Esercizi di Informatica Teorica

Espressioni regolari e grammatiche

Proprietà decidibili dei linguaggi regolari

1

Espressioni regolari e linguaggi regolari

richiami

- equivalenza tra espressioni regolari e linguaggi regolari
- da una espressione regolare per L si ricava un ASFND applicando le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari (dall'ASFND si può poi ricavare una grammatica regolare che genera L)
- da una grammatica regolare che genera L si ricava una espressione regolare risolvendo un sistema di equazioni lineari

2

Grammatica regolare → espressione regolare

richiami

il sistema di equazioni lineari si ricava dalla grammatica sostituendo ogni insieme di produzioni del tipo:

$A \rightarrow \mathbf{a}_1B_1 \mid \mathbf{a}_2B_2 \mid .... \mid \mathbf{a}_nB_n \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid .... \mid \mathbf{b}_m$ nel seguente modo:

$A = \mathbf{a}_1B_1 + \mathbf{a}_2B_2 + ... + \mathbf{a}_nB_n + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{b}_m$

dal sistema di equazioni lineari si ricava una espressione regolare applicando le due tecniche seguenti ripetutamente:

- sostituzione: si può sostituire un simbolo non terminale con una espressione equivalente (es. $A = \mathbf{a}B + \mathbf{b}$, $B = \mathbf{c}A \Rightarrow A = \mathbf{ac}A + \mathbf{b}$)
- eliminazione della ricorsione: si può sostituire l'equazione

$A = \alpha_1A + \alpha_2A + ... + \alpha_nA + \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_m$ con l'equazione

$A = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)^*(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_m)$

3

Grammatica regolare → espressione regolare

esercizio 1

ricavare una espressione regolare per il linguaggio generato dalla seguente grammatica regolare:

$S \rightarrow \mathbf{a}A$	$S \rightarrow \mathbf{b}C$
$A \rightarrow \mathbf{a}A$	$A \rightarrow \mathbf{b}C$
$C \rightarrow \mathbf{c}C$	$C \rightarrow \mathbf{d}$

esercizio 2

ricavare una espressione regolare per il linguaggio generato dalla seguente grammatica regolare:

$S \rightarrow \mathbf{a}X$

$X \rightarrow \mathbf{b}Y \mid \mathbf{a}$

$Y \rightarrow \mathbf{b}X$

4

Grammatica regolare → espressione regolare

esercizio 3

ricavare una espressione regolare per il linguaggio generato dalla seguente grammatica regolare:

$S \rightarrow \mathbf{a}X \mid \mathbf{a}$
$X \rightarrow \mathbf{b}X \mid \mathbf{a}Y \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow \mathbf{b}Y \mid \mathbf{a}X$

esercizio 4

ricavare una espressione regolare per il linguaggio generato dalla seguente grammatica regolare:

$S \rightarrow \mathbf{b}X$
$X \rightarrow \mathbf{a}X \mid \mathbf{b}X \mid \mathbf{a}Y \mid \mathbf{a}$
$Y \rightarrow \mathbf{b}Y \mid \mathbf{b}$

5

Grammatica regolare → espressione regolare

esercizio 5

ricavare una espressione regolare per il linguaggio generato da ciascuna delle seguenti grammatiche regolari:

5.a
$S \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{a}A$
$A \rightarrow \mathbf{a}A \mid \mathbf{b}A \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b}$

5.b
$S \rightarrow \mathbf{a}X$
$X \rightarrow \mathbf{a}X \mid \mathbf{b}X \mid \mathbf{b}$

5.c
$S \rightarrow \mathbf{a}B \mid \mathbf{a}C$
$B \rightarrow \mathbf{b}X \mid \mathbf{a}$
$X \rightarrow \mathbf{b}B$
$C \rightarrow \mathbf{c}C \mid \mathbf{c}$

6

Proprietà decidibili dei linguaggi regolari

richiami

è possibile decidere se un linguaggio regolare L è vuoto, finito o infinito

è sufficiente studiare un ASF A che riconosce L

se n è il numero di stati di A, allora:

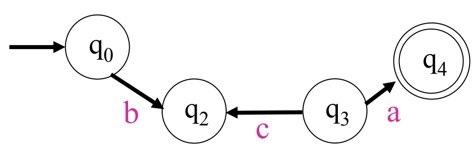
- L è vuoto se e solo se A non accetta alcuna stringa di lunghezza minore di n
- L è infinito se e solo se A accetta qualche stringa di lunghezza $k \in [n, 2n)$
- altrimenti L è finito

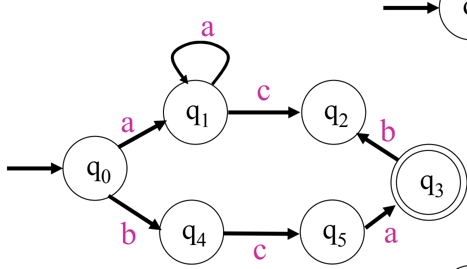
7

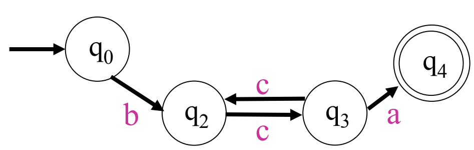
Proprietà decidibili dei linguaggi regolari

esercizio 6

dire se i linguaggi riconosciuti dai seguenti ASF sono vuoti, finiti o infiniti







8

Proprietà decidibili dei linguaggi regolari

richiami

teorema dati due linguaggi regolari L_1 ed L_2 è possibile decidere se:

- $L_1 \subseteq L_2$
- $L_1 = L_2$

infatti:

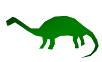
- $L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow L_1 - L_2 = \varnothing$ $\quad\quad$ $(L_1 - L_2 = c(c(L_1) \cup L_2)$
- $L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$ ed $L_2 \subseteq L_1$

osservazione: $L_1 = L_2$ equivale anche a dire che

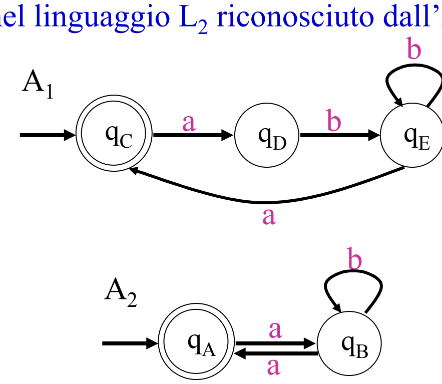
$$(L_1 \cap c(L_2)) \cup (L_2 \cap c(L_1)) = \varnothing$$

9

Proprietà decidibili dei linguaggi regolari

esercizio 7 

dimostrare formalmente che il linguaggio L_1 riconosciuto dall'ASF A_1 è contenuto nel linguaggio L_2 riconosciuto dall'ASF A_2.



10

Soluzioni

soluzione esercizio 1

si ricava il seguente sistema:
$$\begin{cases} S = \mathbf{a}A + \mathbf{b}C \\ A = \mathbf{a}A + \mathbf{b}C \\ C = \mathbf{c}C + \mathbf{d} \end{cases}$$

applicando le tecniche di sostituzione ed eliminazione della ricorsione si ottiene:

$$\begin{cases} S = \mathbf{a}A + \mathbf{b}C \\ A = \mathbf{a}A + \mathbf{b}C \\ C = \mathbf{c}C + \mathbf{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \mathbf{a}A + \mathbf{b}C \\ A = \mathbf{a}A + \mathbf{b}C \\ C = \mathbf{c}^*\mathbf{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \mathbf{a}A + \mathbf{bc}^*d \\ A = \mathbf{a}A + \mathbf{bc}^*d \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \mathbf{a}A + \mathbf{bc}^*\mathbf{d} \\ A = \mathbf{a}^*\mathbf{bc}^*\mathbf{d} \end{cases} \Rightarrow \quad S = \mathbf{aa}^*\mathbf{bc}^*\mathbf{d} + \mathbf{bc}^*\mathbf{d}$$

dunque risulta: $\mathbf{aa}^*\mathbf{bc}^*\mathbf{d} + \mathbf{bc}^*\mathbf{d}$

che semplificata diventa: $\mathbf{a}^*\mathbf{bc}^*\mathbf{d}$

11

Soluzioni

soluzione esercizio 2

$$\begin{cases} S = aX \\ X = bY + a \\ Y = bX \end{cases} \quad \begin{cases} S = aX \\ X = bbX + a \end{cases} \quad \begin{cases} S = aX \\ X = (bb)^*a \end{cases} \quad S = a(bb)^*a$$

soluzione esercizio 3

$$\begin{cases} S = aX + a \\ X = bX + aY + \varepsilon \\ Y = bY + aX \end{cases} \begin{cases} S = aX + a \\ X = bX + aY + \varepsilon \\ Y = b^*aX \end{cases} \quad \begin{cases} S = aX + a \\ X = bX + ab^*aX + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = aX + a \\ X = bX + ab^*aX + \varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} S = aX + a \\ X = (b + ab^*a)^* \end{cases} \quad S = a(b+ab^*a)^* + a$$

che può essere semplificata in: $a(b+ab^*a)^*$

12

Soluzioni

soluzione esercizio 4

S = bX
X = aX + bX + aY + a
Y = bY + b

S = bX
X = aX + bX + aY + a
Y = b*b

S = bX
X = aX + bX + ab*b + a

S = bX
X = (a+b)*(ab*b + a)

S = b(a+b)*(ab*b + a)

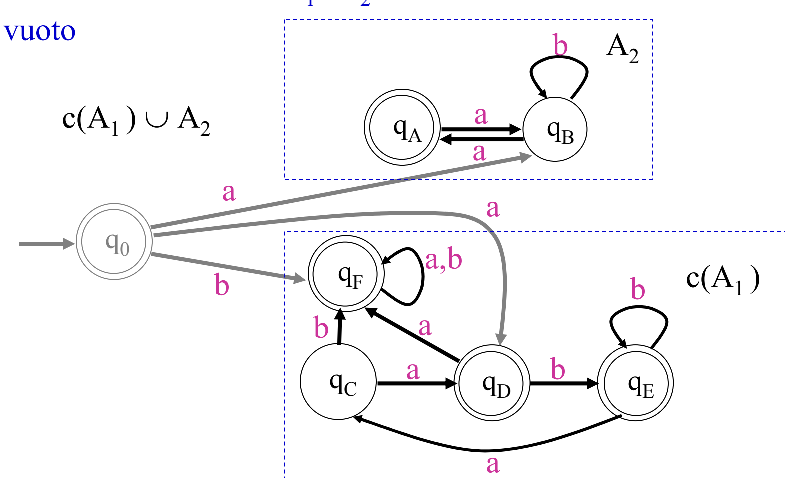
che si semplifica in: b(a+b)*ab*

13

Soluzioni

soluzione esercizio 7

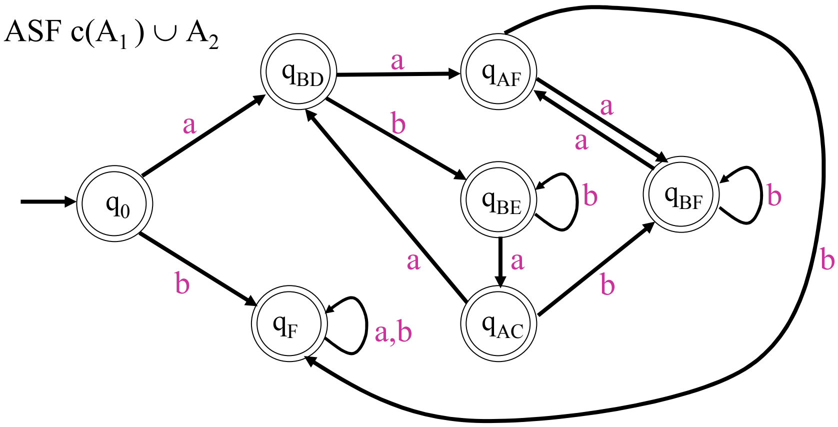
dimostriamo che $A = A_1 - A_2$ è un automa che riconosce il linguaggio vuoto



14

Soluzioni

ASF $c(A_1) \cup A_2$



quindi, il complementare di questo ASF non avrà stati finali, e dunque riconoscerà il linguaggio vuoto.

15