Esercizi di Informatica Teorica

Pumping lemma e proprietà di chiusura per i linguaggi regolari

Pumping lemma per linguaggi regolari

richiami

pumping lemma: se L è un linguaggio regolare allora $\exists\, n > 0$ tale che $\forall z \in L$ con $|z| \geq n$ $\exists$ u,v,w :

1) $z = uvw$
2) $|uv| \leq n$
3) $|v| \geq 1$
4) $z_i = uv^i w \in L \ \forall i \in \mathbf{N}$ (cioè $i = 0, 1, 2, \ldots$)

osservazioni:

1. n dipende da L (viene fissato una volta per tutte sulla base di L)
2. u, v, w dipendono da z e da n (u,v,w sono scelti in base a z e ad n)
3. u e/o w possono anche essere stringhe vuote
4. poiché può anche essere i = 0, la stringa $z_0 = uw$ deve appartenere ad L affinché la proprietà 4 del lemma sia soddisfatta

Pumping lemma per linguaggi regolari

richiami

considerazioni per la scelta di n: si può sempre scegliere n uguale o superiore al minimo numero di stati necessari per costruire un ASF che riconosce L

utilizzo del pumping lemma: il pumping lemma rappresenta una condizione necessaria ma non sufficiente affinché un linguaggio sia regolare:
- il pumping lemma non vale per L $\Rightarrow$ L non è regolare
- il pumping lemma vale per L $\Rightarrow$ non si può dire niente per L

quindi il pumping lemma si utilizza per provare che un linguaggio è non regolare

osservazione: il pumping lemma è ovviamente vero per linguaggi finiti; basta scegliere n maggiore della lunghezza della stringa più lunga

Pumping lemma per linguaggi regolari

richiami

osservazione: spesso, per dimostrare che il pumping lemma non vale si può adottare una tecnica (debole) che non usa tutte le ipotesi:
si può mostrare che per stringhe z ("sufficientemente" lunghe) non esiste mai una suddivisione z = uvw, con $|v| \geq 1$ tale che
$z_i = uv^iw \in L \ \forall i \in \mathbf{N}$
(non sto usando l'ipotesi $|uv| \leq n$ e sto addirittura supponendo che la suddivisione non sia mai possibile da un certo n in poi)

osservazione: se non si riesce ad usare con successo la tecnica debole, allora si deve tentare di negare il pumping lemma usando tutte le ipotesi

Esercizi sul pumping lemma

esercizio 1

verificare la validità del pumping lemma per i seguenti linguaggi regolari

1.a $L_1 = ab^*a$

1.b $L_2 = a(bc)^*ba$

1.c $L_3 = a(bc)^*ba + babab$

esercizio 2

verificare la validità del pumping lemma per il linguaggio regolare
$L = \{s \in \{a,b\}^* :$ s contiene un numero pari di 'a' e dispari di 'b'$\}$

esercizio 3

dimostrare che il linguaggio $L = \{a^h b^k c^{h+k} : h, k > 0\}$ non è regolare

esercizio 4

dimostrare che il linguaggio $L = \{(ab)^h (cd)^h : h > 0\}$ non è regolare

Esercizi sul pumping lemma

esercizio 5

dimostrare che $L = \{ss \mid s \in \{a,b\}^*\}$ è un linguaggio non regolare

esercizio 6

dimostrare che il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su $\{a,b\}$ non è regolare

esercizio 7

sia $L = \{a^k : k$ è un numero primo$\}$; dimostrare che L è un linguaggio non regolare

numero primo = che ha esattamente un divisore diverso da uno

esercizio 8

sia $L=\{a^{2^h} : h \geq 0\}$; dimostrare che L è un linguaggio non regolare

esercizio 9

dimostrare che il linguaggio delle stringhe su $\{a,b,c\}$, tali che il numero di 'a' al quadrato più il numero di 'b' al quadrato è uguale al numero di 'c' al quadrato (cioè $(\#a)^2+(\#b)^2 = (\#c)^2$) è non regolare

Esercizi sul pumping lemma

esercizio 10

provare la validità del pumping lemma per i seguenti linguaggi regolari, stabilendo qual'è il minimo n utilizzabile per la prova

10.a $L_1 = aa(bb)^*$

10.b $L_2 = abc + accb + a(cc)^*ba$

10.c L_3 = insieme delle stringhe in $\{a,b\}^+$ con un numero pari di 'a'

esercizio 11

dimostrare, utilizzando il pumping lemma, che i seguenti linguaggi non sono regolari:

11.a $L_1 = \{a^k b a^k : k > 0\}$

11b $L_2 = \{a^h b^k : k > h > 0\}$

11.c $L_3 = \{a^k b^h : k > h > 0\}$

11.d $L_4 = \{s \in \{a,b\}^* :$ il numero di 'a' è maggiore del numero di 'b'$\}$

Proprietà di chiusura dei linguaggi regolari

richiami

teorema: se L_1 ed L_2 sono due linguaggi regolari $\Rightarrow$ anche i seguenti linguaggi sono regolari

- $L = L_1 \cup L_2$ (unione)
- $L = L_1 \bullet L_2$ (concatenazione)
- $L = L_1^*$ (chiusura stella)
- $L = \Sigma_1 - L_1$ (complementazione)
- $L = L_1 \cap L_2$ (intersezione)
- $L = L_1 - L_2$ (differenza)

Automa che riconosce il linguaggio unione

richiami

$A_1 = <\Sigma_1, K_1, F_1, \delta_{N1}, q_{01}>$ ASFND che riconosce L_1

$A_2 = <\Sigma_2, K_2, F_2, \delta_{N2}, q_{02}>$ ASFND che riconosce L_2

$A = <\Sigma, K, F, \delta_N, q_0>$ ASFND che riconosce $L = L_1 \cup L_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_0\}$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{se } q_{01} \notin F_1 \text{ e } q_{02} \notin F_2 \\ F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\} & \text{se } q_{01} \in F_1 \text{ o } q_{02} \in F_2 \end{cases}$$

$\delta_N(q,a) = \delta_{N1}(q,a)$ $\forall q \in K_1 \ \forall a \in \Sigma_1$

$\delta_N(q,a) = \delta_{N2}(q,a)$ $\forall q \in K_2 \ \forall a \in \Sigma_2$

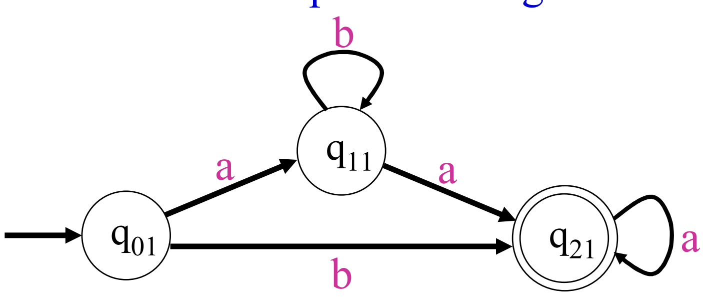
$\delta_N(q_0,a) = \delta_{N1}(q_{01},a) \cup \delta_{N2}(q_{02},a)$ $\forall a \in \Sigma$

Esercizi sull’unione di automi

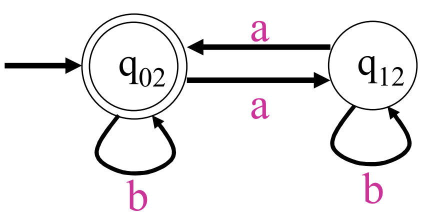
esercizio 12

determinare l’automa $A = A_1 \cup A_2$ e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare

A_1



A_2



Automa che riconosce il linguaggio concatenazione

richiami

$A_1 = <\Sigma_1, K_1, F_1, \delta_{N1}, q_{01}>$ ASFND che riconosce L_1

$A_2 = <\Sigma_2, K_2, F_2, \delta_{N2}, q_{02}>$ ASFND che riconosce L_2

$A = <\Sigma, K, F, \delta_N, q_0>$ ASFND che riconosce $L = L_1 \bullet L_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$K = K_1 \cup K_2$

$$F = \begin{cases} F_2 & \text{se } \varepsilon \notin L_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{se } \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

$q_0 = q_{01}$

$\delta_N(q,a) = \delta_{N1}(q,a) \qquad \forall q \in K_1 - F_1 \quad \forall a \in \Sigma_1$

$\delta_N(q,a) = \delta_{N1}(q,a) \cup \delta_{N2}(q_{02},a) \qquad \forall q \in F_1 \quad \forall a \in \Sigma$

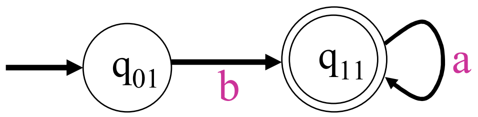
$\delta_N(q,a) = \delta_{N2}(q,a) \qquad \forall q \in K_2 \quad \forall a \in \Sigma_2$

Esercizi sulla concatenazione di automi

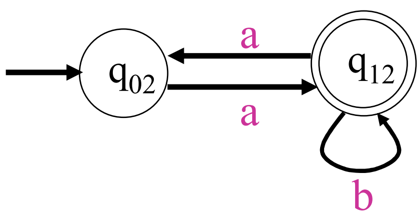
esercizio 13

determinare l'automa $A = A_1 \bullet A_2$ e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare

A_1



A_2



Automa che riconosce il linguaggio complementare

<u>richiami</u>

$A = <\Sigma, K, F, \delta, q_0>$ ASF che riconosce L

$A' = <\Sigma', K', F', \delta', q'_0>$ ASF che riconosce $L' = \Sigma^* - L$

$\Sigma' = \Sigma$

$K' = K \cup \{d\}$ ('d' serve solo se c'è qualche $\delta(q,a)$ indefinito)

$F' = K - F$

$q'_0 = q_{01}$

$\delta'(q,a) = \delta(q,a)$ $\forall q \in K$ e $\forall a \in \Sigma$: $\delta(q,a)$ è definito

$\delta'(q,a) = d$ $\forall q \in K$ e $\forall a \in \Sigma$: $\delta(q,a)$ è indefinito

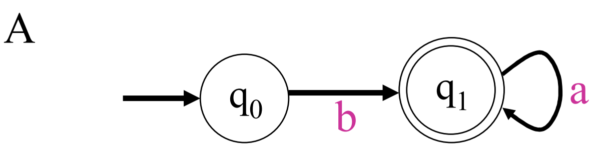
$\delta'(d,a) = d$ $\forall a \in \Sigma$

nota: si ricordi che dire che $\delta(q,a)$ è indefinito è come dire che esiste uno stato (pozzo) non finale q' tale che $\delta(q,a)=q'= \delta(q',x)$ $\forall x \in \Sigma$

Esercizi sulla complemetazione di automi

<u>esercizio 14</u>

determinare l'automa A' complementare di A e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare



Automa che riconosce il linguaggio chiusura stella

richiami

$A = <\Sigma, K, F, \delta_N, q_0>$ ASFND che riconosce L

$A' = <\Sigma', K', F', \delta'_N, q'_0>$ ASFND che riconosce L*

$\Sigma' = \Sigma$

$K' = K \cup \{q'_0\}$

$F' = F \cup \{q'_0\}$

$\delta'_N(q,a) = \delta_N(q,a)$ $\forall q \in K\text{-}F$ e $\forall a \in \Sigma$

$\delta'_N(q,a) = \delta_N(q,a) \cup \delta_N(q_0,a)$ $\forall q \in F$ e $\forall a \in \Sigma$

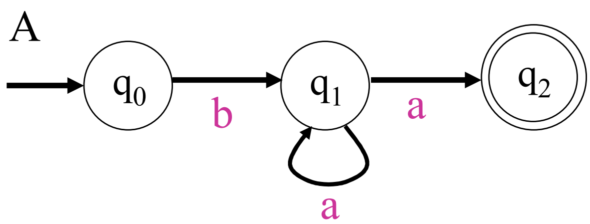
$\delta'_N(q'_0,a) = \delta_N(q_0,a)$ $\forall a \in \Sigma$

nota: lo stato q'_0 è uno stato finale perché L* contiene sempre la stringa vuota

Esercizi sulla chiusura stella di automi

esercizio 15

determinare l'automa A' chiusura stella di A e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare



Automi che riconoscono intersezione e differenza

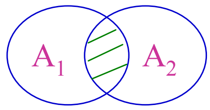
richiami

$A_1 = \langle \Sigma_1, K_1, F_1, \delta_1, q_{01} \rangle$ ASF che riconosce L_1

$A_2 = \langle \Sigma_2, K_2, F_2, \delta_2, q_{02} \rangle$ ASF che riconosce L_2

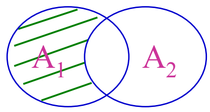
- ASFND che riconosce $L = L_1 \cap L_2$ (intersezione)

  $A = A_1 \cap A_2 = c\,(\,c(A_1) \cup c\,(A_2)\,)$



- ASFND che riconosce $L = L_1 - L_2$ (differenza)

  $A = A_1 - A_2 = c\,(c\,(A_1) \cup A_2)$



Esercizi sulle proprietà di chiusura

esercizio 16

dimostrare che il linguaggio $L \subseteq \{a,b\}^*$ delle stringhe di lunghezza dispari e con un numero pari di 'a' è regolare; costruire poi un ASF che riconosce L

esercizio 17

dimostrare, utilizzando le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, che il linguaggio L delle stringhe non vuote su $\{a,b\}$ contenenti lo stesso numero di 'a' e di 'b' non è regolare

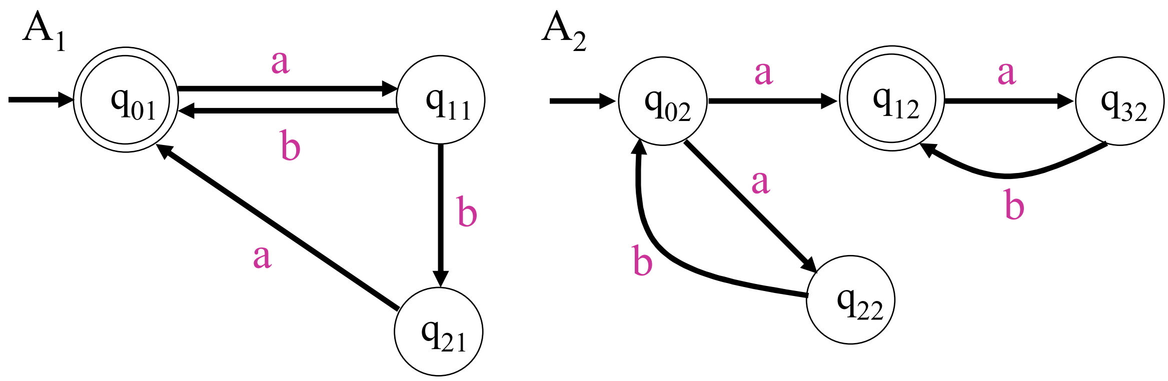
esercizio 18

dimostrare che il linguaggio L delle stringhe non vuote su $\{a,b\}$ contenenti lo stesso numero di 'a' e di 'b' non è regolare usando il pumping lemma; si riesce ad applicare la tecnica debole per negare il pumping lemma?

Esercizi sulle proprietà di chiusura

esercizio 19

dati i seguenti ASFND



costruire gli ASFND unione e differenza di A_1 e A_2

esercizio 20

si dimostri, usando le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, che il linguaggio L delle stringhe su {a,b,c} con un numero pari di ‘a’ più ‘b’ è regolare; costruire inoltre un ASFND che riconosce L

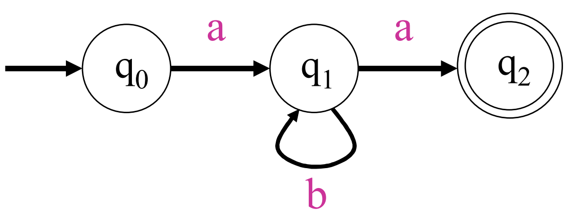
Soluzioni

soluzione esercizio 1.a (L_1= ab*a)

la stringa “aa” non può essere suddivisa secondo le regole del pumping lemma; ogni stringa di lunghezza > 2 invece è del tipo “abbb..bba” e può sempre essere suddivisa al modo u = “a” v=“b” e w = parte restante; allora basta scegliere n = 3 affinché siano verificate le proprietà del pumping lemma

esempio: $z = a\underset{v}{b}bbba$ $z_6 = a\underbrace{bbbbbb}_{v^6}bbba$

si osservi che un ASF con il minimo numero di stati ha tre 3 stati (escludendo lo stato “pozzo” fittizio)



Soluzioni

soluzione esercizio 1.b $L_2 = a(bc)^*ba$

la stringa "aba" non può essere suddivisa secondo le regole del pumping lemma; ogni stringa di lunghezza > 3 invece è del tipo "abcbc..bcba" e può sempre essere suddivisa al modo u = "a" v="bc" e w = parte restante; allora basta scegliere $n = 4$ (o $n=5$) affinché siano verificate le proprietà del pumping lemma (osserva che non possono esistere stringhe di lunghezza pari nel linguaggio)

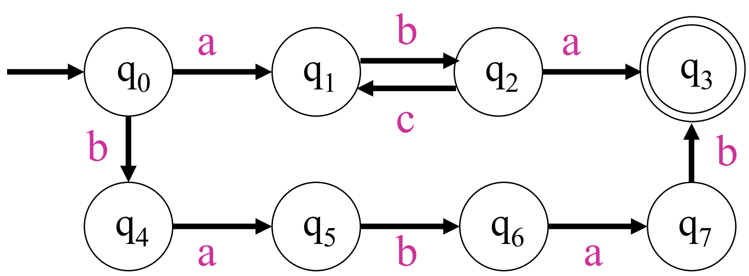
esempio: z = abcbcba z_3 = abcbcbcbcba

E' facile ricavare un ASF con 4 stati (escluso lo stato pozzo) che riconosce il linguaggio L_2

Soluzioni

soluzione esercizio 1.c $L_3 = a(bc)^*ba + babab$

risulta $L_3 = L_2 \cup \{babab\}$, quindi per tutte le stringhe del linguaggio, tranne che per la stringa "babab", si può ragionare come per il linguaggio L_2;
tuttavia, la stringa "babab" non può essere suddivisa secondo le regole del pumping lemma, ed ha lunghezza 5;
quindi occorre scegliere $n \geq 6$



Soluzioni

soluzione esercizio 2 (numero pari di 'a' e dispari di 'b')

- tutte le stringhe di L hanno lunghezza dispari
- se z è una stringa di L, in una qualunque suddivisione z = uvw, v deve contenere un numero pari di 'a' e un numero pari di 'b', affinché z_i appartenga ancora ad L (i = 0, 1, 2, ..)
- non posso suddividere la stringa "aba" con le regole sopra descritte, quindi n deve essere maggiore di 3
- è sempre possibile suddividere una stringa di L di lunghezza maggiore di 3 con le regole sopra dette ed in modo tale che $|uv| \leq 4$ e $|v| > 1$ (dimostrare formalmente studiando tutti i casi); quindi, se scegliamo $n = 4$, le proprietà del pumping lemma valgono

Soluzioni

soluzione esercizio 3 (L = $\{a^h b^k c^{h+k} : h, k > 0\}$ non regolare)

è possibile utilizzare entrambe le tecniche (debole o con utilizzo di tutte le ipotesi) per negare il pumping lemma:

• utilizzo della tecnica debole (mostro che non posso mai suddividere)

– sia uvw ($|v| \geq 1$) una suddivisione per la stringa z = $a^h b^k c^{h+k}$;
– v non può essere fatta di sole 'a', perché altrimenti "pompando" v si avrebbe solo una variazione del numero di 'a', mentre il numero di 'b' e di 'c' rimarrebbe uguale (sbilanciamento)
– analogamente a sopra, v non può essere fatta di sole 'b' o di sole 'c' (sbilanciamento)
– infine, v non può prendere simboli misti, perché altrimenti si avrebbero delle alternanze

Soluzioni

- utilizzo di tutte le ipotesi

  supponiamo di poter fissare un n per cui valgano le proprietà del pumping lemma; consideriamo allora una stringa $z = a^h b^k c^{h+k}$ tale che $h > n$; allora $|z| > n$ e dovrebbe esistere una opportuna suddivisione per z; tuttavia una qualunque suddivisione $z = uvw$ tale che $|uv| \leq n$ $(|v| \geq 1)$ implica che v è fatta di sole ‘a’; ma allora “pompando” v si avrebbe uno sbilanciamento del numero di ‘a’ rispetto al numero di ‘b’ e di ‘c’ (con $i = 0$ le ‘a’ diminuiscono mentre per $i > 0$ le ‘a’ aumentano).

Soluzioni

soluzione esercizio 5 $(L = \{ss \mid s \in \{a,b\}^*\}$ non regolare)

Si noti che non si può utilizzare la tecnica debole: infatti senza l’ipotesi $|uv| \leq n$ esiste sempre una divisione di z in uvw, con v non nullo, tale che $\forall i,\ z_i = uv^i w \in L$. È sufficiente prendere $u = \varepsilon$, $v = z$ e $w = \varepsilon$. Si vede che:

$z_0 = uv^0 w = \varepsilon \in L$

$z_1 = uv^1 w = z = ss \in L$

$z_2 = uv^2 w = zz = ssss = s's' \in L$ (con $s' = ss$)

$z_3 = uv^3 w = zzz = ssssss = s's' \in L$ (con $s' = sss$)

…

è dunque necessario utilizzare tutte le ipotesi per negare il pumping lemma

Soluzioni

scegliamo allora la seguente stringa di L: $z = a^k b a^k b$, con $k > n$; poiché $|z|>n$, cerco una suddivisione uvw "valida" per z; questa suddivisione deve essere tale che $|uv| \leq n$, ed allora necessariamente sarà $v = a^h$ con $h < k$;
ma allora sarà $z_i = s_1 s_2$, dove s_1 ha un numero di 'a' iniziali superiore a quello di s_2 se $i > 0$ ed inferiore se $i = 0$, e questo è assurdo per l'ipotesi fatta; il pumping lemma è dunque non valido, e perciò il linguaggio è non regolare

Soluzioni

soluzione esercizio 7
usiamo la tecnica debole, dimostriamo cioè che, se z = aaaaa...aaa ha un numero primo di 'a', allora non è mai possibile suddividere z al modo z = uvw, così che $|z_i| = |uv^iw|$ sia un numero primo, per ogni naturale i:

- sia dunque $|z| = |a^k|$ un numero primo ($|z| \geq 2$, perché 1 non è primo)
- consideriamo una qualunque suddivisione z = uvw, con $|v| \geq 1$
- risulta $|z_i| = |u| + i|v| + |w|$
- per ogni $i > 0$ si può riscrivere $|z_i| = |z| + (i - 1)|v|$
- ma allora, quando $i - 1 = |z|$, cioè per $i = |z|+1$, risulta $|z_i| = |z| + |z||v| = |z| (1+|v|)$, e quindi $|z_i|$ non è numero primo (perché prodotto di due numeri maggiori di 1)

Soluzioni

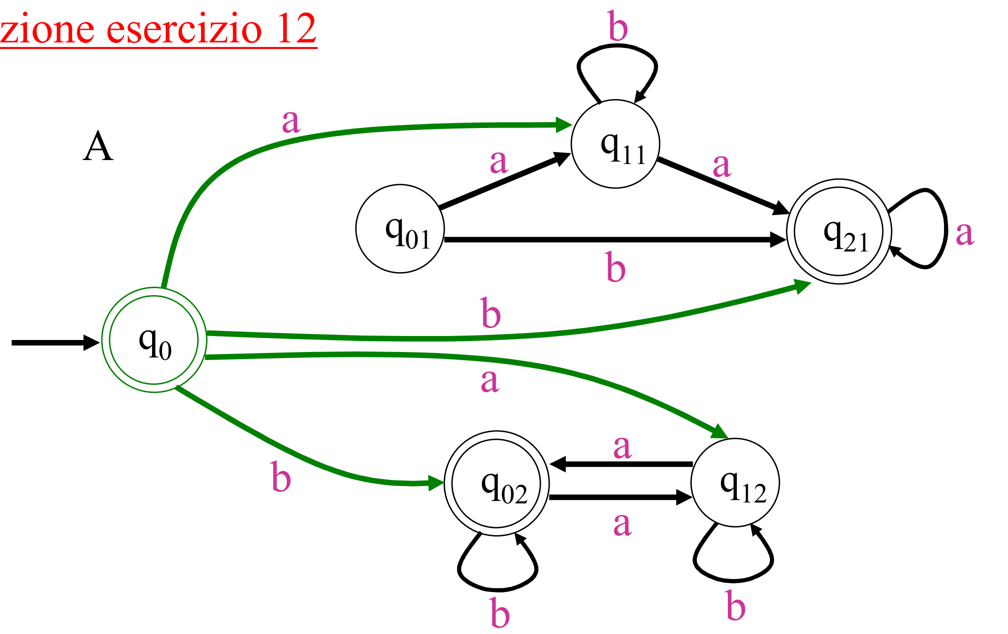
soluzione esercizio 8

usiamo la tecnica debole, dimostriamo cioè che se |z| = |aaa...aa| è una potenza di 2, allora non è mai possibile suddividere z nel modo z = uvw così che $|z_i| = |uv^iw|$ sia una potenza di 2, per ogni naturale i:

- sia $|z| = |a^{2^h}| = 2^h$ con $h \geq 0$
- consideriamo una qualunque suddivisione z = uvw, con $|v| \geq 1$
- risulta $|z_i| = |u| + i|v| + |w|$
- per $i > 0$ si può riscrivere $|z_i| = |z| + (i-1)|v| = 2^h + (i-1)|v|$
- sono possibili due casi per |v|:
  - |v| è un numero dispari; in questo caso per $i = 2$ risulta $|z_i| = 2^h + (i-1)|v| = 2^h + |v|$, che è un numero dispari maggiore di 2 e quindi non può essere una potenza di 2
  - |v| è un numero pari; in questo caso per $i = (2^h + 1)$ risulta $|z_i| = 2^h + (i-1)|v| = 2^h + 2^h|v| = 2^h(1+|v|)$ che ancora una volta non può essere una potenza di due perché (1+|v|) è dispari (e quindi contiene almeno un fattore diverso da 2).

Soluzioni

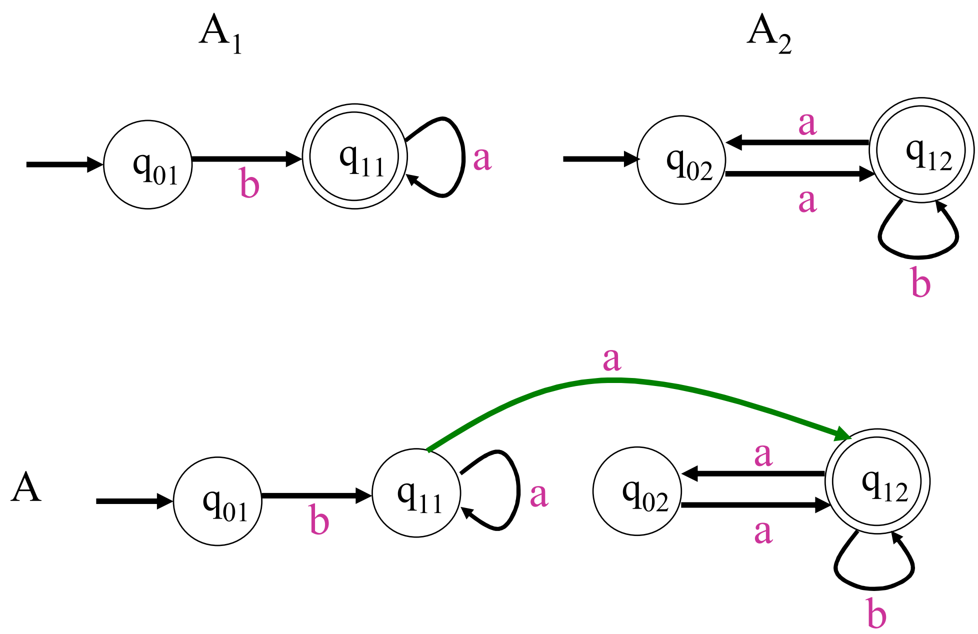
soluzione esercizio 12



L = (ab*a + b)a* + b* (ab*ab*)*

Soluzioni

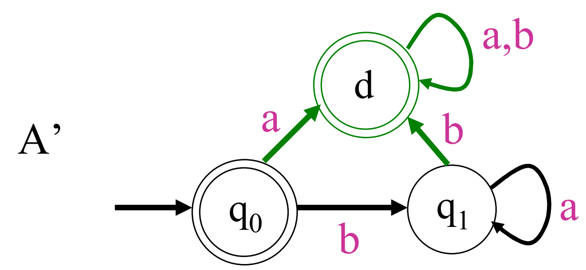
soluzione esercizio 13



L = ba*a(b*(aa)*)*

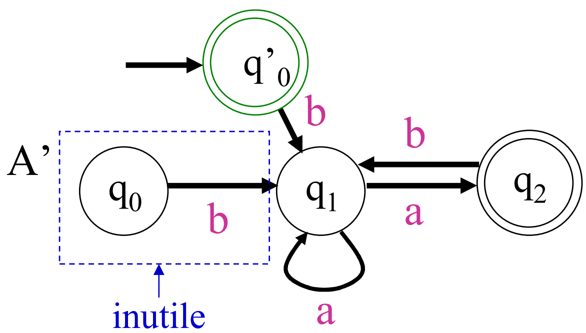
Soluzioni

soluzione esercizio 14



L = (a+ba*b)(a+b)* + ε

soluzione esercizio 15

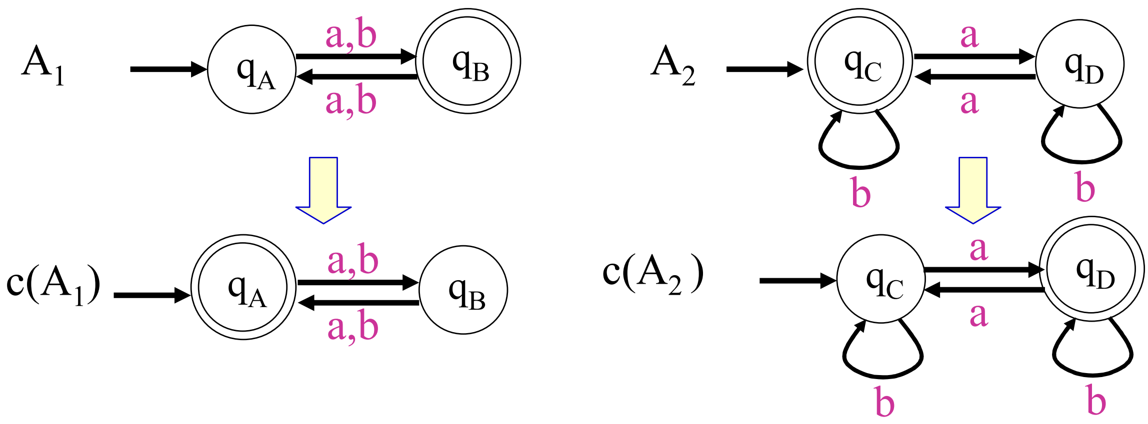


L = (ba*a)*

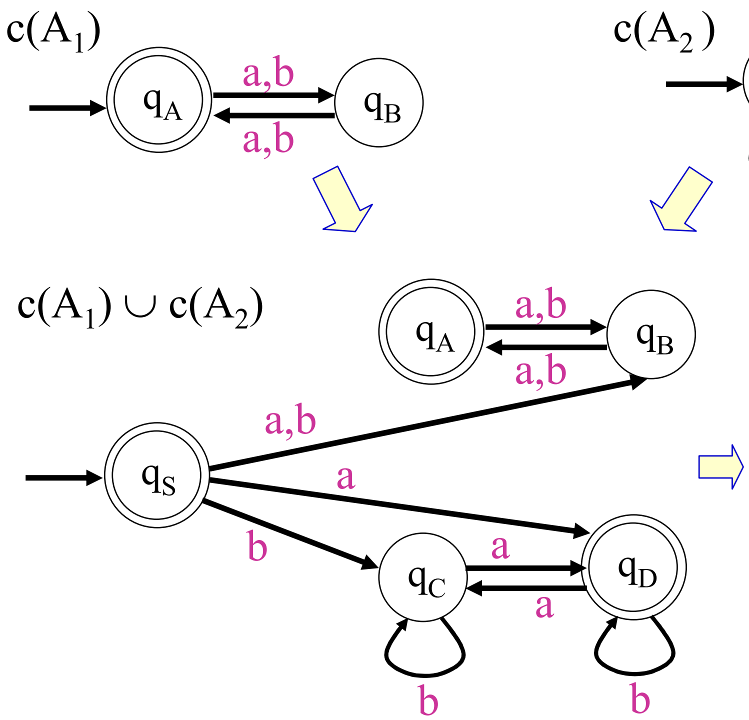
Soluzioni

soluzione esercizio 16 (stringhe di lunghezza dispari: regolarità+ASF)

- il linguaggio L_1 delle stringhe su {a,b} di lunghezza dispari è regolare, infatti: $L_1 = (a+b)((a+b)(a+b))^*$
- il linguaggio L_2 delle stringhe su {a,b} con un numero pari di 'a' è regolare, infatti: $L_2 = b^*(ab^*ab^*)^*$
- il linguaggio L è l'intersezione di L_1 ed L_2, cioè: $L = L_1 \cap L_2$, quindi è regolare per le proprietà di chiusura dei linguaggio regolari



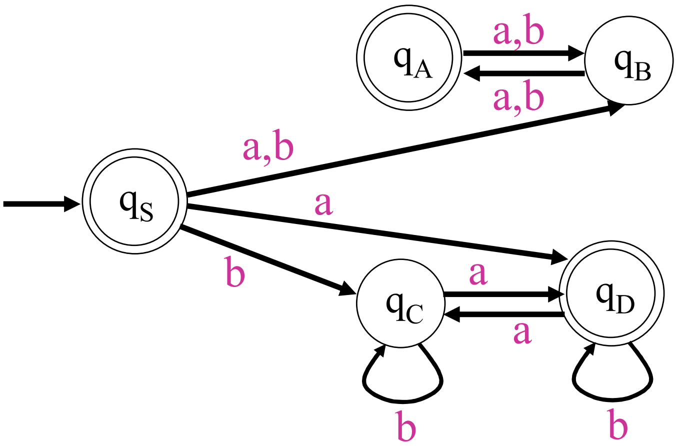
Soluzioni

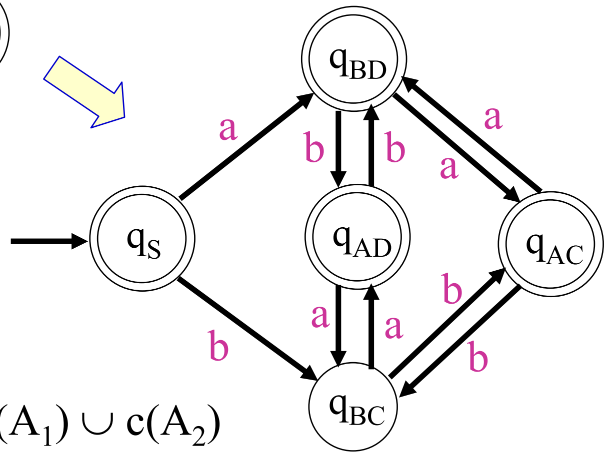


per poter costruire il complementare, occorre prima ricavare l'ASF dall'ASFND

Soluzioni

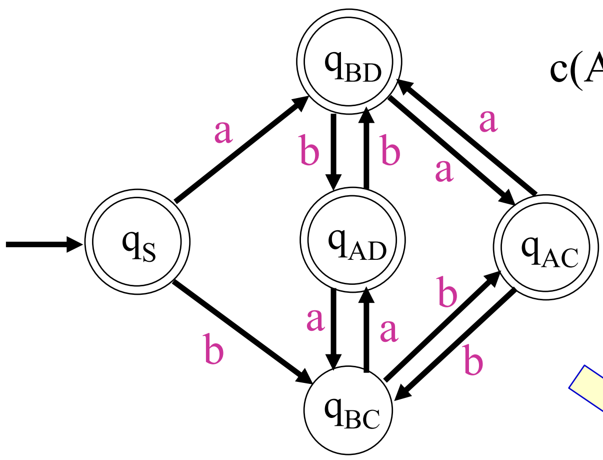
ASFND per $c(A_1) \cup c(A_2)$



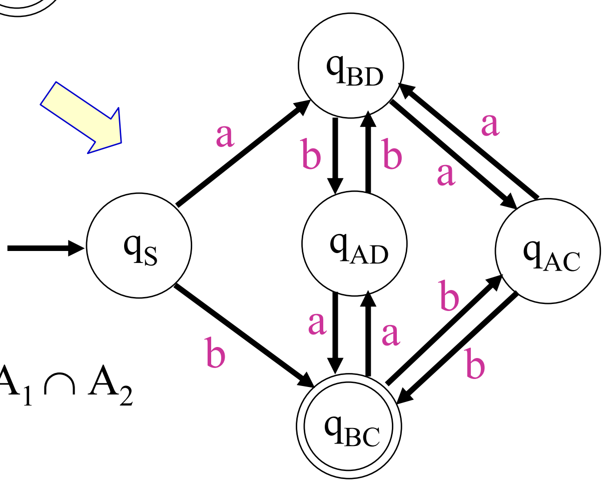


ASF per $c(A_1) \cup c(A_2)$

Soluzioni



$c(A_1) \cup c(A_2)$



$c(c(A_1) \cup c(A_2)) = A_1 \cap A_2$

Soluzioni

<u>soluzione esercizio 17</u> (stesso numero di ‘a’ e di ‘b’ non regolare)

- supponiamo per assurdo che L sia regolare
- il linguaggio L’ = $\{a^n b^m : n,m > 0\}$ è regolare, infatti L’ = aa*bb*
- allora, per le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, dovrebbe essere che L $\cap$ L’ è un linguaggio regolare; tuttavia risulta L $\cap$ L’= $\{a^n b^n : n>0\}$, il quale sappiamo essere un linguaggio non regolare
- da ciò l’assurdo