

# Un modelo estocástico para analizar los efectos de la variación de la temperatura sobre la captura pesquera a lo largo de la costa del Pacífico Colombiano

---

Erika Johanna Martínez Salinas  
ESTUDIANTE

Viswanathan Arunachalam PhD  
DIRECTOR

Marzo 13, 2019

## 1. Introducción

La actividad pesquera en la costa Pacífica Colombiana se desarrolla con una alta diversidad de métodos y artes de pesca. Es una de las actividades agropecuarias que más aporta a la seguridad alimentaria, pues a pesar de las complejidades que pueda llegar a tener, de índole ambiental o pesquero, en las riberas de los ríos y en los litorales colombianos, existe una amplia población cuyo sustento diario depende de la pesca a pequeña escala o artesanal [16]. Sin embargo, según la publicación del 2007 del “IV Informe de Evaluación del Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC)”, los pescadores a pequeña escala están particularmente expuestos a las repercusiones directas del cambio climático [6]. Por lo tanto, aunque la importancia de la pesca suele ser infravalorada, las consecuencias del calentamiento global para este sector se han convertido en asunto de interés mundial.

Según el panel intergubernamental de la ONU, Colombia junto con países como Ecuador, Bolivia, Panamá, entre otros, conforman el grupo de países más vulnerables del mundo, en relación con sus recursos pesqueros, debido al calentamiento global, éste como consecuencia

del cambio climático, el cuál, da como resultado el aumento en la temperatura superficial del mar, produciendo cambios en las condiciones fisicoquímicas de esta región oceánica y modificando la capacidad de extracción de los recursos pesqueros.

La tasa de crecimiento natural de un stock o biomasa<sup>\*</sup> es un proceso estocástico, este hecho ha sido evidenciado por biólogos, ecologistas y economistas, en particular, el crecimiento de las especies de peces es un proceso estocástico, puesto que la temperatura del mar afecta la tasa de producción biológica [11]. Amplia literatura se centra en el desarrollo de modelos estocásticos de crecimiento dinámico de recursos y caracterización de la distribución de probabilidad para las poblaciones que permanecen sin explotar más allá de una regla preestablecida [20]. Muchos de estos trabajos utilizan procesos de Markov en tiempo continuo o procesos de Itô. Sin embargo, presentan problemas a la hora de aplicar reglas de cálculo ordinarias puesto que no se trabaja con derivadas en la forma usual. Dichos modelos, requieren cálculos estocásticos y el Lema de Itô debe ampliarse a estos casos, autores como Merton en [13] y Miranda en [14], usan un proceso de Itô para describir la dinámica de la fuerza de trabajo en un modelo estocástico de crecimiento económico. Además, [10] usa estos modelos para relacionar las temperaturas del aire y del agua en una pequeña corriente en New Brunswick [20].

Los procesos ecológicos están grandemente influenciados por las fluctuaciones climáticas. Los factores climáticos afectan los elementos bióticos y abióticos que impactan la abundancia y distribución de especies de peces. Para analizar estas relaciones es necesario hacer un estudio detallado de las variaciones de la temperatura en los últimos años y de la dinámica de las especies. Con respecto a la temperatura autores como, [1] exploran los cambios de la temperatura por medio de estimación bayesiana para realizar reconstrucciones separadas de las anomalías de la temperatura terrestre y marina. Por otro lado, en Dornier y Queruel [7] modelan las fluctuaciones de la temperatura como una regresión entre las temperaturas desestacionalizadas diarias. El modelo propuesto separa la evolución de la temperatura promedio diaria en dos partes, una es la tendencia estacional y otra una caminata aleatoria. La estacionalidad está formulada como una función sinusoidal tanto con el cambio estacional como con el calentamiento global. En Brody [2], la dinámica de la temperatura se modela por medio de un proceso estocástico conocido como Movimiento Browniano Fraccionario donde se sugiere que el cambio en la temperatura “retrocede.<sup>a</sup> la temperatura desestacionalizada del día anterior.

La relación entre los factores climáticos y la composición de las capturas de las especies explotadas en el Pacífico colombiano es muy compleja, a pesar que Colombia presenta una alta diversidad pesquera, históricamente la regulación de las actividades pesqueras se ha visto afectada porque el gobierno no ha tenido una institución pesquera permanente. Desde 1990 la autoridad nacional de pesca ha cambiado entre el INPA, INCODER y AUNAP perdiéndose parte de la memoria institucional, lo que ha sido un detrimento de la información para realizar diferentes estudios. Aunque las estadísticas pesqueras son incompletas, se han reconstruido las capturas para el período 1950 – 2010, considerando las bases de datos de la FAO [12] y [22].

El propósito principal de este trabajo es estudiar y analizar los efectos del cambio climático

---

<sup>\*</sup>Cantidad de materia viva producida por plantas, animales, hongos o bacterias, en un área determinada.

sobre una de las especies de mayor aprovechamiento pesquero en el Pacífico colombiano, el “atún barrilete” (*Katsuwonus Pelamis*), la cual es aprovechada por pescadores artesanales e industriales. Para ello, se propone un modelo estocástico que incluye el modelamiento de la temperatura por medio de un modelo de Ornstein-Uhlenbeck impulsado por un Movimiento Browniano. El modelo propuesto, tiene en cuenta una velocidad dependiente del tiempo con reversión a la media, como se muestra en [8]. Además, se modelará la dinámica de los peces que habitan el océano y la dinámica de la captura utilizando una ecuación diferencial estocástica.

Nuestro trabajo utiliza los datos tomados por el grupo de Investigación en recursos hidrobiológicos de la Universidad Nacional de Colombia, sede Palmira y la SEPEC\*\*, datos de temperatura, capturas y desembarques en los puertos de la Costa Pacífica Colombiana.

## 2. Marco Teórico

Para el desarrollo del modelo estocástico y de acuerdo a la revisión de la literatura, a continuación se mostrarán algunas de las principales definiciones y teoremas más importantes para la construcción del mismo.

El modelo que se va a considerar corresponde a una ecuación diferencial estocástica, razón por la cual es necesario definir la integral de Itô y la ecuación diferencial estocástica con respecto al movimiento browniano.

Una de las principales razones para definir un proceso de Itô se debe a que, con dicha definición, se llegará a la formula de Itô, este resultado demostrará la existencia de la solución del modelo que se propone en este trabajo.

**Definición 2.1.** [17, p.482]. Un proceso estocástico  $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$  sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , es un **Movimiento Browniano** si se cumple lo siguiente:

1.  $B_0 = 0$ .
2.  $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes y estacionarios.
3. Para  $s < t$ ,

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s),$$

esto significa que cada incremento  $\{B_t - B_s\}$  está normalmente distribuido con media 0 y varianza igual a la longitud del incremento que separa a  $s$  y  $t$ .

4. Con probabilidad 1, las caminatas aleatorias son continuas.

**Proposición 2.1.** [5, p.475]. Sea  $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  entonces satisface lo siguiente:

1.  $E(B_t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .
2.  $E(B_t^2) = t$  para todo  $t \geq 0$ .
3. La función de covarianza de  $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ , está dada por:

$$C(s, t) = \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t).$$

---

\*\*Servicio Estadístico Pesquero Colombiano

**Nota 2.1.** Sea el proceso estocástico  $\{B(t), t \geq 0\} = \{(B_1(t), \dots, B_m(t)), t \geq 0\}$  tal que  $B_i = \{B_i(t), t \geq 0\}$  es un movimiento browniano, los  $B_i$ , son independientes para todo  $i = 1, \dots, m$ , entonces se dice que  $\{B(t), t \geq 0\}$  es un **movimiento browniano m-dimensional**.

**Definición 2.2.** Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que,

- i) Un movimiento browniano  $\{B_t, t \geq 0\}$ , está definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .
- ii)  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  satisface que,  $\mathfrak{F}_t = \sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq t\})$  para todo  $t \geq 0$ .

La filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  se conoce como **filtración browniana**.

Para definir la Integral de Itô se debe definir el conjunto  $\mathcal{V}(S, T)$  el cual representa las funciones integrables con respecto a la integral de Itô en el intervalo  $[S, T]$ . A continuación se define formalmente.

**Definición 2.3.** ([15, p.25]) Sea  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ , una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $\Omega$ . Un proceso  $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  se llama  $\mathcal{N}_t$ -adaptado si para cada  $t \geq 0$ , la función,

$$\omega \rightarrow g(t, \omega),$$

es  $\mathcal{N}_t$ -medible.

**Definición 2.4.** ([15, p.25]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y sea la clase de las funciones  $f$  definidas por

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

se tiene que  $\{f(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico. Se dice que  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  con  $0 < S < T$ , si y sólo si,  $\{f(t)\}_{t \geq 0}$  cumple las siguientes condiciones:

- i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathfrak{F}$ -medible, con  $t \geq 0$  para todo  $\omega \in \Omega$ , donde  $\mathcal{B}([0, +\infty))$  denota la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $[0, \infty)$ .

- ii)  $f(t, \omega)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -adaptado.

$$\text{iii) } \mathbb{E} \left[ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] < \infty \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Para definir la **integral de Itô**, se deben precisar las siguientes definiciones:

**Definición 2.5.** ([15, p.26]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , sea  $\phi \in \mathcal{V}(S, T)$  y  $t_0, t_1, \dots$ , tal que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Se dice que  $\phi$  es una **función elemental**, si tiene la forma,

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j=0}^n e_j(\omega) \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad (2)$$

donde  $e_j$  son funciones  $(t, \omega) \rightarrow e_j(t, \omega)$  tales que,  $e_j$  es  $\mathfrak{F}_{t_j}$ -medible para todo  $j = 0, 1, 2, \dots$  con

$$\mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}) \\ 0 & \text{si } t \notin [t_j, t_{j+1}) \end{cases}.$$

**Definición 2.6.** ([15, p.26]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y sea  $\phi$  una función elemental, dada por (2). La **integral de Itô** de la función elemental  $\phi$ , dada por (2) en el intervalo  $[S, T]$  con  $0 < S < T$ , se define como:

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B(t_{j+1}) - B(t_j)](\omega), \text{ , para todo } \omega \in \Omega.$$

En el libro de Bernt Oksendal [15, p. 27], para definir la integral de Itô para cualquier  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  demuestran las siguientes proposiciones:

**Paso 1.** Sea  $g \in \mathcal{V}(S, T)$  acotada y  $g(\cdot, \omega)$  continua para todo  $\omega \in \Omega$ . Entonces existe una sucesión de funciones elementales  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}(S, T)$  tal que tal que para todo  $\omega \in \Omega$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (g(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Paso 2.** Sea  $h \in \mathcal{V}(S, T)$  acotada, entonces existe una sucesión de funciones acotadas  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}(S, T)$  y  $g(\cdot, \omega)$  que es continua para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\omega \in \Omega$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (h(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Paso 3.** Sea  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ . Entonces existe una sucesión  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}(S, T)$  tal que  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada para cada  $n$  y además,

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (f(t, \omega) - h_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Luego se tiene la siguiente definición:

**Definición 2.7.** ([15, p.29]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y sea  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ . Entonces la **integral de Itô** de la función  $f$  en el intervalo  $[S, T]$  con  $0 < S < T$  se define para cada  $\omega \in \Omega$  como,

$$\int_S^T f(t, \omega) dB(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB(t, \omega),$$

en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , donde  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones elementales tales que,

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para definir el **proceso de Itô**, primero vamos a definir la siguiente clase de funciones:

**Definición 2.8.** ([15, p.35]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad,  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\mathcal{H}_t$ -martingala,  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$  denota la clase de procesos  $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$  la cual satisface:

- i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathfrak{F}$ -medible.
- ii)  $f(t, \omega)$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado.
- iii)  $P \left[ \int_S^T f^2(s, \omega) ds < \infty \right] = 1.$

**Nota 2.2.** El conjunto  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$  se define como  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} := \cap_{T > 0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$  con  $0 < S < T$ .

Necesitamos definir un proceso de Itô para enunciar la fórmula de Itô. Veamos:

**Definición 2.9.** ([15, pág. 44]) Sea  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\mathcal{H}_t$ -martingala. Un **proceso de Itô** (o una **integral estocástica**) es un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  de la forma,

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB(s, \omega),$$

donde  $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ , así que

$$P \left[ \int_0^t v^2(s, \omega) ds < \infty, \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1,$$

además,  $u$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado y

$$P \left[ \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty, \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1.$$

**Nota 2.3.** ([15, pág. 44]) La notación integral de un proceso de Itô,

$$X(t) = X(0, \omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB(s, \omega),$$

se puede reescribir de forma corta así:

$$dX(t, \omega) = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dB(t, \omega).$$

**Definición 2.10.** [15, p.48] Veámos que ocurre para el caso  $m$ -dimensional, para ello, consideremos  $B(t, \omega) = (B_1(t, \omega), \dots, B_m(t, \omega))$  un movimiento browniano  $m$ -dimensional sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Si cada uno de los procesos  $u_i(t, \omega)$  con  $1 \leq i \leq n$ , y  $v_{ij}(t, \omega)$  con  $1 \leq j \leq m$ , saísfacen las condiciones dadas en la definición 4,9 entonces se define el  **$n$ -proceso de Itô** de la siguiente manera,

$$\begin{cases} dX_1(t) = u_1(t, \omega) dt + v_{11}(t, \omega) dB_1(t, \omega) + \dots + v_{1m}(t, \omega) dB_m(t, \omega) \\ \vdots \\ dX_n(t) = u_n(t, \omega) dt + v_{n1}(t, \omega) dB_1(t, \omega) + \dots + v_{nm}(t, \omega) dB_m(t, \omega) \end{cases}$$

En forma matricial simplificada,

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}(t, \omega) dt + \mathbf{v}(t, \omega) d\mathbf{B}(t),$$

donde,

$$\mathbf{u}(t, \omega) = \begin{pmatrix} u_1(t, \omega) \\ \vdots \\ u_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{11}(t, \omega) & \dots & v_{1m}(t, \omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1}(t, \omega) & \dots & v_{nm}(t, \omega) \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$d\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t, \omega) \\ \vdots \\ dB_m(t, \omega) \end{pmatrix},$$

Así,  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$  se llama **proceso  $n$ -dimensional de Itô**.

**Teorema 2.2.** [15, p.44] Sea  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso de Itô dado por

$$dX(t) = u(t) dt + v(t) dB(t), \quad (3)$$

para  $0 \leq t \leq T$ . Si  $g(t, x) \in \mathcal{C}^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ , es decir que  $g$  es dos veces continuamente diferenciable sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ , entonces el proceso estocástico dado por

$$Y(t) = g(t, X(t)),$$

existe y es de nuevo un proceso de Itô, además, está dado por,

$$dY(t, \omega) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot (dX(t))^2,$$

donde  $(dX(t))^2 = (dX(t)) \cdot (dX(t))$ , esto se calcula de acuerdo a la siguiente regla multiplicativa:  $dt \cdot dt = dt \cdot dB(t) = dB(t) \cdot dt = 0$  y  $dB(t) \cdot dB(t) = dt$ .

La expresión anterior se puede escribir como sigue, [15, p.46]:

$$\begin{aligned} g(t, X(t)) = & g(0, x(0)) + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial s}(s, X(s)) + u(s, \omega) \frac{\partial g}{\partial x}(s, X(s)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g^2(s, \omega) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X(s)) \right) ds + \int_0^t v(s, \omega) \frac{\partial g}{\partial x}(s, X(s)) dB(s) \end{aligned} \quad (4)$$

A continuación se muestra a versión multidimensional de la fórmula de Itô:

**Teorema 2.3 (La fórmula de Itô multidimensional).** ([15, pág. 48] Sea  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso de Itô  $n$ -dimensional, esto es:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}(t, \omega) dt + \mathbf{v}(t, \omega) d\mathbf{B}(t).$$

Sea  $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ ,  $g(t, x) \in \mathcal{C}^2([0, \infty))$ , además  $g(t, x)$  es una función de  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Entonces el proceso estocástico  $Y(t, \omega) = g(t, \mathbf{X}(t))$  es un proceso de Itô, donde,

$$dg(t, \mathbf{x}) = (g_t(t, \mathbf{X}(t)) + \mathbf{u}(t, \omega) g_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t)) + \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{g}^T(t, \omega) g_{\mathbf{x}^2}(t, \mathbf{X}(t)) \mathbf{g}(t, \omega)]) dt + \mathbf{g}(t, \omega) g_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t)) d\mathbf{B}(t) \quad (5)$$

donde,

$$g_t(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad g_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_p}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

$$g_{\mathbf{x}^2}(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j^2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_p}{\partial x_j^2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_p}{\partial x_j^2} \end{pmatrix}.$$

El modelo propuesto en la tesis será un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas cuya definición corresponde a:

**Definición 2.11.** ([3, p. 161]) Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , equipado con una filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , además,  $a(t, x), b(t, x)$  dos funciones reales  $\mathcal{B}([t_0, T]) \times \mathbb{R}$ -medibles para  $0 < t_0 < T$ . Sea  $u_0$  una variable aleatoria real,  $\mathfrak{S}_{u_0}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $u_0$  con  $\mathfrak{S}_{u_0}$  independiente de  $\mathfrak{F}_t$  para todo  $t \geq t_0$  y  $\mathfrak{S}_{u_0, t}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por la unión de los eventos de  $\mathfrak{S}_{u_0}$  y de  $\mathfrak{F}_t$ , para todo  $t \geq t_0$ . El proceso estocástico  $\{u(t)\}_{t \in [0, T]}$  es llamado una **solución** (si existe) de la **ecuación diferencial estocástica (EDE)**

$$du(t) = a(t, u(t)) dt + b(t, u(t)) dB(t), \text{ para } t \in [0, T],$$

con la condición inicial,

$$u(0) = u_0, \text{ casi siempre,}$$

si,

i)  $u(t)$  es  $\mathfrak{S}_{u_0, t}$ -medible,

ii)  $|a(t, u(t))|^{1/2}, b(t, u(t)) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R})$ ;



iii)  $u(t)$  es diferenciable y está dado por  $du(t) = a(t, u(t))dt + b(t, u(t))dB(t)$ , así,

$$u(t) = u(t_0) + \int_0^t a(s, u(s))ds + \int_0^t b(s, u(s))dB(s).$$

Las funciones  $a$  y  $b$  se llaman **coeficientes de la EDE**.

**Nota 2.4.** Análogamente el proceso estocástico  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \in [t_0, T]}$  con  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  con  $t \in [t_0, T]$ , es una **solución** (en caso de existir) del **sistema de EDE**

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))dt + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))d\mathbf{B}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ casi siempre,}$$

donde  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))$  y  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$  son como en la definición de proceso de Itô  $n$ -dimensional; si y sólo si,  $\mathbf{x}(t)$  es  $\mathfrak{F}_{\mathbf{x}_0, t}$ -medible,  $|u_i(t, \mathbf{x}(t))|^{1/2}, v_{ij}(t, \mathbf{x}(t)) \in \mathcal{C}^1([t_0, T] \times \mathbb{R})$  para todo  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  y

$$x_i(t) = x(t_0) + \int_0^t u_i(s, u(s))ds + \sum_{j=1}^m \left( \int_0^t v_{ij}(t, \omega) dB_j(s) \right), \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Debido a que se va a modelar la temperatura por medio de un proceso de Ornstein - Ullhnbeck, la siguiente nota es importante.

**Nota 2.5. (Proceso de Ornstein - Uhlenbeck)** El proceso de Ornstein - Uhlenbeck fue propuesto para modelar el movimiento de una partícula la cual chocaba con las paredes de una superficie de tal manera que la partícula se movía únicamente de derecha a izquierda. Una vez la partícula chocaba con una de las paredes, ésta continuaba moviéndose hacia el lado opuesto, sin embargo, por cada choque la partícula perdía velocidad. Este modelo fue propuesto por Ornstein y Uhlenbeck en 1930 y está determinado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = k(t)[X(t) - \mu(t)]dt + \sigma(t)dB(t), \quad (6)$$

donde  $X(t)$  denota la posición de la partícula,  $\mu(t)$  es la posición media,  $k(t)$  es la tasa que determina que tan rápido la partícula revierte a la posición media y  $\sigma(t)dB(t)$  modela la volatilidad que presenta el modelo ([18, p. 58]).

La parte determinista,  $dX(t) = k(t)[X(t) - \mu(t)]dt$ , de la ecuación diferencial estocástica (6) se interpreta de la siguiente manera: el cambio de la posición  $X(t)$  con respecto al tiempo está determinado por la distancia entre  $X(t)$  y  $\mu(t)$  ( $X(t) - \mu(t)$ ), además de estar determinado por  $k(t)$ , función correspondiente a la “fuerza con la cual la posición  $X(t)$  regresa a su media  $\mu(t)$ , es decir,  $k(t)$  responde la pregunta ¿qué tan rápido  $X(t)$  se “acerca.”  $\mu(t)$ ?. Además,  $k(t)$  es importante porque es la función que modela la velocidad que va perdiendo la partícula a medida que ésta va chocando con las paredes de la superficie.

Formalmente el proceso de Ornstein-Uhlenbeck se define como

**Definición 2.12.** [19, p.8] (**Proceso de Ornstein-Uhlenbeck**).

Sea  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , en el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  generada por  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ . El proceso estocástico que es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$du(t) = \kappa(t)[\theta(t) - u(t)]dt + \sigma(t)dB(t), \quad (7)$$

tal que  $\kappa(t)[\theta(t) - U(t)]$  y  $\sigma(t)$  satisfacen las condiciones de  $a(t, u(t))$  y  $b(t, u(t))$  de la definición 2.11, respectivamente; se dice que es un **proceso de Ornstein-Uhlenbeck (POU)**. Se tiene que  $\{u(t)\}_{t \geq 0}$  existe y es único ([21]).

$\kappa(t)$  se define como la **tendencia** o la **fuerza** del POU,  $\theta(t)$  como la **media** y  $\sigma(t)$  como la **volatilidad**.

### 3. Metodología

Antes de mostrar el modelo estocástico del presente trabajo, es importante analizar los datos con los que se cuenta en el estudio. Se toman los datos disponibles por el grupo de investigación en Recursos Hidrobiológicos de la Universidad Nacional de Colombia, sede Palmira, cuyos valores corresponden a datos mensuales de temperatura máxima y mínima durante los años 1979–2014 en las zonas de mayor probabilidad de presencia de especies como *Thunus Albacares*, *Lutjanus Peru*, *Lutjanus Guttatus*, *Katsuwonus Pelamis*, entre otros. También se obtuvieron datos de abundancia (captura) por especie.

En estudios previos del grupo de investigación se realizó una zonificación del pacífico colombiano, obteniendo 4 zonas de interés [Ver Figura 1], allí se localizan algunos de los bancos de pesca más frecuentados por los pescadores de la costa pacífica colombiana.

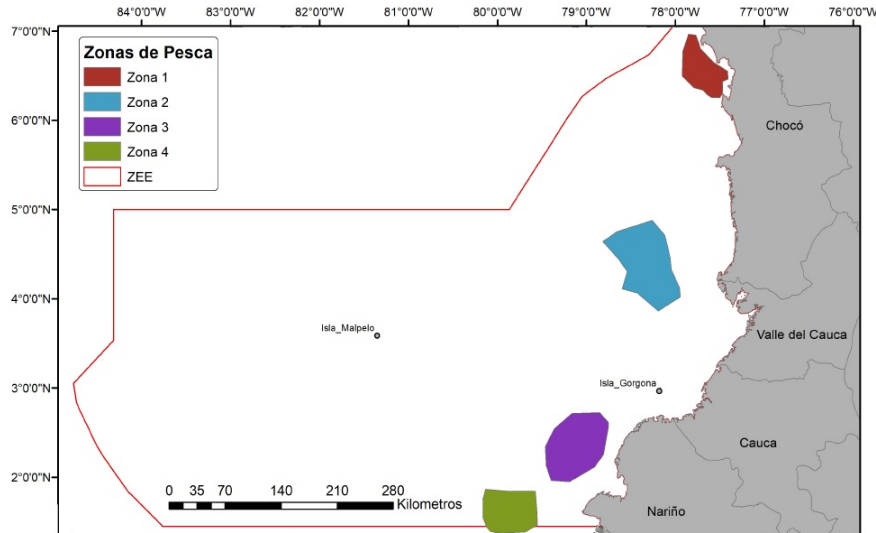


Figura 1: Área de estudio en el Pacífico Colombiano.

En dichas zonas se recogen mediciones relacionadas con la captura como abundancia, variables oceanográficas como clorofila, TSM (Temperatura superficial del mar) y batimetría, variables espaciales como latitud y longitud y variables temporales como año, mes y día. Para determinar en que grado afecta los cambios de temperatura a la abundancia (captura), se realizó de manera muy exploratoria, un análisis sobre dichas variables, debido a que las capturas en la costa Pacífica pueden verse afectadas por diferentes variables, las cuales no siempre son independientes unas de otras [16].

Para determinar las interrelaciones entre las variables y el peso de cada una de ellas en la abundancia de las capturas, se utilizó un análisis por componentes principales con el fin de observar las relaciones de la variable abundancia con las demás variables.

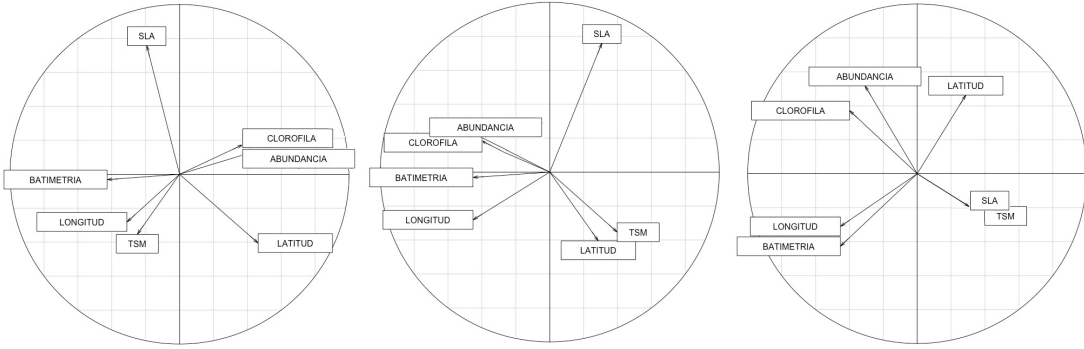


Figura 2: Circulos de correlaciones entre los ejes. Eje 1 vs Eje 2 - Eje 1 vs Eje 3 - Eje 1 vs Eje 4.

El círculo de correlaciones de la [Figura 2] muestra la proyección de las variables iniciales en el nuevo espacio de factores, para dos variables que se encuentran alejadas del centro, se cumple que: si ellas están cercanas unas de otras ellas se encuentran positivamente correlacionadas (*coeficiente de correlación*  $\rho$ , cerca de 1), en el presente caso de estudio, en el primer círculo de correlaciones [Eje 1 vs Eje 2], parece indicarse que las variables, abundancia, clorofila y latitud, se encuentran positivamente correlacionadas, es decir, a medida que una crece la otra variable también lo hace; si por el contrario, las variables iniciales se encuentran en posición ortogonal dentro del círculo de correlaciones, ello indica que éstas no se encuentran correlacionadas (*coeficiente de correlación*  $\rho$ , cercano a 0); para el presente caso, esto sucede con la clorofila y la latitud por ejemplo en el segundo círculo de correlaciones [Eje 1 vs Eje 3]. En los tres círculos de correlación parece indicar que la variable *TSM* (*Temperatura Superficial del Mar*) se encuentra relacionada de manera inversa con la variable *Abundancia*, sin embargo, estas son aproximaciones preliminares

Observando gráficamente de manera preliminar los datos de temperatura promedio durante los años 1979 – 2014 para cada una de las cuatro zonas [Figura 3], se puede observar que el proceso de temperatura, de acuerdo al modelo seguido en [8], puede seguir un modelo estocástico de **Ornstein-Uhlenbeck** con reversión en la media el cual se define así:

$$dT(t) = ds(t) - k(t)[T(t) - s(t)]dt + \sigma(t)dB(t), \quad (8)$$

en donde,

- $s(t) = A + Bt + C\sin(\omega t + \phi)$ , describe la variación estacional media (a menudo denominada ciclo anual o estacionalidad de la temperatura)[8]. En otras palabras,  $s(t)$  es la función de la temperatura media oceánica o la temperatura oceánica esperada, la cual se modela como una oscilación (a través de la función seno) porque este comportamiento es el que presenta la temperatura de acuerdo con la [Figura 3], donde se observa que ésta aumenta–disminuye con respecto al tiempo, observándose su movimiento oscilatorio.

- $T(t)$  es el promedio diario de temperatura<sup>\*\*\*</sup>, es decir:

$$T(t) = \frac{T_{\text{máx}} + T_{\text{mín}}}{2},$$

- $k(t)$  es la velocidad de la reversión media dependiente del tiempo  $t$ , es decir,  $k(t)$  va a modelar qué tan rápido la temperatura  $T(t)$  regresa a la temperatura esperada  $s(t)$ ,
- $\sigma(t)$  es la volatilidad estacional de la temperatura promedio diaria que se asume como estrictamente positiva, medible y acotada.
- El término  $ds(t)$  ajusta la media  $s(t)$  para que a largo plazo la temperatura  $T(t)$  vuelva a la media estacional  $s(t)$ , ya que la media depende de la función dependiente del tiempo. Nótese que al tomar  $dT(t) = T(t_2) - T(t_1)$  y  $ds(t) = s(t_2) - s(t_1)$  entonces por el método de Euler-Maruyama ([9, p. 50]) y la ecuación 8 se tiene que:

$$T(t_2) = (T(t_1) - s(t_1)) + s(t_2) - k(t_1)[T(t_1) - s(t_1)](t_2 - t_1) + \sigma(t)dB(t_2) - B(t_1),$$

donde se observa que la solución permanece “cercana” a  $(T(t_1) - s(t_1))$ , es decir, la temperatura no se aleja lo suficiente de la media estacional  $s(t)$ .

- $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano.

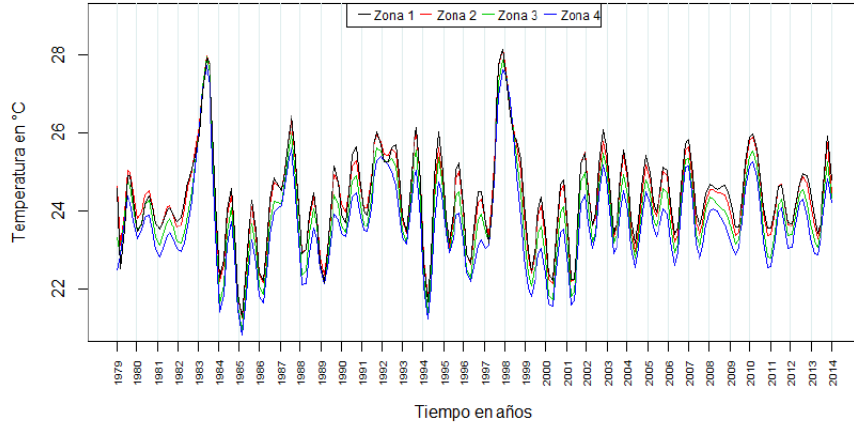


Figura 3: Curva media de temperatura

<sup>\*\*\*</sup>Por temperatura promedio se debe entender como el promedio de la temperatura CALCULADO a partir de los datos, mientras que la temperatura media denota el comportamiento de la temperatura ESPERADO (modelado) de acuerdo a la observación de la figura 3.

El modelo que proponemos para la dinámica de los peces es el siguiente:

La captura *determinísticamente* modelada está dada por:

$$\frac{dP_c(t)}{dt} = \beta P_c(t) H(t) \quad (9)$$

donde,

- $P_c(t) :=$  “Número de peces capturados en el tiempo  $t$ ”.
- $H(t) :=$  “Número de pescadores en el tiempo  $t$ ”.
- $\beta P_c(t) H(t)$ , determina el número de peces capturados por  $H(t)$  pescadores en el tiempo  $t$ . Es decir, el cambio con respecto al tiempo de los peces capturados, son los peces que son capturados por los pescadores en el tiempo  $t$ .

Se modela *determinísticamente* la dinámica de la población de los peces en el océano de la siguiente manera:

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = B - \beta P_c(t) H(t) - M. \quad (10)$$

En el modelo anterior  $B$  denota el número de peces “nuevos”, es decir, el número de peces que inmigran a la región de estudio junto con los peces que nacen durante ese tiempo.  $M$  denota los peces que emigran junto con los peces que fallecen en la región estudio en el tiempo dado.

Con los supuestos mencionados en las ecuaciones (8), (9) y (10) el modelo estocástico que se propone es el siguiente:

$$\begin{cases} dP_m(t) = (B - \beta P_c(t) H(t) - M) dt - \nu dT(t) \\ dP_t(t) = \beta P_c(t) H(t) - \eta dT(t) \\ dT(t) = ds(t) - k(t)[T(t) - s(t)]dt + \sigma(t)dB(t). \end{cases} \quad (11)$$

Las **condiciones iniciales corresponden a:**

- $P_t(0) = P_c(0)H(0)$ , el cual corresponde al número de peces capturados por los  $H(0)$  pescadores que salieron en el día 0.
- $T(0)$ , la temperatura oceánica promedio registrada en el primer día.
- $P_t(0) > 440,000$ . De acuerdo con [4] para 2020 se estima menos de 440000 peces capturados, por lo que necesario suponer que en el mar hay más peces que los que se van a capturar. El valor de  $P_t(0)$  será estimado una vez se tengan estimados los parámetros  $B$ ,  $M$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  y utilizando los valores de  $P_t(0)$ ,  $H(0)$  y tomando  $dt = 1$  (porque los datos fueron tomados mensualmente).

## 4. Objetivos

### 4.1. Objetivo General

Estudiar y analizar por medio de un modelo estocástico con movimiento browniano los efectos de la variación de la temperatura sobre la dinámica de la captura y de la población de la especie *atún barrilete* (*Katzuwonus Pelamis*), a lo largo de la costa del Pacífico Colombiano.

### 4.2. Objetivos Específicos

1. Modelar la temperatura por medio de un modelo de Ornstein-Uhlenbeck impulsado por un Movimiento Browniano, ecuación (8).
2. Modelar la dinámica de los peces que habitan el océano, ecuación (10) y la dinámica de la captura, ecuación (9), utilizando una ecuación diferencial estocástica.
3. Demostrar la existencia y la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas del modelo propuesto en (11).
4. Estimar los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas del modelo propuesto en (11) .
5. Hacer un análisis de sensibilidad para los parámetros  $M$  y  $B$  del modelo (11), determinando los valores críticos, si existen, para los cuales se puede tener una extinción masiva o un incremento de la especie *atún barrilete* (*Katzuwonus Pelamis*), en la región estudiada.

## 5. Cronograma

<b>Actividades</b>	<b>2019</b>							
	<i>Ene</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Abr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Ago</i>
Revisión bibliográfica	x	x						
Desarrollo teórico		x	x	x	x			
Análisis computacional			x	x	x	x		
Redacción del documento	x	x	x	x	x	x	x	
Socialización del trabajo								x

## Referencias

- [1] Luis Barboza, Bo Li, Martin P Tingley, Frederi G Viens, et al. Reconstructing past temperatures from natural proxies and estimated climate forcings using short-and long-memory models. *The Annals of Applied Statistics*, 8(4):1966–2001, 2014.
- [2] Dorje C Brody, Joanna Syroka, Mihail Zervos, et al. Dynamical pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 2(3):189–198, 2002.
- [3] Vincenzo Capasso and David Bakstein. An introduction to continuous-time stochastic processes. *Birkhax user Boston*, page 1, 2005.

- [4] Alexandre Aires-da-Silva Carolina V. Minte-Vera, Mark N. Maunder. Documento sac-09-06 condición del atÚn aleta amarilla en el ocÉano pacÍfico oriental en 2017 y perspectivas para el futuro.
- [5] Liliana Blanco Castañeda, Viswanathan Arunachalam, and Selvamuthu Dharmaraja. *Introduction to probability and stochastic processes with applications*. John Wiley & Sons, 2012.
- [6] Kevern Cochrane, Cassandra De Young, Doris Soto, and Tarûb Bahri. *Consecuencias del cambio climático para la pesca y la acuicultura: visión de conjunto del estado actual de los conocimientos científicos*. FAO, 2014.
- [7] Fabien Dornier and Michel Queruel. Caution to the wind. *Energy & power risk management*, 13(8):30–32, 2000.
- [8] Nelson Christopher Dzupire, Philip Ngare, and Leo Odongo. Lévy process based ornstein-uhlenbeck temperature model with time varying speed of mean reversion. *ADVANCES AND APPLICATIONS IN STATISTICS*, 53(3):199–224, 2018.
- [9] Hamid Reza Erfanian, Mahshid Hajimohammadi, and Mohammad Javad Abdi. Using the euler-maryama method for finding a solution to stochastic financial problems. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, 8(6):48, 2016.
- [10] Narendra S Goel and Nira Richter-Dyn. *Stochastic models in biology*. Elsevier, 2016.
- [11] V Kothandaraman. Air-water temperature relationship in illinois river 1. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, 8(1):38–45, 1972.
- [12] AMM Lindop, T Chen, K Zylich, and D Zeller. A reconstruction of colombia’s marine fisheries catches. *Fisheries Centre Working Paper*, 32, 2015.
- [13] Robert C Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. In *Stochastic Optimization Models in Finance*, pages 621–661. Elsevier, 1975.
- [14] Mario J Miranda and Paul L Fackler. *Applied computational economics and finance*. MIT press, 2004.
- [15] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] V Puentes, FD Escobar, CJ Polo, and JC Alonso. Estado de los principales recursos pesqueros de colombia–2014. *Serie Recursos Pesqueros de Colombia–AUNAP. Oficina de Generación del Conocimiento y la Información, Autoridad Nacional de Acuicultura y Pesca–AUNAP*, 2014.
- [17] Sidney I Resnick. *Adventures in stochastic processes*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] Álvaro Tresierra Tanaka and Claudia Marilia Carrasco Montero. Valorización de opciones reales: modelo ornstein-uhlenbeck. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 21(41):56–62, 2016.
- [19] Christian Thierfelder. The trending ornstein-uhlenbeck process and its applications in mathematical finance. *Mathematical Finance*, 2015.

- [20] J Torralba and M Besada. A stochastic model for the iberoatlantic sardine fishery. global warming and economic effects. *Ocean & Coastal Management*, 114:175–184, 2015.
- [21] Suxin Wang, Shiyu Song, and Yongjin Wang. Skew ornstein–uhlenbeck processes and their financial applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 273:363–382, 2015.
- [22] Dirk Zeller and Daniel Pauly. Reconstruction of marine fisheries catches for key countries and regions (1950-2005). 2007.