciuti dagli automi a pila che accettano per stato finale (equivalenza dei linguaggi nelle due definizioni)

4

Esercizi sugli automi a pila

esercizio 1

dato il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$

1.a definire un automa a pila che accetta L per pila vuota

1.b mostrare la computazione sulla stringa "**aaabbb**"

1.c definire un automa a pila che accetta L per stato finale

1.d modificare l'automa affinché accetti contemporaneamente per pila vuota e per stato finale

esercizio 2

definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\}$.

5

Esercizi sugli automi a pila

esercizio 3

3.a definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 1\}$

3.b mostrare l'albero di computazione per la stringa "**abb**"

esercizio 4

dato il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m : n \geq m \geq 1\}$.

4.a definire un automa a pila che accetti L per stato finale

4.b definire un automa a pila che accetti L per pila vuota

4.c produrre l'albero di computazione per la stringa "**aab**"

6

Esercizi sugli automi a pila

esercizio 5

definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale

$L = \{a^n b^m c^k : n,m,k \geq 1 \text{ ed } n=m \text{ o } n=k\}$

esercizio 6

definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale

$L = \{a^n b^m a^m b^n : n,m \geq 1\}$

esercizio 7

definire un automa a pila per il linguaggio delle stringhe su {**a**,**b**} tali che #a = #b (il numero di "**a**" è uguale al numero di "**b**")

7

Esercizi sugli automi a pila

esercizio 8

definire un automa a pila per il linguaggio delle stringhe su {**a**,**b**,**c**} tali che #a = #b + #c.

esercizio 9

definire un automa a pila per ciascuno dei seguenti linguaggi CF:

9.a $L = \{a^n c^m b^n : n,m \geq 1\}$

9.b $L = \{(ab)^n (cd)^n : n \geq 1\}$

9.c L = stringhe su {a,b,c,d} tali che #a + #b = #c + #d

8

Esercizi sugli automi a pila

esercizio 10

mostrare l'albero di computazione per la stringa "**aaabb**" nell'automa dell'esercizio 4

esercizio 11

mostrare l'albero di computazione per la stringa "**aabcc**" nell'automa dell'esercizio 5

9

Algoritmo: CFG → automa a pila

richiami

input : una grammatica non contestuale (CFG) $G = < V_T, V_N, P, S >$

ouput : un automa $A = < \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta >$ che accetta per pila vuota

- ricavare una $G' = < V_T, V'_N, P', S' >$ in GNF equivalente a G ma che non genera ε
- $\Sigma = V_T$
- $\Gamma = V'_N$
- $Z_0 = S'$
- $Q = \{q\}$ e $q_0 = q$
- per ogni produzione $A \rightarrow a\gamma$ introdurre $\delta(q, a, A) \rightarrow <q, \gamma>$
- se G genera ε allora aggiungere lo stato q´ a Q, porre $q_0 = q'$ ed aggiungere le seguenti transizioni:
  - $\delta(q', \varepsilon, Z_0) \rightarrow <q', \varepsilon>$ (per riconoscere ε)
  - $\delta(q', \varepsilon, Z_0) \rightarrow <q, Z_0>$ (per ricondursi alle transizioni su q)

10

CFG $\to$ automa a pila

esercizio 12

definire un automa a pila non deterministico che riconosce il linguaggio generato dalla seguente grammatica non contestuale:

$S \to$ **a** | S **+** S | S ***** S | **(** S **)**

esercizio 13

definire un automa a pila non deterministico per la seguente grammatica G non contestuale: $S \to \varepsilon$ | **[** S **]** | SS

(L(G) è anche detto linguaggio delle parentesi bilanciate o Dyck_1)

11

Algoritmo: automa a pila $\to$ CFG

richiami

input : un automa a pila $A = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta \rangle$ che accetta per pila vuota

ouput : una grammatica non contestuale (CFG) $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$

- $V_T = \Sigma$
- $V_N = \{[pAq] : \forall p, q \in Q, \forall A \in \Gamma\} \cup \{S\}$
- l'insieme P delle produzioni è il seguente:
  - $S \to [q_0 Z_0 q]$ $\quad \forall q \in Q$
  - $[pAq] \to a$ $\quad \forall \langle q, \varepsilon \rangle \in \delta(p, a, A)$
  - $[pAq_{m+1}] \to a[q_1B_1q_2]\,[q_2B_2q_3]\ \ldots..\ [q_mB_mq_{m+1}]$ su ogni possibile scelta di $q_2, \ldots, q_{m+1} \in Q$ $\quad \forall \langle q_1, \gamma \rangle \in \delta(p, a, A)$ con $\gamma = B_1 \ldots B_m$

12

Automi a pila → CFG

esercizio 14

definire una grammatica non contestuale che genera il linguaggio riconosciuto dal seguente automa a pila non deterministico:

$\Sigma = \{[,]\}$, $\Gamma = \{T, A\}$, $Q = \{q_0\}$, $Z_0 = T$

$\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \text{‘[’}, T) = \{<q_0, AT>\}$

$\delta(q_0, \text{‘[’}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \text{‘]’}, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

13

Automi a pila → CFG

esercizio 15

definire una grammatica non contestuale corrispondente al seguente automa a pila non deterministico:

$\Sigma = \{a,b\}$, $\Gamma = \{Z, A\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, $Z_0 = Z$

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$

$\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, A>, <q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

14

Soluzioni

soluzione esercizio 1.a

$L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ per pila vuota

$\sum = \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, $\Gamma=\{Z_0, A\}$, $Q =\{q_0, q_1\}$

$\delta(q_0, \mathbf{a}, Z_0) = \{<q_0, A>\}$ $\delta(q_0, \mathbf{a}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$ $\delta(q_1, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$

soluzione esercizio 1.b

computazione "aaabbb"

$<q_0, \mathbf{aaabbb}, Z_0> \vdash <q_0, \mathbf{aabbb}, A> \vdash <q_0, \mathbf{abbb}, AA> \vdash$
$<q_0, \mathbf{bbb}, AAA> \vdash <q_1, \mathbf{bb}, AA> \vdash <q_1, \mathbf{b}, A> \vdash <q_1, \varepsilon, \varepsilon>$

15

Soluzioni

soluzione esercizio 1.c

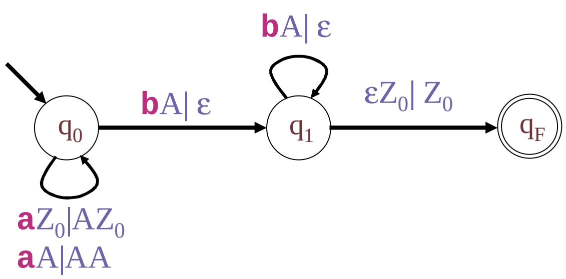
$L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ per stato finale

$\sum = \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, $\Gamma=\{Z_0, A\}$, $Q =\{q_0, q_1, q_F\}$, $F = \{q_F\}$

$\delta(q_0, \mathbf{a}, Z_0) = \{<q_0, AZ_0>\}$ $\delta(q_0, \mathbf{a}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$

$\delta(q_1, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{<q_F, Z_0>\}$



16

Soluzioni

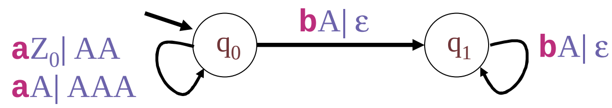
soluzione esercizio 2

$L = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\}$

accettazione per pila vuota

$\delta(q_0, \mathbf{a}, Z_0) = \{<q_0, AA>\}$ $\delta(q_0, \mathbf{a}, A) = \{<q_0, AAA>\}$

$\delta(q_0, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\delta(q_1, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

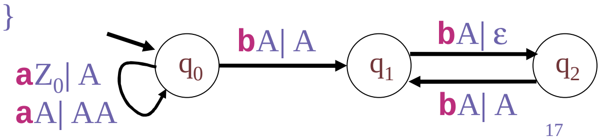


soluzione alternativa (sempre accettazione per pila vuota)

$\delta(q_0, \mathbf{a}, Z_0) = \{<q_0, A>\}$ $\delta(q_0, \mathbf{a}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, A>\}$ $\delta(q_1, \mathbf{b}, A) = \{<q_2, \varepsilon>\}$

$\delta(q_2, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, A>\}$



17

Soluzioni

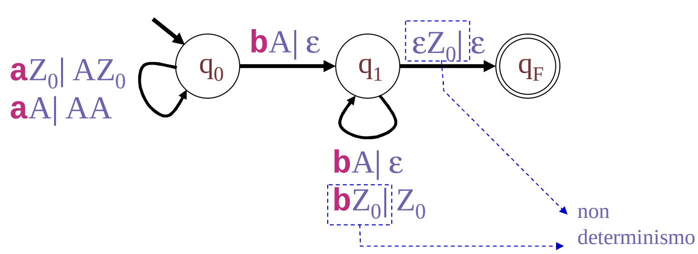
soluzione esercizio 3.a

$L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 1\}$ per pila vuota (e stato finale)

$\delta(q_0, \mathbf{a}, Z_0) = \{<q_0, AZ_0>\}$ $\delta(q_0, \mathbf{a}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\delta(q_1, \mathbf{b}, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, \mathbf{b}, Z_0) = \{<q_1, Z_0>\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{<q_F, \varepsilon>\}$



18

Soluzioni

soluzione esercizio 3.b

albero di computazione per “abb”

$\langle q_0, \mathbf{abb}, Z_0\rangle$

$\downarrow$

$\langle q_0, \mathbf{bb}, AZ_0\rangle$

$\downarrow$

$\langle q_1, \mathbf{b}, Z_0\rangle$

$\delta(q_1, b, Z_0)=\{\langle q_1, Z_0\rangle\}$ $\swarrow$ $\searrow$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0)=\{\langle q_F, \varepsilon\rangle\}$

$\langle q_1, \varepsilon, Z_0\rangle$ $\quad$ $\boxed{\langle q_F, \mathbf{b}, \varepsilon\rangle}$ ← non accettante

$\downarrow$

$\boxed{\langle q_F, \varepsilon, \varepsilon\rangle}$ ← accettata sia per stato finale che per pila vuota

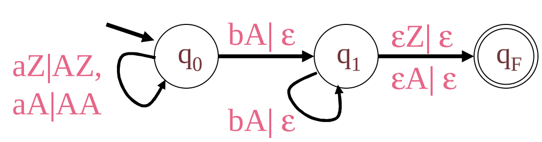
19

Soluzioni

soluzione esercizio 4.a

$L = \{a^n b^m : n \geq m \geq 1\}$ per stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{\langle q_0, AZ\rangle\}$	$\delta(q_0, a, A) = \{\langle q_0, AA\rangle\}$
$\delta(q_0, b, A) = \{\langle q_1, \varepsilon\rangle\}$	$\delta(q_1, b, A) = \{\langle q_1, \varepsilon\rangle\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{\langle q_F, \varepsilon\rangle\}$	$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{\langle q_F, \varepsilon\rangle\}$



20

Soluzioni

soluzione esercizio 4.b

$L = \{a^n b^m : n \geq m \geq 1\}$ per pila vuota

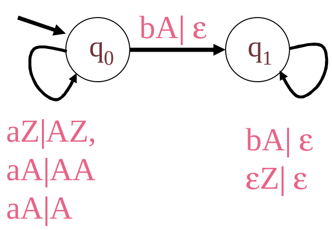
$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>, <q_0, A>\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

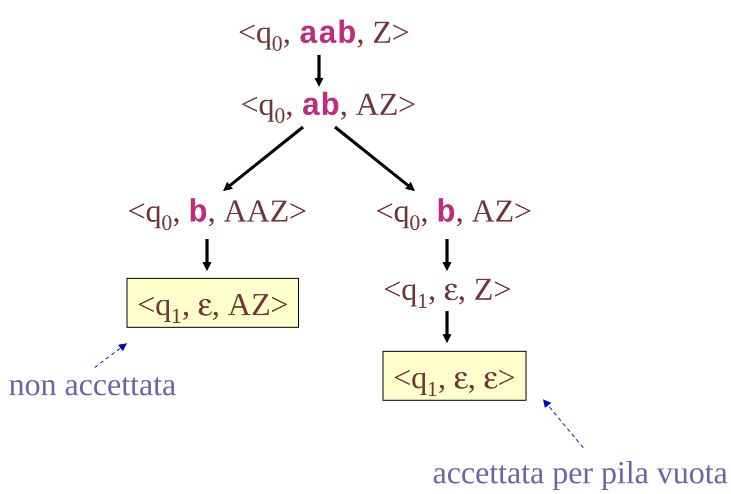


21

Soluzioni

soluzione esercizio 4.c

albero di computazione per “aab”



22

Soluzioni

soluzione esercizio 5

$L = \{a^n b^m c^k : n,m,k \geq 1 \text{ ed } n=m \text{ o } n=k\}$

accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$ conta le 'a'

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>, <q_2, A>\}$ crea due rami: ($n=m$) o ($n=k$)

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\delta(q_1, c, Z) = \{<q_3, Z>\}$

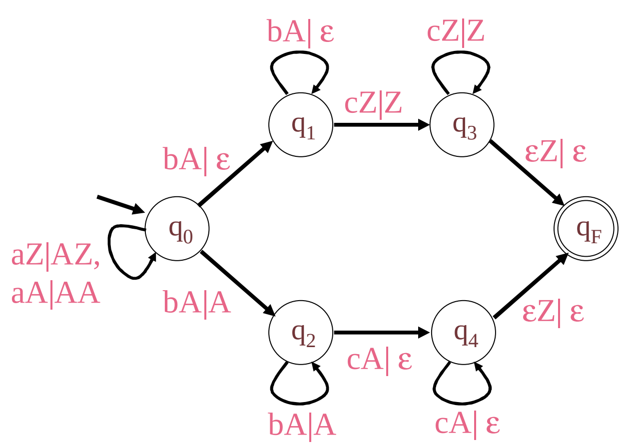
$\delta(q_3, c, Z) = \{<q_3, Z>\}$ $\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$ ramo $n=m$

$\delta(q_2, b, A) = \{<q_2, A>\}$ $\delta(q_2, c, A) = \{<q_4, \varepsilon>\}$

$\delta(q_4, c, A) = \{<q_4, \varepsilon>\}$ $\delta(q_4, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$ ramo $n=k$

23

Soluzioni



24

Soluzioni

soluzione esercizio 6

$L = \{a^n b^m a^m b^n : n,m \geq 1\}$

accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, BA>\}$

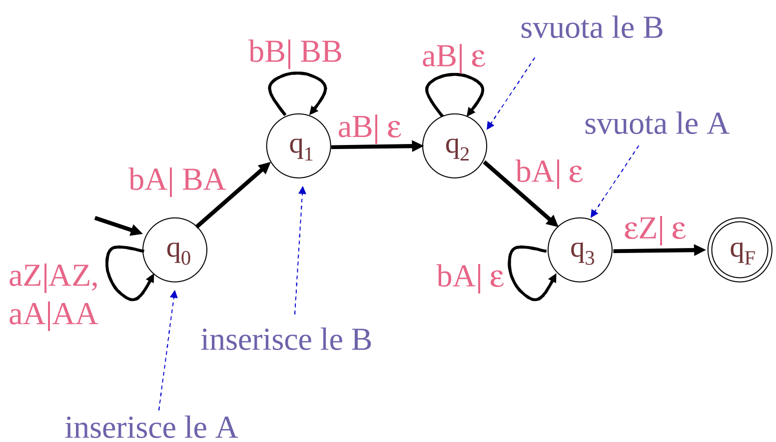
$\delta(q_1, b, B) = \{<q_1, BB>\}$ $\delta(q_1, a, B) = \{<q_2, \varepsilon>\}$

$\delta(q_2, a, B) = \{<q_2, \varepsilon>\}$ $\delta(q_2, b, A) = \{<q_3, \varepsilon>\}$

$\delta(q_3, b, A) = \{<q_3, \varepsilon>\}$ $\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

25

Soluzioni



26

Soluzioni

soluzione esercizio 7

stringhe su {a,b} tali che #a = #b

accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, b, Z) = \{<q_0, BZ>\}$

$\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$ $\delta(q_0, b, B) = \{<q_0, BB>\}$

$\delta(q_0, a, B) = \{<q_0, \varepsilon>\}$ $\delta(q_0, b, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

osservazione nella pila non ci possono essere contemporaneamente delle A e delle B

27

Soluzioni

soluzione esercizio 8

stringhe su {a,b,c} tali che #a = #b + #c

accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z)=\{<q_0, AZ>\}$, $\delta(q_0, b, Z)=\{<q_0, BZ>\}$, $\delta(q_0, c, Z)=\{<q_0, BZ>\}$

$\delta(q_0, a, A)=\{<q_0, AA>\}$, $\delta(q_0, b, B)=\{<q_0, BB>\}$, $\delta(q_0, c, B)=\{<q_0, BB>\}$

$\delta(q_0, a, B)=\{<q_0, \varepsilon>\}$, $\delta(q_0, b, A)=\{<q_0, \varepsilon>\}$, $\delta(q_0, c, A)=\{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

28

Soluzioni

soluzione esercizio 12 — automa per $S \rightarrow a \mid S + S \mid S * S \mid (S)$

portiamo la grammatica in GNF

- portiamo in quasi CNF:
  - $S \rightarrow SPS \mid SMS \mid ASZ \mid$ **a**
  - $P \rightarrow$ **+** , $M \rightarrow$ ***** , $A \rightarrow$ **(** , $Z \rightarrow$ **)**
- scegliamo l'ordinamento $S < P < M < A < Z$
- eliminiamo la ricorsione sinistra su S:
  - $S \rightarrow ASZR \mid$ **a**$R \mid ASZ \mid$ **a**
  - $R \rightarrow PSR \mid MSR \mid PS \mid MS$
  - $P \rightarrow$ **+** , $M \rightarrow$ ***** , $A \rightarrow$ **(** , $Z \rightarrow$ **)**

29

Soluzioni

- sostituiamo a ritroso e semplifichiamo
  - $S \rightarrow$ **(**$SZR \mid$ **a**$R \mid$ **(**$SZ \mid$ **a**
  - $R \rightarrow$ **+**$SR \mid$ *****$SR \mid$ **+**$S \mid$ *****S
  - $Z \rightarrow$ **)**

• poniamo: $\Sigma=\{a, +, *, (,)\}$, $\Gamma = \{S, R, Z\}$, $Q = \{q\}$, $q_0= q$, $Z_0 = S$

• costruiamo l'insieme delle transizioni:

$\delta(q, (, S) = \{<q, SZR>, <q, SZ>\}$

$\delta(q, a, S) = \{<q, R>, <q, \varepsilon>\}$

$\delta(q, +, R) = \{<q, SR>, <q, S>\}$

$\delta(q, *, R) = \{<q, SR>, <q, S>\}$

$\delta(q,), Z) = \{<q, \varepsilon>\}$

30

Soluzioni

soluzione esercizio 13 — automa per $S \to \varepsilon \mid [S] \mid SS$

- consideriamo la grammatica equivalente a G ma che non genera la stringa vuota: $S \to [S] \mid SS \mid [\,]$
- scriviamo la grammatica in GNF:

$S \to [Z \mid [SZ \mid [ZR \mid [SZR$

$R \to [Z \mid [SZ \mid [ZR \mid [SZR \mid [ZRR \mid [SZRR$

$Z \to]$

- poniamo: $\Sigma = \{[,]\}$, $\Gamma = \{S, R, Z\}$, $Q = \{q, q'\}$, $q_0 = q'$, $Z_0 = S$
- costruiamo l'insieme delle transizioni:

$\delta(q, [, S) = \{<q, Z>, <q, SZ>, <q, ZR>, <q, SZR>\}$

$\delta(q, [, R) = \{<q, Z>, <q, SZ>, <q, ZR>, <q, SZR>, <q, ZRR>, <q, SZRR>\}$

$\delta(q,], Z) = \{<q, \varepsilon>\}$ $\quad \delta(q', \varepsilon, S) = \{<q', \varepsilon>, <q, S>\}$

31

Soluzioni

osservazione: esiste un automa a pila molto più semplice per il linguaggio definito dalla grammatica delle parentesi bilanciate

S = simbolo di pila iniziale

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{<q, \varepsilon>\}$

$\delta(q, \text{'['}, S) = \{<q, AS>\}$

$\delta(q, \text{'['}, A) = \{<q, AA>\}$

$\delta(q, \text{']'}, A) = \{<q, \varepsilon>\}$

la situazione nella pila all'istante generico è così riassunta:

- se l'elemento affiorante è S allora c'è un bilanciamento di parentesi
- se l'elemento affiorante è A allora ci sono più parentesi aperte

32

Soluzioni

soluzione esercizio 14

grammatica non contestuale per: $\Sigma = \{[,]\}$, $\Gamma = \{T, A\}$, $Q = \{q_0\}$, $Z_0 = T$

$\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \text{'['}, T) = \{<q_0, AT>\}$

$\delta(q_0, \text{'['}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \text{']'}, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

• produzioni per l'assioma:

$S \rightarrow [q_0Tq_0]$

• produzioni per $\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$:

$[q_0Tq_0] \rightarrow \varepsilon$

33

Soluzioni

• produzioni per $\delta(q_0, \text{']'}, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$:

$[q_0Aq_0] \rightarrow]$

• produzioni per $\delta(q_0, \text{'['}, T) = \{<q_0, AT>\}$

$[q_0Tq_0] \rightarrow [\ [q_0Aq_0]\ [q_0Tq_0]$

•produzioni per $\delta(q_0, \text{'['}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$[q_0Aq_0] \rightarrow [\ [q_0Aq_0]\ [q_0Aq_0]$

poiché q_0 è il solo stato dell'automa, possiamo rinominare i non terminali nel seguente modo: $[q_0Tq_0] = T$, $[q_0Aq_0] = A$, e riscrivere dunque la grammatica come segue:

$S \rightarrow T$ (S = assioma)

$T \rightarrow \varepsilon \mid [AT$ $A \rightarrow] \mid [AA$

34

Soluzioni

soluzione esercizio 15

- produzioni per l'assioma:

  $S \rightarrow [q_0Zq_0] \mid [q_0Zq_1] \mid [q_0Zq_F]$
- produzioni per $<q_0, AZ> \in \delta(q_0, a, Z)$:

  $[q_0Zq_0] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Zq_0] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Zq_0] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FZq_0]$

  $[q_0Zq_1] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Zq_1] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Zq_1] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FZq_1]$

  $[q_0Zq_F] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Zq_F] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Zq_F] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FZq_F]$
- produzioni per $<q_0, A> \in \delta(q_0, a, A)$:

  $[q_0Aq_0] \rightarrow a[q_0Aq_0]$ $\quad [q_0Aq_1] \rightarrow a[q_0Aq_1]$ $\quad [q_0Aq_F] \rightarrow a[q_0Aq_F]$
- produzioni per $<q_0, AA> \in \delta(q_0, a, A)$:

  $[q_0Aq_0] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Aq_0] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Aq_0] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FAq_0]$

  $[q_0Aq_1] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Aq_1] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Aq_1] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FAq_1]$

  $[q_0Aq_F] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Aq_F] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Aq_F] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FAq_F]$

35

Soluzioni

- produzioni per $<q_1, \varepsilon> \in \delta(q_0, b, A)$:

  $[q_0Aq_1] \rightarrow b$
- produzioni per $<q_1, \varepsilon> \in \delta(q_1, b, A)$:

  $[q_1Aq_1] \rightarrow b$
- produzioni per $<q_F, \varepsilon> \in \delta(q_1, \varepsilon, Z)$:

  $[q_1Zq_F] \rightarrow \varepsilon$

proviamo a semplificare:

- rinominiamo ciascun non terminale nel seguente modo: $[q_iAq_j] = A_{ij}$

- l'intera grammatica si riscrive dunque come segue:

36

Soluzioni

$S \rightarrow Z_{00} \mid Z_{01} \mid Z_{0F}$
$Z_{00} \rightarrow aA_{00}Z_{00} \mid aA_{01}Z_{10} \mid aA_{0F}Z_{F0}$
$Z_{01} \rightarrow aA_{00}Z_{01} \mid aA_{01}Z_{11} \mid aA_{0F}Z_{F1}$
$Z_{0F} \rightarrow aA_{00}Z_{0F} \mid aA_{01}Z_{1F} \mid aA_{0F}Z_{FF}$
$A_{00} \rightarrow aA_{00}A_{00} \mid aA_{01}A_{10} \mid aA_{0F}A_{F0} \mid aA_{00}$
$A_{01} \rightarrow aA_{00}A_{01} \mid aA_{01}A_{11} \mid aA_{0F}A_{F1} \mid aA_{01} \mid b$
$A_{0F} \rightarrow aA_{00}A_{0F} \mid aA_{01}A_{1F} \mid aA_{0F}A_{FF} \mid aA_{0F}$
$A_{11} \rightarrow b$
$Z_{1F} \rightarrow \varepsilon$

- i simboli fecondi sono: A_{01} , A_{11} , Z_{1F} , Z_{0F} , S

eliminando dunque i simboli: Z_{00} , Z_{01} , A_{00} , A_{0F} la grammatica diventa

37

Soluzioni

$S \rightarrow Z_{0F}$
$Z_{0F} \rightarrow aA_{01}Z_{1F}$
$A_{01} \rightarrow aA_{01}A_{11} \mid aA_{01} \mid b$
$A_{11} \rightarrow b$
$Z_{1F} \rightarrow \varepsilon$

- eliminando le ε-produzioni e poi le produzioni unitarie si ha:

$S \rightarrow aA_{01}$
$A_{01} \rightarrow aA_{01}A_{11} \mid aA_{01} \mid b$
$A_{11} \rightarrow b$

- rinominiamo i non terminali nel modo seguente: $A_{01}=A$, $A_{11} = B$

$S \rightarrow aA$
$A \rightarrow aAB \mid aA \mid b$
$B \rightarrow b$

38