Trasparenze del corso di

Informatica Teorica

Parte Seconda

Linguaggi e Grammatiche

1

corrispondenza tra linguaggi e problemi

Linguaggi e informatica

- ubiquitari nelle applicazioni
  - compilatori ed interpreti
  - protocolli
  - sequenze di operazioni
  - interfacce
- paradigmatici nella teoria
  - molti importanti problemi teorici sono riconducibili a quello dell'appartenenza di una stringa ad un linguaggio

2

Tre approcci diversi

tra loro complementari

non molto utile all'atto pratico

- approccio insiemistico — come un frasario
  - utile per determinare le proprietà elementari dei linguaggi
- approccio generativo
  - grammatiche formali — regole per generare le stringhe
- approccio riconoscitivo
  - automi riconoscitori — meccanismi che riconoscono le stringhe di un linguaggio

3

Alfabeto

- un *alfabeto* è un insieme finito non vuoto di simboli (caratteri)
- esempi:

  {'M', 'C', 'L', 'X', 'I', 'V'}

  {'0', '1'}

  {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9'}

  {'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h', 'i', 'l', 'm', 'n', 'o', 'p', 'q', 'r', 's', 't', 'u', 'v', 'z'}

4

Concatenazione

- dato un alfabeto Σ, definiamo l'operazione binaria *concatenazione* (denotata con "∘")

  $\mathtt{a} \circ \mathtt{b} = \mathtt{ab}$ con $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$

- indichiamo con $\mathtt{a}^n$ la concatenazione di $\mathtt{a}$ con se stessa n volte

  esempio: $\mathtt{a}^4 = \mathtt{a} \circ \mathtt{a} \circ \mathtt{a} \circ \mathtt{a} = \mathtt{aaaa}$

- l'operazione "∘" è associativa ma non commutativa
- dati Σ e "∘" definiamo Σ^+ come l'insieme delle stringhe (parole) di lunghezza finita
- se a Σ^+ aggiungiamo la stringa vuota ε = "" otteniamo Σ^*

5

Linguaggio

- un *linguaggio* è un sottoinsieme di Σ^*
- Σ^* è detto linguaggio universale
- il linguaggio vuoto Λ non contiene stringhe (nota che Λ coincide con l'insieme vuoto ∅)
- $\Lambda \neq \{\varepsilon\}$

epsilon è una stringa! (anche se vuota)

6

Operazioni sui linguaggi

L_1 e L_2 linguaggi

- *unione*

  $L_1 \cup L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\}$

  $L_1 \cup \Lambda = L_1$

tutte le stringhe di L1 + le stringhe di L2

- *intersezione*

  $L_1 \cap L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$

  $L_1 \cap \Lambda = \Lambda$

tutte le stringhe che appartengono sia a L1 che a L2

- *complementazione*

  $\underline{L_1} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L_1\}$

tutte le stringhe che non appartengono a L1

7

Operazioni sui linguaggi

L_1 e L_2 linguaggi

- *concatenazione* o *prodotto*

  $L_1 \circ L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid$
  $\exists x_1 \in L_1 \wedge \exists x_2 \in L_2$ tali che $x = x_1 \circ x_2\}$

  $L \circ \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \circ L = L$

  esempio:

  $L_1 = \{\mathbf{a}^n \mid n \geq 1\}$; $L_2 = \{\mathbf{b}^m \mid m \geq 1\}$; $L_1 \circ L_2 = \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^m \mid n,m \geq 1\}$

L1={a,b}, L2={b,c}
L1°L2={ac,ad,bc,bd,a,b}

- *potenza* L^h di un linguaggio L

  $L^0 = \{\varepsilon\}$

  $L^h = L \circ L^{h-1}$, per $h \geq 1$

L={a,b}, L^1=L°L^(1-1)
=L°L^0={a,b}

8

Operatore di Kleene

- *chiusura riflessiva e transitiva* di un linguaggio

$L^* = \bigcup_{h=0}^{\infty} L^h$

$\varepsilon \in L^*$ $\quad\quad$ $\Lambda^*=\{\varepsilon\}$

esempio: $L=\{\mathbf{aa}\}$ $\quad\quad$ $L^*=\{\mathbf{a}^{2n} | n\geq 0\}$

- *chiusura transitiva* (non riflessiva) di un linguaggio

$L^+ = \bigcup_{h=1}^{\infty} L^h$

esempio: $L=\{\mathbf{aa}\}$ $\quad\quad$ $L^+=\{\mathbf{a}^{2n} | n\geq 1\}$

$L^*=L^+ \cup \{\varepsilon\}$

9

la chiusura riflessiva e transitiva include la stringa vuota e la chiusura transitiva

Σ = alfabeto

Espressioni regolari

- è uno strumento per descrivere linguaggi (vedremo poi quali)
- dato un alfabeto Σ, si definisce *espressione regolare* ogni stringa r

$r \in (\Sigma \cup \{+, *, (,), \circ, \varnothing\})^+$ chiusura transitiva

- tale che:
  1. $r=\varnothing$ oppure
  2. $r\in\Sigma$ oppure
  3. $r=(s+t)$ oppure $r=(s\circ t)$ oppure $r=s^*$, con s e t espressioni regolari

semantica

espressione	linguaggio
$\varnothing$	Λ
$\mathbf{a}\in\Sigma$	$\{\mathbf{a}\}$
$(s+t)$	$L(s)\cup L(t)$
$(s\circ t)$	$L(s)\circ L(t)$
s^*	$L(s)^*$

10

un'espressione regolare può essere l'unione, la concatenazione o la chiusura transitiva e riflessiva di due espressioni regolari

(ab+cd)*={epsilon,ab,cd,abcd,abab,cdcd,cdab.....}
in pratica tutte le combinazioni possibili

Espressioni regolari

esempio:
$(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$ rappresenta $L=(\{\mathtt{a}\}\cup\{\mathtt{b}\})^*$

esempio:
$(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{a}$ rappresenta $L=\{x|x\in\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \wedge$ "x termina con $\mathtt{a}$"$\}$

forma sintetica
$\mathtt{st}$ è forma sintetica di $\mathtt{s}\circ\mathtt{t}$

forma sintetica
espressioni sintetiche si ottengno definendo delle precedenze tra gli operatori: $^* > \circ > +$

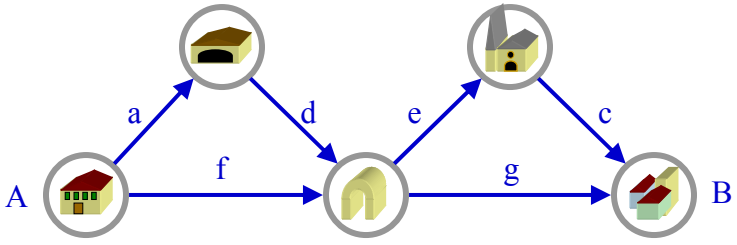
esempio:
$(\mathtt{a}+(\mathtt{b}(\mathtt{cd}))) = \mathtt{a}+\mathtt{bcd}$

i linguaggi rappresentabili con espressioni regolari sono una interessante sottoclasse

non si possono quindi rappresentare tutti i linguaggi

Esercizio

data una mappa stradale, scrivere un'espressione regolare che definisca tutti i percorsi possibili tra A e B

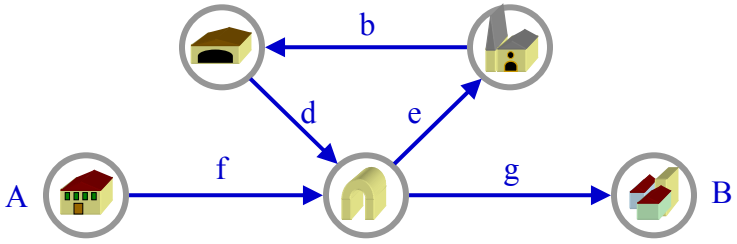


$$\mathtt{adec}+\mathtt{adg}+\mathtt{fec}+\mathtt{fg} =$$
$$= \mathtt{ad}(\mathtt{ec}+\mathtt{g}) + \mathtt{f}(\mathtt{ec}+\mathtt{g}) =$$
$$= (\mathtt{ad}+\mathtt{f})(\mathtt{ec}+\mathtt{g})$$

12

Esercizio

data una mappa stradale, scrivere un'espressione regolare che definisca tutti i percorsi possibili tra A e B



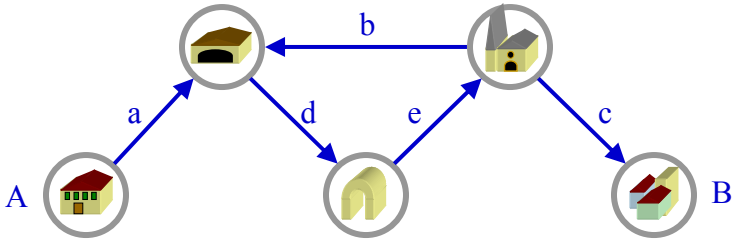
$f(ebd)^*g$

ebd lo faccio 0 o più volte

13

Esercizio

data una mappa stradale, scrivere un'espressione regolare che definisca tutti i percorsi possibili tra A e B

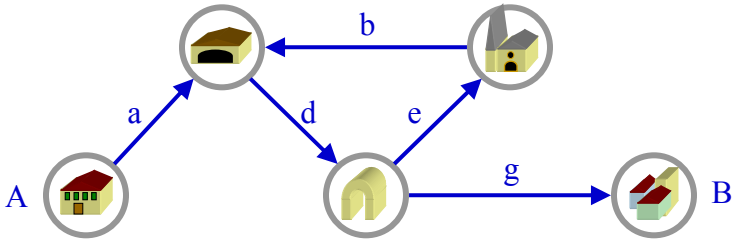


$a(deb)^*dec$ =ad(ebd)*ec

14

Esercizio

data una mappa stradale, scrivere un'espressione regolare che definisca tutti i percorsi possibili tra A e B

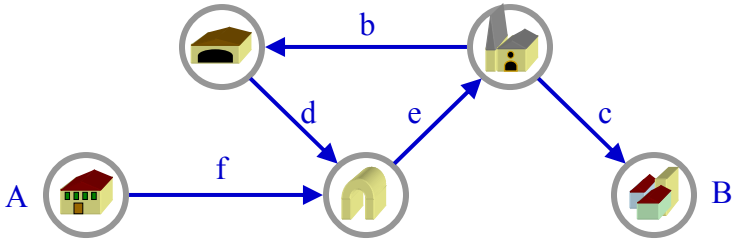


$a(deb)^*dg$ =ad(deb)*g

15

Esercizio

data una mappa stradale, scrivere un'espressione regolare che definisca tutti i percorsi possibili tra A e B

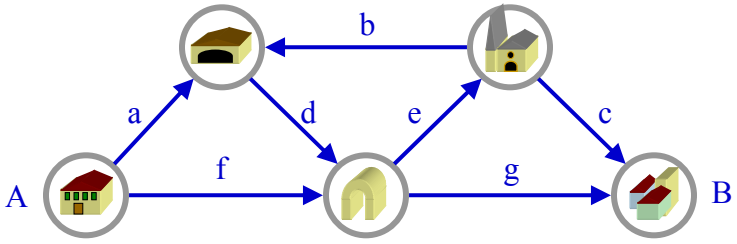


$f(edb)^*ec$ =fe(db)*c

16

Esercizio

data una mappa stradale, scrivere un'espressione regolare che definisca tutti i percorsi possibili tra A e B



$$\mathtt{f(ebd)^*g + f(ebd)^*ec + a(deb)^*dec + a(deb)^*dg} =$$
$$= \mathtt{f(ebd)^*(g+ec) + a(deb)^*d(g+ec)} =$$
$$= \mathtt{(f(ebd)^*+a(deb)^*d)\ (g+ec)} =$$
$$= \mathtt{(f+ad)(ebd)^*(g+ec)}$$

17

Cardinalità dei linguaggi

- dato un alfabeto Σ è possibile definire un ordinamento "lessicografico" per le stringhe di Σ^*
- ciò implica l'esistenza di un algoritmo di enumerazione per Σ^*
- quindi $|\Sigma^*| = \aleph_0$
- un linguaggio definito su Σ è un sottoinsieme di Σ^*
- l'insieme di tutti i linguaggi definiti su Σ è equinumeroso a $P(\Sigma^*)$ e quindi ha cardinalità $2^{\aleph_0}$
- ne segue che l'insieme di tutti i linguaggi definiti su Σ non è numerabile

18

Cardinalità dei programmi

l'insieme dei programmi scritti in Java (per esempio) ha cardinalità $\aleph_0$, infatti posso facilmente enumerarli

problema:

dato un qualunque $L \subseteq \Sigma^*$ esiste sempre un programma scritto in Java che, data una stringa x di Σ^*, decida se x appartiene ad L?

soluzione:

semplici considerazioni sulla cardinalità evidenziano una risposta negativa

ci sono più problemi che soluzioni

ci sono più problemi che programmi che li sappiano risolvere

19

Le grammatiche formali

- approccio generativo alla descrizione dei linguaggi
- metodo di costruzione delle stringhe basato sulla riscrittura

1940 Post e Markof, riscrittura e derivazione di stringhe

1950 Chomsky, classificazione delle grammatiche nell'ambito degli studi sul linguaggio naturale

1960 Backus Naur Form per descrivere Algol

20

Algol è un linguaggio di programmazione

Grammatiche formali

- grammatiche di Chomsky
- ε-produzioni
- riconoscimento di linguaggi

21

Grammatiche di Chomsky

una *grammatica* è una quadrupla

$$G=<V_T, V_N, P, S>$$

- $V_T \subseteq \Sigma$ è l'alfabeto (finito) di *simboli terminali*
- V_N è un insieme (finito) di *simboli non terminali*, o *categorie sintattiche*, tale che $V_N \cap \Sigma = \varnothing$
- P, detto insieme delle *produzioni*, è una relazione binaria finita su

$$(V_T \cup V_N)^* \circ V_N \circ (V_T \cup V_N)^* \times (V_T \cup V_N)^*$$

forma sintetica

$<\alpha,\beta> \in P$ si indica generalmente con $\alpha \rightarrow \beta$

- $S \in V_N$ è *l'assioma*

Vt = caratteri delle stringhe

Vn = verbi, soggetti etc.

deve contenere almeno un non terminale in una posizione qualsiasi

le P sono regole di riscrittura. si passa da a->b

22

Esempio

una grammatica definisce implicitamente tutte le stringhe di terminali generabili a partire dall'assioma tramite una sequenza di riscritture

esempio:

G=<{a, b, c}, {S, B, C}, P, S>, con P composto da:

❶ $S \to aS$ ❷ $S \to B$ ❸ $B \to bB$

❹ $B \to bC$ ❺ $C \to cC$ ❻ $C \to c$

S->aS|B
B->bB|bc
C->cC|c

genera $L(G) = \{a^n b^m c^h \mid n \geq 0, m, h \geq 1\}$

forma sintetica

$\alpha \to \beta_1 \quad \alpha \to \beta_2 \quad \ldots \quad \alpha \to \beta_n$

viene anche indicato con

$\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$

23

Linguaggio generato

forma sintetica

$V_T \cup V_N$ viene talvolta indicato con V

- *derivazione diretta*: relazione su

$$(V^* \circ V_N \circ V^*) \times V^*$$

$<\varphi,\psi>$ appartiene alla relazione (si scrive $\varphi \Rightarrow \psi$) se $\exists \alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*$ ed $\exists \beta,\gamma,\delta \in V^*$ t.c. $\varphi=\gamma\alpha\delta$ $\psi=\gamma\beta\delta$ e $\alpha \to \beta \in P$

φ e ψ sono dette *forme di frase*

- *derivazione*: chiusura riflessiva e transitiva della derivazione diretta, si rappresenta con $\Rightarrow^*$
- il *linguaggio generato* da G è $L(G) = \{x \mid x \in V_T^* \wedge S \Rightarrow^* x\}$
- due *grammatiche* G_1 e G_2 sono *equivalenti* se $L(G_1)=L(G_2)$

forma sintetica

talvolta $\Rightarrow$ al posto di $\Rightarrow^*$

24

S=>aS=>aB=>abC=>abc
Il passaggio da una all'altra è una forma di frase

S=>*abc è una derivazione (ci si arriva dopo tutte le forme di frase)

Grammatiche formali

esempio: generazione di $\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$

grammatica G=<{a, b, c},{S,B,C,F,G},P,S>

con P composto da

❶ S → aSBC ❷ CB → BC

❸ SB → bF ❹ FB → bF

❺ FC → cG ❻ GC → cG

❼ G → ε

per generare aabbcc

S ⇒❶ aSBC ⇒❶ aaSBCBC ⇒❷ aaSBBCC

⇒❸ aabFBCC ⇒❹ aabbFCC ⇒❺ aabbcGC

⇒❻ aabbccG ⇒❼ aabbcc

si può arrivare solo ad aabbcc. Le grammatiche sono "insidiose" perchè ci sono delle cose che non posso fare

25

Grammatiche formali

osservazione: non è detto che una sequenza di derivazioni porti ad una stringa del linguaggio

esempio:

la grammatica G=<{a, b, c}, {S, A}, P, S> con

S → aSc | A

A → bAc | ε

genera $\{a^n b^m c^{n+m} | n,m \geq 0\}$

il numero delle a + il numero delle b da il numero di c

esempio:

la grammatica G=<{a, b, c}, {S, A}, P, S> con

S → Ab

A → Sa

genera Λ

genera un linguaggio vuoto

26

Grammatiche di Chomsky

- di tipo 0, non limitate
- di tipo 1, context sensitive, contestuali
- di tipo 2, context free (CF), non contestuali
- di tipo 3, lineari destre (RL), regolari

più vincoli ci sono nelle produzioni, più semplici verranno le grammatiche

27

Grammatiche di Chomsky di tipo 0, non limitate

- sono le meno restrittive
- produzioni del tipo

$$\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*,\ \beta \in V^*$$

ammettono anche derivazioni che accorciano stringhe

linguaggi di tipo 0

esempio:

il linguaggio $\{a^n b^n | n \geq 1\}$ è di tipo 0 in quanto generato da

$S \rightarrow aAB$ $\quad$ $B \rightarrow b$

$aA \rightarrow aaAb$ $\quad$ $aAb \rightarrow ab$

$aAA \rightarrow aA$

quest'ultima non si può mai usare (non ci sono mai due A di seguito)

28

Grammatiche di Chomsky di tipo 1, context sensitive, contestuali

- produzioni che non riducano la lunghezza delle forme di frase

$$\alpha \rightarrow \beta,\ |\alpha| \leq |\beta|,\ \alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*,\ \beta \in V^*$$

linguaggi di tipo 1

esempio:

il linguaggio $\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$ è di tipo 0 in quanto generato da

S → aSBC CB → BC
SB → bF FB → bF
FC → cG GC → cG
cG → c

ma è anche di tipo 1, infatti è generato anche da

S → aSBc | aBc
cB → Bc
bB → bb
aB → ab

può essere di 2 tipi a seconda della grammatica che lo genera

29

è contestuale perchè posso sostituire solo a patto di stare in un certo contesto (con una a prima ad esempio)

Generazione di $a^n b^n c^n$

(1) S → aSBc | aBc (2) cB → Bc
(3) bB → bb (4) aB → ab

S ⇒ aSBc
⇒ aaSBcBc
⇒ aaaSBcBcBc
⇒ aaaaBcBcBcBc
⇒ aaaaBcBcBBcc
⇒ aaaaBcBBcBcc
⇒ aaaaBcBBBccc
⇒ aaaaBBcBBccc
⇒ aaaaBBBcBccc
⇒ aaaaBBBBcBcc
⇒ aaaaBBBBBccc
⇒ aaaaBBBBBccc
⇒ aaaaBBBBbBcc
⇒ aaaaBBBbbBcc
⇒ aaaaBBbbbBcc
⇒ aaaaBbbbbBcc
⇒ aaaabbbbbBcc
⇒ aaaabbbbbbcc

30

Grammatiche di Chomsky di tipo 2, context free (CF), non contestuali

- produzioni del tipo

$$A \rightarrow \gamma,\ A \in V_N,\ \gamma \in V^+$$

linguaggi di tipo 2

esempio:

il linguaggio $\{a^n b^n | n \geq 1\}$ è di tipo 0 in quanto generato da

S → aAb

aA → aaAb

A → ε

ma è anche di tipo 2, infatti è generato anche da

S → aSb | ab

31

Esempi di linguaggi di tipo 2

linguaggio delle espressioni aritmetiche con la variabile i (come per esempio "i*i+(i*i+(i))*i*i", oppure "((i+i)*i)").
L'assioma è E.

E → E+T | T

T → T*F | F

F → i | (E)

grammatica delle parentesi ben bilanciate (esempio "((((()))))()")

S → () | SS | (S)

da quale sequenza di produzioni è generata "()((()()))" ?

grammatica delle stringhe palindrome (esempio "elle", "ereggere")

32

Grammatiche di Chomsky di tipo 3, lineari destre (RL), regolari

- produzioni del tipo

$$A \rightarrow \delta,\ A \in V_N,\ \delta \in (V_T \circ V_N) \cup V_T$$

- linguaggi di tipo 3

esempio:

il linguaggio $\{a^n b | n \geq 0\}$ è di tipo 3 in quanto generato da

$S \rightarrow aS$

$S \rightarrow b$

si possono anche definire grammatiche lineari sinistre (LL) con

$$A \rightarrow \delta,\ A \in V_N,\ \delta \in (V_N \circ V_T) \cup V_T$$

esempio: il linguaggio $\{a^n b | n \geq 0\}$ è anche generato da

$S \rightarrow Tb \mid b$

$T \rightarrow a \mid Ta$

teorema: i linguaggi generati da grammatiche LL e RL coincidono

33

salendo di tipo si aggiungono vincoli per generare le grammatiche. Più vincoli esistono più è facile riconoscere un linguaggio.

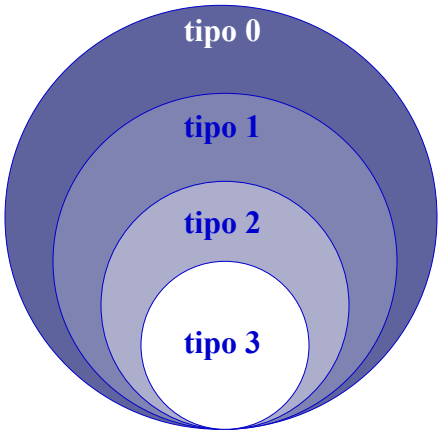
Grammatiche di Chomsky

un linguaggio è *strettamente di tipo n* se esiste una grammatica di tipo n che lo genera e non esiste una grammatica di tipo m>n che lo genera

esempio: il linguaggio $\{a^n b^n | n \geq 1\}$ è generato da una grammatica di tipo 2 e non è generato da nessuna grammatica di tipo 3

34

Grammatiche di Chomsky



contenimento tra i linguaggi

35

Grammatiche di Chomsky

tipo	produzioni	vincoli
tipo 0 non limitate	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*$, $\beta \in V^*$
tipo 1 contestuali	$\alpha \rightarrow \beta$	$\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$ $\alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*$, $\beta \in V^*$
tipo 2 non contestuali	$A \rightarrow \gamma$	$A \in V_N$, $\gamma \in V^+$
tipo 3 regolari	$A \rightarrow \delta$	$A \in V_N$, $\delta \in (V_T \circ V_N) \cup V_T$

quadro riassuntivo della classificazione delle grammatiche secondo Chomsky

36

ε-produzioni

- con grammatiche di tipo 1, 2, 3 non è possibile generare ε
  - per generare ε occorre una produzione $\alpha \rightarrow \varepsilon$ che viene detta ε-produzione
  - per Chomsky tutti i linguaggi che contengono ε-produzioni sono linguaggi di tipo 0
- qual'è l'impatto sui corrispondenti linguaggi delle ε-produzioni nelle grammatiche?

37

ε-produzioni in posizione arbitraria

esempio:

G è una grammatica di tipo 0 con una sola produzione $\alpha \rightarrow \beta$ con $|\alpha| \geq |\beta|$; supponiamo sia $AB \rightarrow C$, si può costruire una G′ di tipo 1 e con ε-produzioni equivalente a G

$$\begin{cases} G' = \langle V_T, V_N \cup \{H\}, P', S \rangle \\ P' = P - \{AB \rightarrow C\} \cup \{AB \rightarrow CH,\ H \rightarrow \varepsilon\} \end{cases}$$

teorema:

data una grammatica di tipo 0 esiste una grammatica di tipo 1 con ε-produzioni equivalente

dimostrazione:

sia $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ una grammatica di tipo 0, ricaviamo una grammatica equivalente

$G' = \langle V_T, V_N', P', S \rangle$ con $V_N' = V_N \cup \{X\}$, $X \notin V_N$

a P aggiungiamo $X \rightarrow \varepsilon$ e modifichiamo tutte le $\alpha \rightarrow \beta$ con $|\alpha| \geq |\beta|$ in $\alpha \rightarrow \beta X \ldots X$ con X ripetuta $|\alpha| - |\beta|$ volte

38

ε-produzioni

- teorema
  ad ogni grammatica G=<V_T,V_N,P,S> di tipo 1, 2 o 3 corrisponde una grammatica G'=<V_T,V_N∪{S'},P',S'> tale che
  - L(G') = L(G) ∪{ε}
  - G' è dello stesso tipo (1, 2, o 3) di G a meno di ε-produzioni sull'assioma
- dimostrazione
  - sia G=<V_T,V_N,P,S> la grammatica che genera L
  - definiamo G'=<V_T,V_N∪{S'},P',S'> che genera L'=L∪{ε}
  - se G è di tipo 1 o 2, P' = P ∪ {S'→ ε, S'→S}
  - se G è di tipo 3, P' = P ∪ {S'→ ε} ∪ {S'→α| per ogni S→α}
- è facile dimostrare che, se l'assioma non compare mai a destra di qualche produzione, vale anche la corrispondenza opposta

39

ε-produzioni e grammatiche regolari

le grammatiche di tipo 3 (right linear, RL, lineari destre, regolari) non modificano la loro natura se aggiungiamo ε-produzioni

esempio: la grammatica RL

S → bX | aB
B → cX | dX
X → ε

si può modificare in

S → b | aB
B → c | d

sostituisco epsilon a X

40

ε-produzioni e grammatiche regolari

teorema:

se L è il linguaggio definito da una grammatica regolare a cui sono state aggiunte ε-produzioni, il linguaggio L'= L-{ε} è regolare

dimostrazione:

aggiungiamo una ε-produzione E→ ε ad una grammatica regolare

- supponiamo, per semplicità, che l'assioma S non appaia mai a destra di una produzione, se E=S il teorema è dimostrato
- supponiamo che E compaia a destra delle k≥0 produzioni $A_i \rightarrow \alpha_i$
- eliminiamo la produzione E → ε e aggiungiamo k produzioni $A_i \rightarrow \alpha_i$' dove α_i' è ricavato da α_i sostituendo ε alle E

41

ε-produzioni e grammatiche CF

le grammatiche di tipo 2 (context free, CF, non contestuali) non modificano la loro natura se aggiungiamo ε-produzioni

esempio: nella grammatica CF

S → AB | aB | B
A → ab | aB
B → cX | X
X → ε

la ε-produzione può "migrare" verso l'assioma

S → AB | aB | B
A → ab | aB
B → c | ε

nuovamente

S → AB | A | aB | a | B | ε
A → ab | aB | a
B → c

42

ε-produzioni e grammatiche CF

teorema:

se L è il linguaggio definito da una grammatica CF a cui sono state aggiunte ε-produzioni, il linguaggio L'= L-{ε} è CF

dimostrazione:

aggiungiamo una ε-produzione E→ ε ad una grammatica CF

- supponiamo, per semplicità, che l'assioma non appaia mai a destra di una produzione, se E è l'assioma il teorema è dimostrato
- supponiamo che E compaia a destra delle k≥0 produzioni $A_i \rightarrow \alpha_i$
- eliminiamo la produzione E → ε e aggiungiamo k produzioni $A_i \rightarrow \alpha_i$' dove α_i' è ricavato da α_i sostituendo ε alle E
- se non ci sono più ε-produzioni o se ci sono solo sull'assioma il procedimento termina, altrimenti il procedimento si ripete per tutte le nuove ε-produzioni
- la terminazione è garantita dalla finitezza di V_N

43

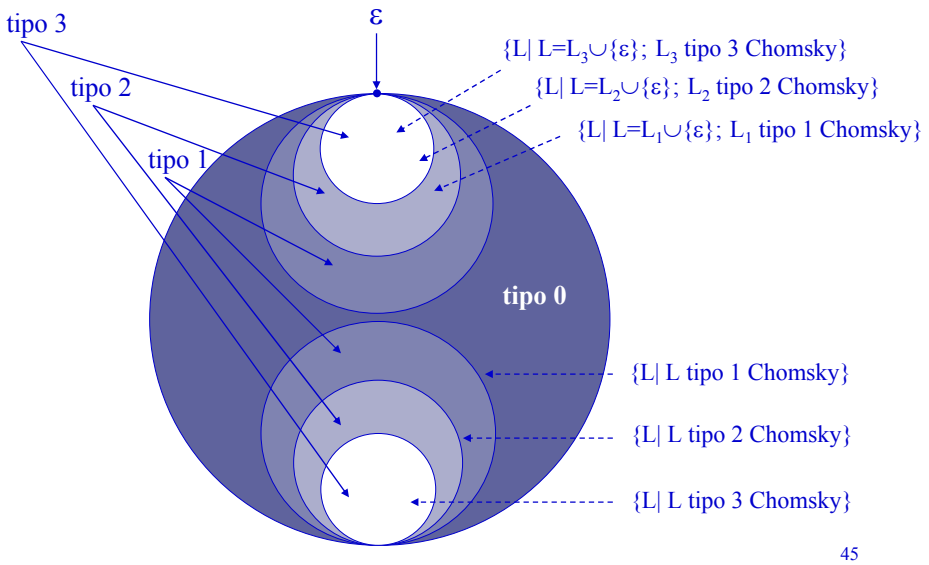
ε-produzioni: ricapitolazione

coerentemente a quanto stabilito dai teoremi precedenti nel seguito ammetteremo, nelle diverse grammatiche, le seguenti ε-produzioni:

tipo	ε-produzioni ammesse
0	tutte (per definizione)
1	solo sull'assioma quando quest'ultimo non compare mai a destra di una produzione
2	tutte
3	tutte

44

Grammatiche con ε-produzioni



45

Esempi di grammatiche

- il linguaggio $\{w \circ w |\ w \in (a+b)^*\}$
- è generato dalla grammatica contestuale

1	2	3	4
$S \rightarrow T \mid \varepsilon$ $T \rightarrow aAT \mid bBT \mid A_0a \mid B_0b$	$Aa \rightarrow aA$ $Ab \rightarrow bA$ $Ba \rightarrow aB$ $Bb \rightarrow bB$	$AA_0 \rightarrow A_0a$ $BA_0 \rightarrow A_0b$ $AB_0 \rightarrow B_0a$ $BB_0 \rightarrow B_0b$	$A_0 \rightarrow a$ $B_0 \rightarrow b$

le 1 generano insieme caratteri della prima e della seconda stringa; A_0 (B_0) è l'ultimo carattere della prima stringa

le 2 e le 3 separano la prima stringa dalla seconda; le 4 chiudono la generazione, se sono applicate troppo presto il processo diverge

46

Esempi di grammatiche

- il linguaggio $\{(x\#)^* \mid x = \text{permutazione di } (a,b,c)\}$ (che contiene per esempio le stringhe ε, abc#, acb#, bac#cab# , ecc)

  è generato dalla grammatica contestuale:

  $S \rightarrow S' \mid \varepsilon$ $\quad AB \rightarrow BA$ $\quad A \rightarrow a$
  $S' \rightarrow ABC\#$ $\quad AC \rightarrow CA$ $\quad B \rightarrow b$
  $S' \rightarrow ABC\#S'$ $\quad BC \rightarrow CB$ $\quad C \rightarrow c$

  ma è generato anche dalla grammatica CF:

  $S \rightarrow E\#S \mid \varepsilon \qquad E \rightarrow abc \mid acb \mid cba \mid cab \mid bac \mid bca$

  ed anche dalla grammatica regolare:

  $S \rightarrow aX \mid bY \mid cZ \mid \varepsilon \qquad R \rightarrow \#S$

  $X \rightarrow bX' \mid cX''$ $\quad Y \rightarrow aY' \mid cY''$ $\quad Z \rightarrow aZ' \mid bZ''$
  $X' \rightarrow cR$ $\quad Y' \rightarrow cR$ $\quad Z' \rightarrow bR$
  $X'' \rightarrow bR$ $\quad Y'' \rightarrow aR$ $\quad Z'' \rightarrow aR$

47

Linguaggi lineari

- esistono classificazioni dei linguaggi alternative a quella di Chomsky
- una grammatica è *lineare* quando la parte sinistra di ogni produzione è costituita da *esattamente un* non terminale e la parte destra contiene *al più un* non terminale
- le grammatiche di tipo 3 sono lineari
- esistono grammatiche CF lineari

esempio:

$S \rightarrow aSb$

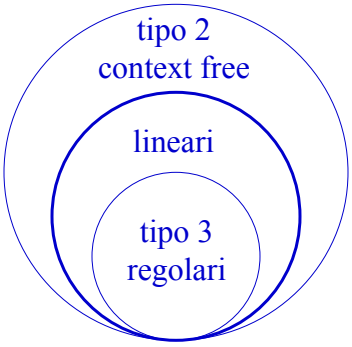
$S \rightarrow c$

che genera $\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$

- i linguaggi strettamente lineari sono un sottoinsieme di quelli strettamente CF e un soprainsieme di quelli regolari

48

Grammatiche lineari e grammatiche di Chomsky



contenimento tra i linguaggi

49

Forma normale di Backus

- la BNF è una notazione CF con alcuni accorgimenti sintattici che ne aumentano la leggibilità

esempio

```
<sequenza istruzioni>::= <istruzione>;
      {<istruzione>;}
```

può essere riscritto:

Q → I ; | I ; Q

```
<istruzione if> ::= if ( <condizione> )
      <istruzione> [else <istruzione>]
```

può essere riscritto:

F → **if (** C **)** I **else** I | **if (** C **)** I

50

Riconoscimento dei linguaggi

problema:

stabilire se una stringa appartiene ad un dato linguaggio

- esistono linguaggi a cui non corrisponde alcun algoritmo di decisione
- i linguaggi di tipo 3 sono riconosciuti da dispositivi con memoria costante in tempo lineare (automi a stati finiti)
- i linguaggi strettamente di tipo 2 sono riconosciuti da dispositivi non deterministici con pila in tempo lineare (automi a pila non deterministici)

51

Riconoscimento dei linguaggi

- i linguaggi strettamente di tipo 1 sono riconosciuti da dispositivi non deterministici con memoria che cresce linearmente con la lunghezza della stringa da esaminare (automi non deterministici “linear bounded”)
- i linguaggi strettamente di tipo 0 sono riconosciuti da macchine di Turing con memoria e tempo illimitati
- è possibile che non esista un algoritmo di decisione ma un processo semidecisionale, in cui, se la stringa non fa parte del linguaggio non è detto che la computazione termini

52